الباب الثالث

الاتـــزان

3.1 اتزان نقطة مادية حـــرة :

تعريف : النقطة المادية أو الجزىء من المادة هى جسم صغير جداً يمكن إهمال أبعاده ويحدد موقعه بواسطة إحداثياته الثلاثة .

فإذا فرضنا أن هناك نقطة مادية واقعة تحت تأثير مجموعة من القوى الخارجية

$$\vec{F}_1 , \vec{F}_2 , \ldots , \vec{F}_i , \ldots \vec{F}_n$$

فإن هذه القوة يمكن أن ينشأ عنها إزاحة للجسم أو دوران له .

والإزاحات تكون فى اتجاه خط عمل القوة المؤثرة ، أما الدورانات فإنها تنشأ عن عزم هذه القوى حول نقطة ما ، ويكون أيضاً الدوران حول نفس النقطة (المحور) .

3.2 توازن الإزاحات :

لكى يحدث توازن إزاحات النقطة المادية فيجب أن تكون محصلة القوى المؤثرة عليها صفراً ، أى :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{R} = \vec{0} \qquad \ldots\ldots (3.1)$$

والمعادلة (3.1) يمكن كتابتها بالنسبة للمحاور الثلاثة OX , OY , OZ كما يلى :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \vec{X}_i = 0 , \quad Y = \sum_{i=1}^{n} \vec{Y}_i = 0 ,$$

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \vec{Z}_i = 0 \qquad \ldots\ldots (3.2)$$

المعادلات (3.2) تعرف بمعادلات الاتزان بالنسبة للإزاحات .

وتختزل المعادلات (3.2) إلى معادلتين فقط فى حالة قوى فى المستوى . فمثلاً إذا كانت القوى فى المستوى XOY فإننا نجد :

$$X = \sum_{i=1}^{n} X_i = 0 , \quad Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.3)$$

3.3 تــوازن الدورانات :

كما سبق فإن الدورانات تنشأ عن عزوم القوى حول نقطة ، فإذا افترضنا أن هذه النقطة هى 0 وهى نقطة أصل المحاور الثلاثة OX , OY , OZ فلحدوث الاتزان يجب أن يكون مجموع العزوم لكل القوى حول 0 مساوياً للصفر ، وهذا يمكن كتابته فى المعادلة :

$$\vec{M}_0 = \vec{M}_x + \vec{M}_y + \vec{M}_z = 0$$

$$\vec{M}_0 = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.4)$$

وهذه المعادلة تصبح بالنسبة للمحاور الثلاثة كما يلى :

$$\left.\begin{aligned} M_y &= \sum_{i=1}^{n} (Z_i x_i - z_i X_i) = 0 \\ M_x &= \sum_{i=1}^{n} (y_i Z_i - z_i Y_i) = 0 \\ M_z &= \sum_{i=1}^{n} (x_1 Y_i - X_i y_i) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.5)$$

وفى حالة وجود القوى فى المستوى XOY مثلاً يكون شرط اتزان الدورانات هو :

$$M_{/} = \sum_{i=1}^{n} (x_i Y_i - X_i y_i) = 0 \qquad (3.6)$$

شروط الاتزان الكاملة تكون تامة فى حالة تحقيق المعادلات (3.2) , (3.5) إذا كانت القوى فى الفراغ (ست معادلات) .

ويكتفى بتحقيق المعادلات (3.3) , (3.6) فى حالة القوى بالمستوى (ثلاثة شروط) .

3.4 اتزان نقطة مادية معرضة لاتصال ما (بدون احتكاك) :

تعريف : يقال إن نقطة مادية معرضة للاتصال إذا ما كانت مجبرة على البقاء على منحنى ما ، أو سطح مادى أملس ، والقوى المؤثرة على النقطة المادية فى هذه الحالة تكون :

3.41 قوى خارجية فعالة :

يقصد بالقوى الخارجية الفعالة مجموعة القوى (قوة أو عزم) التى تؤدى إلى إزاحة أو دوران الجسم ، أى هى القوى التى تقوم بالفعل ، ويمكن تصنيف تلك القوى الخارجية كما يلى :

قوة تأثير مباشرة (قوة مركزة) أو حمل ، ويمكن تقسيم الأحمال إلى :

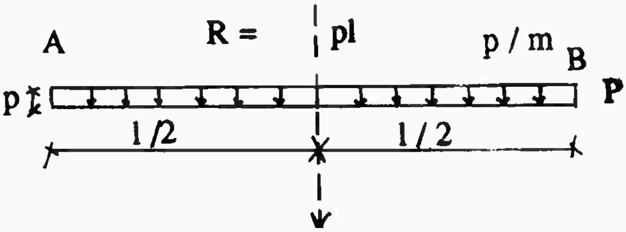
١ – قوى الحجوم مثل أوزان الأجسام .

٢ – قوى سطحية كالقوى الخارجية التى تؤثر على سطوح الأجسام مثل ضغط الماء أو التربة أو الثلوج .... الخ .

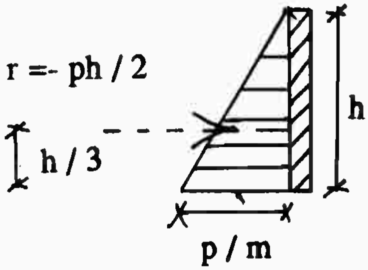
والقوى السطحية يمكن بدورها أن تقسم إلى عدة أنواع :

(أ) قوى موزعة توزيعاً منتظماً على الوحدة الطولية للسطح ، حيث تكون محصلتها $\overrightarrow{R}$ فى المنتصف ، شكل 3,1 .

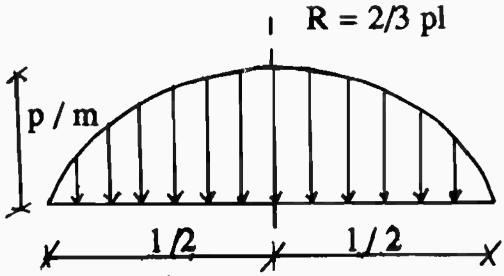
(ب) قوى توزيعها متغير خطياً أو تبعاً لقطع مكافىء أو شبه منحرف .... إلخ .
شكل 3,2 . أحمال متغيرة تبعاً لأشكال هندسية .



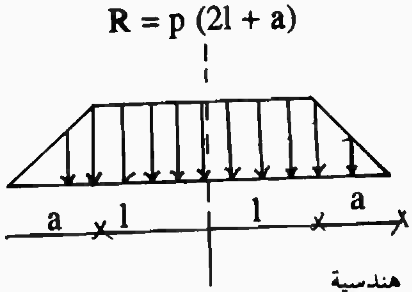
حمل موزع توزيعاً منتظماً على الوحدة الطولية



(أ) حمل متغير خطياً



(ب) حمل يتغير تبعاً لقطع مكافىء



شكل 3.2 أحمال متغيرة تبعاً لأشكال هندسية

(ج) حمل يتغير تبعاً لشبه منحرف

3.42 ردود الأفعـــال :

ردود الأفعال هى عبارة عن قوى - قوة أو عزم - يقصد بها منع الإزاحات والدورانات ، أو منع حركة المنشآت بصفة عامة ، وردود الأفعال تنشأ عن وجود ركائز للمنشأ المراد حفظه فى حالة اتزانه ، وسوف ندرس - على سبيل المثال لا الحصر - الركائز الممكنة بالمستوى .

من المعروف أن فى المستوى لدينا ثلاثة أنواع ممكنة للحركة ، إزاحة أفقية ، وأخرى رأسية ، فضلاً عن الدوران أى ثلاث حريات للحركة ، وتبعاً لذلك الركائز يمكن أن تكون :

١ - **ركائز بسيطة** : شكل 3,3 : فى هذه الحالة تمنع الإزاحة فى الاتجاه العمودى على مستوى الركيزة فقط ، ومن ثم فلا يوجد إلا رد فعل واحد فى حين حرية الحركة متاحة فى اتجاهين : (الدوران + الاتجاه الموازى لمستوى الركيزة) .

شكل 3,3 - الركيزة البسيطة

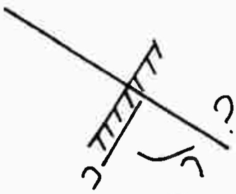
٢ - **ركائز مزدوجة أو مفصلة** : يمكن لهذه الركيزة أن ترسم بطريقتين شكل 3,4 أ ، ب ، وبهذه الركيزة حرية حركة واحدة وهى الدوران .

شكل 3,4

(أ) الركيزة المزدوجة

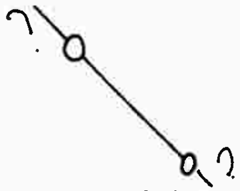
(ب) المفصلة

٣ - **التثبيت** : ويمكن أن يرسم كما هو موضح بالشكل 3,5 حيث تمنع فيه جميع أنواع الحركة بالمستوى ، ومن ثم فيوجد ثلاثة ردود أفعال وعدد حريات الحركة يساوى صفر .



شكل 3,5 - التثبيت وبه ثلاث ردود أفعال مجهولة.

٤ – **البندول** : وهذه الركيزة تعتبر مثل الركيزة البسيطة من حيث إنها تتحمل رد فعل واحد ، وتسمح بالدوران وبالإزاحة فى الاتجاه العمودى على محورها ، وهى ترسم كما بالشكل 3,6 .

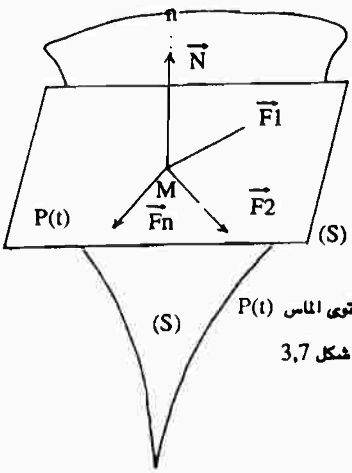


البندول وبه رد فعل واحد باتجاه محوره شكل 3,6

بعد معرفة القوى الخارجية وردود الأفعال (وتعرف ردود الأفعال بقوى الاتصال كذلك) ، يمكننا الآن دراسة اتصال النقطة المادية ، وكتابة معادلات الاتزان لها .

3.5 اتصال مثالى (دون احتكاك) :

فى هذه الحالة تتصل النقطة المادية بسطح أملس تماماً (S) وهو المبين بالشكل (3,7) . فلو افترضنا أن مجموع القوى المؤثرة عليها هى : $\vec{F}_n$ و ... و $\vec{F}_2$ و $\vec{F}_1$ ، ولو فرضنا أن رد فعل السطح عليها هو $\vec{N}$ حيث يكون اتجاه رد الفعل عمودياً على المستوى المماس للسطح (P_t) كما هو واضح بالشكل 3,7 .



شكل 3,7

ويكون شرط الاتزان فى هذه الحالة على الصورة :

$$\vec{N} + \Sigma \vec{F_i} = \vec{0} \quad \text{.......................................} \quad (3.7)$$

$$\vec{N} + \vec{R} = 0$$

النموذج الذى اخترناه بالشكل 3,7 ليس الوحيد ، ولكنه فقط مثال لعملية اتصال نقطة مادية بسطح ما ، فهذا السطح قد يستبدل بمنحنى أو قد يكون كرة ، وبالمثل يمكن استبدال النقطة المادية بأجسام صغيرة ، وتظل معادلات الاتزان دائماً كما سبق شرحه .

هذا ويجب أن نلاحظ أن معادلة الاتزان (3.7) تتغير فى حالة وجود قوى الاحتكاك ، وذلك كما سيأتى دراسته فى فصل الاحتكاك .

3.6 المنشآت المحددة والغير محددة استاتيكياً :

سوف تقتصر دراستنا على المنشآت بالمستوى فقط ، فلقد سبق بيان أن شروط الاتزان فى المستوى هى تحقيق المعادلات (3,3) , (3,6) ، وعلى وجه العموم فإن جميع أنواع المنشآت بالمستوى لابد وأن تخضع لأحدى الحالات الثلاث التالية :

(أ) عدد ردود الأفعال = عدد معادلات الاتزان ، وهذا النوع يسمى محدداً إستاتيكياً .

(ب) عدد ردود الأفعال > عدد معادلات الاتزان ، ويعرف بالمنشأ الغير محدد إستاتيكياً .

(جـ) عدد ردود الأفعال < عدد معادلات الاتزان ، ويكون منشأ غير ثابت وهو نوع من المنشآت لا يصح أن يوجد على الإطلاق .

المعادلة التالية يمكنها تحديد نوعية المنشأ من الناحية الإستاتيكية :

$$n = (i\,b + r) - (i\,j + k) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3.8)$$

حيث :

b = عدد القضبان التى يتكون منها المنشأ .

r = عدد ردود الأفعال .

j = عدد الوصلات أو العقد .

k = عدد الشروط الإضافية فإن لم توجد تصبح k صفراً .

i = عدد عادة يساوى 3 إلا فى حالة الكمرات المعرضة لأحمال رأسية فقط فيكون i = 2 .

وبناء على المعادلة (3.8) فيمكن أن نجد ما يلى :

n = صفر ويكون المنشأ محدداً إستاتيكياً .

n < صفر ومعناها منشأ غير ثابت .

n > صفر منشأ غير محدد إستاتيكياً .

المعادلة (3.8) تستعمل فقط للمنشآت بالمستوى وإلا فيجب تغيير i إلى 6 فى حالة الفراغ .

3.7 كيفية حساب ردود الأفعال للمنشآت المحددة إستاتيكياً :

تعتبر عملية حساب ردود الأفعال تطبيقاً هندسياً على مسائل الاتزان ، فردود الأفعال تحسب من معادلات الاتزان (3.3) , (3.6) ، وذلك فى حالة المنشآت بالمستوى . أما إذا كان المنشأ بالفراغ فإن ردود الأفعال توجد بتطبيق المعادلات (3.2) , (3.5) ، ويفترض أن المنشآت المراد حساب ردود أفعالها محددة إستاتيكياً ، وسوف يتضح ذلك من الأمثلة فى نهاية هذا الفصل .

3.8 حالات خاصة للاتزان :

نقصد بالحالات الخاصة تلك الحالات التى يمكنها أن تبسط معادلات الاتزان ، وهى فى نفس الوقت حالات شائعة ، ونحن ندرس حالتين :

١ - نقطة مادية متزنة تحت تأثير قوتين :

فى هذه الحالة لابد أن تكون القوتان لهما نفس خط العمل ونفس القيمة ، ولكن اتجاه كل منهما معاكس للأخرى وهذا لكى تكون محصلتهما صفراً .

٢ - نقطة مادية تحت تأثير ثلاث قوى :

لكى يحدث الاتزان فى هذه الحالة فيجب أن تكون القوى الثلاث متلاقية فى نقطة واحدة ، وذلك لأن محصلة قوتان منهما يجب أن تساوى قيمة القوة الثالثة ، ولكن فى اتجاه معاكس ومن هذا يمكننا أن نكتب النظرية التالية :

نظرية القوى الثلاث :

إذا وقع جسم تحت تأثير ثلاث قوى وكان فى حالة اتزان فإن القوى الثلاث لابد أن تلتقى فى نقطة واحدة .

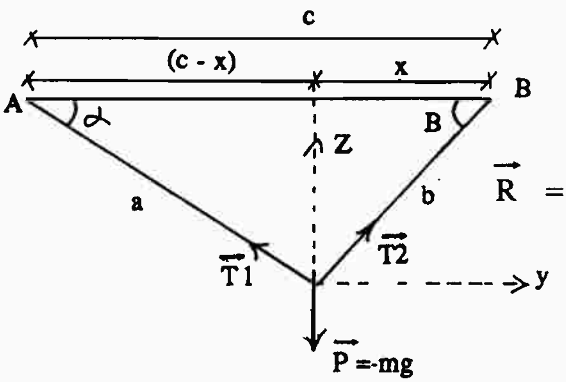
3.9 أمثلة محلولة :

١ - جسم كتلته m معلق بخيطين طولهما a و b فى مسمارين A و B . البعد الأفقى بين A و B مقداره C . الجسم فى حالة اتزان ، والمطلوب حساب الشد فى كل خيط .

الحــــل :

لنفرض أن P هو وزن الجســـم $\therefore\ P = -\,m\vec{g}$

والإشارة السالبة ناشئة عن اتجاه المحاور المبين بالرسم . يمكن أن نكتب شرط الاتزان كما يلي :



$$\vec{R} = \vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{P} = \vec{0}$$

والآن نحاول إيجاد كل قوة فى صورة متجه مستقل كما يلى :

$$\vec{T_1} = -T_1 \cos\alpha \ \vec{j} + T_1 \sin\alpha \ \vec{K}$$

$$\vec{T_2} = -T_2 \cos\beta \ \vec{j} + T_2 \sin\beta \ \vec{K}$$

$$\vec{P} = -mg \ \vec{K}$$

بتطبيق معادلات الاتزان فى المستوى (3.3) (فى هذه الحالة المستوى هو YOZ) . نحصل على :

$$T_2 \cos\beta - T_1 \cos\alpha = 0 \qquad (1)$$

$$T_1 \sin\alpha \sin\beta - mg = 0 \qquad (2)$$

$$T_1 \sin\alpha + T_2 \sin\beta - mg = 0$$

من (1) و (2) يمكن أن نجد :

$$T_1 = \frac{mg\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \quad , \quad T_2 = \frac{mg\cos A}{\sin(\alpha+\beta)}$$

ومن دراسة المثلث ABC نجد العلاقات التالية :

$$Z^2 + X^2 = b^2 \rightarrow Z^2 = b^2 - X^2 \qquad (3)$$

$$Z^2 + (C - X)^2 = a^2 \rightarrow Z^2 = a^2 - (c - x)^2 \qquad (4)$$

من المعادلتين (3) و (4) نجد :

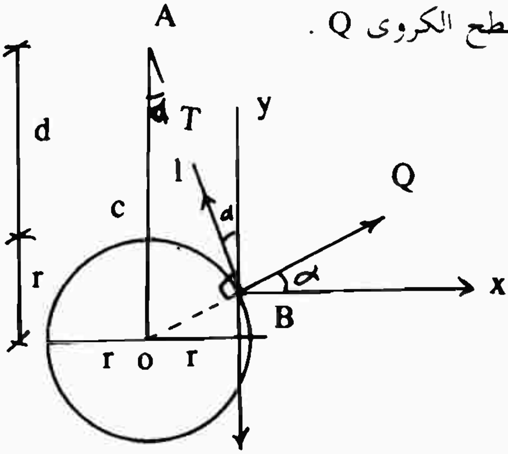
$$b^2 - x^2 = a^2 - c^2 - x^2 + 2cx \quad \longrightarrow \quad x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$$

ومنها نحصل على :

$$\cos\alpha = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad , \quad \cos\beta = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) , \qquad \beta = \cos^{-1}\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

2- بلية B وزنها P ونصف قطرها مهمل . معلقة فى نقطة A بواسطة خيط AB ، وترتكز على سطح كرة نصف قطرها r . المسافة ما بين A وسطح الكرة هى AC . فإذا علم أن : AC = d وأن طول الخيط AB = l وأن الخط OCA رأسى . أوجد الشد T فى الخيط ورد فعل السطح الكروى Q .



الحـــل :

يمكن أن نكتب معادلات القوى الاتجاهية كما هو واضح من هندسة الشكل :

$$\vec{Q} = (\cos\alpha)\, Q\, \vec{i} + (\sin\alpha)\, Q\, \vec{j}$$

$$\vec{T} = (-\sin\alpha)\, T\, \vec{i} + (\cos\alpha)\, T\, \vec{j}$$

$$\vec{P} = -mg\, \vec{j}$$

بما أن المجموعة متزنة فإننا نطبق المعادلات (3.1) و (3.3) لتصبح فى هذه الحالة :

$$\vec{R} = \vec{T} + \vec{Q} + \vec{P} = 0$$

$$X = \sum_{i=L}^{3} X_i = Q\cos\alpha - T\sin\alpha = 0$$

$$Y = \sum_{i=L}^{3} Y_i = Q\sin\alpha + T\cos\alpha - mg = 0$$

من المعادلة (1) نجد أن :

$$Q = T\tan\alpha = T\frac{r}{l}$$

حيث من هندسة الشكل : $(\triangle\ OBA)$

$$\tan\alpha = \frac{r}{L}$$

$$\sin\alpha = \frac{r}{d+r} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{L}{d+r}$$

بالتعويض عن هذه القيم فى المعادلة (2) نجد :

$$T\frac{r}{\ell}\frac{r}{d+r} + T\frac{L}{d+r} = P$$

$$T\left(\frac{1}{d+r}\right)\left(\frac{r^2+l^2}{l}\right)P$$

$$\frac{T}{L}\left(\frac{1}{d+r}\right) = \left(\frac{P}{L^2+r^2}\right) \longrightarrow T = P\frac{\ell}{d+r}$$

ومن المعادلة (1) نجد أن :

$$Q = P\frac{r}{d+r}$$

حل آخر لنفس المسألة :

يظهر من الشكل أن المثلث OAB يمكن اعتباره مثلث للقوى حيث :

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{T} \quad , \quad \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{P} \quad , \quad \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{Q}$$

ويمكن بالتالى كتابة النسب التالية :

$$\frac{\overrightarrow{T}}{\overrightarrow{BA}} = \frac{\overrightarrow{P}}{\overrightarrow{A0}} = \frac{\overrightarrow{Q}}{\overrightarrow{0B}} = 1$$

وهذه يمكن كتابتها كما يلى :

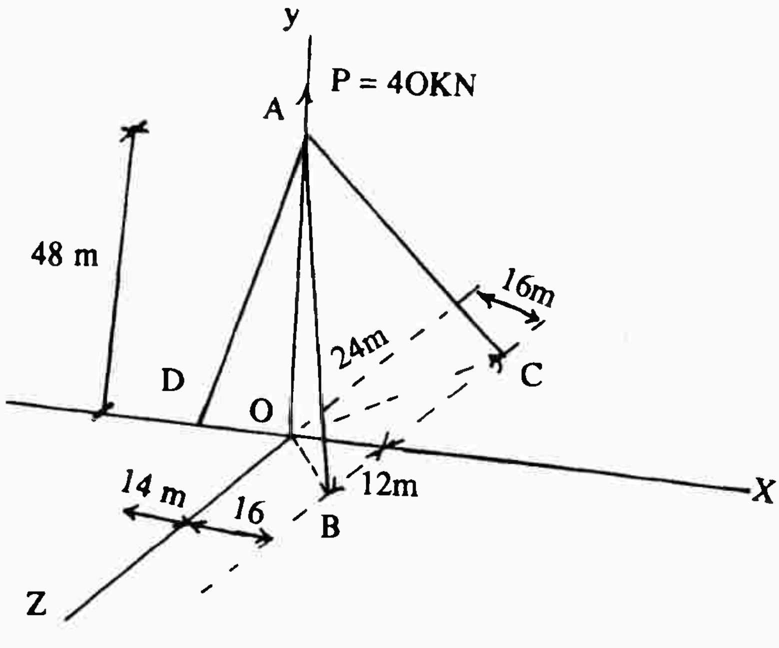
$$\frac{T}{\ell} = \frac{R}{d + r} = \frac{Q}{r}$$

ومنها نحصل على :

$$T = P \frac{l}{d + r}$$

$$Q = P \frac{\ell}{d + r}$$

3 – قوة مقدارها 140KN نقطة تأثيرها هى A (انظر الشكل) . ثلاثة كابلات AC , AD , AB تشد هذه القوة . فإذا علم أن المجموعة فى حالة اتزان . أوجد قيمة الشد فى كل كابل من الكابلات الثلاثة .



الحــــل :

من شرط الاتزان يمكن كتابة المعادلة الاتجاهية التالية :

$$\vec{P} = \vec{T}_{AB} + \vec{T}_{AC} + \vec{T}_{AD}$$

ويمكن كتابة معادلة اتجاهية لكل قوة كما يلى :

$$\vec{T}_{AB} = \cos\alpha_1 T_{AB}\ \vec{i} + \cos\beta_1 T_{AB}\ \vec{j} + \cos\gamma_1 T_{AB}\ \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AC} = \cos\alpha_2 T_{AC}\ \vec{i} + \cos\beta_2 T_{AC}\ \vec{j} + \cos\gamma_2 T_{AC}\ \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AD} = \cos\alpha_3 T_{AD}\ \vec{i} + \cos\beta_3 T_{AD}\ \vec{j} + \cos\gamma_3 T_{AD}\ \vec{k}$$

ولحساب الزوايا أعلاه فلابد من حساب أطوال الكابلات ، وهى من هندسة الشكل كما يلى :

$$AB = \sqrt{(16)^2 + (12)^2 + (48)^2} = 52\ m$$

$$AC = \sqrt{(24)^2 + (16)^2 + (48)^2} = 56\ m$$

$$AD = \sqrt{(48)^2 + (14)^2} = 50\ m$$

وتصبح المعادلات الثلاث أعلاه كما يلى :

$$\vec{T}_{AB} = \frac{16}{52} T_{AB}\ \vec{i} + \frac{48}{52} T_{AB}\ \vec{j} + \frac{12}{52} T_{AB}\ \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AC} = \frac{16}{56} T_{AC}\ \vec{i} + \frac{48}{56} T_{AC}\ \vec{j} - \frac{24}{56} T_{AC}\ \vec{k}$$

$$\vec{T}_{AD} = \frac{14}{50} T_{AD}\ \vec{i} + \frac{48}{50} T_{AD}\ \vec{j} + \frac{0}{50} T_{AD}\ \vec{k}$$

وبتطبيق المعادلات (3.2) نحصل على :

$$\frac{16}{52} T_{AB} + \frac{16}{56} T_{AC} - \frac{14}{50} T_{AD} = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{48}{52} T_{AB} + \frac{48}{56} T_{AC} + \frac{48}{50} T_{AD} = 140 \qquad (2)$$

$$\frac{12}{52} T_{AB} + \frac{24}{56} T_{AC} = 0 \qquad (3)$$

بحل المعادلات الثلاث نحصل على :

$$T_{AB} = 47,182 \text{ KN} \quad , \quad T_{AC} = 25,408 \text{ KN} \quad , \quad T_{AD} = 77,775 \text{ KN}$$

4 - فى المثال السابق يراد تغيير موقع النقطة B بحيث تصبح على المحور OZ . فإذا علم أن الشد فى الكابل AC قيمته 70KN أوجد موضع B وكذلك قيمة الشد فى كل من الكابلين AD , AB بحيث تصبح المجموعة متزنة .

الحـــل :

بعد تغيير موضع B لتصبح على المحور OZ فإن المعادلات الثلاث بالمثال السابق تصبح :

$$\frac{16}{56} T_{AC} - \frac{14}{50} T_{AD} = 0 \qquad (1)$$

$$\cos\beta\, T_{AB} + \frac{48}{56} T_{AC} + \frac{48}{50} T_{AD} = 140 \qquad (2)$$

$$\sin\beta\, T_{AB} - \frac{24}{56} T_{AC} = 0 \qquad (3)$$

حيث β هى الزاوية التى يصنعها الكابل AB مع المحور الرأسى OY من المعادلة الأولى نجد :

$$T_{AD} = \frac{16}{56} X \frac{50}{14} (70) = 71,429 \text{ KN}$$

بالتعويض عن T_{AC} و T_{AD} فى المعادلتين الثانية والثالثة نجد :

$$\text{Cos}\,\beta\, T_{AB} + \frac{48}{56} X\, 70 + \frac{48}{50} X\, 71,429 = 140 \qquad (4)$$

$$\text{Sin}\,\beta\, T_{AB} - \frac{24}{56} X\, 70 = 0 \qquad (5)$$

من هاتين المعادلتين نجد أن :

$$\text{Tan}\ \beta = 2,625$$

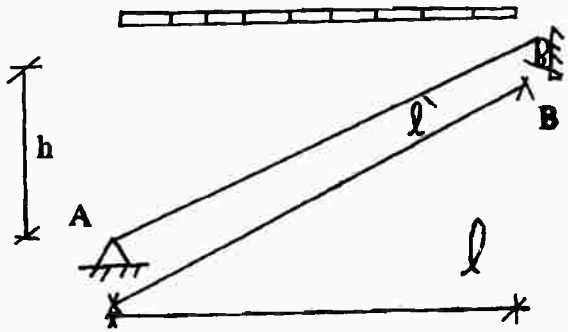
$$\beta = 65,15°$$

بمعرفة قيمة الزاوية β أصبح محدداً وإحداثياتها هى : (0,0,126)

أما قيمة الشـد فى الكابل AB فنحصل عليه من المعادلة (5)

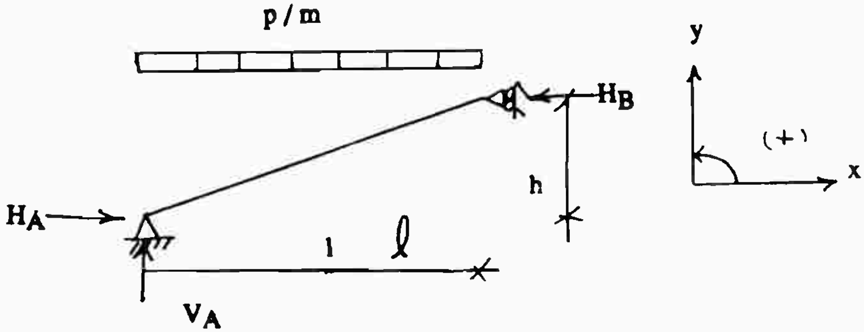
$$T_{AB} = \left(\frac{24}{56} X\, 70 \right) \frac{1}{\sin \beta} = 32,102 \text{ KN}$$

5 – أوجد ردود أفعال الكمرة AB المعرضة للحمل P الموزع توزيعاً منتظماً على الوحدة الطولية للمسقط الأفقى للكمرة .



الحـــل :

نفترض أن اتجاه ردود الأفعال كما هو موضح بالشكل أسفله :



بافتراض أن الاتجاه الموجب للمحاور والعزوم هو المبين بالشكل ، وبتطبيق معادلات الاتزان الثلاث بالمستوى نجد :

$$\Sigma Y = 0 \quad \rightarrow \quad V_A = p\ell \uparrow$$

$$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad H_B\, h - p\, e\, \frac{\ell}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad H_B = \frac{P\, L^2}{2\, h} \leftarrow$$

بدلاً من استعمال معادلة الاتزان الثالثة فإننا نستعمل معادلة العزوم حول الطرف الآخر (أى B) تساوى صفراً وذلك لإيجاد H_A ونحقق النتائج بمعادلة الاتزان الثالثة :

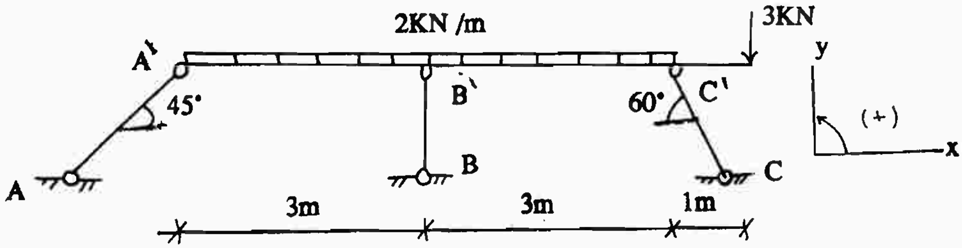
$$\Sigma M_B = 0 \quad \rightarrow \quad H_A\, h - V_A \ell + p\ell \frac{\ell}{2} = 0$$

$$\therefore h\, H_A = p\ell\ell - p\frac{\ell^2}{2} \quad \rightarrow \quad H_A = \frac{p\ell^2}{2\, h} \rightarrow$$

ويتضح من هذه النتيجة أن المعادلة الثالثة للاتزان تتحقق حيث :

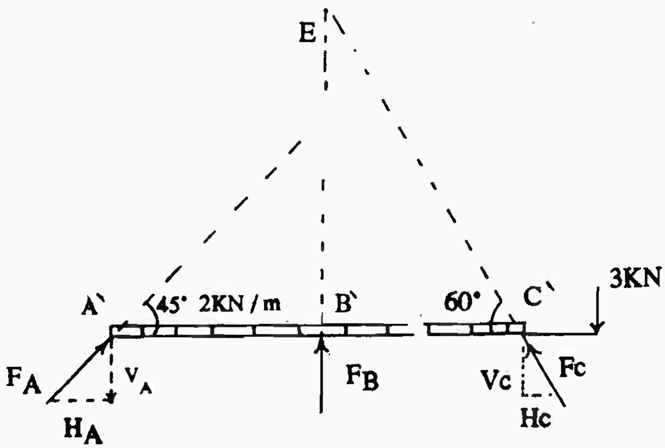
$$\Sigma X = H_A - H_B = P \frac{L^2}{2h} - \frac{L^2}{2h} = 0$$

6 – المنشأة `AA BB` مرتكز على ثلاثة محاور بندولات هي `CC` , `BB` , `AA`
ومعرض للحمل المبين بالشكل ، أوجد قيمة القوة بكل بندول .



الحـــل :

حيث إن البندولات الثلاثة لا تتحمل الاقوى فى اتجاه محورها إذاً فيمكن أن تستبدل بواسطة قوى معلومة الاتجاه ومجهولة القيمة كما بالشكل أسفله .



$$V_A = H_A = F_A \text{ Cos } 45° = \frac{F_A}{\sqrt{2}}$$

$$V_C = F_C \text{ Sin } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} F_C \quad , \quad H_C = F_C \text{ Cos } 60° = \frac{F_c}{2}$$

$\Sigma M_D = 0 \rightarrow$ (D محددة بالرسم أعلاه)

بالتعويض عن V_C و H_C بدلالة F_C نجد :

$$\frac{\sqrt{3}}{2} F_C (3) - \frac{F_c}{2} (3) - 3 \times 4 = 0$$

$$\therefore F_C = 10{,}928 \text{ KN}$$

وتكون قيم مركبتيها V_C و H_C كما يلي :

$$V_C = 10{,}928 \text{ X } \frac{\sqrt{3}}{2} = 9.464 \text{ KN} \uparrow$$

$$HC = 10.928 \text{ X } \frac{1}{2} = 5.464 \text{ KN}$$

$\Sigma M_E = 0$ (E محددة بالشكل السابق)

$$- V_A (\overline{AB}) + H_A (B E) - 3 \times 4 = 0$$

بالتعويض عن V_A و H_A بدلالة F_A نجد :

$$- \frac{F_A}{\sqrt{2}} (3) + \frac{F_A}{\sqrt{2}} (\overline{C'B'} \tan 60°) - 3 \times 4 = 0$$

ومنها يمكن إيجاد المركبتين الأفقية والرأسية :

$$\therefore F_A = 7{,}727 \text{ KN}$$

$$V_A = \frac{7.727}{\sqrt{2}} = 5.464 \text{ KN}$$

$$H_A = \frac{7.727}{\sqrt{2}} = 5.464 \text{ KN} \rightarrow$$

$$\Sigma M_{C'} = 0 \quad \rightarrow \quad - V_A(6) - V_B(3) + 2X6X - 3XI = 0$$

$$\therefore V_B = 0.072 \text{ KN} \uparrow$$

تحقيق النتائج :

$$\Sigma X = H_A - H_C = 5.464 - 5.464 = 0$$

$$\Sigma Y = V_A + V_C + V_B - 2 X 6 - 3 = 5.464 + 9.464 - 15 + 0.072 = 0$$

3.10 - تمـــارين :

1 - نجفة دائرية وزنها (100N) تحملها ثلاث سلاسل تصنع أنصاف الأقطار التى تربطها مع المركز فى المسقط الأفقى زوايا مقدارها (120°) . المطلوب إيجاد الشد فى كل سلسلة .

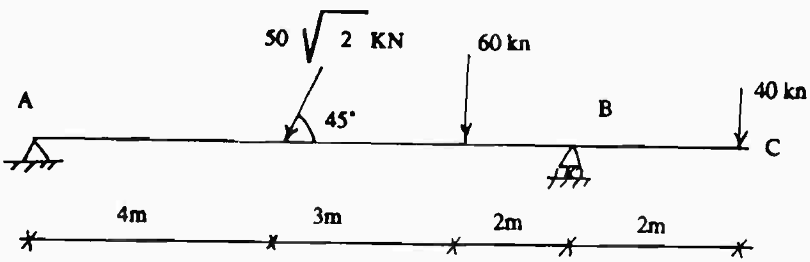
2 - قوتين ($|F_1| = 50N$) , ($|F_2| = 60N$) خطاعملهما $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AO}$ على الترتيب حيث A(1,3,0) ، B(0,1,2) ، O(0,0,0) . والمطلوب إيجاد القوة التى تتزن مع هاتين القوتين .

3 - رجل يشد قضيباً وزنه (100N) بقوة مقدارها (50N) من أحد طرفيه . والطرف الآخر للقضيب مستند على الأرض . فإذا علم أن طول القضيب (2m) وفى وضع الاتزان أصبحت الزاوية التى يصنعها القضيب مع الأرض 30° . والمطلوب إيجاد :

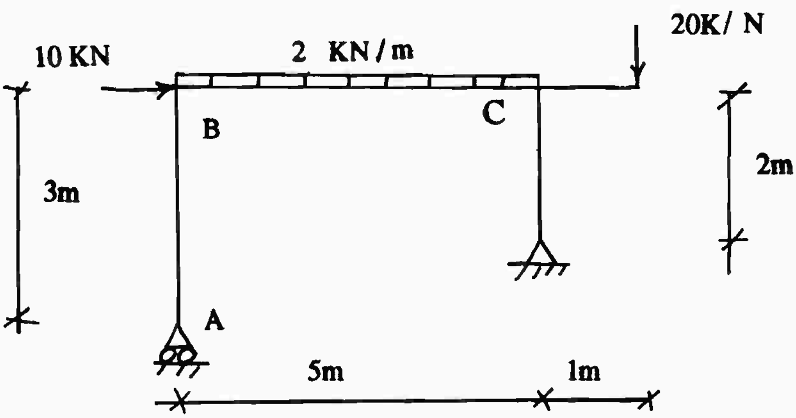
(أ) زاوية ميل قوة الشد على الأفقى فى وضع الاتزان .

(ب) ردود أفعال الأرض .

4 - المطلوب إيجاد ردود أفعال الكمرة التالية :

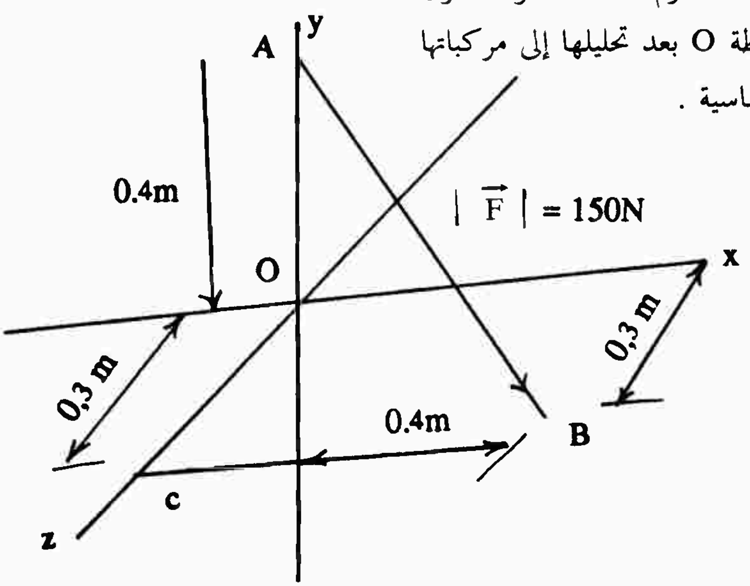


5 – أوجد ردود أفعال الهيكل التالى :



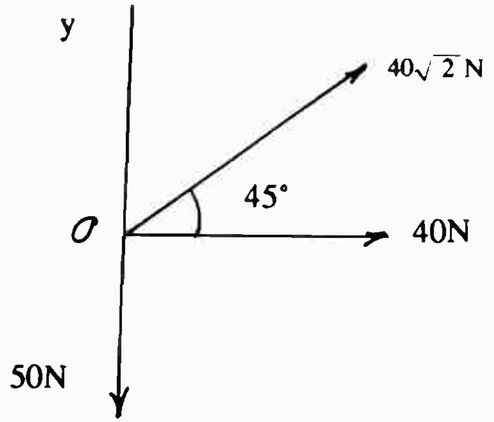
تمـــارين :

1 – أوجد عزم القوة ($\vec{F} = 150$ N) حول النقطة C ، وذلك بتطبيق التعريف المباشر للعزم . أوجد كذلك عزم تلك القوة حول النقطة O بعد تحليلها إلى مركباتها الأساسية .



2 - قوة ($|F|=50N$)خط عملهما معرف بالنقطتين : $A(1,3,0)$ و $B(0,1,2)$
ونقطة تأثيرها هى A . والمطلوب :
(أ) اختزال تلك القوة حول النقطة O .
(ب) اتجاهات القوة التى تكافىء تلك القوة .

3 - تؤثر مجموعة القوى المبينة بالشكل بالنقطة O . والمطلوب إيجاد القوة التى تجعل تلك المجموعة محصلتها رأسية .



4 المطلوب إيجاد نقطة تأثير محصلة القوى التالية :