

الباب الثامن

مركز الثقل

لتكن مجموعة من النقط المادية والتي أوزانها معرفة كما يلي :

$$\vec{G}_1 = m_1 \vec{g}, \dots, \vec{G}_2 = m_2 \vec{g}, \dots, \vec{G}_i = m_i \vec{g}, \dots, \vec{G}_n = m_n \vec{g} \quad (8.1)$$

حيث g هي عجلة الجاذبية الأرضية وقيمتها 9.8 m/sec^2 .

أما $m_n, \dots, m_i, \dots, m_2, m_1$ فهي كتل تلك النقط المادية .

لو افترضنا الآن أن مجال الجاذبية الأرضية منتظم ، فتكون الأوزان بالمعادلة (8.1) أعلاه عبارة عن متجهات قوى رأسية ومتوازية ، مركز تأثير محصلة هذه القوى C ويكون C في هذه الحالة هو مركز القوى المتوازية $\vec{G}_1, \vec{G}_2, \dots, \vec{G}_i, \dots, \vec{G}_n$ ويعرف بمركز ثقل تلك النقط المادية ، ويمكن تعيينه بتطبيق المعادلات (2.23) ، (2.24) فنجد :

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i \vec{r}_i}{\sum G_i} \quad (8.2)$$

وإحداثيات C والتي تعتبر مركبات المتجه $\vec{r}_c$ تكون :

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i x_i}{\sum G_i}, \quad Y_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i y_i}{\sum G_i}, \quad Z_c = \frac{\sum_{i=1}^n G_i z_i}{\sum G_i} \quad (8.3)$$

عن طريق المعادلات (8.3) يمكن تعيين مركز ثقل أى جسم .

ومن الواضح أن مركز ثقل جسم ما هو النقطة التى يمكن أن نركز بها وزنه .

8.1 مركز الكتلة :

لو افترضنا مرة أخرى أن تغيرات عجلة الجاذبية g عند سطح الأرض يمكن أهملها ، فإننا فى هذه الحالة نستطيع أن نكتب المعادلة التالية :

$$\sum_{i=1}^n G_i = \sum_{i=1}^n m_i \quad g = g \sum_{i=1}^n m_i$$

بالتعويض عن G_i فى المعادلة (8.2) نحصل على :

$$\vec{r}_c = \frac{g \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{g \sum_{i=1}^n m_i} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \dots\dots\dots (8.4)$$

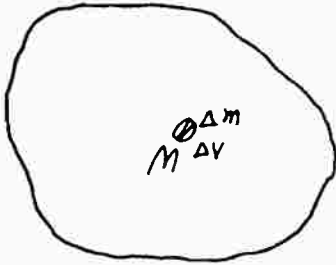
النقطة C تعرف فى هذه الحالة بمركز الكتلة للمجموعة التى يراد دراستها وإحداثياتها تكون :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{x}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} , \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{y}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$
$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{z}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \dots\dots\dots (8.5)$$

8.2 - مركز الكتلة لجسم مَادى متصل :

بالنسبة للأجسام المادية التى تحتل جزء من الفراغ (أى التى لها حجم) ، فإننا

نعرف الكثافة الحجمية لها كما يلى (شكل 8.1) :



Δm = كتلة عنصر M من الجسم المتصل .
 Δv = حجم هذا العنصر .
 وتكون كثافة M :

شكل 8.1

$$P = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{dm}{dV} \dots\dots\dots (8.6)$$

حيث P = الكثافة الحجمية .

أما إذا كان الجسم يحتل مساحة فقط (وليس حجماً) فإننا نعرف الكثافة السطحية (S) :

$$S = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta A} = \frac{dm}{dA} \dots\dots\dots (8.7)$$

أما إذا كانت الأوزان المادية لا تحتل مساحة فتصبح على شكل خط أو منحنى فإننا نعرف الكثافة الطولية كما يلي :

$$\lambda = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = \frac{dm}{dL} \dots\dots\dots (8.6)$$

وعندما تكون الكثافة ثابتة يقال إن الجسم له كثافة منتظمة أو أنه متجانس .

لتغيير العلاقات (8.4) ، (8.5) من علاقات مركز كتلة نقط مادية أو جزيئات إلى علاقات لجسم ما متصل نستبدل علامة التكامل بعلامة Σ ، ونستعين بالمعادلات (8.6) ، (8.7) ، (8.8) لنجد :

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_c &= \frac{\int p \vec{r} dV}{\int p dV} && \text{للحجوم} \\ \vec{r}_c &= \frac{\int s \vec{r} dA}{\int s dA} && \text{للمساحات} \\ \vec{r}_c &= \frac{\int \lambda \vec{r} dL}{\int \lambda dL} && \text{للأطوال} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8.9)$$

8.3 المركز الهندسي :

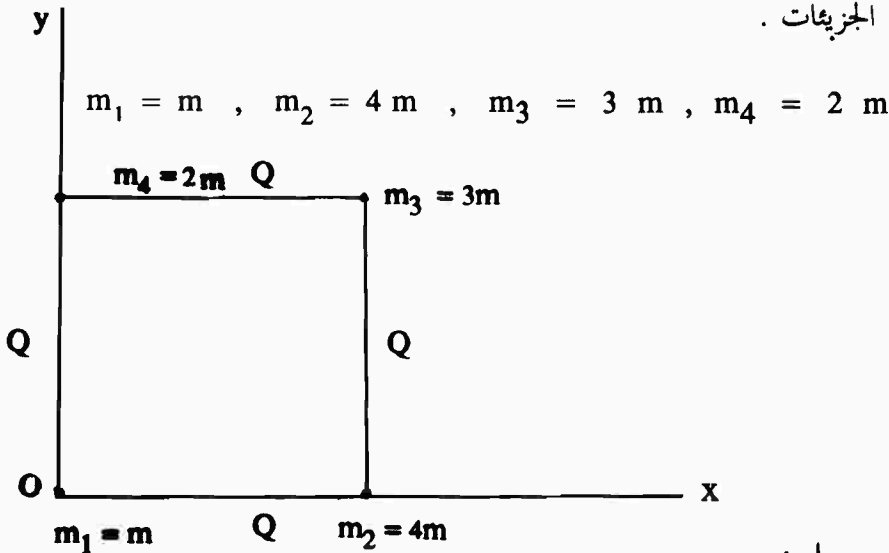
في حالة ما إذا كان الجسم متجانس فتكون الكثافة ثابتة ، وتصبح العلاقات أعلاه :

$$\left. \begin{aligned} \vec{r}_c &= \frac{\int \vec{r} dV}{\int dV} \\ \vec{r}_c &= \frac{\int \vec{r} dA}{\int dA} \\ \vec{r}_c &= \frac{\int \vec{r} dl}{\int dl} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8.10)$$

وهذه هي متجهات مواضع المركز الهندسي لأي شكل .

8.4 أمثلة محلولة :

١ - لتكن الأربع جزيئات على رؤوس المربع ذو الضلع a . المطلوب إيجاد مركز كتلة هذه الجزيئات .



الحل :

بتطبيق المعادلات (8.5) مع العلم أن هذه المسألة في المستوى نجد :

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i x_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

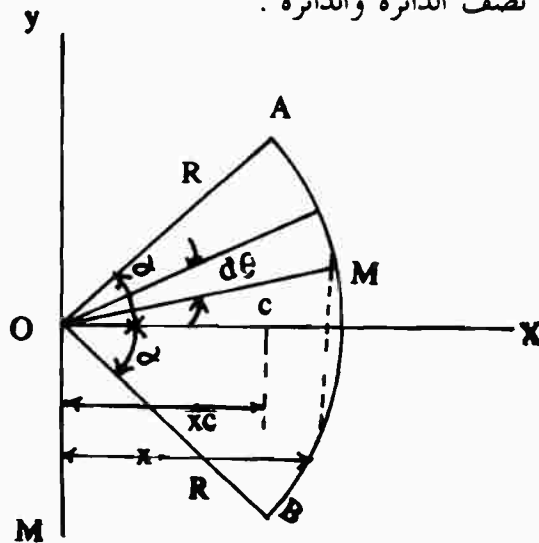
$$= \frac{m \cdot 0 + 4m \cdot a + 3m \cdot a + 2m \cdot 0}{m + 4m + 3m + 2m} = \frac{7}{10} a$$

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^4 m_i y_i}{\sum_{i=1}^4 m_i} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3 + m_4 y_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$= \frac{m \cdot 0 + 4m \cdot a + 3m \cdot a + 2m \cdot 0}{m + 4m + 3m + 2m} = \frac{a}{2}$$

وبالتالى تكون إحداثيات مركز الكتل الأربع C : $(\frac{7}{10} a, \frac{a}{2})$

٢ - أوجد مركز كتلة قوس دائرى متجانس بالشكل التالى :
ادرس حالتى نصف الدائرة والدائرة .



الحل :

القوس متماثل بالنسبة للمحور OX ، وبالتالي فإن مركزه لابد وأن يقع على المحور الأفقى OX فالمطلوب إذاً هو الإحداثى الأفقى فقط أى X_c .

بفر: أن نصف قطر القوس هو R ، وأن زاويته الكلية هي 2α كما بالشكل فإننا بتطبيق المعادلة (8.10) نحصل على :

$$X_c = \frac{\int X d\ell}{\int d\ell}$$

حيث إننا اعتبرنا أن $d\ell$ هي المسافة على القوس MM .

$$\therefore d\ell = M'M = R d\theta$$

$$X = R \cos \theta$$

$$\therefore X_c = \frac{R^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{R \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta} = R \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \theta d\theta}{\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta}$$

$$X_c = \frac{R [\sin \theta]_{-\alpha}^{\alpha}}{[\theta]_{-\alpha}^{\alpha}} = R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \dots\dots\dots (8.11)$$

حالة نصف الدائرة :

في هذه الحالة يمكن أن نطبق المعادلة (8.11) على أساس أن :

$$2\alpha = \pi \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$$

ومن ثم فإننا نحصل على :

$$X_c = R \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2R}{\pi} \dots\dots\dots (8.12)$$

حالة قوس دائرى كامل :

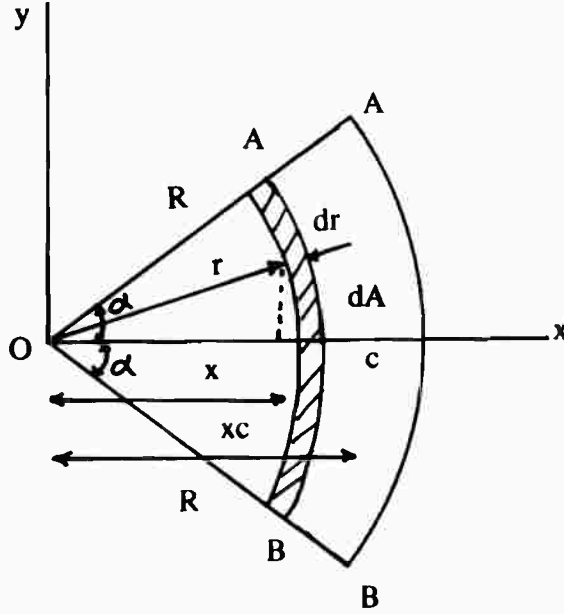
في هذه الحالة يمكن أيضاً أن نطبق المعادلة (8.11) وذلك بالشروط التالية :

$$2\alpha = 2\pi \rightarrow \alpha = \pi$$

$$X_c = R \frac{\sin \pi}{\pi} = 0$$

وهذا بالطبع يفيد أن مركز الدائرة سوف ينطبق على نقطة الأصل .

٣ - أوجد المركز الهندسي لقطعة دائرية متجانسة بالشكل التالي :
ادرس القطاع النصف الدائري .



الحل :

نفترض أن القطعة الدائرية لها نصف قطر R وتحتصر زاوية مقدارها 2α

في هذه الحالة العنصر المقترح هو على شكل قوس دائري مساحته dA وهو

المهتر بالشكل ، وهذه المساحة يمكن حسابها كما يلي :

$$dA = 2\alpha \cdot r \cdot dr$$

ويمكن في هذه الحالة تطبيق المعادلة الثانية من (8.10) نحصل على : (الوضع في هذه الحالة هو مساحة) .

$$X_c = \frac{\int x d A}{\int d A}$$

بالنسبة للعنصر المهرس وهو قوس دائري يمكن تطبيق المعادلة (8.11) الحاصل عليها في المثال السابق نجد لهذا العنصر :

$$X = \frac{r \sin \alpha}{\alpha}$$

حيث r هي نصف قطر العنصر المهرس و x هي مركز كتلته .

وبالتعويض عن x من المعادلة أعلاه في المعادلة (8.10) نجد :

$$X_c = \frac{2 \alpha \sin \alpha \int_0^R r^2 d r}{2 \alpha \cdot \alpha \int_0^R r d r} = \frac{\sin \alpha \int_0^R r^2 r d r}{\int_0^R d r}$$

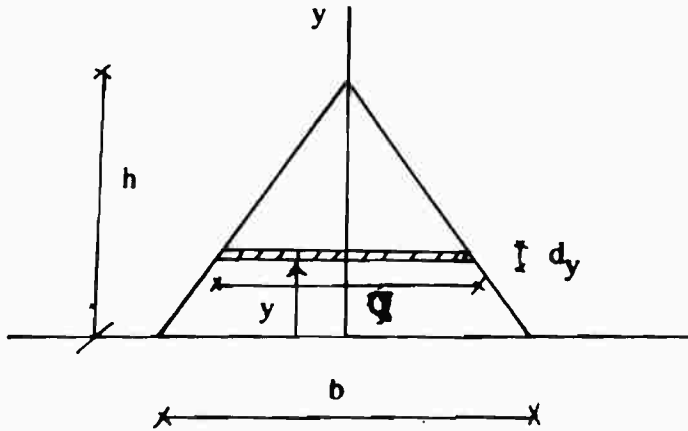
$$X_c = \frac{\sin \alpha}{\alpha} \frac{\left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R}{\left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R} = \frac{2 \sin \alpha}{3 \alpha} R \dots\dots\dots (8.13)$$

يمكن الآن دراسة الحالة الخاصة عندما يكون القطاع على مشكلة نصف دائرة حيث يمكن التعويض عن قيمة الزاوية α :

$$2 \alpha = \Pi \rightarrow \alpha = \frac{\Pi}{2}$$

$$X_c = \frac{2 \sin \frac{\pi}{2}}{3 \frac{\pi}{2}} R = \frac{4 R}{3 \pi}$$

٤ - المطلوب إيجاد مركز الشكل المثلثي المتساوي الساقين بالشكل التالي :



الحل :

لهذا المثلث نأخذ العنصر المهرش والذي مساحته $(a \cdot dy)$ وهو على بعد y من المحور الأفقي المطلوب في هذه المسألة هو إيجاد الإحداثي الرأسى لمركز الشكل حيث إن الإحداثي الأفقي يكون على المحور y نتيجة للتماثل .

لإيجاد y_c نطبق المعادلة الثانية في (8.10) لنجد :

$$y_c = \frac{\int y \, dA}{\int dA} = \frac{\int y \cdot a \, dy}{\int a \cdot dy}$$

وحيث إن a متغير بالنسبة للارتفاع فإننا يمكن من تشابه المثلثات إيجاد ما يلي :

$$\frac{a}{b} = \frac{(h - y)}{h} \rightarrow a = b \left(1 - \frac{y}{h} \right)$$

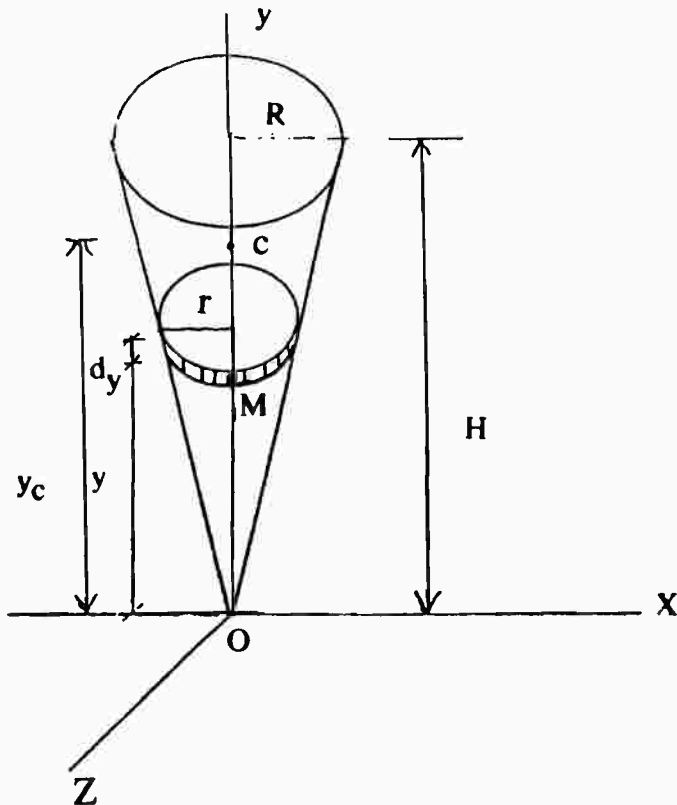
بالتعويض عن a في التكامل أعلاه نجد :

$$Y_c = \frac{\int_0^h y b \left(1 - \frac{Y}{h}\right) dy}{\int_0^h b \left(1 - \frac{Y}{h}\right) dy} = \frac{\int_0^h (hy - Y^2) dy}{\int_0^h (h - Y) dy} =$$

$$= \frac{\left[\frac{hY^2}{2} - \frac{Y^3}{3} \right]_0^H}{\left[hY - \frac{Y^2}{2} \right]_0^H} \quad Y_c = \frac{\frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3}}{h^2 - \frac{h^2}{2}} = \frac{h}{3}$$

5 - أوجد مركز الكتلة للمخروط القائم المتجانس ، والذي قاعدته دائرية

بالشكل التالي :



الحل :

كما بالشكل فإن المخروط ارتفاعه H ونصف قطر قاعدته هو R . فإذا أخذنا في هذه الحالة عنصر حجم dv وهو كما بالشكل شريحة دائرية نصف قطرها r وارتفاعها dy ، وهى توجد على ارتفاع y من نقطة الأصل O . ولو افترضنا أن C هو مركز كتلة المخروط وهو نتيجة للتماثل يكون واقعاً على المحور OY وبالتالي فإن إحداثيه فى اتجاه كل من OX و OZ معروف . أما بالنسبة للمحور OY فيجب إيجاداه وليكن Y_c .

بتطبيق المعادلة الأولى فى (8.10) نجد:

$$Y_c = \frac{\int y dV}{\int dV}$$

$$\text{حيث : } dv = \pi r^2 \cdot dy$$

ومن التشابه نجد النسب التالية :

$$\frac{r}{R} = \frac{Y}{H} \rightarrow r = R \frac{Y}{H}$$
$$\therefore dV = \pi R^2 \frac{Y^2}{H^2} dy$$

وبالتعويض عن dv بالتكامل أعلاه نجد :

$$Y_c = \frac{\int_0^H y \pi R^2 \frac{Y^2}{H^2} dy}{\int_0^H \pi R^2 \frac{Y^2}{H^2} dy} =$$

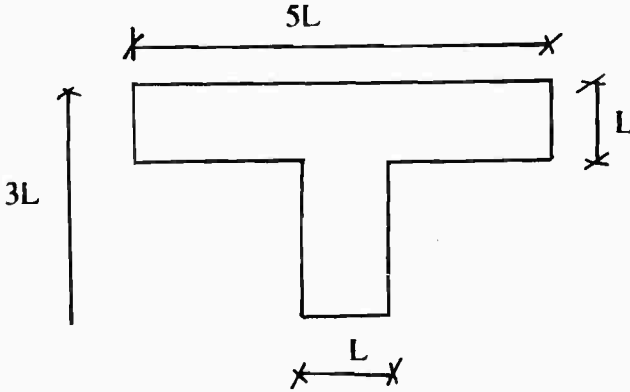
$$= \frac{\int_0^H Y^3 dy}{\int_0^H Y^2 dy} = \frac{\left[\frac{Y^4}{4} \right]_0^H}{\left[\frac{Y^3}{3} \right]_0^H} = \frac{3}{4} H$$

8.5 القطاعات الهندسية المركبة :

رأينا في الفقرات السابقة كيفية حساب مركز كتلة (أو مركز ثقل) قطاعات هندسية بسيطة سواء كانت في الفراغ أو المسوى أو كانت أطوال . ونتعرض في هذه الفقرة للقطاعات المركبة ، ويقصد بها تلك القطاعات المكونة من اثنين أو أكثر من الأشكال الهندسية البسيطة .

ولنأخذ لذلك المثال التالى لتعيين مركز ثقل قطاع مركب :

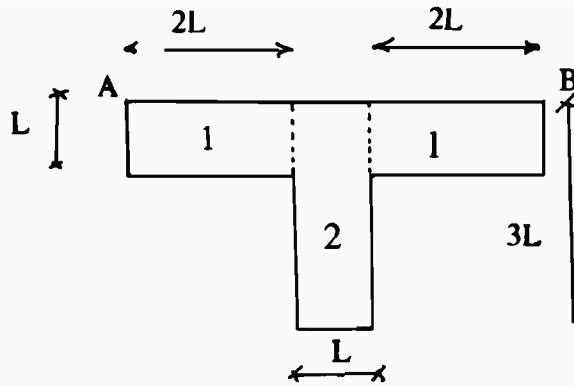
6 - أوجد مركز ثقل القطاع الهندسى على شكل حرف T بالشكل التالى ، حيث L وحدة طول



الحل :

يتضح من الشكل أن القطاع T يتكون من مستطيلين أحدهما أفقى ، والآخر رأسى وهو أيضاً متماثل بالنسبة لمحور رأسى يمر بمنتصفه ، وبالتالي فإن المطلوب فقط هو الموضع الرأسى لمركز الثقل .

بتقسيم الشكل إلى مستطيلين (1) ، (2) كما هو موضح يمكن عمل حسابات مركز الثقل بالجدول التالى :



	b	h	(b.h)	d	d(b.h)
1	2 L x 2	L	4 L ²		2 L ³
2	L		3 L ²	3L / 2	9 L ³ / 2
			7L ²		13 L ³ / 2

حيث : b : عرض المستطيل المعنى أو البعد الموازي للمحور الأفقى .
h : ارتفاع المستطيل المعنى أو البعد الموازي للمحور الرأسى .
d : المسافة بين مركز ثقل العنصر المعنى والشريحة العليا للشكل أى

. AB

وبالتالى تكون مساحة الشكل الكلية هى : (b.h) وهذا هو مقام المعادلة (8.10) . أما الخانة الرأسية الأخيرة فهى تمثل عزم هذه المساحة بالنسبة للشريحة العليا ، وبالتالى فهذه الكمية هى بسط المعادلة (8.10) ، ولذلك فإننا نجد مركز الثقل للشكل

$$\bar{v} = \frac{\sum d (b.h)}{\sum b h} = \frac{13 L^3 / 2}{7 L^2} = \frac{13 L}{14} \quad \text{كله :}$$

حيث v : المسافة بين مركز ثقل الشكل والشريحة العليا .

٧ - أوجد مركز ثقل المساحة المحددة بنصف الدائرة ACB التي نصف قطرها

R وبالخطين AD و DB المساويين هذا عنماً بأن $3R = CD$.

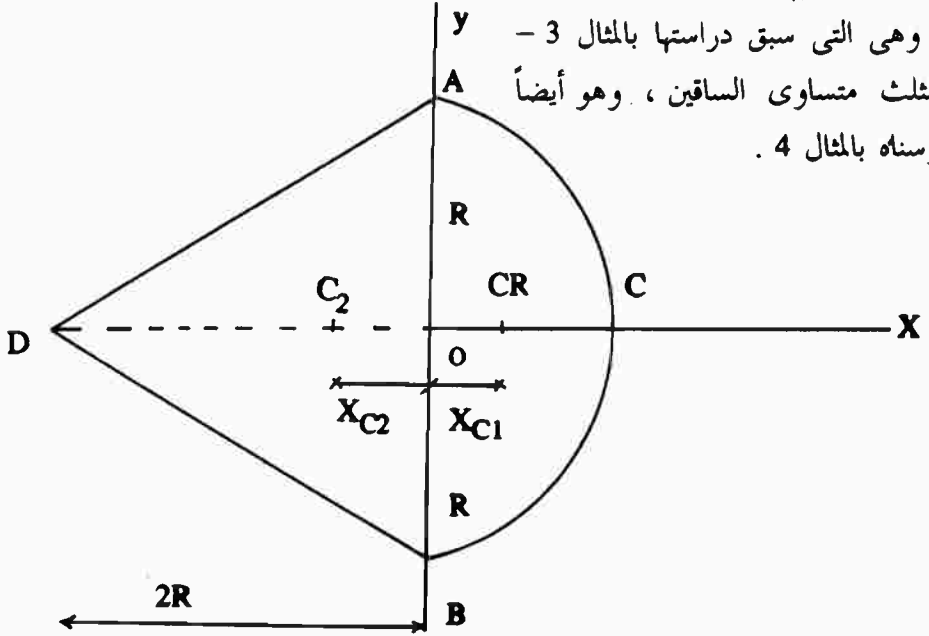
الحل :

يمكن تقسيم الشكل إلى نصف دائرة

- وهي التي سبق دراستها بالمثال 3 -

ومثلث متساوي الساقين ، وهو أيضاً

درسناه بالمثال 4 .



فمن المثال 3 نجد أن مركز ثقل نصف الدائرة هو (X_{C1}) :

$$X_{C1} = \frac{4}{3\pi} (1 R) = 0.424 R$$

أما من المثال 4 فإننا نجد أن مركز ثقل المثلث المتساوي الساقين (X_{C2}) هو :

$$X_{C2} = \frac{(2 R)}{3} = 0.667 R$$

والآن بعد أن وجدنا مركز ثقل كل من نصف الدائرة C_1 والمثلث المتساوي الساقين C_2 فإنه يمكننا بتطبيق المعادلة (8.10) إيجاد مركز ثقل الشكل كله :

$$X_c = \frac{\sum_{i=1}^n A_i X_i}{\sum_{i=1}^n A_i}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \pi R^2 (x_{c1}) + \frac{1}{2} 2 R^2 R (-x_{c2})}{\left[\frac{1}{2} \pi R^2 + \frac{1}{2} 2 R (2R) \right]}$$

نلفت نظر القارئ أن X_{c1} سالبة ومن ثم فهي تعطي نتيجة سالبة .

$$X_c = \frac{-0.668 R^3}{3.571 R^2} = -0.187 R$$

8.6 القطاعات المفرغة :

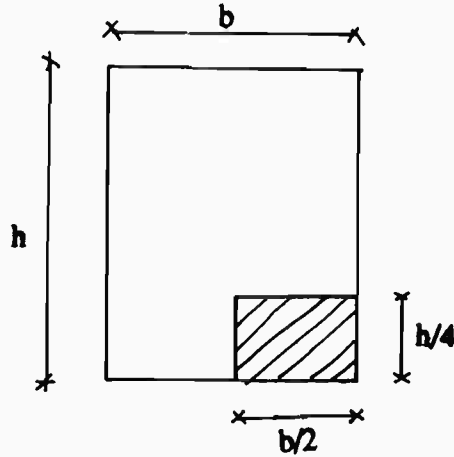
وهي تلك الأشكال الهندسية التي أستقطع منها جزء لسبب أو لآخر . وفي هذه الحالة لحساب مركز ثقلها نعتبر أن الجزء المستقطع مساحة سالبة وعزمه دائماً سالب كذلك ، وبالتالي نعوض عن تلك القيم السالبة في المعادلة (8.10) وذلك يوضحه المثال التالي :

$$٨ - \text{مستطيل } (b.h) \text{ أستقطع منه مستطيل مساحته } \left(\frac{h}{4} \cdot \frac{b}{2}\right) \text{ كما هو}$$

موضح بالشكل التالي . المطلوب إيجاد مركز ثقله .

الحل :

القطعة المستقطعة من المستطيل هي المهشرة بالشكل ، ويمكن كما أسلفنا اعتبارها سالبة المساحة والعزم حول الشريحة العليا أو أى عزم وهذا ما فعلناه فى الجدول التالى على أساس أن العنصر رقم (1) هو المستطيل الكامل ، والعنصر رقم (2) هو العنصر المهشر وهو سالب القيمة .



	b	h	b . h	d	d(bh)	d`	d`(bh)
1	b	h	bh	h / 2	bh ² / 2	h / 2	bh ² / 2
2	b / 2	h / 4	bh / 8	7h / 8	7bh ² / 64	36 / 4	3b ² h / 32
Σ			7bh / 8		25bh ² / 64		13b ² h / 32

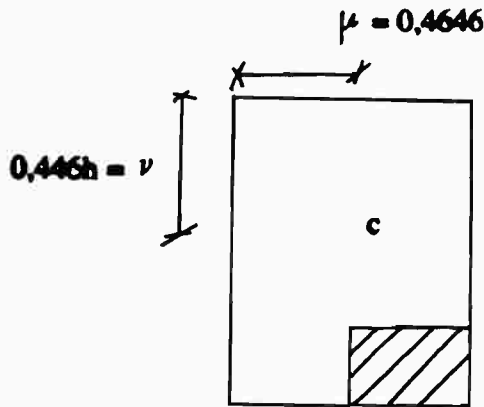
بالإضافة إلى الرموز المعروفة بالمثال 6 فإننا نجد في هذا الجدول :

$d =$ المسافة بين مركز ثقل العنصر والشريحة الرأسية اليسرى للشكل .

$$\nu = \frac{22bh^2 / 64}{7bh / 8} = \frac{25}{56} h = 0.446 h$$

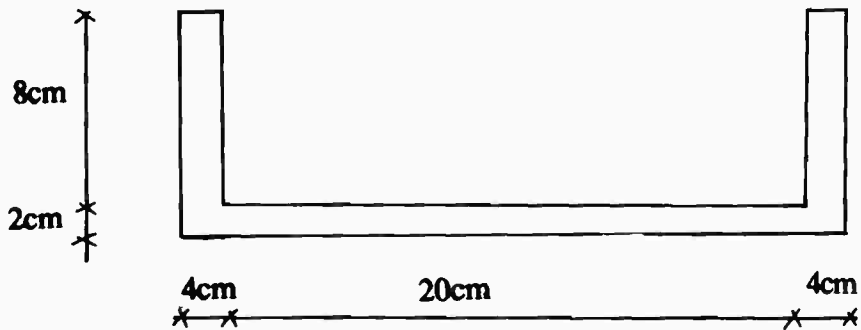
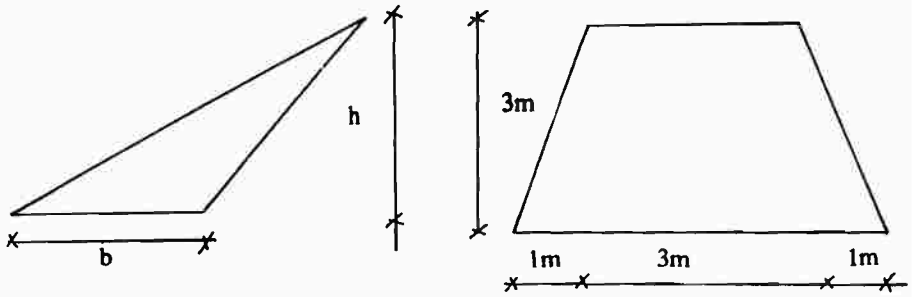
$$\mu = \frac{22bh^2 / 32}{7bh / 8} = \frac{13}{28} b = 0.446 b$$

حيث μ هي بعد مركز ثقل الشكل الناتج بعد الاستقطاع عن الشريحة اليسرى الرأسية .

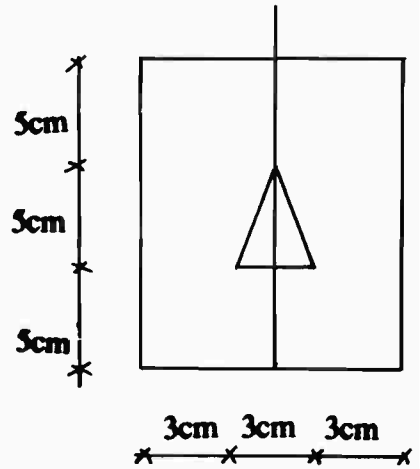
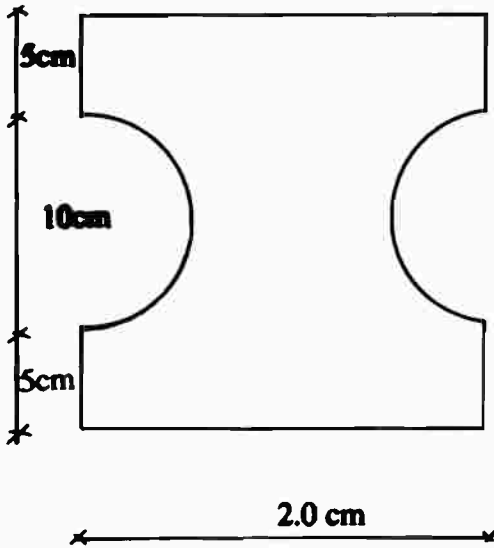


8.7 - تمارين :

1 - أوجد مراكز ثقل الأشكال الهندسية التالية :



2 - أوجد مركز ثقل الأشكال المفرغة التالية :



3 - أوجد مركز ثقل الشكل التالي :

