الباب الثانى

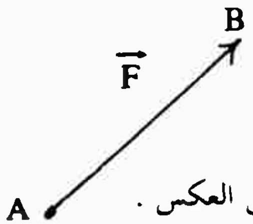
عناصر الإستاتيكا

فى هذا الفصل نعرف العناصر الأساسية والضرورية لكل طالب ومهندس يتعامل مع مادة الإستاتيكا .

2.1 – تعريف القوة :

القوة : هى مؤثر خارجى قادر على حفظ جسم ما فى حالة ثبات أو إحداث تشويهات به ، ويعرف هذا بالتعريف الإستاتيكى للقوة .

والقوة: هى متجه ، ولتحديده بدقة يجب توافر أربعة عناصر – انظر تعريف المتجه بالفصل الأول . شكل 2,1 .



شكل 2.1

(أ) نقطة التأثير وهى A .

(ب) خط عمل القوة AB

(جـ) الاتجاه المحدد للمسار ، وهو من A إلى B وليس العكس .

(د) مقدار أو قيمة القوة وهى $|\vec{F}|$.

سوف نرمز فى هذا الكتاب لمتجه القوة بالرمز $\vec{F}$ ،

والوحدات المستعملة لقياس القوة هى النيوتن ومشتقاته .

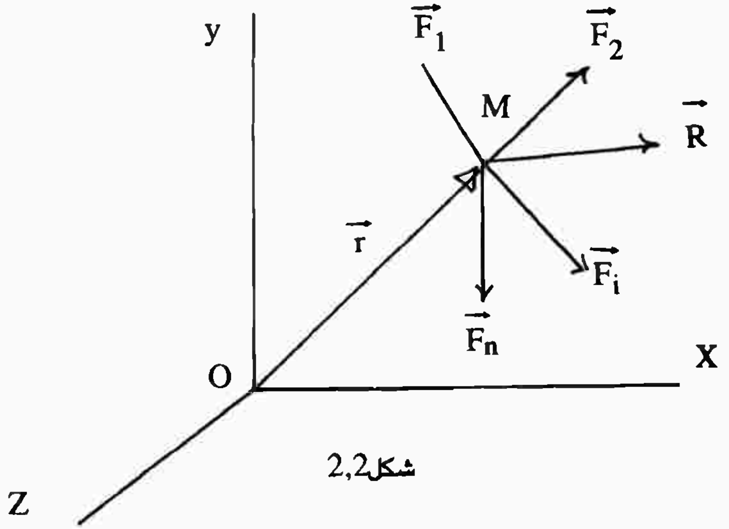
2,2 القوى المتلاقية (المتقاطعة) :

يقال إن مجموعة القوى متلاقية إذا كانت خطوط عملها تتقابل فى نقطة واحدة شكل 2,2 فإذا فرضنا أن لدينا جسيماً مادياً أبعاده صغيرة جداً بالنسبة للأجسام الأخرى المجاورة له فيمكن أن نعتبره فى هذه الحالة نقطة مادية ، ويعرف بأحداثياته

بالنسبة لمجموعة من المحاور . ونعتبر القوى المؤثرة على تلك النقطة المادية قوى متلاقية .

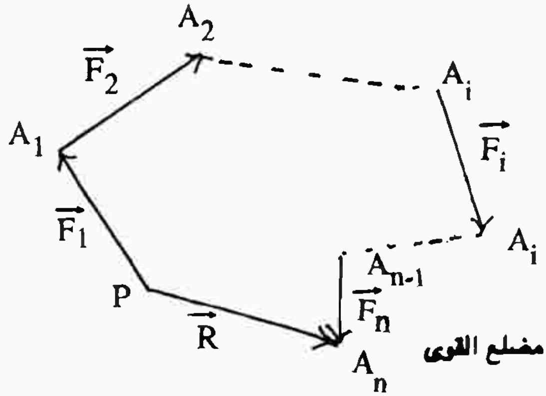
لندرس النقطة المادية M بالشكل 2,2 ، والتى تؤثر عليها مجموعة القوى :

$\vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \ldots\ldots , \vec{F}_i , \ldots\ldots , \vec{F}_n$



شكل2,2

بتطبيق قاعدة جمع المتجهات السابق دراستها فى الفصل الأول يمكننا أن نجد ما يعرف بالمحصلة $\vec{R}$ لتلك المجموعة من القوى شكل 2,3



شكل 2,3 مضلع القوى

الشكل الحاصل عليه من عملية الجمع الاتجاهى يسمى فى هذه الحالة مضلع القوى ، والمحصلة تكون المتجه الواصل ما بين نقطة بداية المضلع P بنقطة النهاية A_n .

وتعرف المحصلة بأنها القوة المكافئة لمجموعة القوى السابق تعريفها ، أو بتعبير آخر هى القوة التى يمكن أن تختزل إليها مجموعة القوى : $\vec{F}_n \longrightarrow \vec{F}_1$

وتكون نقطة تأثيرها هى النقطة المادية M .

ويمكن كتابة المعادلة الاتجاهية التالية :

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_i + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \qquad (2.1)$$

2,21 دراسة تحليلية :

لندرس الآن مجموعة القوى السابقة بطريقة تحليلية ، وذلك بعد أن درسناها بيانياً .

دعنا نعرف تلك القوى بمساقطها على المحاور الثلاثة OX , OY , OZ كما يلى :

$\vec{F}_1 (x_1 , y_1 , z_1 ,) . \vec{F}_2 (x_2 , y_2 , z_2) , \dots , F_i (x_i, y_i, z_i),$

$\vec{F}_n (X_n , Y_n , Z_n).$

ومن دراسة المتجهات بالفصل الأول لدينا :

$$\vec{F}_i = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k} \dots\dots\dots \qquad (2.2)$$

بالتعويض عن $\vec{F}_i$ من المعادلة (2.2) فى المعادلة (2,1) نجد :

$$\vec{R} = (\Sigma X_i) \vec{i} + (\Sigma Y_i) j + (\Sigma Z_i) \vec{k} + \dots\dots \qquad (2.3)$$

يمكن من المعادلة (2.3) أن نستنتج مركبات المحصلة على المحاور الثلاثة :

$$X = \Sigma x_i \quad , \quad Y = \Sigma y_i \quad , \quad Z = \Sigma z_i \dots\dots\dots \qquad (2.4)$$

أما قيمة المحصلة فنحصل عليها عن طريق المعادلة :

$$|\vec{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \quad \text{.........} \quad (2.5)$$

وجيوب تمام اتجاهاتها :

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\vec{R}|}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{|\vec{R}|}, \quad \cos\gamma = \frac{Z}{|\vec{R}|} \quad \text{.........} \quad (2.6)$$

وكما أسلفنا فإن نقطة تأثيرها فى M ، وبذلك تكون عناصرها الأربعة معرفة .

2,22 قوى متلاقية بالمستوى :

تعتبر القوى المتلاقية بالمستوى حالة خاصة ومبسطة من الحالة السابقة ، فإذا افترضنا أن المستوى المعنى هو XOY ، فإن كل المركبات فى اتجاه Z تصبح غير موجودة والمعادلات أعلاه تبسط كما يلى :

$$\vec{R} = X\vec{i} + Y\vec{j} \quad \text{.........} \quad (2.7)$$

حيث :

$$X = X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n, \quad Y = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_n$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{.........} \quad (2.8)$$

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} \quad \text{.........} \quad (2.9)$$

حيث α هى الزاوية التى تصنعها المحصلة مع المحور الأفقى OX .

2,3 عزم قوى بالنسبة لنقطة :

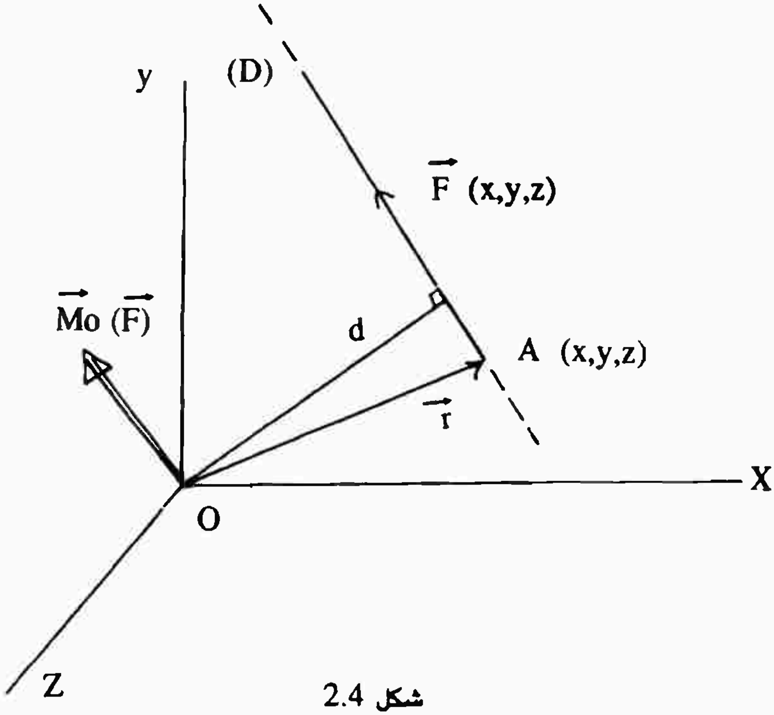
بالإشارة إلى الشكل 2,4 حيث :

$\vec{F}$ = متجه القوة (وهو متجه منزلق) .

(D) = خط عمل المتجه المنزلق $\vec{F}$.

A = نقطة تأثير القوة $\vec{F}$.

O = النقطة المراد حساب عزم القوة $\vec{F}$ حولها .



شكل 2.4

تعريف : يعرف عزم القوة $\vec{F}$ حول النقطة O بأنه
حاصل الضرب الاتجاهى للمتجهين $\vec{r}$ و $\vec{F}$:

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \wedge \vec{F} \quad \text{.................................} \quad (2.10)$$

ويكون مساوياً لمساحة متوازى الاضلاع المبنى على المتجهين $\vec{r}$ و $\vec{F}$ ،

ويعرف المتجه $\vec{r}$ بأنه متجه الموضع : $\vec{r} = \vec{OA}$

خواص العزم :

- متجه العزم $\overrightarrow{M_0}$ هو متجه متصل بالنقطة O .
- يكون عموديا على المستوى المكون $\overrightarrow{r}$ و $\overrightarrow{F}$.
- قيمة هذا العزم يمكن أن تحسب من المعادلة التالية :

$$|\overrightarrow{M_0}| = |\overrightarrow{r}| . |\overrightarrow{F}| . \sin(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{F}) = F . d \qquad (2.11)$$

حيث d هى المسافة العمودية من النقطة O إلى المحور (D) .

- اتجاه العزم يكون موجباً بحيث يمكن تطبيق قاعدة اليد اليسرى على المتجهات الثلاثة $\overrightarrow{r}$ و $\overrightarrow{F}$ و $\overrightarrow{M_o}$ على الترتيب .
- يتضح من الشكل أن العزم يكون صفراً إذا كان (D) يمر بالنقطة O حيث يصبح المتجه $\overrightarrow{r}$ مساويا صفراً .

2.31 المعادلة التحليلية للعزم :

بفرض أن :

$$\therefore \quad \overrightarrow{F} = X\,\overrightarrow{i} + Y\,\overrightarrow{j} + Z\,\overrightarrow{k}$$

$$\overrightarrow{r} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{M_0} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

$$= (yZ - zY)\,\overrightarrow{i} + (zX - xZ)\,\overrightarrow{j} + (xY - yX)\,\overrightarrow{k} \qquad \ldots\ldots\ldots \quad (2.12)$$

ومنها نجد أن مركبات $\overrightarrow{M_0}$ على المحاور الثلاثة OZ, OY, OX على الوجه

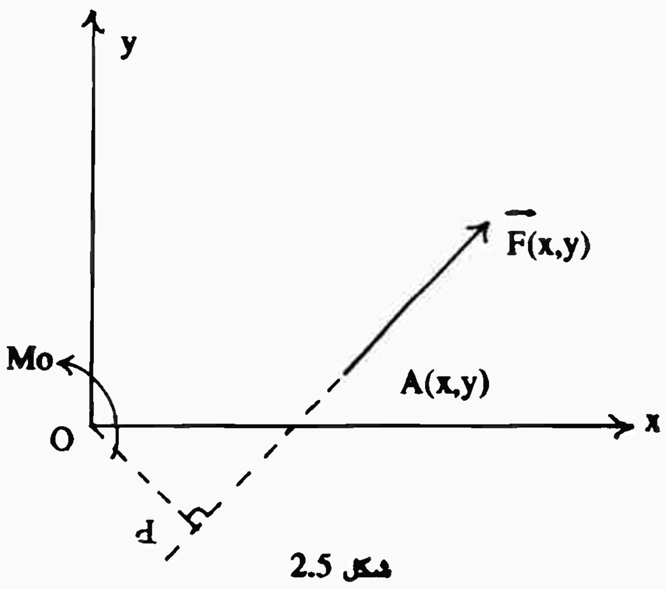
التالى :

$$\left.\begin{aligned} M_x &= yZ - zY \\ M_y &= zX - Zx \\ M_z &= xY - yX \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

فى الحالة الخاصة والتى تكون فيها القوى بالمستوى XOY نجد أن (شكل (2.5) :

$$\vec{M}_0 = M_z\ \vec{K} = (xY - yX)\ \vec{K} \qquad (2.14)$$

$$|\vec{M}_0| = |\vec{M}_z| = xY - yX = \pm\ Fd \qquad (2.15)$$

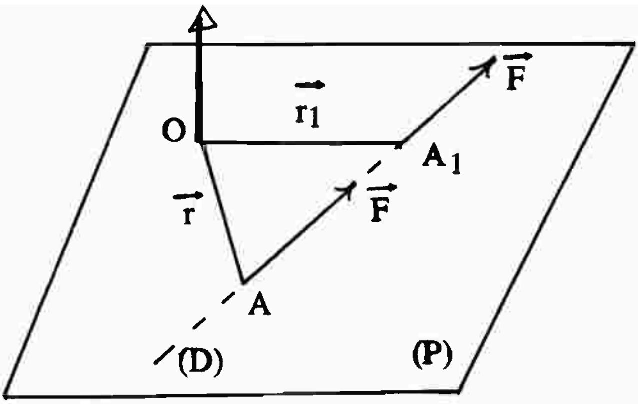


شكل 2.5

ويكون هذا العزم موجباً إذا كان من X إلى Y وسالباً فى الاتجاه من Y إلى X .

نظرية : عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة لنقطة ما لا يتوقف على نقطة تأثير المتجه $\vec{F}$

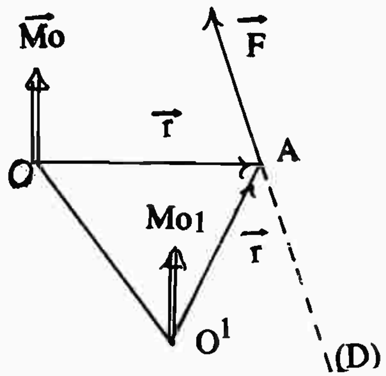
الإثبات (شكل 2,6) .



شكل 2,6

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{F} = (\vec{r} + \vec{AA'}) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} + \vec{AA} \wedge \vec{F}$$
$$= \vec{r} \wedge \vec{F} + \vec{o} = \vec{M}_o \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(2.15)}$$

العلاقة بين العزمين حول نقطتين مختلفتين $\vec{M}_o$ و $\vec{M}_{O'}$ للقوة $\vec{F}$ ، انظر شكل 2,7 .



لتكن النقطتان هما O و O . والمطلوب إيجاد العلاقة ما بين عزم القوة $\vec{F}$ حول O ، وبين عزم نفس القوة حول `O .

$$\vec{M}_{o'} = \vec{r'} \wedge \vec{F} = (\vec{o} + \vec{r}) \wedge \vec{F}$$
$$= \vec{o'o} \wedge \vec{F} + \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M}_o + \vec{o'o} \wedge \vec{F} \qquad \ldots\ldots\ldots \text{(2.16)}$$

إذا عزم القوة $\vec{F}$ بالنسبة للنقطة O' يكون مساوياً لحاصل جمع العزم حول حول النقطة O ، والعزم حول O' لقوة تساوى $\vec{F}$ ولكن نقطة تأثيرها هى O .

2.32 المحصلة والعزم الناتجين عن مجموعة من القوى :

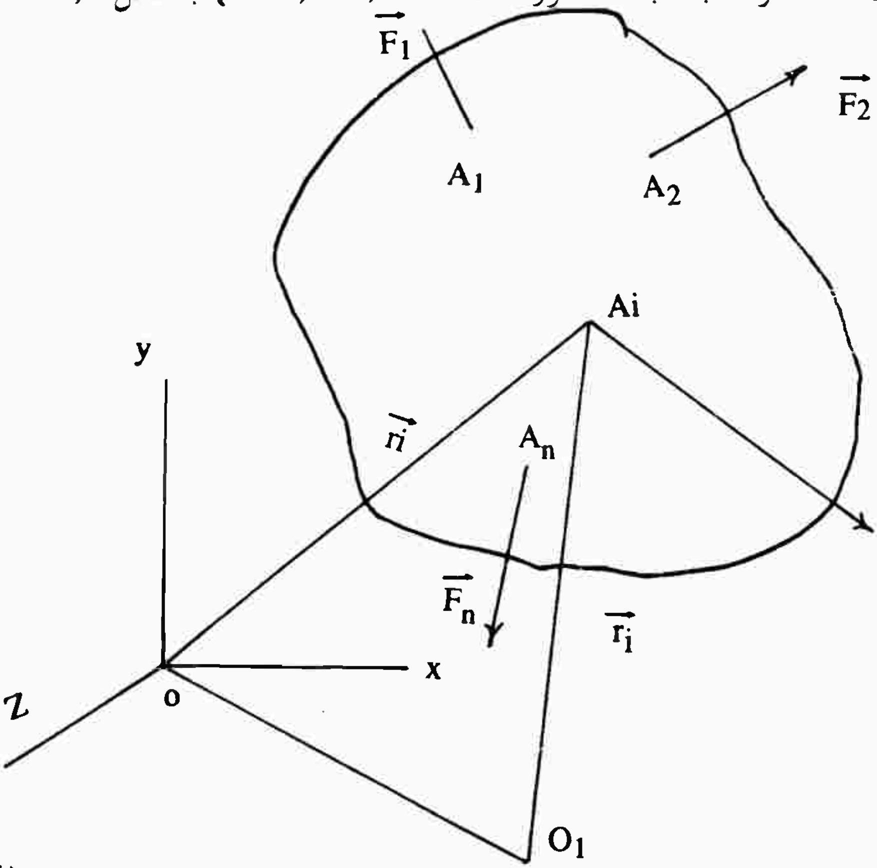
لندرس مجموعة القوى التى تؤثر على الجسم المادى ولتكن :

$$\vec{F}_1 \;,\; \vec{F}_2 \;, \ldots\ldots ,\; \vec{F}_i \;, \ldots\ldots ,\; \vec{F}_n$$

ونقاط تأثير هذه المجموعة هى على التوالى : $A_1 , A_2 , \ldots\ldots , A_i , \ldots\ldots , A_n$

ومتجهات الموضع لها تكون : $\vec{r}_1 \;,\; \vec{r}_2 \;, \ldots\ldots ,\; \vec{r}_i \;, \ldots\ldots ,\; \vec{r}_n$

وذلك كله معرف بالنسبة للمحاور الثلاثة OZ, OY, OX كما بالشكل 2,7



شكل 2.7 جسم مادى تؤثر عليه مجموعة من القوى

ويمكن لهذه المجموعة من القوى بالشكل 2,7 أن تعرف بمتجهين اثنين فقط : محصلتها العامة وعزم هذه القوى بالنسبة لنقطة ما ولتكن O .

فالمحصلة العامة لها هى عبارة عن متجه حر يساوى - كما أسلفنا - المجموع الاتجاهى لمجموعة القوى أى :

$$\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_n} + \dots + \vec{F_i} + \dots\dots + \vec{F_n}$$

أما العزم المحصل بالنسبة لنقطة O فهو متجه متصل ، نقطة الأصل له O ، ويساوى مجموع عزوم القوى حول النقطة O أى :

$$\vec{M_0} = \vec{r_1} \wedge \vec{F_1} + \vec{r_2} \wedge \vec{F_2} + \dots + \vec{r_i} \wedge F_i + \dots\dots + \vec{r_n} \wedge \vec{F_n} \tag{1}$$

2.33 المعادلة التحليلية للمحصلة والعزم الناتجين عن مجموعة القوى :

يمكن تعريف متجهى القوة $\vec{F_i}$ والموضع $\vec{r_i}$ بالنسبة للمحاور OZ, OY, OX على الصورة :

$$\vec{F_i} = X_i \vec{i} + Y_i \vec{j} + Z_i \vec{k} \tag{2}$$

$$\vec{r_i} = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$$

وينتج من هذا أن المحصلة تصبح :

$$\vec{R} = \Sigma \vec{F_i} = (\Sigma x_i) \vec{i} + (\Sigma Y_i) \vec{j} + (\Sigma Z_i) \vec{k}$$

وتكون مركباتها :

$$X = \Sigma X_i ,\; Y = \Sigma Y_i ,\; Z = \Sigma Z_i$$

وبالنسبة للعزم فنجد :

$$\vec{M}_0 = \Sigma \, \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_i & y_i & z_i \\ X_i & Y_i & Z_i \end{vmatrix}$$

$$= [\, \Sigma (y_i Z_i - Y_i z_i)] \, \vec{i} + [\Sigma (z_i X_i - x_i Z_i)] \, \vec{j}$$

$$+ [\, \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i)] \, \vec{k}$$

ويتضح من ذلك أن مركبات العزم هى :

$$M_x = \Sigma (y_i Z_i - z_i Y_i)$$

$$M_y = \Sigma (z_i X_i - x_i Z_i)$$

$$M_z = \Sigma (x_i Y_i - y_i X_i)$$

نحاول الآن إيجاد العلاقة ما بين المتجهين $\vec{R}$ و $\vec{M}_O$:

حاصل ضرب العزم $\vec{M}_O$ بالمحصلة $\vec{R}$ لمجموعة القوى يكون ثابتاً ، وذلك لجميع النقط .

الإثبات :

بتطبيق العلاقة (2.16) نجد :

$$\vec{M}_o = \vec{M}_0 + \vec{\grave{o}o} \wedge \vec{R}$$

حيث O و O موضحتان بالشكل 2,7 وهما أى نقطتان بالفراغ .

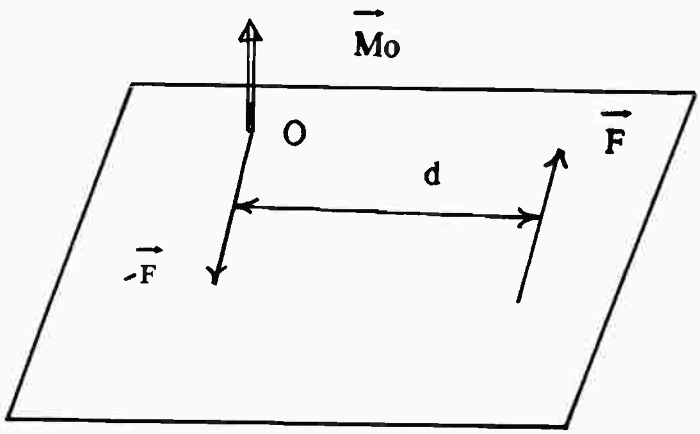
نضرب المعادلة السابقة فى $\vec{R}$ قياسياً لنحصل على :

$$\vec{M}_o \cdot \vec{R} = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} + (\vec{oo} \wedge \vec{R}) \cdot R = M_0 \cdot \vec{R} + 0$$

$$\vec{M}_o \cdot \vec{R} = \vec{M}_0 \cdot \vec{R} = \text{ثابت} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.18)$$

2.4 الازدواج :

يعرف الازدواج بأنه قوتان متوازيتان لهما نفس القيمة ، ولكن اتجاههما متضادان ، وبناء على هذا التعريف (شكل 2,8) نحصل على العلاقات التالية :



شكل 2,8

$$\vec{R} = \vec{F} + (- \vec{F}) = \vec{0}$$

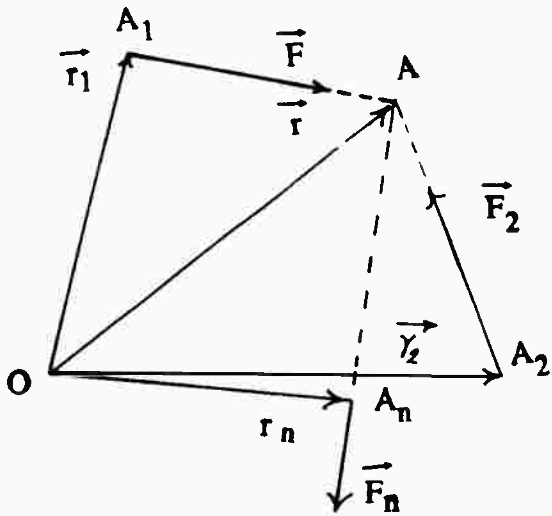
$$\vec{M}_0 = \vec{M}_0 (- F) + \vec{M}_0 (\vec{F}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.18)$$

$$= 0 + \vec{M}_0 (\vec{F})$$

2.5 نظرية فارينيون :

العزم الناتج عن مجموعة من القوى المتلاقية بالنسبة لنقطة O يساوى عزم محصلة هذه القوى حول نفس النقطة :

الإثبات : شكل 2.9



شكل 2,9

لتكن مجموعة القوى المتلاقية فى النقطة A :

$$\vec{F_1}\ ,\ \vec{F_2}\ ,\ \ldots\ ,\ \vec{F_n}$$

وبناء على المعادلتين (2.1) , (2.17) نجد :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i} \quad , \quad \vec{M_0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r_i} \wedge \vec{F_i}$$

$$\vec{M_0} = (\vec{r_1} \wedge \vec{F_1}) + (\vec{r_2} \wedge \vec{F_2}) + \ldots + (\vec{r_n} \wedge \vec{F_n})$$

$$= (\vec{r} + \vec{AA_1}) \wedge \vec{F_1} + (\vec{r} + \vec{AA_2}) \wedge \vec{F_2} + \ldots + (\vec{r} + \vec{AA_n}) \wedge \vec{F_n}$$

$$\vec{M}_o = (\vec{r} \wedge \vec{F}_1) + (\vec{r} \wedge \vec{F}_2) + \ldots + (\vec{r} \wedge \vec{F}_n) + \vec{O}$$

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + F_n) = \vec{r} \wedge \vec{R} \quad \ldots\ldots (2.20)$$

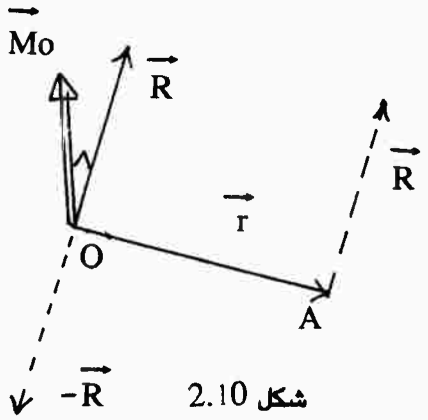
2.6 اختزال مجموعة من القوى حول نقطة :

نقصد بعملية اختزال القوى هو تحويلها إلى أبسط صورة لها ، وذلك بالنسبة لنقطة ، ولتكن النقطة O ؛ بالشكل 2.10 .

يلاحظ أن مجموعة القوى أعلاه يمكن أن تمثل عند النقطة A بمحصلتها فقط ، وهى بالطبع أبسط صورة لهذه القوى ، ولكن عند النقطة A . فإذا أريد نقل هذه المحصلة من النقطة A إلى النقطة O فلابد أن تنقل بقيمتها $\vec{R}$ بالإضافة إلى عزم $\vec{M}_o$ حيث :

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{R} \quad \ldots\ldots (2.21)$$

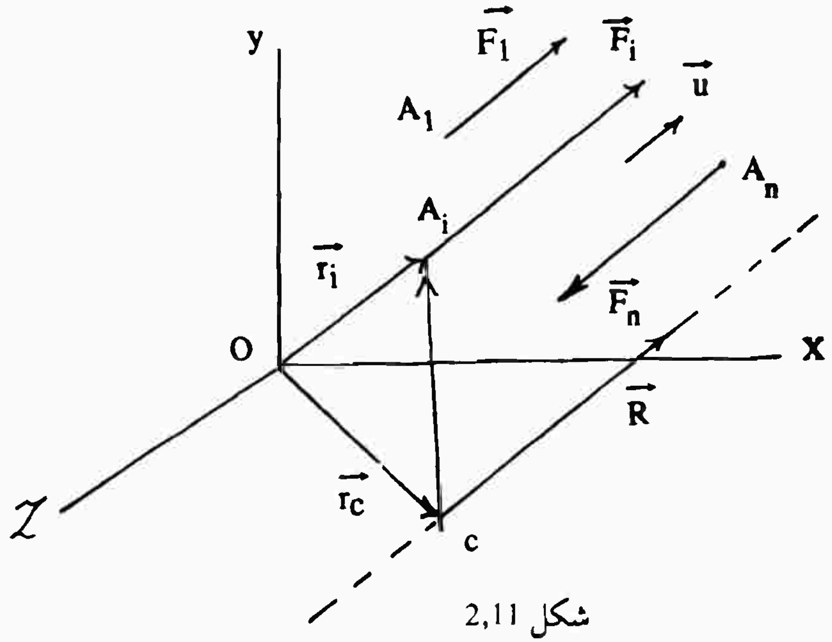
و $\vec{r}$ هو المتجه الواصل من النقطة O إلى A انظر شكل 2.10 .



شكل 2.10

$\vec{M}_O \cdot \vec{R} = O$ فلابد أن يكون المتجهان متعامدين .

2.7 القوى المتوازيـــة :



شكل 2,11

لتكن مجموعة القوى المتوازية :

$$\vec{F_1}\ ,\ \vec{F_2}\ ,\ \ldots .\ ,\ \vec{F_i}\ ,\ \ldots .\ ,\ \vec{F_n}$$

حيث نقاط تأثيرها هى على التوالى :

$$\vec{A_1}\ ,\ \vec{A_2}\ ,\ \ldots .\ ,\ \vec{A_i}\ ,\ \ldots .\ ,\ \vec{A_n}$$

ويمكننا أن نكتب :

$$\vec{F_i} = |\vec{F_i}| .\ \vec{U}$$

وحيث إن :

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F_i}$$

$$= \quad \vec{R} = \Sigma |\vec{F_i}| .\ \vec{U} = \vec{U}\ (\ \Sigma |\vec{F_i}|) = \vec{U}\ (\ \Sigma\ \vec{F_i}\ )$$

$$\vec{R} = R\ \vec{U} \qquad 2,21$$

أى أن المحصلة لهذه القوى المتوازية تكون مساوية لمجموع القوى جبرياً ، وهى موازية لاتجاهات هذه القوى حيث إن متجه الوحدة $\vec{U}$ موازى لهذه القوى انظر شكل 2,11 ، ويمكن حساب عزوم تلك القوى حول النقطة O بالشكل 2,11 كما يلى :

$$\vec{M}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \wedge F_i \vec{U}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_i \vec{r}_i \wedge \vec{U}_i$$

$$\vec{M}_0 = \Sigma F_i \vec{r}_i) \wedge \vec{U} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.22)$$

والعزم الناتج عن هذه القوى وهو $\vec{M}_o$ يكون عمودياً على مجموع القوى :

$$\vec{M}_0 \perp \vec{U} \rightarrow \vec{M}_0 \perp \vec{R} \rightarrow \vec{M}_0 \cdot \vec{R} = 0$$

وحيث إن حاصل الضرب : $\vec{M}_o \cdot \vec{R} = O$ فإنه يمكننا تطبيق النظريــة النظرية السابقة (فارينيون) .

هذا فضلاً عن كون مجموع القوى السابقة يمكن استبدالها بقوة واحدة وهى المحصلة $\vec{R}$ الموازية للقوى . تطبق النظرية بالنسبة للنقطة C وهى نقطة تأثير المحصلة $\vec{R}$

$$\vec{M}_c (\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{CA}_i \wedge \vec{F}_i = 0$$

$$\Sigma (\vec{r}_i - \vec{r}_c) \wedge \vec{F}_i = \Sigma \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i - \Sigma \vec{r}_c \wedge \vec{F}_i$$

$$= \Sigma \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i - \vec{r}_c \wedge \Sigma \vec{F}_i$$

$$= \Sigma \vec{r}_i \wedge F_i \vec{U} - \vec{r}_c \wedge \Sigma F_i \vec{U}$$

$$= (\sum F_i \vec{r_i}) \wedge \vec{U} - \vec{r_c} (\Sigma F_i) \wedge \vec{U}$$

$$= [(\sum \vec{F_i} \wedge \vec{r_i}) - \vec{r_c} (\Sigma \vec{F_i})] \wedge \vec{U} = \vec{O}$$

والحل الجزئى لهذه المعادلة هو :

$$\Sigma F_i \vec{r_i} - \vec{r_c} . (\Sigma F_i) = \vec{O}$$

ومنها يمكن أن نحصل على المتجه $\vec{r_c}$:

$$\vec{r_c} = \frac{\Sigma F_i \vec{r_i}}{\Sigma F_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.23)$$

النقطة C تعرف بمركز القوى المتوازية ، وهى كما أسلفنا نقطة تأثير المحصلة $\vec{R}$
وتكون إحداثيات $\vec{r_c}$ بالنسبة للمحاور الثلاثة كما يلى :

$$X_c = \frac{\Sigma F_i X_i}{\Sigma F_i}$$

$$Y_c = \frac{\Sigma F_i Y_i}{\Sigma F_i} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.24)$$

$$Z_c = \frac{\Sigma F_i Z_i}{\Sigma F_i}$$

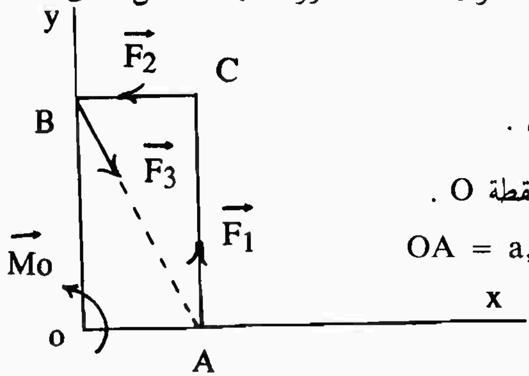
والعلاقات (2.24) تعتبر هامة جداً فى التطبيقات الهندسية كما سيلاحظ القارىء فى الفصول الأخيرة من هدا الكتاب .

2.8 أمثلة محلولة :

١ – لتكن القوى فى المستوى XOY ذات القيم التالية :

$$|\vec{F_1}| = 3F \;,\; |\vec{F_2}| = 2F \;,\; |\vec{F_3}| = \sqrt{5}\, F$$

باعتبار أن اتجاهات هذه القوى الثلاث معروفة كما بالشكل التالى :



المطلوب حساب :

(أ) المحصلة العامة لهذه القوى .

(ب) العزم الناتج عنها حول النقطة O .

علماً بأن : $OA = a,\; OB = 2a$

الحـــل :

بتطبيق المعادلة (2.7) :

$$\vec{R} = X\,\vec{i} + Y\,\vec{j}$$

حيث :

$$X = \Sigma X_i = O - 2F + F = -F$$

$$Y = \Sigma Y_i = 3F + O - 2F = F$$

ومن المعادلة (2.8) نجد :

$$|R| = \sqrt{(-F)^2 + (F)^2} = \sqrt{2}\, F$$

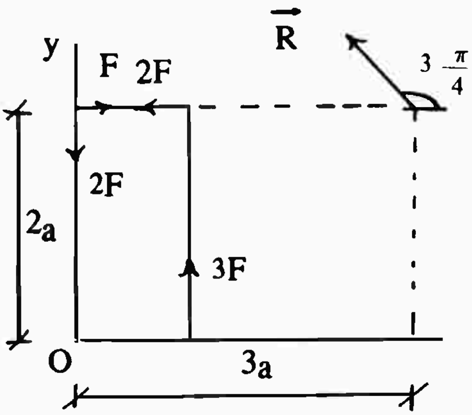
واتجاه $\vec{R}$ مع المحور الأفقى يمكن الحصول عليه من (2.9) :

$$\tan\alpha = \frac{Y}{X} = \frac{F}{-F} = -1 \;\longrightarrow\; \alpha = \frac{3}{4}\pi = 135^\circ$$

وحيث إن $\overrightarrow{R}$ فى المستوى XOY فيمكن إيجاد نقطة تأثيرها بتطبيق المعادلتين الأولى والثانية من (2.24) لنجد : (انظر الشكل أسفله) .

$$X_c = \frac{\Sigma F_i X_i}{\Sigma F_i} = \frac{(2F)_0 - 3F(a)}{2F - 3F} = 3a$$

$$Y_c = \frac{\Sigma F_i Y_i}{\Sigma F_i} = \frac{2F(2a) - F(2a)}{2F - F} = 2a$$



احداثيات المحصلة R

(ب) لإيجاد عزم هذه القوى حول O يمكن أن نطبق (2.14) .

$$\overrightarrow{M_o} = M_z \overrightarrow{K} = (xy - yX) \overrightarrow{K}$$

وذلك علماً بأن :

$$\overrightarrow{r} = x \overrightarrow{i} + y \overrightarrow{j} = 3a \overrightarrow{i} + 2a \overrightarrow{j}$$

$$\overrightarrow{R} = X \overrightarrow{i} + Y \overrightarrow{j} = -F \overrightarrow{i} + F \overrightarrow{j}$$

$$\vec{M}_0 = (3aF - 2a(-F))\,\vec{K} = 5Fa\,\vec{K}$$

$$|M_0| = 5Fa$$

٢ - علماً بأن $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ قوتان تؤثران فى النقطة O . حيث :

$$\vec{F}_1 = 2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} - 4\,\vec{K} \;, \quad \vec{F} = i - \vec{j} + 5\,\vec{K}$$

المطلوب إيجاد ما يلى :

(أ) قيمة كل من $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$.

(ب) قيمة المحصلة ومركباتها واتجاهها .

(جـ) عزم هذه المحصلة بالنسبة للنقطة : A(2, - 1,3)

(د) الزاوية التى يصنعها $\vec{R}$ مع المتجه $\vec{OA}$.

الحـــــل :

(أ) يمكن الحصول على قيم كل من $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ بتطبيق المعادلة (2.5) :

$$|\vec{F}_1| = \sqrt{(2)^2 + (4)^2 + (-4)^2} = 6$$

$$|\vec{F}_2| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (5)^2} = 5.2$$

(ب) للـــــحصول على $\vec{R}$ نستعمـــــل المعادلـــتين (2.4) , (2.5) :

$$X = 2 + 1 = 3 \;, \quad Y = 4 - 1 = 3 \;, \quad Z = (-4) + 5 + 1$$

$$\therefore \vec{R} = 3\,\vec{i} + 3\,\vec{j} + \vec{K}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2 + (1)^2} = 4.36$$

المعادلات (2.6) تعطى اتجاهات المحصلة :

$$\cos \alpha = \frac{X}{|\vec{R}|} = \frac{3}{4.36} = 0.688 \rightarrow \alpha = 46{,}52°$$

$$\cos \beta = \frac{Y}{|\vec{R}|} = \frac{3}{4.36} = 0.688 \rightarrow \beta = 46{,}52°$$

الزاوية β تساوى α فى القيمة ولكنها كما هو معلوم الزاوية التى تصنعها المحصلة مع المحور OY فى حين أن α تكون مع OX وبالتالى فهما زاويتان مختلفتان .

$$\cos \gamma = \frac{Y}{|\vec{R}|} = \frac{1}{4.36} = 0.229 \rightarrow \gamma = 76{,}74°$$

(جـ) العزم $\vec{M}_A$ يمكن الحصول عليه بتطبيق (2.12) :

$$\vec{M}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (1 + 9)\,\vec{i} + (-9 + 2)\,\vec{j} + (-6 - 3)\,\vec{k}$$

$$M_A = 10\,\vec{i} - 7\,\vec{j} - 9\,\vec{k}$$

وقيمة $\vec{M}_A$ من المعادلة (2.5) تكون :

$$|\vec{M}_A| = \sqrt{(-10)^2 + (7)^2 + (9)^2} = 15{,}16$$

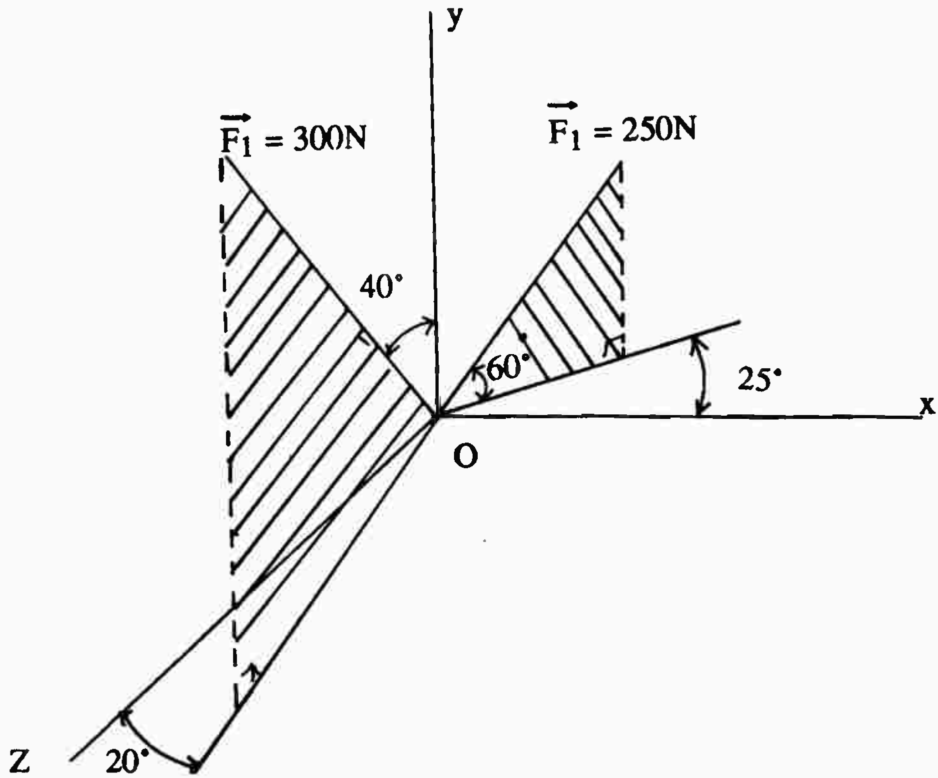
(د) لإيجاد الزاوية ما بين $\vec{R}$ و $\vec{OA}$ نعلم أن :

$$|\vec{M}_A| = |\vec{OA}|.|\vec{R}|\sin \Theta$$

$$\therefore 15{,}16 = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (3)^2}\,(4{,}36)\,\sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{15{,}16}{(3{,}74)(4{,}36)} = 0{,}9297 \rightarrow \theta = 68{,}39$$

٣ - أوجد محصلة القوتين $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ بالشكل التالى المطلوب كذلك إيجاد الزاويا التى تصنعها تلك المحصلة مع المحاور الثلاثة .



الحـــــل :

لإيجاد المحصلة لهاتين القوتين نحاول أن نكتبهما بدلالة مركباتهما ، أى :

$$\vec{F_i} = X_i \vec{i} + Y \vec{j} + Z_i \vec{k}$$

ويمكن الوصول لتلك الصورة بتطبيق قواعد تحليل المتجهات بالفصل الأول من هذا الكتاب فنجد أن :

$$X_1 = |\vec{F_1}| \, . \cos 60° \, . \cos 25° = 250\,(0.5)(0.906) = 113{,}29 \text{ N}$$

$$Y_1 = |\vec{F_1}| \, . \cos 30° = 250\,(0.866) = 216.51 \text{ N}$$

$$Z_1 = |\vec{F_1}| \, . \text{Cos } 60° \, . \text{Cos } (90+25) = 250\,(0{,}5)(-0{,}423) = -52{,}83 \text{ N}$$

$$\therefore \vec{F_1} = 113{,}29\,\vec{i} + 216{,}51\,\vec{j} + (-52{,}83)\,\vec{k}$$

$$X_2 = |\vec{F_2}| \, . \text{Cos } 50° \, . \text{Cos } 70° = 300\,(0{,}643)(0.432) = 65{,}95 \text{ N}$$

$$Y_2 = |\vec{F_2}| \, . \text{Cos } 40° = 300\,(0{,}766) = 229{,}81 \text{ N}$$

$$Z_2 = |\vec{F_2}| \, . \text{Cos } 50° \, . \text{Cos } 20° = 300\,(0{,}643)(0.94) = 181{,}20 \text{ N}$$

$$\therefore \vec{F_2} = 65{,}95\,\vec{i} + 229{,}81\,\vec{j} + 181{,}21\,\vec{k}$$

وبتطبيق المعادلة (2.3) يمكن إيجاد المحصلة :

$$\vec{R} = 179{,}24\,\vec{i} + 446{,}32\,\vec{j} + 128{,}28\,\vec{k}$$

وقيمتها من (2.5) :

$$|\vec{R_1}| = \sqrt{(179{,}24)^2 + (446{,}32)^2 + (128{,}38)^2} = 497{,}805 \text{ N}$$

أما اتجاهات $\vec{R}$ فهى مباشرة من (2.6) :

$$\text{Cos } \alpha = \frac{179{,}24}{497{,}805} = 0{,}36 \longrightarrow \alpha = 68{,}9°$$

$$\text{Cos } \beta = \frac{446{,}32}{497{,}805} = 0{,}897 \longrightarrow \beta = 26{,}29°$$

$$\text{Cos } \gamma = \frac{128{,}38}{497{,}805} = 0{,}258 \longrightarrow \gamma = 75{,}D5°$$