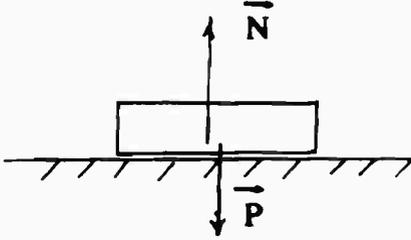


الباب الخامس

الاحتكاك

يقصد بالاحتكاك تلك القوة التي تنشأ عن تلامس نقطة مادية مع سطح خشن ، فتعمل تلك القوة على معاكسة حركة هذا الجسم أو تقليل تأثير القوى الخارجية عليه . يعتبر الاحتكاك إذاً قوة تعمل دائماً في اتجاه معاكس للقوى المؤثرة ، ولندرس هذا بشيء من التفصيل .



5.1 اتصال في حالة وجود احتكاك :

شكل 5.1

دعنا ندرس صندوق موضوع على سطح خشن أفقى كما هو موضح بالشكل 5,1 . تعتبر هذه الخزانة في حالة اتزان ، ويمكن أن نطبق عليها العلاقة (3.7) لتصبح :

$$\vec{N} + \vec{P} = 0 \dots\dots\dots (5.1)$$

حيث :

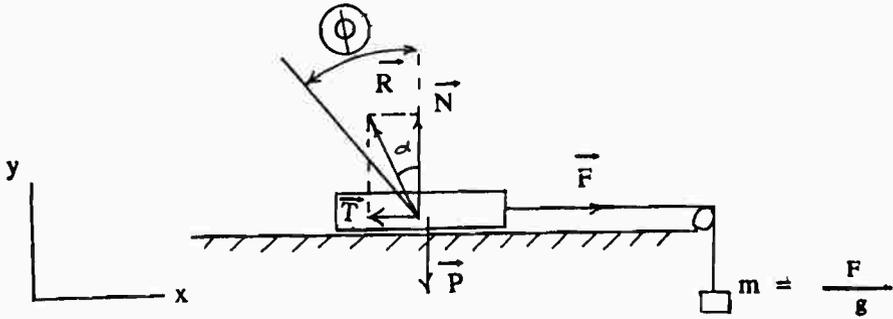
$$\vec{P} = \text{وزن الخزانة وهو رأسى}$$

$$\vec{N} = \text{رد فعل السطح وهو رأس لأعلى}$$

وواضح من شروط الاتزان أن قيمة كل من وزن الخزانة ، ورد فعل السطح عليها متساوية في المقدار ، ولكن اتجاهاتها متعاكسة ويجب أن يكون خط عملهما واحد .

ونحاول الآن التأثير على الخزانة بقوة في اتجاه موازٍ للسطح الخشن لنحصل على

الشكل 5.2 .



شكل 5.2

نفرض أن هناك كتلة يمكن زيادتها لنحصل بالتالي على قوة \vec{F} تزداد حسب الحاجة . بواسطة قانون نيوتن يمكن الحصول على قيمة F من العلاقة :

$$|\vec{F}| = m |\vec{g}| .$$

حيث \vec{g} هي متجه يمثل عجلة الجاذبية الأرضية .

لنفرض أن الخزانة سوف تتحرك عندما تزيد قيمة القوة عن F_0 ومن هنا ينشأ

لدينا ثلاث حالات وهي :

(أ) قيمة القوة $F_0 > F$.

(ب) قيمة القوة $F_0 = F$.

(ج) قيمة القوة $F_0 < F$.

الحالة الثالثة (ج) تعني أن الخزانة قد تحركت فعلاً ، وهي بالتالي تخضع لقوانين

علم الديناميكا وليست الإستاتيكا ، وبالتالى فإننا لن ندرسها فى هذا المجال ، فى الحالة

الأولى (أ) تكون الخزانة ثابتة وفى حالة أتران حيث إن F لم تبلغ بعد القيمة اللازمة

لتحريك الخزانة . أما الحالة الثانية فإن الخزانة تكون على وشك الحركة ، ولكن

يمكن أيضاً اعتبارها فى حالة اتران . ودعنا ندرس هاتين الحالتين (أ) و (ب) بشيء

من التفصيل :

الحالة (١) $F_0 > F$:

تكون القوى في حالة اتزان وهي تتمثل في :

- وزن الخزانة \vec{P} وهو رأسي إلى أسفل .
- رد فعل السطح الخشن \vec{N} وهو عكس اتجاه \vec{P} أي رأسي إلى أعلى ، وله نفس خط عمل الوزن \vec{p} .
- قوة الشد \vec{F} وهي في اتجاه أفقي - وهو الاتجاه الموجب للمحور X -
- قوة الاحتكاك \vec{T} وهي في الاتجاه الأفقي المعاكس للحركة المزمعة أي في الاتجاه السالب لمحور X - انظر اتجاه المحاور بالشكل 5.2 .

ويمكننا أن نكتب معادلات الاتزان التالية في اتجاه كل من المحورين الأفقي

$$\vec{P} = \vec{N} \quad , \quad \vec{F} = \vec{T} \quad \dots\dots\dots (5.2) \quad \text{والرأسي :}$$

هذا ويمكن إيجاد محصلة كل من القوتين \vec{N} و \vec{T} ولتكن \vec{R} حيث :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \quad \dots\dots\dots (5.3)$$

وتكون قيمة \vec{R} كما يلي :

$$|\vec{R}| = \sqrt{(N)^2 + (T)^2} \quad \dots\dots\dots (5.4)$$

أما اتجاهها فنفترض أنه يصنع زاوية مقدارها α مع المحور الرأسي بحيث :

$$\tan \alpha = \frac{|\vec{T}|}{|\vec{N}|} \quad \dots\dots\dots (5.5)$$

نلاحظ من المعادلة (5.2) أنه بزيادة قيمة القوة \vec{F} تزداد قيمة قوة الاحتكاك \vec{T} وذلك مع ثبات كل من الوزن \vec{P} ورد الفعل \vec{N} .

وبناء على المعادلتين (5.3), (5.4) فإن قيمة \vec{R} لا بد أن تزداد بزيادة \vec{T} وذلك رغم ثبات \vec{N} . ومن المعادلة (5.5) نجد أن الزاوية α لا بد أن تزداد قيمتها حيث إنها تتناسب طردياً مع قوة الاحتكاك \vec{T} . وتظل الزيادة في قيمة α - تبعاً لزيادة قوة الاحتكاك \vec{T} - حتى نصل إلى الحالة الثانية من دراستنا وهي الحالة ب.

$$\text{الحالة (ب) } F_0 = F :$$

في هذه الحالة تكون الخزنة على وشك الحركة إلا أنها مازالت في حالة أتران - ليكن نهاية طور الاتزان - ومن ثم فيمكن تطبيق المعادلات من (5.2) إلى (5.5) على تلك الحالة علماً بأن المعادلة (5.5) سوف يطرأ عليها تغيير بسيط وذلك نتيجة لبلوغ قوة الاحتكاك أقصى قيمة لها. إذ أن α في هذه الحالة ستبلغ أيضاً قيمتها العظمى ويرمز لها بالرمز ϕ حيث :

$$\tan \phi = \frac{|T|}{|N|} = \mu \quad \dots\dots\dots (5.6)$$

وتعرف ϕ بأنها زاوية الاحتكاك الداخلي للسطح الخشن وهي تختلف تبعاً للمادة المصنوع منها السطح، وتعتبر خاصية من خواص المادة، ويمكن تعيينها معملياً إذ أنها ثابتة لكل مادة. وتعرف ϕ كذلك بأنها القيمة الحدية (أو العظمى) للزاوية α .

ويمكن أن يعبر كذلك عن الاحتكاك بما يعرف بمعامل الاحتكاك الإستاتيكي μ وهو مرتبط بالزاوية ϕ كما هو واضح من المعادلة (5.6). وبديهي أن معامل الاحتكاك الإستاتيكي يعتمد على طبيعة السطح.

يمكن أن نكتب بناء على المعادلة (5.6) أن شرط الاتزان هو :

$$|\vec{T}| < \mu |\vec{N}| \quad \dots\dots\dots (5.7)$$

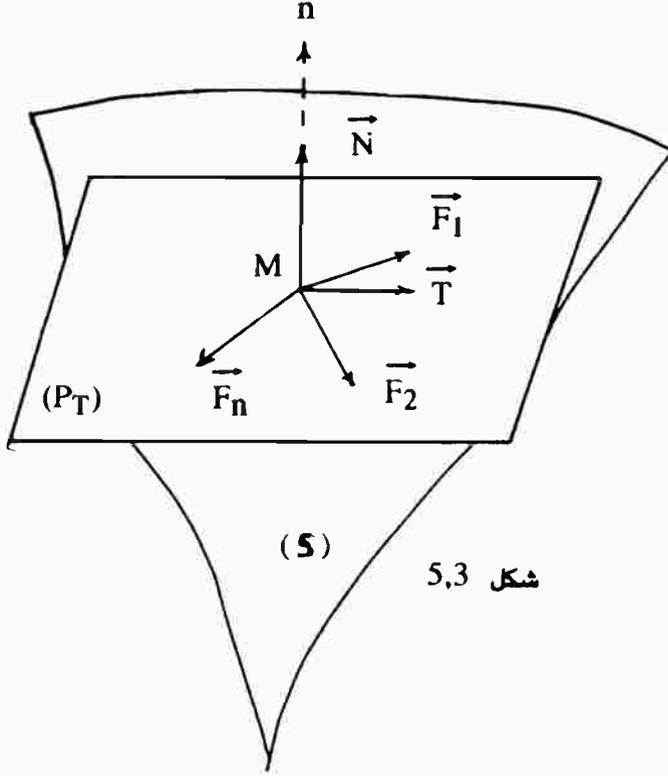
وتعرف المعادلة (5.7) بأنها حالة الاتزان العادية مثل الحالة (أ).

أما حالة الاتزان الحدى (الحالة « ب ») فإن المعادلة (5.7) تصبح :

$$|\vec{T}| = \mu |\vec{N}| \quad \dots\dots\dots (5.8)$$

ملاحظة هامة : تكون قوة الاحتكاك \vec{T} دائماً عكس الاتجاه المتوقع للحركة .

5.2 اتصال نقطة مادية بسطح خشن :



لنفترض أن النقطة المادية M تتصل بالسطح الخشن (s) شكل 5.3 . مجموعة القوى المتلاقية

$$\vec{F}_1 \cdot \vec{F}_2 \cdot \dots \cdot \vec{F}_n$$

تؤثر على هذه النقطة المادية وبالطبع نجد رد الفعل والذي يكون عمودياً على المستوى (P) وهو مستوى مماس . وحيث إن السطح خشن فلا بد أن توجد قوة الاحتكاك \vec{T} .

المعادلة (3.7) والتي تحدد شرط الاتزان تكنب في حالة وجود الاحتكاك كما يلي :

$$\vec{N} + \vec{T} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \dots\dots\dots (5.9)$$

ويجب كذلك تحقيق الشرط الخاص بالاحتكاك :

$$|T| < \mu |N| \dots\dots\dots (5.10)$$

حيث \vec{T} (قوة الاحتكاك) تصنع دائماً زاوية قائمة مع رد فعل السطح \vec{N}

وبالتالى فهى في مستوى مماس (P_t) انظر شكل 5,3 .

5.3 أمثلة محلولة :

- ١ - هناك جسم ينزل على سطح مائل خشن بسرعة ثابتة أعطيت له لحظة انطلاقه . فإذا علم أن هذا السطح يميل على الأفقى بزاوية مقدارها α . أوجد قيمة معامل الاحتكاك μ لهذا السطح بدلالة زاوية الميل α .

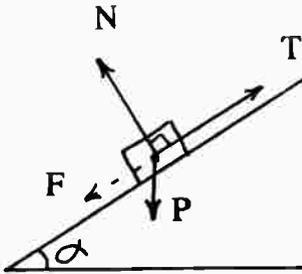
الحل :

لدينا من المعادلة (5.8) :

$$T = \mu N \dots\dots\dots (1)$$

ورد الفعل مرتبط بوزن الجسم بالعلاقة

$$N = P \cos \alpha \dots\dots\dots (2)$$



وحيث إن الجسم ينزل على الميل بسرعة ثابتة إذاً فالقوة الابتدائية التى بدأ بها لا تتغير ، وبالتالى فإن مركبة الجسم فى اتجاه السطح لا تؤثر على الحركة ، ومن ثم فإن

$$F = P \sin \alpha \dots\dots\dots (3)$$

هذه المركبة تكون :

وبما أن الجسم يتحرك فالاحتكاك أصبح غير قادر على منع الحركة وهو فقط يساوى المركبة للوزن في اتجاه الحركة حيث إن السرعة الابتدائية لا يؤثر فيها الاحتكاك فهي ثابتة :

$$F = T \dots\dots\dots (4)$$

بالتعويض في المعادلة (4) عن كل من F و T من المعادلات الثلاث السابقة لنجد :

$$P \sin \alpha = \mu N = \mu P \cos \alpha$$

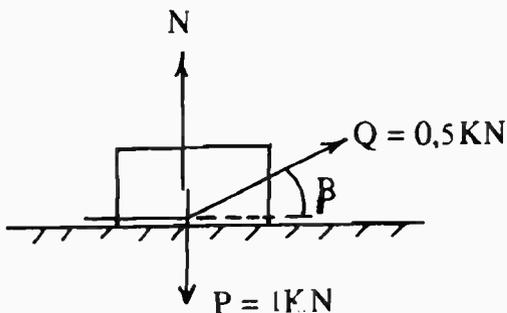
$$\therefore \mu = \tan \alpha$$

أي أن معامل الاحتكاك هو ظل زاوية الميل α ، وبالتالي فإن α لا بد أن تساوى زاوية الاحتكاك الداخلى ϕ للسطح المائل .

$$\tan \phi = \tan \alpha \rightarrow \phi = \alpha$$

2- صندوق وزنه 1 KN موضوع على سطح خشن أفقى زاوية الاحتكاك الداخلى له مقدارها 30° . أوجد الزاوية β على الأفقى التى يجب أن تؤثر بها قوة مقدارها 0.5 KN حتى تستطيع تحريك الصندوق .

الحل :



نلاحظ في هذه المسألة أننا مازلنا في حالة الاتزان حيث القوة Q هي التي سوف تبدأ في تحريك الصندوق ، وهي الحالة (ب) . ومن ثم نطبق معادلات الاتزان (5.2) :

$$N = P - Q \sin \beta = 1 - 0.5 \sin \beta \quad (1)$$

$$T = Q \cos \beta = 0.5 \cos \beta \quad (2)$$

أما المعادلة (5.8) فإنها تعطيا :

$$T = N \tan \phi = (1 - 0.5 \sin \beta) \tan 30^\circ \quad (3)$$

بالتعويض عن T من المعادلة (2) في (3) نجد :

$$0.5 \cos \beta = 0.577 - 0.289 \sin \beta$$

$$\cos \beta = 1.154 - 0.578 \sin \beta$$

$$\cos^2 \beta = 1.333 - 1.334 \sin \beta + 0.334 \sin^2 \beta$$

$$1 - \sin^2 \beta = 1.333 - 1.334 \sin \beta + 0.334 \sin^2 \beta$$

$$1,334 \sin^2 \beta - 1.334 \sin \beta + 0.333 = 0$$

ومنها :

$$\sin \beta = 0.5 \quad \rightarrow \quad \beta = 30^\circ$$

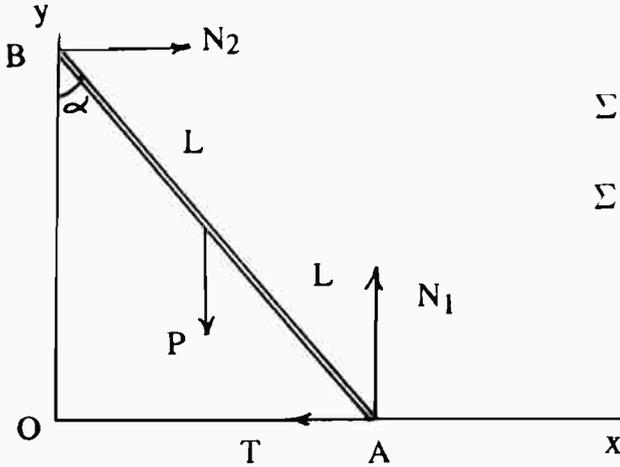
3 - سلم AB = 2L وزنه \vec{P} يستند على حائط رأسي أملس ، ونهايته الأخرى نستند على الأرض حيث معامل الاحتكاك μ :

(أ) أوجد ردود الأفعال العمودية عند نقط التلامس .

(ب) الزاوية α التي يجب أن يصنعها السلم مع الرأسى حتى يظل في حالة اتزان .

الحل :

معادلات الاتزان :



$$\sum x = 0 \rightarrow N_2 - T = 0$$

$$\sum y = 0 \rightarrow N_1 - P = 0$$

ويمكن كتابة معادلة الاتزان العزوم

حول النقطة A لنحصل على :

$$\sum M_A = 0 \rightarrow P L \sin \alpha - 2N_2 \cos \alpha = 0$$

ومن هذه المعادلات الثلاث نحصل على :

$$N_1 = P \quad , \quad N_2 = -\frac{1}{2} P \tan \alpha \quad , \quad T = -\frac{1}{2} P \tan \alpha$$

ولإيجاد الزاوية α نطبق المعادلة (5.8) :

$$T = \mu N_1$$

$$-\frac{1}{2} P \tan \alpha = \mu P \quad \rightarrow \quad \tan \alpha = 2\mu$$

5.4 تمارين :

1 - جسم يزن 200 نيوتن موضوع على سطح خشن يميل على الأفقى بزاوية مقدارها 15° . والمطلوب إيجاد زاوية الاحتكاك الداخلى للسطح المائل لكى يكون الجسم فى حالة اتزان .

2 - كرة موضوعة على أسطوانتين كما بالشكل التالى . فإذا كانت الأسطوانتان موضوعتان على سطح أفقى خشن ($\phi = 30^\circ$) يمنع المجموعة من الحركة . فإذا كان نصف قطر الكرة 10 سم ، ونصف قطر كل أسطوانة 15 سم . ووزن الكرة 250 نيوتن فى حين أن وزن كل أسطوانة 300 نيوتن ، والمطلوب - إذا أمكن - إيجاد وضع الاتزان تبعاً لهذه البيانات .

3 - قضيب AB وزنه 100 نيوتن . من الطرف B شد بقوة مقدارها 50 نيوتن تميل على الأفقى بزاوية α . أما الطرف الأخر A فهو مستند على سطح أفقى خشن بحيث يصنع زاوية مدارها 30° . فإذا كان طول القطيب 2 متر . فالمطلوب فى حالة الاتزان ما يلى :

(أ) زاوية الاحتكاك الداخلى للسطح الخشن فى حالة ($\alpha = 85^\circ$) .

(ب) الحد الأدنى للزاوية α حتى يصبح الاتزان ممكناً .