الباب الرابع

عناصر الحل البيانى

نتعرض فى هذا الفصل لطرق حل مسائل الإستاتيكيا بيانياً ، وأهمية هذا الموضوع تكمن فى التطبيقات الهندسية مثل حل مسائل الجمالونات حيث يصعب حل مسائل الجمالونات تحليلياً ، وهذا سوف نتعرض له تفصيلاً فى فصل خاص عن الجمالونات ، إلا أننا فى هذا الفصل نعطى فكرة عن كيفية الحل البيانى لبعض مسائل الاتزان وكيفية حساب ردود الأفعال بيانياً .

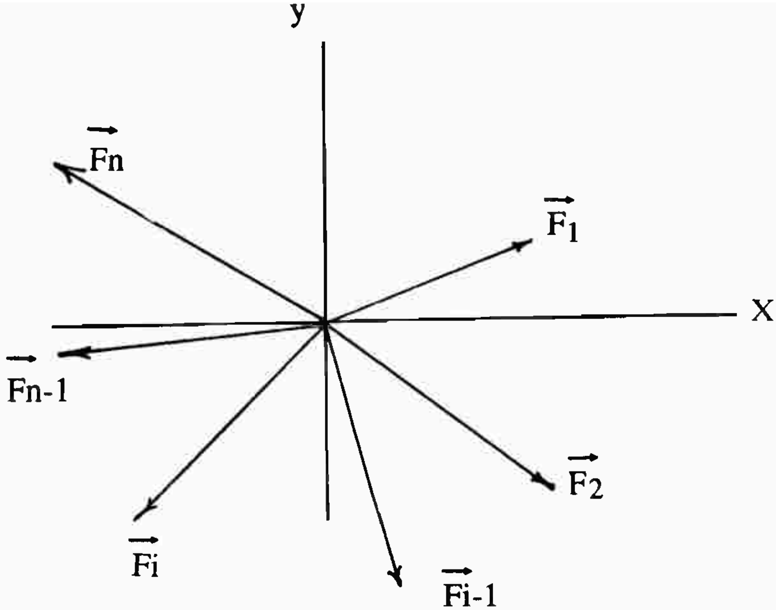
وكما سبق ذكره فإن القوة تعتبر متجهاولتعريفه يحتاج إلى أربعة عناصر ، ويضاف لهذه العناصر الأربعة فى علم الإستاتيكا البيانية ما يعرف بمقياس الرسم ، وهو النسبة بين الطول المرسوم به القوة والقيمة الحقيقية لها ومن ثم فهو علاقة بين الوحدة الطولية ووحدة مقياس القوى .

لتبسيط عمليات الرسم فإننا نتعرض فى هذا الفصل للقوى فى المستوى XOY فقط .

4.1 مضلعات القوى :

لتكن مجموعة القوى عددها n : $\overrightarrow{F_n}$ و .... و $\overrightarrow{F_i}$و .... و $\overrightarrow{F_2}$ و $\overrightarrow{F_1}$

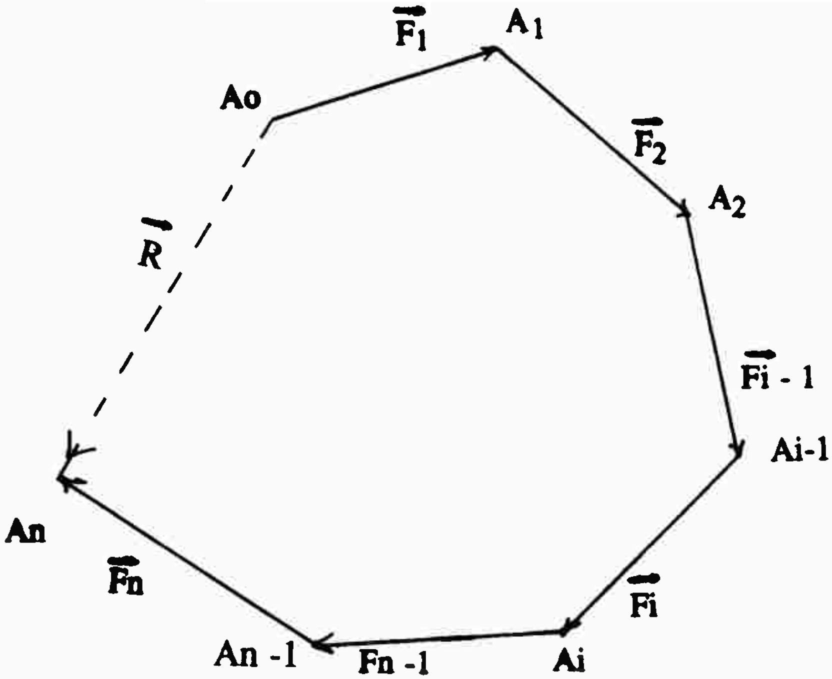
وهى قوى متلاقية وسندرسها حسب الترتيب الاختيارى 1 , 2 , ... n انظر شكل 4.1 .



شكل 4.1

لهذه المجموعة من القوى نختار نقطة A_0 لكى نرسم منها المتجه $\overrightarrow{A_0A_1}$ المكافىء للقوة $\vec{F_1}$ ومن نهايته نرسم المتجه $\overrightarrow{A_1A_2}$ مكافئاً للقوة $\vec{F_2}$ وهكذا حتى $\overrightarrow{A_{n-1}A_n}$ المكافىء للقوة $\vec{F_n}$. المخطط أو الكنتور المضلع المبين بالشكل 4.2 ، والحاصل عليه كما هو موضح أعلاه يسمى مضلع القوى . المتجه $\overrightarrow{A_0A_n}$ هو المحصلة لهذه المجموعة من القوى .

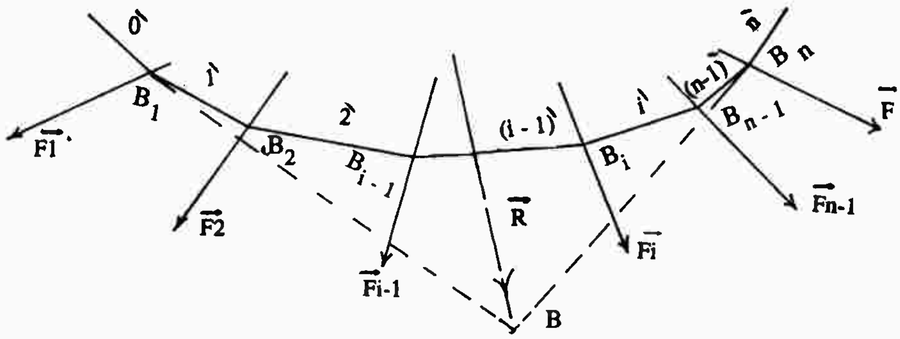
فى حالة انطباق A_0 على A_n تصبح المحصلة O ومن ثم يقال إن مجموعة القوى متزنة . إذاً كل جسم صلب تحت تأثير قوى متزنة يكون لديه مضلع قوى مقفل .



4.2 مضلع الأشعة القطبى :

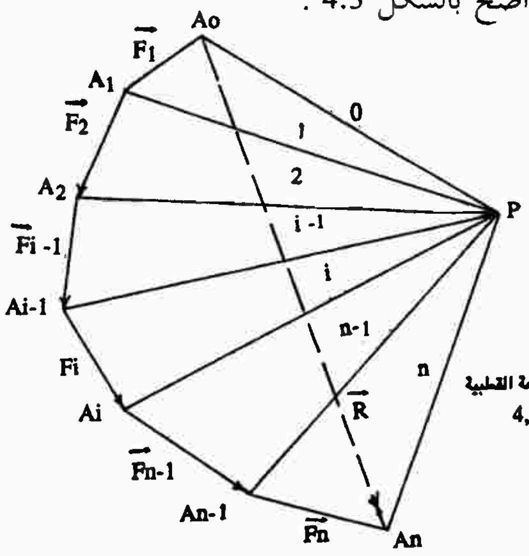
لتعيين موضع المحصلة لمجموعة من القوى نرسم ما يعرف بمضلع الأشعة القطبى ، وهو الذى سندرسه فى هذه الفقرة :

لنعتبر مجموعة القوى بالشكل 4.3 التالى والتى يراد رسم مضلع الأشعة القطبى لها ، فنختار نقطة بداية ولتكن A_0 شكل 4.4 ، ونرسم منها المتجه $\overrightarrow{A_0A_1}$ مكافئاً للقوة $\vec{F_1}$ ، ونستمر فى عملية رسم القوى – كما أسلفنا فى الفقرة السابقة – حتى نحصل على المحصلة عن طريق مضلع القوى ، وعلى نفس الشكل نختار نقطة ، ولتكن P وهى تعرف بالقطب ، ومنها نرسم خطوطاً – أشعة – تصل تلك النقطة بالنقط A_0 ، A_1 .... إلخ ، وتعرف هذه الخطوط بالأشعة القطبية ، ومن ثم يعرف هذا الشكل بمضلع الأشعة القطبية شكل 4.4 .



شكل 4.3

لكى نوقع المحصلة الآن بالشكل 4.3 بين مجموعة القوى التى تمثلها ، نعود لشكل 4.3 ونختار نقطة ما مثل B_1 مثلاً على خط عمل القوة $\vec{F_1}$ ، ومنها نرسم موازياً للمستقيم (الشعاع) صفر وليكن صفرَ (Ó) ، ونرسم كذلك // للشعاع 1 ، وليكن الشعاع 1 ليلاقى خط عمل القوة $\vec{F_2}$ فى النقطة B_2 ، ومن هذه النقطة نرسم موازياً للشعاع 2 ليعطينا الشعاع 2َ والذى يقطع خط عمل القوة التالية فى B_{i-1} وهكذا حتى تتم جميع الموازيات كما هو واضح بالشكل 4.3 .



مضلع الأشعة القطبية

شكل 4,4

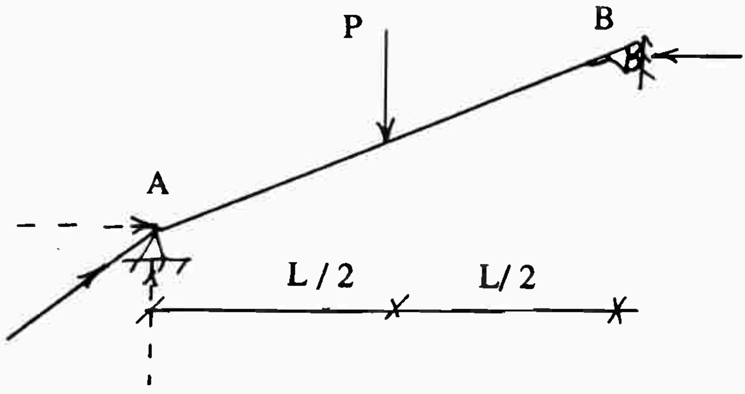
بعد عمل كافة الموازيات نمد الشعاع الأول O` والأخير n` حتى يلتقيا في نقطة ولتكن B انظر شكل 4.3 . من النقطة B نرسم موازيا للمتجه A_0A_n والذى يمثل المحصلة ، ومن ثم يمكننا الحصول على موقع المحصلة بين مجموعة القوى التى تكافئها ، وكما سبق ذكره إذا انطبقت A_0 على A_n تكون المجموعة في حالة اتزان حيث إن المحصلة تصبح صفراً .

4.3 منحنى الضغط :

منحنى الضغط هو منحنى مضلع أشعة قطبي خاص فيه يتطابق القطب P على نقطة بداية مضلع الأشعة القطبي A_0 ، وبعبارة أخرى A_0 وP هما نفس النقطة بالشكل 4.4 .

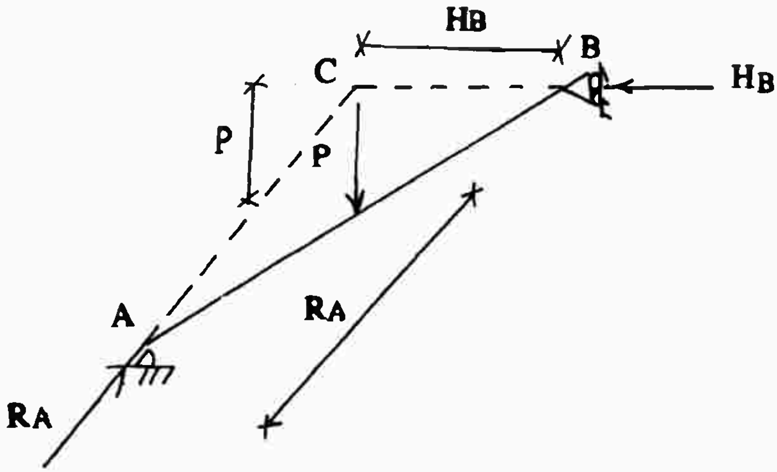
4.4 تطبيقات على الإستاتيكا البيانية :

١ - الكمرة AB بالشكل أسفله تقع تحت تأثير قوة مركزة P . أوجد بيانياً قيمته ردود الأفعال لهذه الكمرة .



الحـــل :

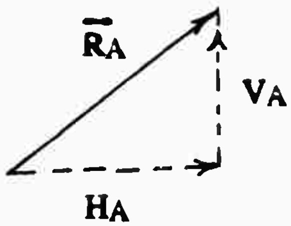
حيث إن الكمرة يجب أن تكون متزنة ، إذاً الثلاث قوى يجب أن تتلاقى فى نقطة واحدة (فقرة 3.8) ولتكن النقطة C ، انظر الشكل التالى :



ويعتبر المثلث ABC هو مثلث التوازن ويصبح خط عمل R_A معروفاً حيث إنه الخط الواصل من الركيزة A إلى نقطة تلاقى القوة الرأسية P مع رد الفعل الأفقى H_B ونقطة التلاقى كما هو واضح بالشكل هى C . من الشكل نجد :

$$\overrightarrow{R_A} = \overrightarrow{AC} \quad , \quad \overrightarrow{H_B} = \overrightarrow{BC}$$

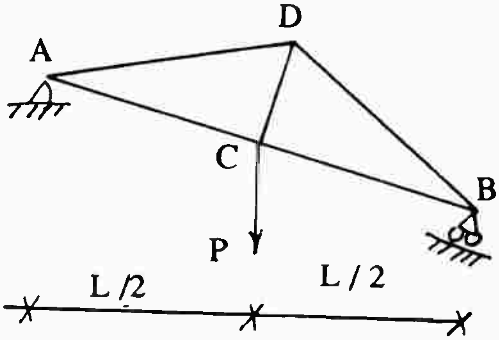
ويمكن إيجاد مركبات R_A الرأسية V_A والأفقية H_A وذلك بإسقاط المتجه AC رأسياً وأفقياً . انظر الشكل .

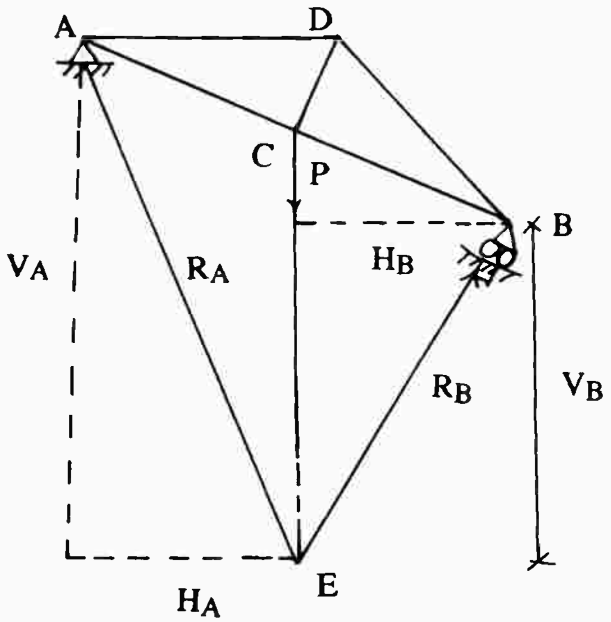


2 - أوجد ردود أفعال الجمالون ABCD بيانياً . الجمالون واقع تحت تأثير قوة رأسية P عند المفصلة C .

الحـــل :

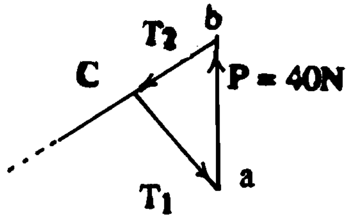
من تعريف الركائز بالفصل السابق رد الفعل للركيزة B يكون عمودياً على مستوى الركيزة أى ⊥ على AB . وحيث إن الجمالون فى حالة اتزان إذاً الثلاث قوى لابد أن تتلاقى فى نقطة واحدة ، والتى يمكن تعيينها من تقاطع الحمل الرأسى P مع الاتجاه العمودى على AB من B وهو رد الفعل R_B لنحصل على النقطة E . بمعرفة E يكون EA هو المتجه الذى يمثل رد الفعل عند A أى R_A .

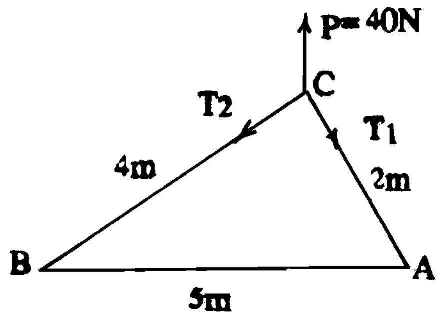




بإسقاط كل من $\vec{R}_A$ و R_B أفقياً ورأسياً يمكن أن نحصل على المركبة الأفقية والرأسية لكل منهما كما هو واضح بالشكل . ويلاحظ أن المركبة الأفقية لكل من $\vec{R}_A$ و $\vec{R}_B$ تساوى $1/2$ (بمقياس الرسم) وهذا بالطبع ضرورى لتحقيق الاتزان .

3 - خيط طوله 6 متر مثبت من طرفيه B , A . شد إل نقطة C بواسطة قوة مقدارها 40 N . فإذا كانت المسافة الأفقية بين طرفيه B , A هى 5 متر ، وإذا علم أن AC = 2 متر أوجد بيانياً قيمة الشد فى كل طرف من طرفى الخيط





مضلع القوى تحول إلى مثلث قوى .

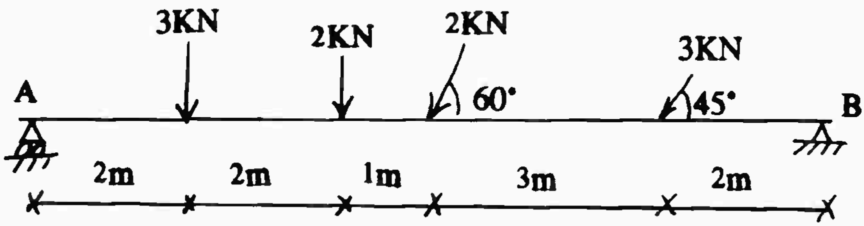
الحـــل :

لحل المسألة بيانياً نبدأ برسم موازى للقوة P بمقياس رسم معين وهى بالطبع رأسية وليكن ab كما هو واضح من مثلث القوى أعلاه .

بما أن القوى الثلاث متزنة فيجب الحصول على مثلث قوى (مضلع قوى) مقفل ، وتكون فيه الأسهم فى اتجاه دورى واحد ، وحيث إن اتجاه القوى بالخيطين معروف فإنه يمكن عمل موازى من b للشد T_2 فيقابل الموازى من a للشد T_1 وبذلك نحصل على مثلث مقفل بالقياس والضرب فى مقياس الرسم نجد قيمة الشد فى كل من الخيطين CA , CB .

$T_1 = 38.9$ KN , $T_2 = 27.4$ KN

4 – أوجد بيانياً ردود أفعال الكمرة AB بالشكل أسفله .

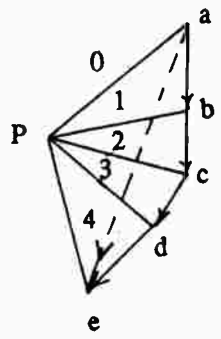


الحـــل :

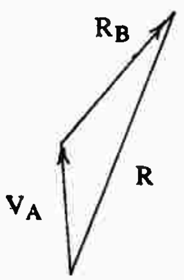
محصلة هذه المجموعة من القوى يجب أن تكون متزنة مع ردود الأفعال ، فلنبدأ إذاً بإيجاد هذه المحصلة ، وذلك بواسطة مضلع الأشعة القطبى الذى سبق شرحه فى بداية هذا الفصل . انظر تفاصيل الرسم بالشكل التالى .

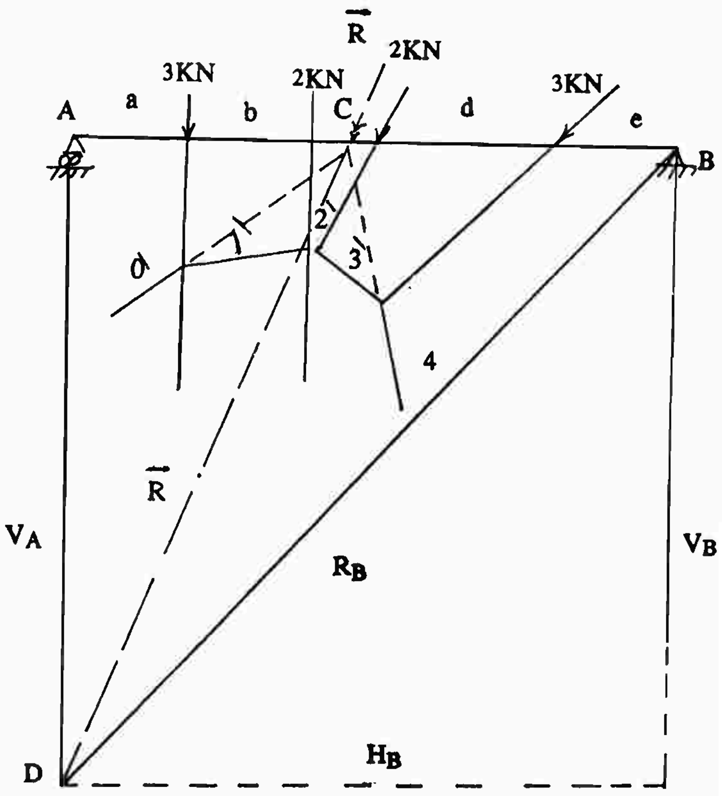
فى هذه المسألة لرسم مضلع الأشعة القطبىْ نقسم المساحة إلى مناطق كل منطقة مفصولة عن جارتها بخط عمل قوة فمثلاً القوة 3 KN الرأسية تفصل المنطقة a عن b وبالتالى فيمكن أن نسمى هذه القوة الرأسية بواسطة المناطق فتصبح a b أو القوة الرأسية 2KN فتسمى bc وهكذا كل القوى يمكن تسميتها بالمناطق .

بعد عمل مضلع الأشعة القطبى وإيجاد المحصلة ثم توقيعها بين مجموعة القوى ، وذلك كما سبق شرحه . فإننا نعلم أن هذه المحصلة يجب أن تتزن مع ردود الأفعال عند كل من A , B وحيث إن خط عمل المحصلة معلوم ، وكذلك رد فعل الركيزة A معلوم الاتجاه – مجهول القيمة – وهو الاتجاه الرأسى ليكون ⊥ مستوى الركيزة فإننا يمكننا تحديد نقطة تلاقى المحصلة مع رد الفعل عند A ، ولتكن النقطة D . وحيث إن القوى متزنة كما أسلفنا فإن رد الفعل عند B يجب أن يمر بنفس النقطة D ومن ثم فإن اتجاه رد الفعل عند D أصبح هو الاتجاه $\overrightarrow{DB}$.



مضلع الأشعة القطبى



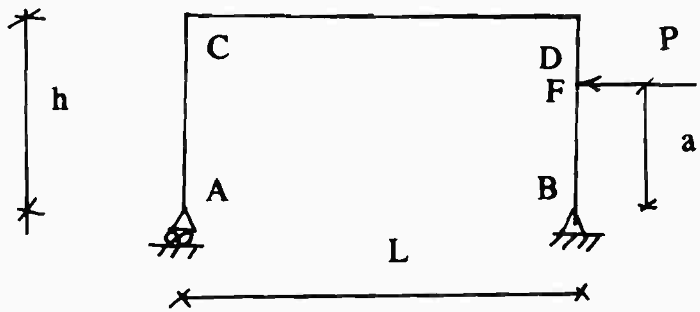


ويمكن الآن رسم مثلث قوى لكل من المحصلة $\overrightarrow{R}$ (معلومة تماماً) ورد الفعل عند كل من A و B وهما معلومان فى الاتجاه ، ومجهولان فى القيمة فتصبح كالمسألة السابقة ، وعن طريق مثلث القوى ، وبمعرفة مقياس الرسم يمكن إيجاد قيم كل من رد الفعل عند A و B - انظر مثلث القوى بالشكل أعلاه .

بتحليل R_B رأسياً وأفقياً يمكن إيجاد رد الفعل الرأسى V_B والأفقى H_B ونحصل على النتائج التالية :

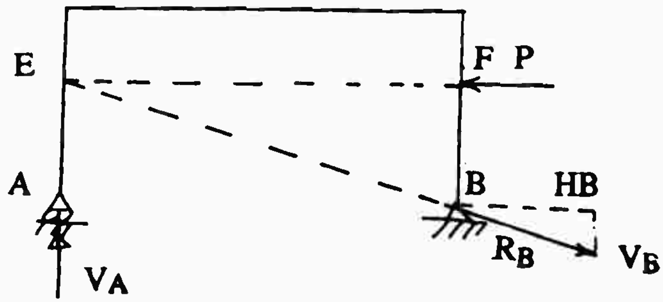
$V_A = 4.9\ KN \uparrow \quad , \quad V_B = 4\ KN \uparrow \ , \quad H_B = 3.1\ KN \rightarrow$

5 – المطلوب إيجاد ردود أفعال المنشأ ABCD الواقع تحت تأثير القوة P بالشكل التالى



الحــــل :

نطبق فى هذه المسألة نظرية القوى الثلاث بيانياً ، حيث إن الحمل أفقى ، ورد الفعل عند A رأسى أذا سوف يلتقيان على العمود AC وليكن فى النقطة E كما بالشكل أسفله نصل BE لنحصل على اتجاه رد الفعل عند B حيث يجب أن يمر بالنقطة E لتحقيق التوازن تبعاً لنظرية القوى الثلاث .



المثلث BEF هو مثلث القوى ، ويمكن إيجاد قيم ردود الأفعال عن طريق القياس أو بكتابة النسب التالية :

$$\frac{V_A}{\overrightarrow{BF}} = \frac{P}{FE} = \frac{R_B}{EB}$$

ومنها نجد :

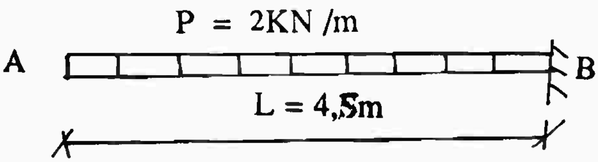
$$\frac{P}{\ell} = \frac{V_B}{a} \rightarrow V_A = P\frac{a}{\ell} \uparrow$$

$$\frac{R_B}{\sqrt{\ell^2 + a^2}} = \frac{P}{\ell} \qquad R_B = P\frac{\sqrt{L^2 + a^2}}{L}$$

ومركبات R_B هى :

$$V_B = P\frac{a}{\ell} \downarrow \quad , H_B = P$$

6 - الكابولى AB مثبت من طرفه B وحر من A والمطلوب إيجاد ردود أفعال هذا الكابولى عند التثبت B بيانياً . علماً بأن الكابولى معرض لحمل موزع توزيعاً منتظماً على الوحدة الأفقية الطولية .



الحـــل :

قبل إيجاد ردود الأفعال لابد من تقسيم الحمل الموزع ، وبالطبع كلما كان العدد المقسم إليه الحمل كبيراً كلما اقترب من الواقع وأصبح الحل دقيقاً . فى هذه المسألة سوف نقتصر على تقسيم الحمل إلى ثلاث مناطق ، ومن ثم تكون محصلة القوى فى كل منطقة (المناطق مسافاتها متساوية) مساوية لثلث المحصلة الكلية للحمل أى :

$$P_1 = P_2 = P_3 = \frac{1}{3}(P\,L) = \frac{1}{3} \times 2 \times 4.5 = 3 \text{ KN}$$

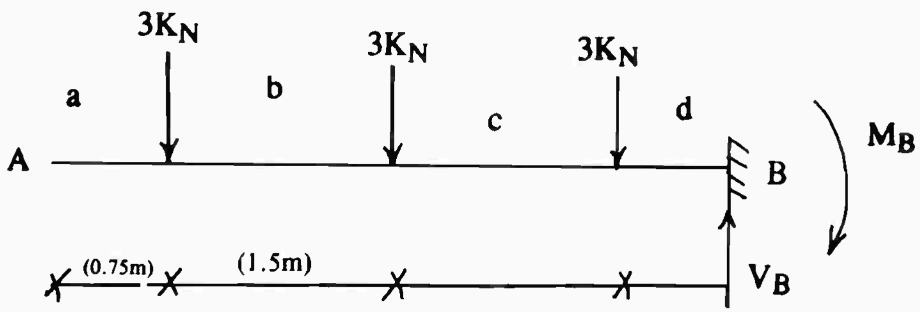
ونقطة تأثير هذه القوى (المحصلات الثلاث) هى منتصف كل منطقة ، وتكون بالتالى على الأبعاد التالية من A :

P_1 على بعد $\frac{1,5}{2} = 0.75$ متراً

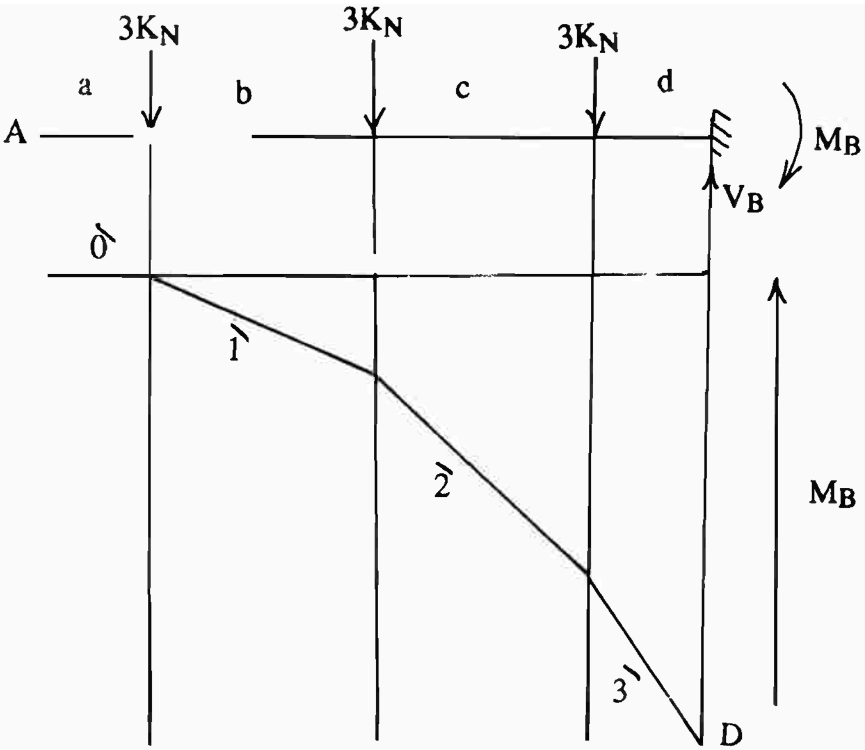
P_2 على بعد $1,5 + \frac{1,5}{2} = 2.25$ متراً

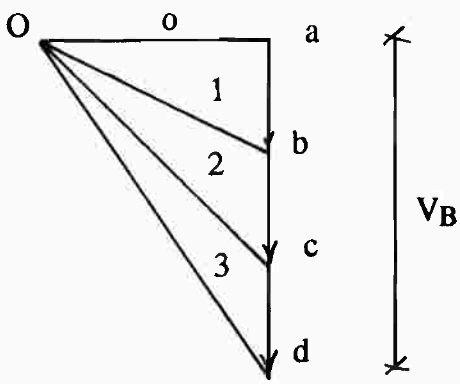
P_3 على بعد $3 + \frac{1,5}{2} = 3.75$ متراً

ونحصل على الشكل التالى للكابولى بعد توزيع القوى :



يمكن الآن تقسيم المساحة إلى مناطق تفصل بين كل منطقة والتالية خط عمل قوى كما هو موضح بالشكل .





مضلع الأشعة القطبى

يمكن الآن أن نرسم مضلع الأشعة القطبى - كما سبق شرحه وكما هو موضح بالرسم أعلاه - وبقياس الطول $\overrightarrow{da}$ نحصل على رد الفعل الرأسى V_B مع مراعاة مقياس الرسم . فى هذه الحالة ولحساب العزم عند B نختار القطب O على نفس الخط الأفقى مع a ومن O نرسم الأشعة ، ونوقعها على القوى بواسطة الموازيات `0 , `1 , `2 , `3 . الطول الرأسى المحصور بين أول موازٍ `0 وآخر موازى `3 يعطى قيمة العزم M_B (أى رد الفعل عند B) بقياسه ، وبمراعاة مقياس الرسم يمكن أن نجد النتائج التالية :

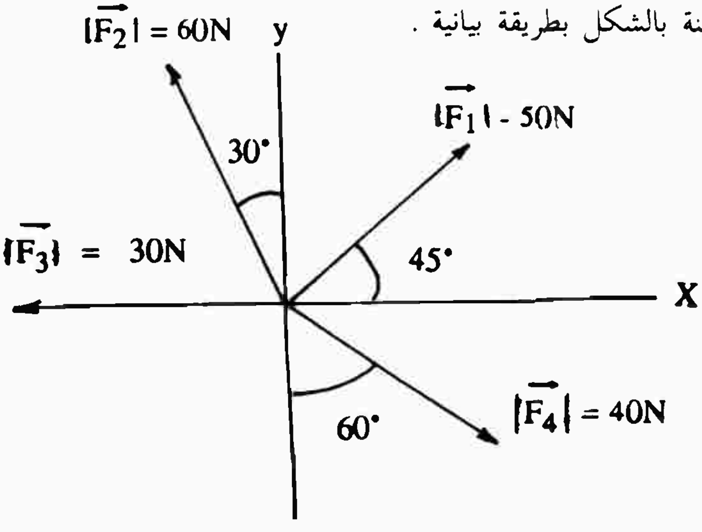
$$\overrightarrow{V}_B = \overrightarrow{da} \rightarrow |\overrightarrow{V}_B| = 9\ KN \uparrow$$

$$\overrightarrow{M}_B = \overrightarrow{CD} \rightarrow |\overrightarrow{MB}| = 20.25\ KN\ .\ m$$

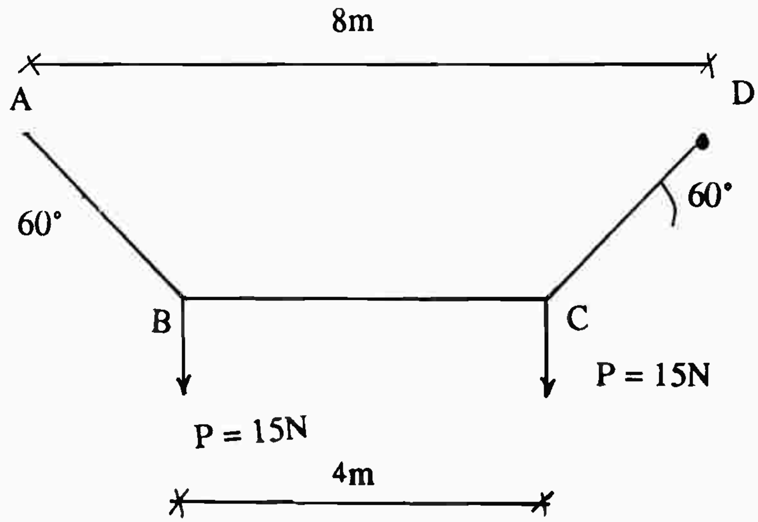
ويكون اتجاه $\overrightarrow{M}_B$ فى اتجاه دوران عقارب الساعة .

4.5 تمـــارين :

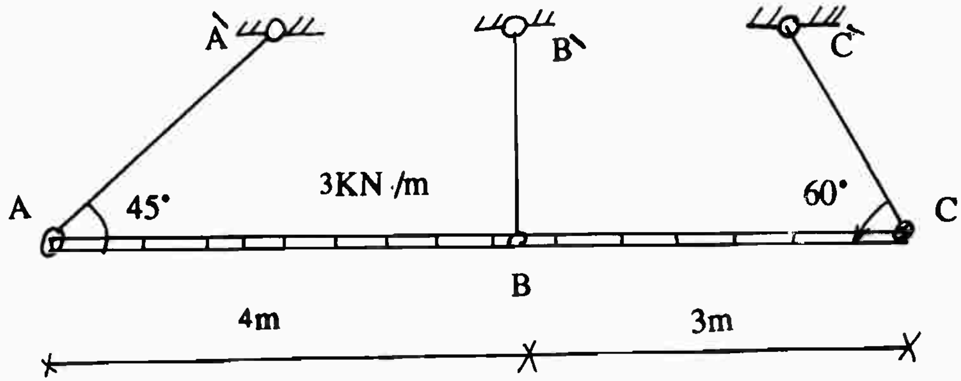
١ - المطلوب إيجاد القوة التى تتزن مع مجموعة القوى المبينة بالشكل بطريقة بيانية .



2 – الحبل المبين بالشكل التالى (ABCD) معرض للقوتين الرأسيتين المتساويتين (P = 15N) . والمطلوب إيجاد القوة فى مختلف أجزاءه بطريقة بيانية .



3 – الكمرة (ABC) معلقة بواسطة البندولات الثلاثة `AA ، `BB ، `CC والمطلوب إيجاد القوى المحورية بهذه البندولات الثلاثة بيانياً .



4 – المطلوب إيجاد عزم التثبيت للكابولى التالى بيانياً .