

## الفصل العاشر

### البرمجة الخطية \*

تعتبر البرمجة الخطية أحد أهم الطرق وأكثرها انتشاراً في علم الاقتصاد التطبيقي في الإدارة التي يمكن استخدامها في حل عدد كبير من المشكلات الإدارية المتعلقة بالإنتاج والتسويق والتمويل . أشرنا في الفصل الأول إلى أن H. J. Heinz قد استخدمت البرمجة الخطية لتحديد كمية المنتج السلازم شحنها من كل مصنع إلى كل مخزن ، وليست هذه إلا واحدة من آلاف التطبيقات الصناعية للبرمجة الخطية والتي تتراوح بين زيادة كفاءة محطات تكرير البترول إلى مساعدة البنوك في اختيار الأصول الخاصة بها . وسنقوم في هذا الفصل بشرح البرمجة الخطية وكيف يمكن استخدامها .

### ما هي البرمجة الخطية ؟

تعتبر البرمجة الخطية إحدى الطرق التي تسمح للقائمين على صنع القرار بحل مشكلات المعظمة والتدنية في وجود ضوابط معينة - أو قيود - تحدد ما ينبغي عمله . وعلى الرغم من أهمية البرمجة الخطية في الاقتصاد التطبيقي في الإدارة ، إلا أنها طريقة رياضية محضة تقتصر على إخبارنا بمعنى المعلومات التي جمعها ( أو افترضها ) صانع القرار أو المحلل . فإذا كانت هذه البيانات ( أو الافتراضات ) خاطئة فمن الطبيعي أن تأتي الحلول خاطئة هي الأخرى . نستخدم البرمجة الخطية في الحالات التي يكون فيها الهدف هو الحصول على أكبر أو أصغر ناتج من دالة معينة ، وهذه الدالة الهدف هي دالة خطية في المتغيرات التي يتم تحديدها . ولا بد أن تفي قيمة هذه المتغيرات بعدد من الشروط ، التي تأخذ شكل عدد من المتباينات . ولاحظ أن ذلك يختلف عن طريقة Lagrange حيث تكون الشروط على شكل مساويات . وأفضل طريقة لمعرفة ما تعنيه بكلمة الدالة الهدف أو القيود التي تعرض لها هذه الدالة - هو دراسة عدد من الحالات ولنبداً بشركة الغزل الأمريكية .

### تخطيط الإنتاج : إنتاج واحد

افترض أن أحد العمليات التي تقوم بها شركة الغزل الأمريكية هو تشطيب الأقمشة القطنية . وتعتمد سعة قسم التشطيب على قدرة المعدات وحجم العمالة المتوفرة للقيام بالعمل . وينظر مدير الشركة في شأن ثلاث طرق لاستخدامها : الطرق 1 و 2 و 3 . وهم يعلمون أن الربح لكل دفعة قطن هي 1.00 دولار للطريقة 1 و 0.90 دولار للطريقة 2 و 1.10 دولار للطريقة 3 . كما يعلمون أن العملية 1 تستخدم 3 ساعات من وقت الآلات للتشطيب لكل دفعة يتم معالجتها ، بينما العملية 2 تستهلك 2.50 ساعة والعملية 3 تستهلك 5.25 ساعة . كما أن العملية 1 تستهلك 0.4 سلعة من وقت العمالة لكل دفعة قطن يتم معالجتها والعملية 2 تستهلك 0.50 ساعة والعملية 3 تستهلك 0.35 ساعة عمالة . وأخيراً فإن أقصى عدد ساعات للآلات يمكن استخدامها هو 6,000 ساعة أسبوعياً ، بينما 600 ساعة أسبوعياً هي أقصى كمية من العمالة يمكن للشركة استخدامها . وبجعل  $Q_1$  تساوي عدد دفعات الأقمشة القطنية التي يتم معالجتها أسبوعياً باستخدام العملية 1 ، و  $Q_2$  تساوي عدد الدفعات التي يمكن معالجتها باستخدام العملية 2 ، و  $Q_3$  تساوي عدد الدفعات التي يتم معالجتها باستخدام العملية 3 ، فإنه يمكن النظر إلى مشكلة الإنتاج التي تواجهها شركة الأقمشة الأمريكية من زاوية البرمجة الخطية التالية : أي معظمة

$$\pi = 1.00Q_1 + 0.90Q_2 + 1.10Q_3 \quad (10.1)$$

وذلك طبقاً للشروط التالية :

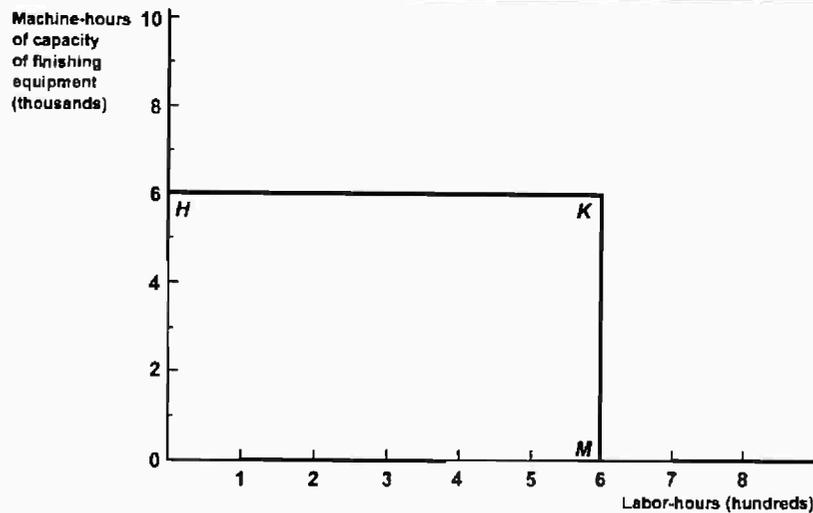
$$3Q_1 + 2.50Q_2 + 5.25Q_3 \leq 6,000 \quad (10.2)$$

$$0.40Q_1 + 0.50Q_2 + 0.35Q_3 \leq 600 \quad (10.3)$$

$$Q_1 \geq 0; Q_2 \geq 0; Q_3 \geq 0 \quad (10.4)$$

\* اشترك في تأليف هذا الفصل Edward D. Mansfield .

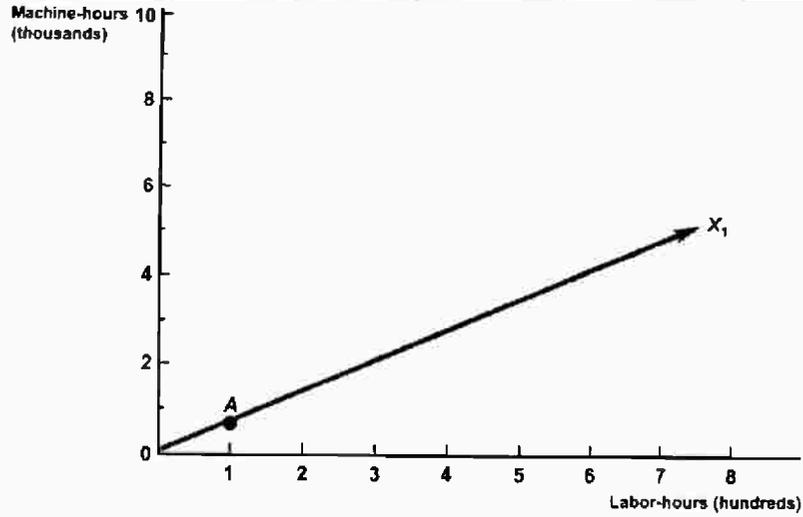
ودالة الهدف والتي تعرف أحياناً باسم دالة المعيار هي الدالة التي سوف يتم معزمتها في مسألة البرمجة الخطية في هذه الحالة ، والمعادلة (10.1) هي الصياغة المعبرة عن حجم أرباح الشركة في هذه الحالة . والشروط معطاة في المتباينات (10.2) حتى (10.4) ؛ حيث تنص المتباينة (10.2) على أن إجمالي ساعات التشغيل أسبوعياً لا بد أن يكون أقل من أو يساوي 6,000 ، وتنص المتباينة (10.3) على أن إجمالي ساعات العمالة أسبوعياً لا بد أن يكون أقل من أو يساوي 600 ، وتشتمل المتباينة (10.4) على شروط اللاسالية التي قد تبدو واضحة إلى الدرجة التي لا تستوجب ذكرها . ولا تأتي هذه الشروط واضحة بنفس الدرجة في حالة استخدام الحاسب الآلي الذي قد يخرج علينا بأحد الحلول التي تنطوي على ناتج سلبي. ونلاحظ أخيراً أن كلا من الدالة الهدف والشروط هي عبارة عن دوال خطية  $Q_1$  و  $Q_2$  و  $Q_3$  والتي تمثل المستويات التي يتم فيها إجراء هذه العمليات . ولحل هذه المشكلة نبدأ بتجميع توليفات عناصر الإنتاج القابلة للتنفيذ<sup>1</sup> ويوضح الشكل (10.1) - والذي يحتوي على إجمالي الساعات الأسبوعية من وقت العمالة التي تستهلكها الطرق الثلاثة على المحور الأفقي وإجمالي الساعات الأسبوعية لتشغيل الآلات التي تستخدمها الطرق الثلاثة على المحور الرأسي - التوليفات القابلة للتطبيق من إجمالي ساعات العمالة وساعات الآلات . والمنطقة القابلة للتطبيق هي المستطيل  $OHKM$  حيث أن القدر المتاح هو 600 ساعة عمالة و 6000 ساعة آلات .



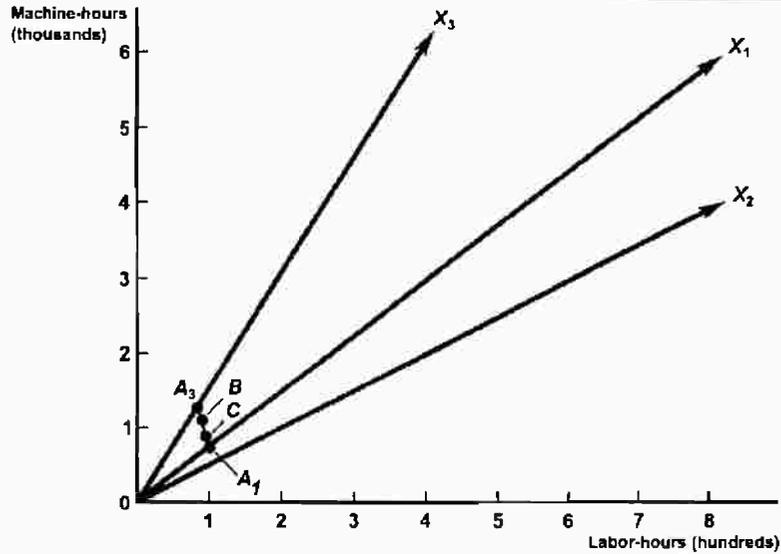
شكل (10.1) التوليفات الممكنة : بما أن أقصى قيمة متاحة لساعات العمالة هي 600 ولساعات الآلات هي 6,000 فإن منطقة التوليفات الممكنة هي المستطيل  $OHKM$  .

وكما أشرنا سابقاً فإن كل عملية يتم تحديدها بحيث تستخدم كميات متناسبة من عناصر الإنتاج . وبما إن كل النقاط التي لا تتغير عندها النسب تقع على خط مستقيم يمر بنقطة الأصل ، فإنه يمكننا تمثيل كل عملية بخط مستقيم أو شعاع يمر بتلك النقطة . وفي الشكل (10.2) نجد أن الشعاع  $OX_1$  يعبر عن العملية 1 ، فالعملية 1 تستهلك 3 ساعات آلات للتشغيل و 0.4 ساعة عمالة لكل دفعة يتم معالجتها . أي أنها تستخدم 7.5 ساعة للتشغيل لكل ساعة عمل . لذلك فإن الشعاع  $OX_1$  يحتوي كل النقاط التي تكون فيها النسبة بين الآلات والعمالة هي 1 : 7.5 . وتشير كل نقطة على الشعاع إلى مستوى إنتاج معين . فمثلاً ، تشير النقطة A (حيث يتم استخدام 100 ساعة عمالة و 750 ساعة آلات) إلى إنتاج حجمه 250 دفعة أسبوعياً حيث أن العملية 1 تستخدم 0.4 ساعة عمالة و 3 ساعات لتشغيل الآلات لكل دفعة . وبالإضافة إلى ذلك ( وبما أن كل النقاط التي تكون فيها النسبة بين العمالة والآلات 1 : 7.5 موجودة على الشعاع  $OX_1$  ) فإنه يمكن إيجاد كافة معدلات الإنتاج الممكنة على الشعاع  $OX_1$  . كما يمكن إيجاد شعاع يمثل كل من العمليات الثلاثة . ويوضح الشكل (10.3) العمليات الثلاثة ، حيث يعبر  $OX_2$  عن العملية 2 و  $OX_3$  عن العملية 3 ويتم صياغة كل شعاع بنفس العملية التي تم بها صياغة  $OX_1$  ليمثل العملية 1 .

<sup>1</sup> النقاش التالي لهذه المسألة مشابهة في العديد من النواحي ( على الرغم من أن المشكلة نفسها مختلفة إلى حد كبير ) إلى المشكلة الموجودة في : W. Baumol, *Economic Theory and Operations Analysis*, 3<sup>rd</sup> ed. (Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1972), pp. 296-310.



شكل (10.2) التعبير عن طريقة 1 بشعاع  $OX_1$  على كافة النقاط التي تكون فيها النسبة بين التشغيل والعمالة هي 1 : 7.5 .

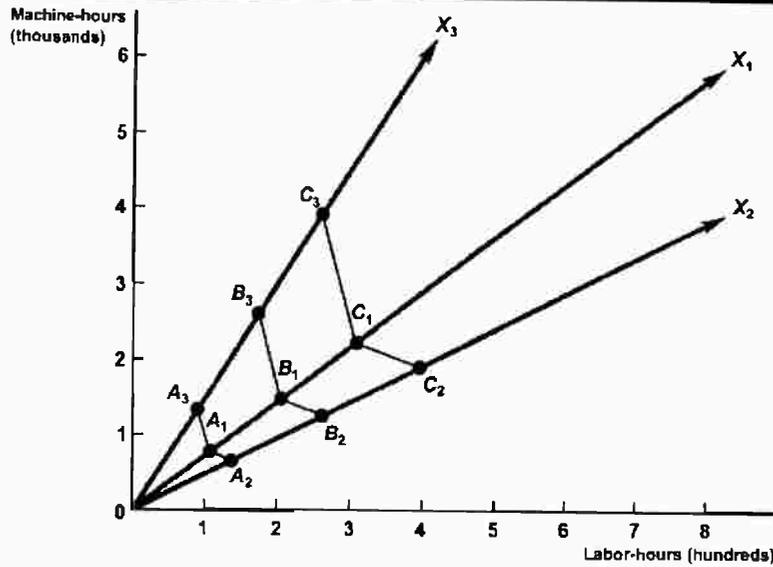


شكل (10.3) أشعة الخطوط المستقيمة تمثل الطرق 1 و 2 و 3 : منحني الناتج المتساوي المناظر لناتج قدرة 250 دفعة أسبوعياً ، ويحتوي على كل نقاط القطعة المستقيمة التي تصل  $A_1$  بـ  $A_3$  .

وباستخدام هذه الأشعة المستقيمة يمكننا رسم منحنيات الناتج المتساوي - المنحنيات التي تحتوي على كل توليفات عناصر الإنتاج التي يمكنها تحقيق كمية معينة من الإنتاج.<sup>2</sup> ومنحنى الناتج المتساوي هنا له نفس المعنى الذي كنا نقصده في الفصل السابع ، إلا أنه يوجد فرق وحيد هو أن المنحنيات المشار إليها في هذا الفصل هي أكثر استواءً وسلاسة من تلك الوارد تفصيلها في الفصل السابع . ولإيضاح هذه النقطة ، دعنا نرسم منحنى الناتج المتساوي لحجم إنتاج 250 دفعة أسبوعياً . يتضح من الشكل (10.3) أن النقطة  $A_1$  على  $OX_1$  هي النقطة التي تشير إلى إنتاج حجمه 250 دفعة أسبوعياً ، والنقطة  $A_3$  على  $OX_3$  تشير إلى إنتاج حجمه 250 دفعة أسبوعياً . لذلك فإن النقطتين  $A_1$  و  $A_3$  تقعان على منحنى الناتج المتساوي

<sup>2</sup> للتبسيط فإننا نتعامل مع كل دفعة يتم إنتاجها على أنها كمية متساوية من الإنتاج بغض النظر عن العملية المستخدمة . من الواضح أن مثل هذا الشرط قد لا يكون صحيحاً ، لكن ذلك لا يشكل اختلافاً هاماً في هذا المثال .

الذي يمثل 250 دفعة أسبوعياً من الناتج . وعلاوة على ذلك فإن أي نقطة تقع على القطعة المستقيمة التي تصل  $A_1$  و  $A_3$  تقع على هذا المنحنى أيضاً ، لأن الشركة يمكنها استخدام العملية 1 والعملية 3 في نفس الوقت للحصول على ناتج 250 دفعة أسبوعياً . فمثلاً تشير النقطة  $B$  إلى الحالة التي تستخدم عندها العملية 1 لإنتاج 25 دفعة والعملية 3 لإنتاج 225 دفعة والنقطة  $C$  تشير إلى الحالة التي تستخدم فيها العملية 1 لإنتاج 150 دفعة والعملية 3 لإنتاج 100 دفعة . وبتغيير نسبة إجمالي الإنتاج الناشئ عن استخدام كل طريقة ، يمكن الحصول على كل النقاط على القطعة المستقيمة التي تصل بين  $A_1$  و  $A_3$  .



شكل (10.4) منحنيات الناتج المتساوي عند مستويات معينة من الإنتاج :  $A_3A_1A_2$  هو منحنى الناتج المتساوي المناظر لقدرة 250 دفعة أسبوعياً و  $B_3B_1B_2$  إلى 500 دفعة أسبوعياً و  $C_3C_1C_2$  إلى 750 دفعة أسبوعياً .

في الشكل (10.4) إذا أردنا إكمال منحنى الناتج المتساوي المناظر لإنتاج حجمه 250 دفعة أسبوعياً ، فإننا نقوم بتوصيل  $A_1$  —  $A_2$  ، والنقطة التي تمثل إنتاج حجمه 250 دفعة أسبوعياً تقع على المستقيم  $OX_2$  . لذلك فإن منحنى الناتج المتساوي الكامل هو  $A_3A_1A_2$  . (ولأول وهلة قد يتساءل القارئ لماذا لا يكون الجزء المستقيم الواصل بين  $A_2$  و  $A_3$  جزءاً من منحنى الناتج المتساوي . حيث أنه يمثل التوليفات المختلفة للعمل وقدرة التشطيب لتحقيق إنتاجاً حجمه 250 دفعة أسبوعياً . والسبب في استبعاد ذلك هو أن كل النقاط الواقعة على القطعة المستقيمة  $A_3A_2$  تنتمي إلى الكفاءة . فهي تستخدم نفس الكمية من أحد المستلزمات وكمية من المستلزم الآخر أكبر من الكمية المستخدمة في النقاط على  $A_3A_1A_2$  . كما يوضح الشكل (10.4) منحنيات أخرى للناتج المتساوي ، حيث يشير  $B_3B_1B_2$  إلى إنتاج قدره 500 دفعة أسبوعياً و  $C_3C_1C_2$  إلى 750 دفعة أسبوعياً .

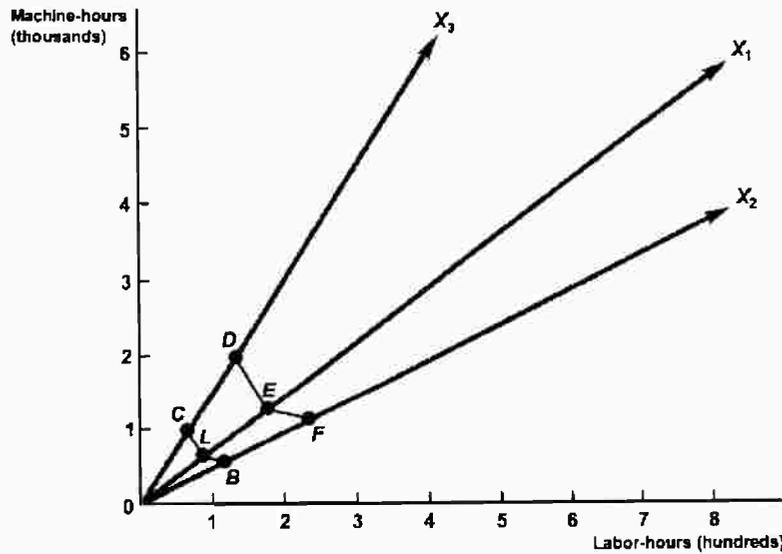
هذا وينبغي أن نضع ثلاثة اعتبارات في أذهاننا بخصوص شكل منحنيات الناتج المتساوي في مشكلات البرمجة الخطية . (1) أنها تتكون من سلسلة من القطع المستقيمة المتصلة وليست تلك المنحنيات السلسة التي قدمتها النظرية التقليدية في الفصل السابع ، لكن إذا كان عدد العمليات الممكنة كبيراً جداً فإنه يمكن تقريب منحنيات الناتج المتساوي إلى المنحنيات التقليدية .<sup>3</sup> (2) ميل هذه المنحنيات سالب أو على الأقل غير موجب . (3) أنها محدبة وهو ما يعني أن المعدل الحدي للإحلال الفعلي لعنصر ما بالنسبة لعنصر آخر يتناقص بزيادة إحلال العنصر الأول محل العنصر الآخر . وبغض النظر عن كونها ليست بالسلسلة التي افترض الفصل السابع وجودها ، فإن منحنيات الناتج المتساوي في البرمجة الخطية يكون لها نفس الشكل الأساسي مثل تلك الموجودة في الفصل السابع .

<sup>3</sup> السبب الأساسي لكونها تختلف عن الشكل التقليدي هو أن هناك عدد محدود من الطرق يفترض توافرها بالنسبة للشركة . وبزيادة عدد هذه الطرق فإن منحنيات الناتج المتساوي تقترب أكثر وأكثر من شكل المنحنى في النظرية التقليدية .

لما كان المعدل الحدي للإحلال الفني لمنحنيات الناتج المتساوي يفتقر إلى أحد العناصر بالمقارنة بالعنصر الآخر ، لذا فإن البرمجة الخطية تتوافق تماماً مع قانون تناقص الغلة . لكن افتراض الخطية في مشكلات البرمجة الخطية يوحي بأنه لا يوجد غلة حجم تناقصية أو تزايدية ، و يفترض دائماً أن دالة الإنتاج خط مستقيم ومتجانس وهو ما يعني وجود غلة حجم ثابتة .

## كيفية الحصول على حل بياني

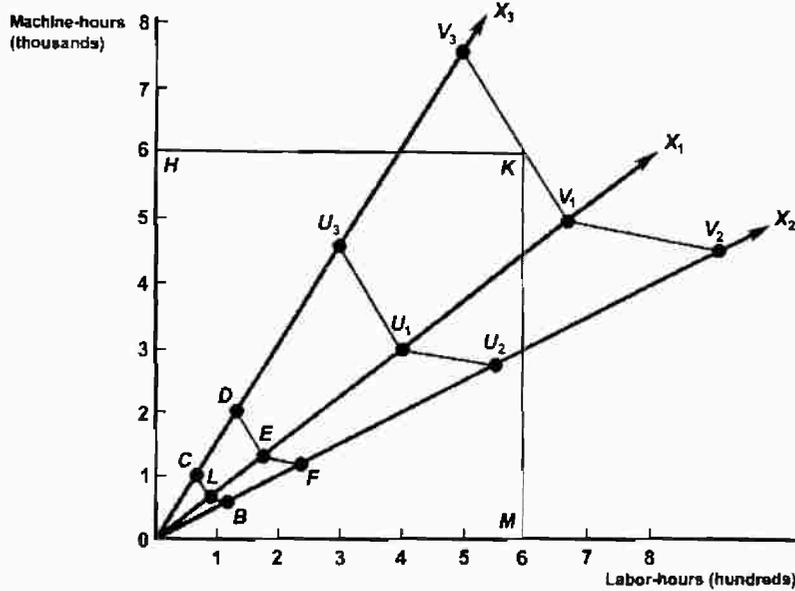
وبالعودة إلى مشكلة الغزل الأمريكية نجد أن الخطوة التالية نحو حل مشكلة البرمجة الخطية هي كيفية صياغة منحنيات الأرباح المتساوية ، وبعد ذلك يمكننا الحصول على الحل بيانياً . وإذا كان كل من منحنيات الناتج المتساوي في الشكل (10.4) يعبر هندسياً عن أحد التوليفات التي يمكننا من الحصول على كمية معينة من الإنتاج ، فأنتا نقوم بصياغة كل من منحنيات الأرباح المتساوية بحيث يشمل علي كافة توليفات المنتجات التي يمكنها تحقيق كمية معينة من الربح . ولإيضاح ذلك دعنا نقوم بصياغة منحني الأرباح المتساوية المناظر لربح قدره 200 دولار . لما كان الربح لكل دفعة هو 1.00 دولار أسبوعياً للعملية 1 ، فإن النقطة المناظرة لإنتاج حجمه 200 دفعة أسبوعياً على الخط  $OX_1$  تقع على منحني الأرباح المتساوية . وبما أن كل دفعة يتم إنتاجها باستخدام العملية 1 تتطلب 3 ساعات للتشطيب و 0.4 ساعة عمالة ، فإن النقطة الواقعة على المستقيم  $OX_1$  والمناظرة لإنتاج حجمه 200 دفعة أسبوعياً هي  $L$  في الشكل (10.5). وبالمثل ، فيما أن الربح لكل دفعة باستخدام العملية 2 هو 0.90 دولار ، فإن النقطة المناظرة لإنتاج حجمه 222.2 دفعة أسبوعياً على الخط  $OX_2$  تقع على ذلك المنحني ، وهي النقطة  $B$  . وبما أن الربح لكل دفعة يتم إنتاجها باستخدام العملية 3 هي 1.10 دولار ، فإن النقطة المناظرة لإنتاج حجمه 181.1 دفعة أسبوعياً على الخط  $OX_3$  تنتمي لذلك المنحني، وهي النقطة  $C$  . وأخيراً ولنفس الأسباب التي وضعناها في الاعتبار في حالة الناتج المتساوي ، فإنه يمكننا أيضاً تضمين كل النقط الواصلة بين هذه النقاط . لذلك فإن منحني الأرباح المتساوية الذي يشير إلى ربح قدرة 200 دولار أسبوعياً هو  $CLB$  في الشكل (10.5) .



شكل (10.5) منحنيات الأرباح المتساوية لمستويات معينة من الأرباح : المنحني  $CLB$  يمثل مستوى أرباح 200 دولار أسبوعياً ، والمنحني  $DEF$  يمثل 400 دولار أسبوعياً .

وبالاستعانة بنفس هذا الأسلوب ، يمكننا صياغة منحنيات الأرباح المتساوية لمستويات مختلفة من الأرباح . وكما هو الحال بالنسبة لمنحنيات الناتج المتساوي في الشكل (10.4) ، فإن منحنيات الأرباح المتساوية في الشكل (10.5) تكون متوازية . فإذا أجرينا مقارنة بين  $DEF$  (منحني الأرباح المتساوية المقابل لـ 400 دولار) و  $CLB$  (المنحني المناظر لـ 200 دولار) نجد أنهما متوازيان ، أي أن ميل  $CLB$  يساوي ميل  $DEF$  وكذلك ميل  $LB$  مساوي لميل  $EF$  . وبعد صياغة منحنيات الأرباح المتساوية ، يمكننا بسهولة حل مشكلة الشركة . فكل ما نحتاج عمله هو إضافة

منحنيات الأرباح المتساوية إلى الرسم [ شكل (10.1) ] الذي يوضح التوليفات الكفءة بين توليفات عناصر الإنتاج ، وقد تم ذلك في الشكل (10.6) . ومن الواضح أن المشكلة هي إيجاد النقطة على المستطيل  $OHKM$  التي تقع على أعلى منحنيات الأرباح المتساوية . ومن الواضح من الشكل (10.6) أن أفضل نقطة هي  $K$  . فإذا قمنا بصياغة عدد من منحنيات الأرباح المتساوية ، مثل  $U_3U_1U_2$  و  $V_3V_1V_2$  . فإن أعلى منحنى للأرباح المتساوية الذي يمكن صياغته بحيث يشتمل على كافة النقاط الواقعة على  $OHKM$  هو  $V_3V_1V_2$  . أما النقطة الوحيدة في  $OHKM$  التي تقع على  $V_3V_1V_2$  هي  $K$  .



**شكل (10.6) منحنيات الأرباح المتساوية وتوليفات عناصر الإنتاج الكفءة :** النقطة المثلى هي  $K$  ، حيث يتم استخدام 6,000 ساعة للتشطيب و 600 ساعة عمالة ، والأفضل استخدام العمليتين 3 و 1 فقط .

ومعرفة أن  $K$  هي نقطة مثالية ، كيف يمكن تحديد أفضل قيم لـ  $Q_1$  و  $Q_2$  و  $Q_3$  ؟ أولاً ، بما أن  $K$  تقع على القطعة  $V_3V_1$  ، فإن ذلك يعني أننا لا تكون النقطة المثلى إلا في حالة استخدام العمليتين 3 و 1 فقط . من كل ذلك يتضح أن الحل الأمثل لمثل هذا النوع من مشكلات البرمجة الخطية يقتضي استخدام عدد من العمليات لا يتجاوز عدد الشروط أو الضوابط الموجودة اثنين في هذه الحالة ( مع استبعاد شروط اللامالية ) . ثانياً ، بما أن  $K$  هي النقطة التي يتم عندها استخدام 6,000 ساعة للتشطيب و 600 ساعة من العمالة ، فإن :

$$3Q_1 + 5.25Q_3 = 6,000 \quad (10.5)$$

$$0.40Q_1 + 0.35Q_3 = 600 \quad (10.6)$$

وبحل المعادلتين (10.5) و (10.6) آنياً ، نجد أن أفضل قيم هي  $Q_1 = 1,000$  و  $Q_3 = 571.4$  . أي أن شركة الغزل الأمريكية سوف تمعظم أرباحها إذا أنتجت 571 دفعة أسبوعياً باستخدام العملية 3 و 1,000 دفعة أسبوعياً باستخدام العملية 1 .

## حالة الموارد غير المحدودة

لمزيد من الإيضاح حول كيفية استخدام البرمجة الخطية في حل مشاكل الإنتاج ، افترض أن شركة الغزل الأمريكية لم تعد مقيدة بكميات معينة من العمالة وقدرة الآلات التي يمكن استخدامها . بل أنه باستطاعتها ، استخدام كل ما تريد من العمالة بتكلفة 12.00 دولار في الساعة ، وكل ما تريده من التشغيل بسعر 1.60 دولار لكل ساعة . وافترض أنه يمكنها استخدام أيًا من العمليات الثلاثة المذكورة أعلاه ، والمشكلة هي اختيار التوليفة التي يمكن من خلالها إنتاج 400 دفعة أسبوعياً بأقل تكلفة مع ثبات سعر البيع في العمليات الثلاثة على حد سواء . ( يمكننا ملاحظة أنه لا يمكننا الاعتماد حالياً على الأرقام الواردة تحت عنوان " تخطيط الإنتاج " في بداية هذا الفصل ، وهي الأرقام الخاصة بالأرباح لكل دفعة من الإنتاج . لأن سعر البيع يبقى ثابتاً للعمليات الثلاثة ) .

الآن يمكن اعتبار مشكلة الشركة مشكلة برمجة خطية - أي تدنية :

$$C = 9.60Q_1 + 10.00Q_2 + 12.60Q_3 \quad (10.7)$$

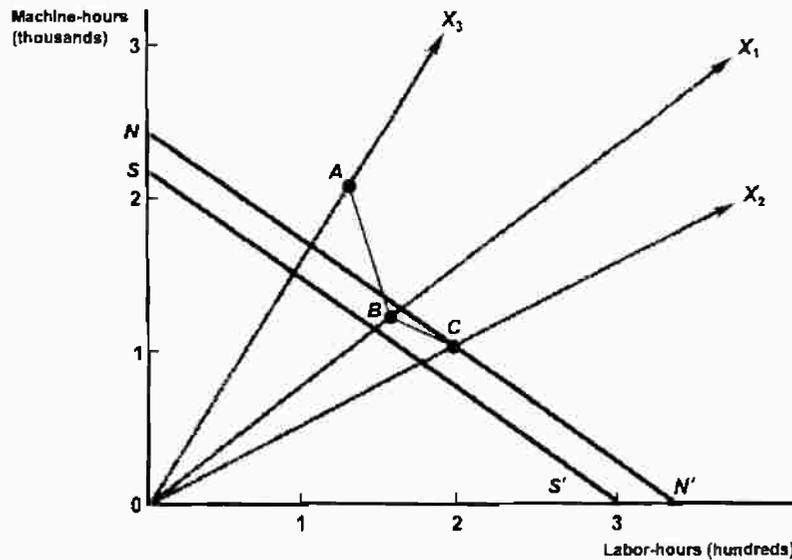
بشرط :

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 400 \quad (10.8)$$

$$Q_1 \geq 0; Q_2 \geq 0; Q_3 \geq 0 \quad (10.9)$$

والدالة الهدف في هذه الحالة هي دالة التكاليف  $C$  المعطاة في المعادلة (10.7) . ولاشتقاق هذه الدالة لاحظ أن تكلفة الدفعة باستخدام العملية 1 هي 9.60 دولار ، لأن العملية 1 تتطلب 3 ساعات من استخدام الآلة ( بسعر 1.60 دولار للساعة ) و 0.4 ساعة عمالة ( بسعر 12 دولار للساعة ) . لذلك فإن إجمالي التكلفة للدفعة باستخدام العملية 1 هو  $9.60Q_1$  . وبالمثل يكون إجمالي التكاليف للدفعة باستخدام العملية 2 هو  $10.00Q_2$  ، وللطريقة 3 هو  $12.60Q_3$  . والشرط الوحيد هنا هو أن إجمالي الإنتاج من كل هذه العمليات لا بد أن يساوي 400 .

هذا ويمكن حل هذه المشكلة بسهولة باستخدام العمليات المذكورة في الجزء قبل الأخير ، حيث يمكن صياغة منحنيات الناتج المتساوي لإنتاج حجمه 400 دفعة أسبوعياً . ويوضح الشكل رقم (10.7) منحنى الناتج المتساوي المشار إليه بـ  $ABC$  . الخطوة التالية هي أن نقوم بصياغة منحنيات التكاليف المتساوية ، وكل منها يوضح التوليفات المختلفة لحجم العمالة وقدرة التشغيل التي يمكن الحصول عليها عند مستوى تكاليف معين . منحنى التكاليف المتساوية المناظر لتكاليف قدرها 4,000 دولار و 3,600 دولار هي  $NN^1$  و  $SS^1$  في الشكل (10.7) . ومن الواضح أن المشكلة هي إيجاد النقطة على منحنى الناتج المتساوي  $ABC$  التي تقع على أقل منحنى تكاليف متساوية . كما يتضح أن النقطة المثلى هي  $B$  ، مما يعني ضرورة إتمام كافة العمليات الإنتاجية باستخدام التقنية الأولى أو العملية رقم 1 .



شكل (10.7) الحل الأمثل : بما أن منحنى الناتج المتساوي هو  $ABC$  ومنحنيات التكاليف المتساوية هي  $NN^1$  و  $SS^1$  ، فإن أفضل نقطة هي  $B$  ، وهو ما يعني أن الإنتاج يجب أن يتم باستخدام العملية 1 .

عند مقارنة هذه العملية بالعملية المستخدمة في الفصل السابع تحت عنوان " التوليفات المثلى من عناصر الإنتاج " نجد أنهما نفس الشيء . ففي كل من الحالتين نقوم بتحديد توليفات عناصر الإنتاج وتقنيات الإنتاج التي من شأنها تقليص النفقات اللازمة للحصول على حجم إنتاج معين . وعلاوة على ذلك ، فإن الشكل (7.9) - والذي يقدم الحل باستخدام النظرية التقليدية - يشبه إلى حد كبير الشكل (10.7) الذي يقدم الحل لهذه الحالة ، فما هو الفرق بين الحالتين ؟ في الفصل السابع افترضنا وجود دالة إنتاج سلسة ، بينما في هذه الحالة اعتمدنا على وجود الخواص الفنية للطريق المستخدمة . وعموماً فإن الوضع الذي قمنا بتحليله هنا هو الأكثر واقعية .

## تخطيط الإنتاج : منتجات متعددة

فلننظر الآن إلى حالة أكثر تعقيداً ، افترض أن شركة National Auto تقوم بتصنيع نوعين من المنتجات - سيارات وشاحنات<sup>4</sup> . ولديها أربعة أنواع من قطاعات العمل ذات سعة ثابتة وهي : تجميع السيارات ، وتجميع الشاحنات ، وتجميع المحركات ، وتشكيل شرائح الصلب . والسؤال الذي يجب طرحه هو : ما هو عدد السيارات وما هو عدد الشاحنات الذي يجب على الشركة إنتاجه ؟ يعتمد الربح لكل سيارة أو شاحنة على ثلاثة عوامل : هي سعرها والتكاليف المتغيرة لإنتاج كل سيارة أو شاحنة والتكاليف الثابتة للشركة . افترض أن السعر ومتوسط التكاليف المتغيرة ثابتين لكل منتج ؛ أي أنهما لا يتغيران بتغير كمية الإنتاج في المدى المحدد . وعلى وجه التحديد ، افترض أن سعر السيارة 20,000 دولار وسعر الشاحنة 30,000 دولار ، وأن متوسط التكاليف المتغيرة للسيارة 19,700 دولار وللشاحنة 29,750 دولار . وترغب هذه الشركة معظمة أرباحها مع إغفال التكاليف الثابتة ( والتي تبقى دون تغير بغض النظر عما تفعله الشركة ) ، وعليه فإن أرباح الشركة ( لكل ساعة ) تساوي :

$$\pi = 300Q_a + 250Q_s \quad (10.10)$$

حيث  $Q_s$  هي عدد السيارات التي تنتجها الشركة في الساعة و  $Q_a$  هو عدد الشاحنات التي تنتجها الشركة في الساعة . ولما كانت الشركة تحقق هامش ربح قدره 300 دولار ( أي \$19,700 - \$20,000 ) لكل سيارة يتم إنتاجها ، و 250 دولار ( أي \$29,750 - \$30,000 ) لكل شاحنة يتم إنتاجها ، فإن أرباح الشركة ( قبل خصم التكاليف الثابتة ) تساوي 300 دولار مضروباً في عدد السيارات مضافاً إليها 250 دولار مضروباً في عدد الشاحنات .

**جدول (10.1) السعة الإنتاجية المطلوبة من شركة National Auto لإنتاج سيارة أو شاحنة ( كل ساعة ) .**

السعة	سيارة	شاحنة
تجميع سيارة	5	0
تجميع محركات	2	3.333
شرائح معدنية	$3\frac{1}{3}$	2.5
تجميع شاحنة	0	4

ما هي الشروط المقيدة لقرارات المديرين ؟ يمكن إجمال هذه الشروط في ثبات قدرة تجميع كل من السيارات والشاحنات والمحركات وتشكيل الشرائح المعدنية . يوضح الجدول (10.1) نسبة إجمالي قدرة قطاعات العمل اللازمة لإنتاج سيارة أو شاحنة واحدة . ومن هذا الجدول يمكننا التعبير عن الشروط المقيدة لإنتاج السيارات والشاحنات من خلال المتباينات التالية :

<sup>4</sup> هذه الحالة هي تعديل لمثال مشهور موجود في : R. Dorfman, "Mathematical or Linear Programming: a Nonmathematical Exposition," إعادة طبعه في Mansfield, *Managerial Economics and Operation Research*, 5<sup>th</sup> ed. تم استخدام أرقام مختلفة لتبسيط النتائج . ولتطبيقات في صناعة البترول راجع : W. Garvin and others, "Applications of Linear Programming in the Oil Industry," in Mansfield, *Managerial Economics and Operation Research*, 5<sup>th</sup> ed.

$$0.05Q_a \leq 1 \quad (10.11)$$

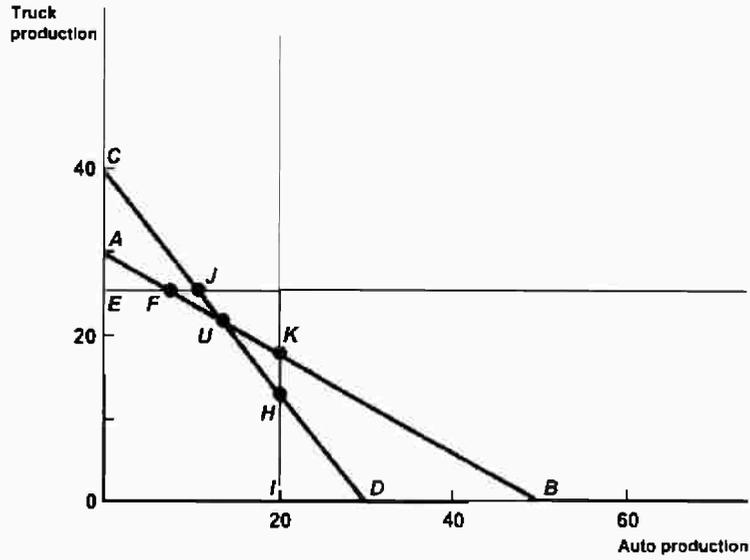
$$0.04Q_t \leq 1 \quad (10.12)$$

$$0.02Q_a + 0.033Q_t \leq 1 \quad (10.13)$$

$$0.33Q_a + 0.025Q_t \leq 1 \quad (10.14)$$

$$Q_a \geq 0; Q_t \geq 0 \quad (10.15)$$

تمثل المتباينات (10.11) و (10.12) الشروط التي تفرضها قدرة تجميع السيارات والشاحنات المتاحة . بما أن كل سيارة يتم إنتاجها في الساعة تستهلك 5% من قدرة تجميع السيارات ، فإن 0.05 مضروباً في الناتج لكل حالة لابد أن يكون أقل من أو مساوياً لـ 1 . ويوضح الشكل (10.8) إنتاج السيارات بالشركة في مقابل إنتاج الشاحنات ، ويوضح الخط الرأسي عند 20 سيارة تأثير ذلك الشرط ، نظراً لأن 20 هو أقصى عدد للسيارات التي يمكن إنتاجها تحت هذا الشرط . وبالمثل ، بما أن كل شاحنة يتم إنتاجها في الساعة تستهلك 4% من قدرة تجميع الشاحنات ، فإن 0.04 مضروباً في الإنتاج للساعة من الشاحنات لابد أن يكون أقل من أو مساوياً لـ 1 . ويوضح الخط الأفقي في الشكل (10.8) عند 25 شاحنة في الساعة ما لهذا الشرط من أثر ، حيث أن 25 هو أقصى عدد يمكن إنتاجه من الشاحنات تحت هذا الشرط .



شكل (10.8) توليفات الإنتاج المثلى لشركة National Auto : التوليفات الكفءة لإنتاج السيارات والشاحنات تقع كلها بداخل المساحة OEFUHI .

توضح المتباينة (10.13) أنه لا يمكن استخدام أكثر من القدرة المتاحة من تجميع وإنتاج المحركات . فيما أن كل سيارة يتم إنتاجها في الساعة تستهلك 2% من قدرة الإنتاج ، وبما أن كل شاحنة يتم إنتاجها في الساعة تستهلك 3.33% من قدرة الإنتاج ، لذا فإن 0.02 مضروباً في إنتاج السيارات بالساعة و 0.33 مضروباً في عدد الشاحنات التي يتم إنتاجها بالساعة يجب أن يكون أقل من أو يساوي 1 . لذلك فإن الخط  $AB$  في الشكل (10.8) يميز بين توليفات إنتاج السيارات والشاحنات من ناحية وتلك التوليفات التي تفوق قدرة إنتاج المحركات من ناحية أخرى . فلكسي يكون أي من التوليفات كفاءاً ، لابد أن يكون على المثلث  $OAB$  أو بداخله . وتوضح المتباينة (10.14) أنه لا يمكن استخدام أكثر من القدرة المتاحة لتشكيل المعادن . وبما أن كل سيارة يتم إنتاجها في الساعة تستهلك 3.33% من قدرة تشكيل المعادن ، وكل شاحنة يتم إنتاجها تستهلك 2.5% من قدرة تشكيل المعادن ، فإن 0.033 مضروباً في عدد السيارات التي يتم إنتاجها في الساعة مضافاً إليه 0.025 مضروباً في عدد الشاحنات التي يتم إنتاجها في الساعة لابد أن يكون أقل من أو يساوي 1 . لذلك فإن الخط  $CD$  في الشكل (10.8) يميز بين التوليفات المحدية للمنتجات وتلك التي تفوق قدرة تشكيل المعادن . فلكسي تكون التوليفات كفاءاً ، لابد أن تقع على أو بداخل المثلث  $OCD$  .

وللوفاء بكل هذه الشروط ، لابد أن تقع توليفة إنتاج السيارات والشاحنات بداخل المنطقة OEFUHI في الشكل (10.8) . وأي نقطة تقع خارج هذه المنطقة فإنها لن تحل بواحد من الشروط على الأقل . فمثلاً النقطة  $C$  تستخدم قدرة تجميع محركات و قدرة تجميع شاحنات أكبر من تلك



## كيف تساعدنا البرمجة الخطية في رفع مستوى أداء الطائرات

تستخدم البرمجة الخطية في عدد كبير من الصناعات والشركات . ومن الأمثلة على ذلك ، شركة Delta Airlines والتي تستخدم البرمجة الخطية لخفض تكاليف نقل طاقم الطائرات من مكان لآخر . ولما كانت قواعد العمل تحدد ساعات الطيران اليومية للطاقم بالإضافة إلى وقت الانتظار في المطارات إلى غير ذلك من عوامل، فإن جزءاً كبيراً من وقت الطيارين والمضيفين يضيع هباءً ، وذلك من وجهة نظر شركة الطيران . ومع جهود الشركة المستمرة في تقليل الوقت والتكاليف الضائعة ، فقد تم تركيز الانتباه على جداول الطاقم ( 8,500 طيار و 17,600 مضيف ومضيفة ) لخطية حوالي 4,900 رحلة جوية يومياً إلى أكثر من 220 مدينة حول العالم ، وذلك بالاستعانة بأكثر من 550 طائرة من 8 أنواع تأتي من حوالي 12 قاعدة طيران مختلفة . ومحاولة منها للإسهام في حل هذه المشكلة الكبيرة والمعقدة ، قامت الشركة باستحداث نموذج جديد من البرمجيات - والحدير بالذكر أن هذا النموذج البرمجي الجديد - والذي يعمل بنظام البرمجة الخطية - يعتمد على طريقة النقطة الداخلية . وبالإضافة إلى ذلك ، فإنه يعطى أفضل القيم بدون الحاجة لتوليد ملايين الاحتمالات ، الأمر الذي يسهل من قدره الطاقم على تحليل جداول العمل المختلفة وإجراء التعديرات اللازمة في قواعد العمل .

وقد أسفرت النتائج التي حصلت عليها الشركة نتيجة لاستخدام هذا النموذج إلى تحقيق وفر يقدر بـ 20 مليون دولار سنوياً . وبالإضافة إلى الوفر المالي ، تم تحقيق تحسن في نوعية الحياة بالنسبة للطاقم ، لأنهم الآن يعملون وفق جداول تجعلهم يتغيرون عن القواعد الرئيسية لفترات أقل من قبل . وبالإضافة إلى جداول أطقم العاملين ، تقوم شركة Delta باستخدام البرمجة الخطية لمواجهة عدد من مشكلات التخطيط ، بما فيها صيانة الطائرات وتحديد أسطولها الجوي وتخطيط الموارد البشرية . وتقوم الوكالات الحكومية ، مثلها في ذلك مثل الشركات ، باستخدام البرمجة الخطية للمساعدة في حل عدد من المشكلات بخصوص عمليات الطيران . حيث قامت القيادة العامة للقوات الجوية باستخدام البرمجة الخطية للمساعدة على الحصول على أداء أفضل في مجال الطائرات . ففي بعض المشكلات التي تتضمن جدولة طائرات الإمداد العسكري يكون هناك أكثر من 300,000 متغير وحوالي 15,000 شرط يجب التعامل معها . وبينما تكون المشكلات من هذا النوع أكثر تعقيداً بشكل كبير من المشكلات التي نحن بصدد حلها في هذا الفصل إلا أن المفاهيم الأساسية لا تختلف عن تلك المستخدمة هنا \*.

\* تمت مناقشة هذه الأمثلة في : D. Wertheiser, "Karmarker Algorithm," National Technological University 1991 . كما قامت شركة Delta Airlines بتوفير بعضاً من هذه المواد .

## النقاط المتطرفة وطريقة ال Simplex

كما أشرنا في بداية هذا الفصل ، فإن أحد الأسباب الهامة التي أسهمت في استخدام البرمجة الخطية هو استحداث طرق رياضية ناجحة لإيجاد حلول رقمية لمشكلات البرمجة الخطية . وتقوم هذه الطرق بالاستفادة من الحقيقة التالية : وهي أن أفضل الحلول هو الحل الذي يقع عند أحد النقاط المتطرفة أو الأركان لمنطقة الحلول الممكنة .<sup>6</sup> وتتفق هذه القاعدة مع الحالات التي ناقشناها في الأجزاء السابقة . فمثلاً في الشكل (10.9) نجد أن النقطة المثلى  $U$  تقع على النقطة المتطرفة من المنطقة  $OEFUHI$  ، وفي الشكل (10.6) كانت أفضل نقطة  $K$  نقطة متطرفة للمنطقة  $OHKM$  . وهذه الحقيقة تقلل بشكل كبير عدد النقاط التي يجب التعامل معها لمعرفة أفضل حل ، حيث أنها تعني أننا لسنا في حاجة إلا إلى النقاط المتطرفة من منطقتنا الحلول الممكنة . فإذا نظرنا إلى الشكل (10.9) ، نلاحظ وجود ستة نقاط متطرفة للمنطقة  $OEFUHI$  . وللحصول على الحل الأمثل فإننا لسنا في حاجة إلا إلى حساب الأرباح ( متضمنة التكاليف الثابتة ) عند كل من هذه النقط . فعند نقطة الأصل ، نلاحظ أن الأرباح تساوي صفر . وعند

<sup>6</sup> بطبيعة الحال فإنه يحدث أحياناً أن تكون بعض النقاط الأخرى بنفس درجة النقاط المتطرفة ولكنها لا تكون أفضل منها .

( $E(Q_a = 0, Q_i = 25)$  ، تكون الأرباح 6,250 دولار . وعند ( $Q_a = 20, Q_i = 0$ ) تكون الأرباح 6,000 دولار . ويجب إيجاد إحداثيات النقاط الثلاث الأخرى قبل أن تتمكن من حساب الأرباح عندها . لمعرفة إحداثيات  $F$  يجب تحويل المتباينات (10.12) و (10.13) إلى معادلات وحلها آنياً ، لمعرفة إحداثيات  $U$  نجعل المتباينات (10.13) و (10.14) معادلات ونحلها آنياً . لمعرفة إحداثيات  $H$  نجعل المتباينات (10.11) و (10.14) معادلات ونحلها آنياً . وعند النقطة  $F$  تقع عند ( $Q_a = 8.33$  و  $Q_i = 25$ ) نجد أن الأرباح الناتجة تساوي 8,750 دولار ، وأن النقطة  $U$  تقع عند ( $Q_a = 13.6$  و  $Q_i = 21.8$ ) تكون النتيجة هي أن الأرباح تساوي 9,547 . وعند النقطة  $H$  تقع عند ( $Q_a = 20$  و  $Q_i = 13.33$ ) تكون النتيجة هي أن الأرباح تساوي 9.333 . وبناء على هذه الحسابات القليلة نجد أن النقطة  $U$  هي الحل الأفضل .

فإذا كان عدد الطرق والشروط كبيراً جداً بحيث يصعب استخدام العملية البيانية الموضحة في الأقسام السابقة ، فإن هذا النوع من المقارنات بين النقاط المتطرفة يمكن استخدامه للحصول على أفضل حل . وتلك العملية المعروفة باسم طريقة  $simplex$  - والتي يمكن استخدامها لهذا الغرض - هي طريقة منظمة للمقارنة بين حلول النقاط المتطرفة أو الأركان.<sup>7</sup> وفي وجود سرعة وقوة الحاسبات الحديثة فإن هذه العملية يمكنها حل المشاكل شديدة التعقيد بسرعة كبيرة .

## مفاهيم وثيقة الصلة

### استخدام البرمجة الخطية في اختيار مشروعات البحث والتطوير

سبق وأن أشرنا في الفصل الثامن إلى أهمية البحث والتطوير في زيادة الإنتاج ، ومع ذلك فقد تؤدي عمليتا البحث والتطوير بالشركات إلى تكبد تكاليف باهظة . لذا فإن تبنى أحد المشروعات دون الآخر يتطلب اتخاذ قرارات حاسمة . وقد قامت العديد من الشركات والوكالات الحكومية باستخدام طرق البرمجة الخطية للمساعدة في مشروعات البحث والتطوير . ولإيضاح ذلك افترض أنه لدى  $Du Pont$  قائمة تتكون من عدد  $n$  من مشروعات البحث والتطوير الممكن إجراؤها ، وأن تبنى إجراء المشروع  $i$  سوف يكلف  $C_i$  دولار . وبالإضافة إلى ذلك افترض أن المشروع  $i$  له احتمال نجاح  $P_i$  ، وأنه في حالة نجاحه فإنه سيحقق ربحاً قدره  $\pi_i$  (مشمئلاً على تكاليف البحث والتطوير) . إذن ، إذا كان باستطاعة الشركة إنفاق ما لا يزيد عن  $C$  دولاراً على البحث والتطوير ، وكانت تريد معظم قيمة الأرباح المتوقعة ، فإنه يمكن التعبير عن هذه المشكلة على النحو التالي :

$$\text{Maximize } \sum_{i=1}^n X_i (P_i \pi_i - C_i)$$

بشرط أن :

$$\sum_{i=1}^n X_i C_i \leq C$$

أي أن مشكلة  $Du Pont$  تتمثل في اختيار  $X_i$  ( بحيث  $X_i = 1$  عند قبول المشروع  $i$  و  $X_i = 0$  عند رفضه ) ، وبحيث تكون القيم المتوقعة للأرباح أكبر ما يمكن بشرط أن المبلغ المدفوع للبحث والتطوير لا يزيد عن  $C$  . ولما كانت  $X_i$  تساوي صفر أو 1 ، فإن هذه المشكلة ليست مشكلة برمجة خطية عادية ، إذاً تعرف برمجة الأعداد الصحيحة ، وهي من الأهمية بمكان لأغراض الدراسة الحالية . وتشير الأبحاث إلى أن عدد من المعامل الكبرى في الصناعات الكيميائية والدوائية والإلكترونية تستخدم هذه الطرق . لكن ذلك لا يعني أن هذه الطرق تلعب دوراً جوهرياً في عملية اتخاذ القرار . ولعل أحد أسباب عدم استخدام طرق البرمجة الخطية بشكل أكثر كثافة هو أن البيانات المتعلقة بـ  $P_i$  و  $\pi_i$  و  $C_i$  غالباً ما تكون تقريبية إلى حد كبير . وكثيراً ما يكون هناك خلافات حول قيمة  $P_i$  بالنسبة للمشروع ، حيث يشعر البعض بأن المشروع أقرب ما يكون للنجاح ، بينما لا يرى آخرون فيه أية بادرة أمل . كما أنه من الصعب تقدير قيمة  $\pi_i$  . كما يكون من الصعب التنبؤ بتكلفة المشروع ( $C_i$ ) . فقد يقدم العلماء والمهندسون تقديرات مغرقة في التفاؤل كي يتمكنوا من تسويق مشروعاتهم لدى الإدارة العليا . وما يجب علينا تعلمه هو أنه على الرغم من أن طرق البرمجة من

<sup>7</sup> في سنة 1984 قام السيد N. Karmarkar من شركة Bell Labs باقتراح نوع جديد من الحساب من شأنه التوصل إلى حلول أكثر سرعة لمشكلات البرمجة الخطية ، ولكننا لسنا في حاجة للخوض في هذا الحساب هاهنا .

الفائدة بمكان إلا أنه لا يمكن الاعتماد عليها تماماً في غياب البيانات الأساسية . فإذا كانت الأرقام في الدالة الهدف والشروط عرضة لأخطاء كبيرة جداً ، فإنه يجب التعامل مع النتائج بقدر من الحذر .

## الصيغة الثنائية وأسعار الظل

تساعدنا البرمجة الخطية فيما هو أبعد من مجرد التوصل إلى أحد برامج الإنتاج المثلى ، حيث يمكن أيضاً إيجاد قيم عناصر الإنتاج المستخدمة في العملية الإنتاجية . ولايضاح ذلك افترض أن شركة National Auto تريد أن تحسب أثر إضافة مقدار معين من عناصر الإنتاج على الربح أو دالة الهدف . أن ذلك يتطلب قيام الشركة بالاستعانة بالبرمجة الخطية الموضحة آنفاً مع افتراض أنه لدى الشركة كمية ضئيلة من هذه العناصر - المعادن . عندئذ يمكن المقارنة بين الحد الأقصى من الأرباح الممكنة في حالة وجود هذه الإضافة من ناحية والحد الأقصى من الأرباح الممكنة في حالة عدم وجود هذه الإضافة من ناحية أخرى . وعلى الرغم من أن هذه العملية سليمة تماماً إلا إنها تنطوي على شيء من التعقيد . هذا ويلاحظ أن لكل مشكلة من مشكلات البرمجة الخطية توجد مشكلة مقابلة تعرف بالمشكلة الثانوية بينما تعرف الأخرى بالمشكلة الأساسية . فإذا كانت المشكلة الأساسية مشكلة معظمة كانت المشكلة الثانوية مشكلة تدنية . أما إذا كانت المشكلة الأساسية مشكلة تدنية كانت المشكلة الثانوية مشكلة معظمة ، وحلول المشكلة الثانوية تؤدي إلى قيم أسعار الظل المطلوبة .

لذلك فإن أسعار الظل - في مشكلة شركة National Auto - تحدد ما الذي سوف يحدث لأرباح الشركة إذا نجحت الشركة في زيادة عنصر الإنتاج المعني بقدر معين . وتميز أسعار الظل بفوائدها الجمه ؛ فهي تحدد قيمة العناصر التي قد تعترضها اختناقات أو عوائق فعالة للإنتاج ، لأن سعر الظل للعنصر الذي لا يستغل بشكل كامل دائماً يساوي صفرأ . والأهم من ذلك أنها تمكن الإدارة من الوقوف على مدى جدوى التوسع في استخدام عناصر الإنتاج . ويمكن إجراء مقارنة بين الزيادة في الربح الناتجة عن التوسع في استخدام بعض عناصر الإنتاج وبين الزيادة في التكاليف التي لا مفر للشركة من تكبدها . فإذا كانت الزيادة في التكاليف أقل من الزيادة في الربح - كما يشير إلى ذلك سعر الظل - كان التوسع ذا نفع كبير . والعكس بالعكس فإذا كان باستطاعة شركة National Auto زيادة الشرائح المعدنية - كأحد عناصر الإنتاج بتكلفة قدرها 300 دولار، وكانت تلك الزيادة سبباً في زيادة قدرها 400 دولار في الأرباح، فإنه يجب على مديري الشركة استخدام المزيد من هذه الشرائح - شراءً أو تأجيراً .

## العلاقة بين المشكلة الأساسية والمشكلة الثانوية

لإيضاح العلاقة بين المشكلة الأساسية والمشكلة الثانوية، افترض أن شركة Ajax Chemical تبيع أسود الكربون والإيثير ، وأن نسبة الأرباح لكل وحدة أسود كربون يتم إنتاجها هي 50 دولار ولكل وحدة إيثير هي 80 دولار، وتريد الشركة معظمة إجمالي معظمة إجمالي الأرباح والتي تساوي :

$$\pi = 50Q_1 + 80Q_2 \quad (10.17)$$

حيث  $Q_1$  هو عدد وحدات أسود الكربون التي يتم إنتاجها و  $Q_2$  هو عدد وحدات الإيثير التي يتم إنتاجها . وإنتاج أسود الكربون والإيثير تستخدم الشركة عمالة ومعدات . وتستخدم كل وحدة أسود كربون عند إنتاجها 2 ساعة عمالة و 3 ساعات معدات ، وكل وحدة إيثير 3 ساعات عمالة و 2 ساعة معدات . ويتوافر للشركة أكثر من 4,000 ساعة عمالة و 5,400 ساعة معدات ( ولا يمكنها استخدام المزيد ) ، وحيث :

$$2Q_1 + 3Q_2 \leq 4,000 \quad (10.18)$$

$$3Q_1 + 2Q_2 \leq 5,400 \quad (10.19)$$

كما أن :

$$Q_1 \geq 0 \text{ و } Q_2 \geq 0$$

تمثل المشكلة الأساسية في إيجاد قيم  $Q_1$  و  $Q_2$  التي من شأنها معظمة قيمة  $\pi$  [ في المعادلة (10.17) ] في ظل شروط المعادلتين (10.18) و (10.19) . ما هي المشكلة الثانوية المناظرة ؟ كما أوضحنا في القسم السابق فإنها تنطوي على تدنية - وليس معظمة - وبالتحديد فإن المشكلة هي تدنية إجمالي قيمة العمالة والمعدات المتوافرة . وبمعرفة أن  $S_L$  و  $S_E$  هي أسعار العمالة والمعدات ، فإن القيمة الإجمالية تساوي :

$$V = 4,000S_L + 5,400S_E \quad (10.20)$$

وهذه الأسعار ( $S_L$  و  $S_E$ ) هي أسعار الظل التي ناقشناها في القسم السابق . وشروط المشكلة الثانوية هي :

$$2S_L + 3S_E \geq 50 \quad (10.21)$$

$$3S_L + 2S_E \geq 80 \quad (10.22)$$

كما أن :

$$S_L \geq 0 \text{ و } S_E \geq 0$$

والشرط في المعادلة (10.21) ينص على أن إجمالي قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة أسود الكربون يجب أن يكون على الأقل مساوياً للربح من هذه الوحدة ، والشرط في (10.22) ينص على أن إجمالي قيمة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة الإيثير لابد أن يكون على الأقل مساوياً للربح من هذه الوحدة .

والمطلوب هو إيجاد قيمة  $S_L$  و  $S_E$  التي تؤدي إلى تدنية  $V$  في المعادلة (10.20) في ظل الشروط (10.21) و (10.22) . وقيم  $S_L$  و  $S_E$  ، والتي يمكن تحديدها باستخدام الطرق البيانية المذكورة أعلاه هي أسعار الظل للعمالة والمعدات . وهي الأسعار التي يجب أن يكون المدير مستعداً لدفعها في مقابل استخدام هذه الموارد ، أي أنها تكلفة الفرصة البديلة لاستخدام هذه الموارد . فإذا لم يتم استخدام أحد الموارد بالشكل الأمثل فإن سعر الظل له سوف يكون صفراً ، لأن وجود وحدة إضافية منه لن تؤدي إلى زيادة الأرباح ، فالشركة تمتلك من ذلك المورد أكثر مما يمكنها استخدامه بكفاءة . ومن ناحية أخرى إذا كان ذلك المورد - أو العنصر - يتم استخدامه بالكامل فإن سعر الظل له سوف يكون موجباً لأن تكلفة الفرصة البديلة له تكون موجبة أيضاً .

## تحليل القرارات الإدارية

### نقل الرمال في مطار Brisbane

عند إعادة تطوير مطار Brisbane الدولي تم جلب حوالي 2 مليون متر مكعب من الرمال من أحد الخلدان القريبة ، وذلك عبر أحد خطوط الأنابيب إلى عدد من المواقع . وكان يتم جلب المزيد من الرمال للمساعدة في ضغط الأرضيات الطينية في المواقع ، أما الكميات الزائدة فكانت تنقل بعيداً باستخدام الشاحنات والأوناش . ويوضح الجدول التالي المسافة بين المصدر والوجهة في كل حالة ، بالإضافة إلى كمية الرمال المتوافرة في كل مصدر والكمية المطلوبة عند كل وجهة . وقد أدى استخدام البرمجة الخطية في هذه الحالة إلى وفر في تكاليف النقل يقدر بـ 400,000 دولار \* .

الكمية المتاحة ( $m^3$ )	الوجهة								المصدر	
	مخطط الطريق	صناعة التزول	محطة الإطفاء	محلل الموقع S	موقف السيارات	الطرق	الأراضي المحفوظة	التمدد		محلل الموقع N
	المسافة (بالمتر) بين المصدر والوجهة									
960	20	8.5	11	18	18	10	12	26	22	ساحة المطار
201	22	10	13	20	20	12	14	28	20	المحط الأحمر
71	18	22	6	28	1.5	20	26	20	16	منطقة شركة الطيران
24	18	21	2	—	6	22	26	22	20	الصيانة
99	21	14	24	—	16	4	10	26	22	منطقة دخول الطريق
1355	150	90	20	7	50	315	444	217	62	الكمية المطلوبة ( $m^3$ )

(أ) إذا كانت تكاليف نقل الرمال تتناسب مع كمية الرمال مضروبة في المسافة ، فما هي الصيغة الرياضية التي يمكن أن تعبر عن الكميات التي يجب

على مديري المطار معزمتها أو تدنيها ؟

(ب) ما هي الشروط التي يجب الوفاء لها ؟

(ج) في واقع الأمر ، لقد قام مدير المطار بالاستعانة بالبرمجة الخطية - راجع برنامج LINDO السابق شرحه - لحل هذه المشكلة ، ووجدوا أنه بالإمكان جلب كل الرمال المطلوبة في الأراضي المنخفضة من ساحة المطار . هل يبدو ذلك معقولاً ؟ لم ؟ أو لم لا ؟  
(د) تم حذف رقمين من الأرقام السابقة . هل يمكن حل المشكلة بدونهما ؟ وكيف يمكن تقديرهما ؟

### الحل

(أ) تدينية

$$\sum_i \sum_j T_{ij} \cdot D_{ij}$$

حيث  $T_{ij}$  هو عدد الأمتار المكعبة من الرمال التي يتم نقلها من المصدر  $i$  إلى الوجهة  $j$  و  $D_{ij}$  هو المسافة بالأمتار من المصدر  $i$  إلى الوجهة  $j$  . وهذا هو مجموع كمية الرمال مضروباً في مسافة النقل ، وهي تتناسب مع إجمالي تكاليف نقل الرمال . علماً بأن قيم  $D_{ij}$  موضحة بالجدول . وتمثل المشكلة في إيجاد قيم  $T_{ij}$  التي تؤدي إلى تدينية :

$$\sum_i \sum_j T_{ij} \cdot D_{ij}$$

(ب) لا يجب أن تزيد كمية الرمال المنقولة من المصدر  $i^{\text{th}}$  عن الكمية المتاحة . كما يجب ألا تقل كمية الرمال المنقولة إلى الوجهة  $j^{\text{th}}$  عن الكمية المطلوبة . ويجب أن تكون قيمة  $T_{ij}$  غير سالبة لكل من  $i$  و  $j$  .

(ج) المنطقة المنخفضة قريبة من ساحة المطار ( 12 متر ) وهو ما يجعل ذلك معقولاً ، إلا أنه في مشكلة معقدة من هذا النوع لا يكون من السهل تحديد الحل من أول وهلة . فلو كان ذلك سهلاً لما كانت هناك حاجة لطرق تحليلية مثل البرمجة الخطية .

(د) لا . لتقدير هذين الرقمين قم بتحديد المسافة بين محدد الموقع  $S$  من ناحية وكلاً من منطقة الصيانة وطريق الدخول من ناحية أخرى .

\* C. Perry and M. Liff, "From the Shadows: Earthmoving on Construction Projects," *Interfaces* (February 1983), pp. 79-84.

## المتغيرات الخاملة

لتحديد إحدى مشكلات البرمجة الخطية جبرياً فإنه من المفيد استخدام ما يسمى بالمتغيرات الخاملة للتعبير عن الكميات الغير مستخدمة من عناصر الإنتاج المختلفة . ففي حالة شركة Ajax التي قمنا بمناقشتها في الجزء السابق طبقاً للمتبينة (10.18) ، فإن كمية العمالة المستخدمة لابد أن تكون أقل من أو تساوي 4,000 ساعة . فإذا جعلنا  $U_L$  هي المتغير الخامل وقيمته تساوي عدد ساعات العمالة غير المستخدمة ، فإنه يمكننا تحويل المتبينة (10.18) إلى المعادلة التالية :

$$2Q_1 + 3Q_2 + U_L = 4,000 \quad (10.23)$$

وللتأكد من صحة هذه المعادلة تذكر أن عدد ساعات العمالة التي تستخدمها الشركة تساوي  $2Q_1 + 3Q_2$  ؛ لذلك فإن هذه الكمية زائد عدد ساعات العمالة غير المستخدمة ( $U_L$ ) يجب أن تساوي 4,000 ، أي الكمية المتاحة . وبالمثل إذا جعلنا  $U_M$  هو المتغير الخامل الذي يساوي عدد ساعات العمالة غير المستخدمة ، فإنه يمكننا تحويل المتبينة (10.19) إلى المعادلة التالية :

$$3Q_1 + 2Q_2 + U_M = 5,400 \quad (10.24)$$

وللتأكد من صحة هذه المعادلة تذكر أن عدد ساعات الآلات التي تستخدمها الشركة تساوي  $3Q_1 + 2Q_2$  ؛ لذلك فإن هذه الكمية زائد عدد ساعات الآلات غير المستخدمة ( $U_M$ ) يجب أن تساوي 5,400 ، أي الكمية المتاحة . وبالإضافة إلى إمكانية وضع الشروط في صورة معادلات - وهو ما يبسط التحليل الجبري - فإن وجود هذه المتغيرات الخاملة يوفر معلومات هامة ، حيث تكون قيم هذه المتغيرات على قدر كبير من الأهمية . فإذا كان عدد المتغيرات الخاملة يساوي الصفر فإن ذلك يعني أن الشركة تستفيد من ذلك العنصر بشكل كامل عند معظمه الأرباح . وإذا كانت ذات قيمة موجبة ، فإن ذلك يعني أن جانباً من عناصر الإنتاج فائض عن الحاجة .

## الحل الجبري لمشاكل البرمجة الخطية

بعد أن قمنا بوضع تعريف المتغيرات الخاملة يمكننا الآن شرح كيفية استخدام الطرق الجبرية كبديل للطرق البيانية التي سبق تفصيلها - لحل مشاكل البرمجة الخطية . ولنعاهد الحديث عن شركة Ajax للكيمياويات والتي سبق وأشرنا إلى رغبتها في معظمة إجمالي الأرباح :

$$\pi = 50Q_1 + 80Q_2 \quad (10.25)$$

حيث  $Q_1$  هو عدد وحدات أسود الكربون و  $Q_2$  هو عدد وحدات الإيثير المنتجة . وبما أنه لا يمكن استخدام أكثر من 4,000 ساعة عمالة ، فإن :

$$2Q_1 + 3Q_2 + U_L = 4,000 \quad (10.26)$$

وبما أنه لا يمكن استخدام أكثر من 5,400 ساعة آلات ، فإن :

$$3Q_1 + 2Q_2 + U_M = 5,400 \quad (10.27)$$

وقد علمنا من الجزء السابق أن  $U_L$  هي عدد ساعات العمالة غير المستخدمة و  $U_M$  هو عدد ساعات الآلات غير المستخدمة وكلاهما متغيرات خاملة .

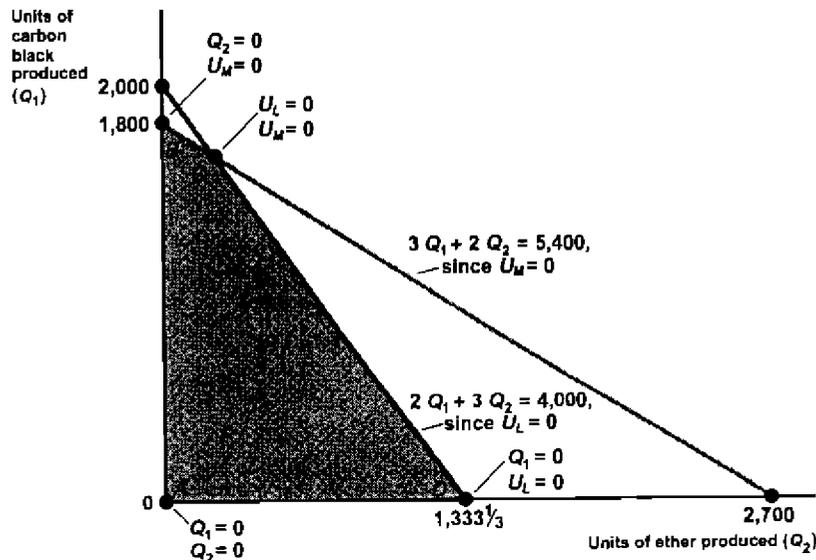
وقد أكدنا فيما سبق أن الحلول المثلى لكافة مسائل البرمجة الخطية دائماً ما تقع عند أحد الأركان أو النقاط المتطرفة من منطقة الحلول الممكنة .

وفي حالة Ajax ، نجد أن هذه المنطقة هي المنطقة المظللة في الشكل (10.10) ، وبما أن هذه هي النقاط الوحيدة التي تفي بالشروط [ راجع

المتباينات (10.18) و (10.19) ] فإنه توجد أربعة أركان :  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  . ولا يمكننا حل هذه المشكلة جبرياً إلا بعد أن نقوم بتحديد قيم

كل من  $Q_1$  و  $Q_2$  و  $U_L$  و  $U_M$  عند كل من هذه الأركان . وكما هو موضح في الشكل (10.10) فإن اثنين من هذه المتغيرات الأربعة يساويان

الصفير عند كل ركن .<sup>8</sup> ويمثل أفضل الحلول عند الركن الذي يبلغ عنده إجمالي الأرباح أعلى نقطة له .



شكل (10.10) تحديد المتغير المساوي للصفير عند الأركان (  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  ) في المنطقة المجدية :  
اثنان من المتغيرات الأربعة (  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  ) يساويان الصفير عند كل ركن .

النقطة  $A$  : بما أن  $A$  تقع عند نقطة الأصل فإن كل من  $Q_1$  و  $Q_2$  تساوي الصفير . وبالتعويض عن هاتين القيمتين في المعادلتين (10.26) و (10.27) نجد أن  $U_L = 4,000$  و  $U_M = 5,400$  ، وبالإضافة إلى ذلك و بالتعويض في المعادلة (10.25) نجد أن  $\pi = 0$  . وتوجد هذه النتائج في الصف الأول من الجدول (10.2) .

النقطة  $B$  : بما أن النقطة  $B$  تقع على المحور الرأسي فإن  $Q_2$  تساوي صفير . وبما أن  $B$  تقع على الخط في الشكل (10.10) حيث  $U_M = 0$  ، فلنجد  $U_M = 0$  عند هذه النقطة . وبالتعويض بهذه القيم في المعادلتين (10.26) و (10.27) نحصل على :

<sup>8</sup> في معظم مشكلات البرمجة الخطية نجد أن عدد المتغيرات التي لا تساوي صفير في كل من الأركان مساوياً لعدد الشروط . وفي هذه الحالة بالتحديد يوجد شرطان : هما المتباينتان (10.18) و (10.19) .

$$2Q_1 + 3(0) + U_L = 4,000$$

$$3Q_1 + 2(0) + 0 = 5,400$$

وهو ما يعني أن :

$$Q_1 = \frac{5,400}{3} = 1,800$$

و

$$U_L = 4,000 - 2(1,800)$$

$$= 400$$

وبما أن  $Q_1 = 1,800$  و  $Q_2 = 0$  فإن المعادلة (10.25) تعني أن  $\pi = 90,000$  . وذلك كما هو موضح في الصف الثاني من الجدول (10.2) .  
النقطة C : بما أن النقطة C تقع عند تقاطع الخطين في الشكل (10.10) حيث  $U_L = 0$  و  $U_M = 0$  ، فإن كل من  $U_L$  و  $U_M$  تساوي الصفر عند تلك النقطة وبالتعويض في المعادلتين (10.26) و (10.27) نحصل على :

$$2Q_1 + 3Q_2 + 0 = 4,000$$

$$3Q_1 + 2Q_2 + 0 = 5,400$$

وبحل هاتين المعادلتين أننا نجد أن  $Q_1 = 1,640$  و  $Q_2 = 240$  لذلك وبناء على المعادلة (10.25) فإن :

$$\pi = 50(1,640) + 80(240)$$

$$= 101,200$$

وذلك كما هو موضح في الصف الثالث من الجدول (10.2) .

النقطة D : بما أن النقطة D تقع على المحور الأفقي فإن  $Q_1 = 0$  ، وبما أنها تقع على الخط في الشكل (10.10) حيث  $U_L = 0$  ، فإن  $U_L = 0$  عند هذه النقطة . وبالتعويض في المعادلتين (10.26) و (10.27) نحصل على :

$$2(0) + 3Q_2 + 0 = 4,000$$

$$3(0) + 2Q_2 + U_M = 5,400$$

وهو ما يعني أن :

$$Q_2 = \frac{4000}{3} = 1,333 \frac{1}{3}$$

و

$$U_M = 5,400 - 2(1,333 \frac{1}{3})$$

$$= 2,733 \frac{1}{3}$$

بما أن  $Q_1 = 0$  و  $Q_2 = 1,333$  فإن المعادلة (10.25) تخبرنا بأن  $\pi = 106,666$  وذلك كما هو موضح في الصف الرابع من الجدول (10.2) .  
أفضل حل : كما أشرنا سابقاً يتمثل في ذلك الركن الذي يبلغ عنده إجمالي الأرباح  $\pi$  أعلى نقطة له . ونلاحظ أن العمود الأخير من الجدول (10.2) يعطي قيمة  $\pi$  عند كل ركن ، ومن الواضح أن أعلى قيمة لـ  $\pi$  تقع عند الركن D أي عند  $Q_1 = 0$  و  $Q_2 = 1,333$  . لذلك فإن الحل الأمثل لـ Ajax يتحقق بإنتاج 1,333 وحدة إيثير وعدم إنتاج أسود الكربون .

### جدول (10.2) الحل الجبري لمشكلة البرمجة الخطية لشركة Ajax Chemical .

$\pi$	$Q_M$	$U_L$	$Q_2$	$Q_1$	الركن
0	5,400	4,000	0	0	A
90,000	0	400	0	1,800	B
101,200	0	0	240	1,640	C
106,666	2,7333	0	1,333	0	D

## تدنية تكاليف الشحن لشركة Essex

لعل أغلب مشكلات البرمجة الخطية التي تتصدى لها الشركات تفوق تلك المشكلة التي تصدت لها شركة Ajax . وذلك من حيث درجة الصعوبة والتعقد . ومن بين الأمثلة على ذلك شركة Essex والتي تمتلك مصنعين للإنتاج وثلاث مواقع للتخزين . يقع المصنعان في Florida و Texas ، أما المخازن فتقع في California و Illinois و New York . يوضح الجدول (10.3) تكاليف الشحن لكل طن من مصانع الشركة إلى كل مخزن من المخازن . ويوضح الجدول (10.4) عدد الأطنان المنتجة يومياً من كل مصنع وعدد الأطنان المطلوبة يومياً من كل مستودع . ومن الواضح أن إجمالي الكمية التي ينتجها المصنعان (  $4,000 + 3,000 = 7,000$  طن ) وهي مساوية تماماً لإجمالي الطلب في المخازن الثلاثة (  $2,500 + 2,000 + 7,000 = 11,500$  طن ) .

جدول (10.3) تكاليف شحن منتج شركة Essex من كل مصنع إلى كل مستودع / لكل طن .

المخزن	المخزن			المصنع
	New York	Illinois	California	
Florida	\$ 7	\$ 10	\$ 15	
Texas	11	8	6	

جدول (10.4) الإنتاج اليومي للمصانع والطلب اليومي للمخازن لشركة Essex .

المصنع	الناتج ( بالطن )	المخزن	الطلب ( بالطن )
Florida	4,000	California	2,500
Texas	3,000	Illinois	2,000
	7,000	New York	2,500
			7,000

أما المشكلة التي ترغب الشركة حلها فهي : ما هو عدد الأطنان التي يجب شحنها من كل مصنع لكل مخزن ؟ ولما كانت تكاليف الشحن مرتفعة في العديد من الصناعات لذا فإن أثر هذه المشكلة عادة ما يكون كبيراً . هذا وترغب الشركة في تدنية تكاليف الشحن ، والتي تساوي :

$$15A + 10B + 7C + 6D + 8E + 11F \quad (10.28)$$

حيث  $A$  هي عدد الأطنان التي يتم شحنها يومياً من مصنع Florida إلى مخزن California ، و  $B$  هي عدد الأطنان التي يتم شحنها يومياً من مصنع Florida إلى مخزن Illinois ، و  $C$  هي عدد الأطنان التي يتم شحنها يومياً من مصنع Florida إلى مخزن New York ، و  $D$  هي عدد الأطنان التي يتم شحنها من مصنع Texas إلى مخزن California ، و  $E$  هي عدد الأطنان التي يتم شحنها من مصنع Texas إلى مخزن Illinois ، و  $F$  هي عدد الأطنان التي يتم شحنها من مصنع Texas إلى مخزن New York .

وتوجد ثلاثة مجموعات من الشروط :

أولاً : يجب أن تفي إجمالي الشحنات الواردة إلى كل مخزن بمتطلبات هذا المخزن ، وهو ما يعنى وجوب تحقق المتباينات التالية :

$$A + D \geq 2,500 \quad (10.29)$$

$$B + E \geq 2,000 \quad (10.30)$$

$$C + F \geq 2,500 \quad (10.31)$$

ثانياً : لا يمكن أن تزيد معدلات إنتاج كل مصنع عن إجمالي الشحنات ، وهو ما يعنى وجوب تحقق المتباينات التالية :

$$A + B + C \leq 4,000 \quad (10.32)$$

$$D + E + F \geq 3,000 \quad (10.33)$$

ثالثاً :  $A$  و  $B$  و ..... و  $F$  يجب ألا تكون سالبة .

$$A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0, D \geq 0, E \geq 0, F \geq 0 \quad (10.34)$$

وكما هو موضح بالتفصيل في ملحق هذا الفصل ، فإن برامج الحاسب دائماً ما تستخدم في حل مشكلات البرمجة الخطية . ويعرض الشكل

(10.11) مطبوعة الحاسب الآلي لهذه المشكلة . وبناء على نتائج هذه المطبوعة ، نجد أنه يتعين على الشركة شحن 1,500 طن يومياً من مصنع

Florida إلى مخزن Illinois و 2,500 طن يومياً من مصنع Florida إلى مخزن New York و 2,500 طن من مصنع Texas إلى مخزن

California و 500 طن يومياً من مصنع Texas إلى مخزن Illinois ، وأقل تكاليف شحن هي 51,500 دولار يومياً .

```

$ LINDO
LINDO (UC 2 MARCH 85)
: MIN 15A + 10B + 7C + 6D + 8E + 11F
^ SUBJECT TO
^ A + D > 2500
^ B + E > 2000
^ C + F > 2500
^ A + B + C <= 4000
^ D + E + F <= 3000
^ END

: LOOK ALL

MIN      15 A + 10 B + 7 C + 6 D + 8 E + 11 F
SUBJECT TO
2) A + D >= 2500
3) B + E >= 2000
4) C + F >= 2500
5) A + B + C <= 4000
6) D + E + F <= 3000

END

: GO
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1)          51500.0000

VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
A                   0.000000          7.000000
B                  1500.000000          0.000000
C                   2500.000000          0.000000
D                  2500.000000          0.000000
E                   500.000000          0.000000
F                   0.000000          6.000000

POW              SLACK OR SURPLUS          DUAL PRICES
2)                0.000000          -9.000000
3)                0.000000          -10.000000
4)                0.000000          -7.000000
5)                0.000000          0.000000
6)                0.000000          2.000000

NO. ITERATIONS=          4

```

شكل (10.11) حل مشكلة Essex .

كيف قامت شركة H. J. Heinz بتدنية نفقاتها

تقوم شركة Heinz بتصنيع الكاتشب في عدد من المصانع المنتشرة في مختلف أنحاء الولايات المتحدة ، ثم تقوم بتوزيعها على مخازنها المنتشرة في جميع أنحاء البلاد . ولتحديد كمية الكاتشب التي يجب على كل مصنع إرسالها إلى كل مخزن ، قامت الشركة بالاستعانة بأساليب البرمجة الخطية . وفيما يلي بياناً بقدرات كل مصنع واحتياجات كل مخزن ومعدلات الشحن في الجدول التالي : \*

المخزن	المصنع												الاحتياجات اليومية [ بالدقيقة لكل (cwt.) ]
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
	معدلات الشحن [ بالسنت لكل (cwt.) ]												[ (cwt.) ]
A	16	16	6	13	24	13	6	31	37	34	37	40	1,820
B	20	18	8	10	22	11	8	29	33	25	35	38	1,530
C	30	23	8	9	14	7	9	22	29	20	38	35	2,360
D	10	15	10	8	10	15	13	19	19	15	28	34	100
E	31	23	16	10	10	16	20	14	17	17	25	28	280
F	24	14	19	13	13	14	18	9	14	13	29	25	730
G	27	23	7	11	23	8	16	6	10	11	16	28	940
H	34	25	15	4	27	15	11	9	16	17	13	16	1,130
J	38	29	17	11	16	27	17	19	8	18	19	11	4,150
K	42	43	21	22	16	10	21	18	24	16	17	15	3,700
L	44	49	25	23	18	6	13	19	15	12	10	13	2,560
M	49	40	29	21	10	15	14	21	12	29	14	20	1,710
N	56	58	36	37	6	25	8	19	9	21	15	26	580
P	59	57	44	33	5	21	6	10	8	23	15	18	30
Q	68	54	40	38	8	24	7	19	10	33	23	23	2,840
R	66	71	47	43	16	33	12	26	19	20	25	31	1,510
S	72	58	50	51	20	42	22	16	15	13	20	21	970
T	74	54	57	55	26	53	26	19	14	7	15	6	5,110
U	71	75	57	60	30	44	30	30	41	8	23	37	3,540
Y	73	72	63	56	37	49	40	31	31	10	8	25	4,410
السعة اليومية	10,000	9,000	3,000	2,700	500	1,200	700	300	500	1,200	2,000	8,900	40,000

ويوضح هذا الجدول الحجم الأمثل لشحنات يومية من كل مصنع لكل مخزن . فمثلاً يأتي كاتشب المخزن A من المصنع I .  
 (أ) طبقاً للمسؤولين بالشركة فإن أحد أهم المميزات التي تم الحصول عليها من استخدام البرمجة الخطية هو أن كبار الموظفين في إدارة الشحن لم يعودوا مضطرين لقضاء وقت طويل في إعداد برامج الشحن . فمن الذي يتحمل هذا العمل نيابة عنهم ؟  
 (ب) كما صرح أولئك المسؤولون أن أحد المزايا الهامة للبرمجة الخطية هي الشعور بالارتياح النسبي الناتج عن التأكد من أن البرنامج هو أقل البرامج الممكنة من حيث التكلفة . هل يعني ذلك أنه إذا كانت البيانات المتعلقة بمعدلات الشحن غير صحيحة فإن البرنامج سيظل هو أفضل السبل ؟

ج) ما هو الشيء الذي تحاول شركة Heinz معظّمته أو تدنيته ؟

د) وضع بالتفصيل طبيعة الشروط .

المخزن	المصنع												الإجمالي
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	
A	1,820												1,820
B	1,530												1,530
C		2,360											2,360
D	100												100
E		280											280
F		730											730
G	940												940
H				1,130									1,130
J		4,150											4,150
K	700		3,000										3,700
L	1,360					1,200							2,560
M		140		1,570									1,710
N	580												580
P								30					30
Q		1,340			500				500			500	2,840
R	810						700						1,510
S								90				880	970
T												5,110	5,110
U	2,160								180	1,200			3,540
Y											2,000	2,410	4,410
السعة اليومية	10,000	9,000	3,000	2,700	500	1,200	700	300	500	1,200	2,000	8,900	40,000

### الحل

(أ) الحاسب الآلي وبعض الموظفين من ذوي الخبرة البسيطة .

(ب) لا ، فالنموذج المستخدم هنا هو أساساً مماثل تماماً لذلك المستخدم لتدنية نفقات الشحن في شركة Essex . وإذا كانت البيانات الخاصة بمعدلات الشحن أو المتطلبات أو القدرات اليومية خاطئة ، فمن الطبيعي أن النتائج أيضاً لن تكون سليمة .

(ج) تحاول الشركة تدنية إجمالي مصاريف الشحن والتي يمكن تمثيلها بـ

$$\sum_i \sum_j U_{ij} V_{ij}$$

حيث  $U_{ij}$  يساوي معدلات الشحن من المصنع  $i$  إلى المستودع  $j$  و  $V_{ij}$  تساوي الكمية التي يتم شحنها يومياً من المصنع  $i$  إلى المستودع  $j$  .

(د) مجموعة الشروط توضح أن إجمالي الشحنات من كل مصنع لا يمكن أن تزيد عن قدرته ، أي أن :

$$\sum_j V_{ij} \leq K_i$$

حيث  $K_i$  هي قدرة المصنع  $i$  . مجموعة أخرى من الشروط توضح أن كل مخزن يجب أن يفي بمتطلباته ، أي أن :

$$\sum_j V_{ij} \geq R_j$$

حيث  $R_j$  هي إجمالي الشحنات المطلوبة في المخزن  $h$ . بالإضافة إلى ذلك هناك شروط تنص على أن الشحنات من كل مصنع إلى كل مخزن لا بد أن تكون غير سالبة أي أن :

$$r_{ij} \geq 0$$

A. Henderson and R. Schlaifer "Mathematical Programming," in Mansfield, *Managerial Economics and Operations Research*, 5<sup>th</sup> ed. تعد هذه الأرقام تقريبية ، إلا أنها تفي بأغراض الدراسة الحالية .

## الاحتياطي الفيدرالي ودوره مع البنوك التجارية

بناء على الأجزاء السابقة من هذا الفصل ، قد يتولد لدينا الانطباع بأنه لا يمكن تطبيق أساليب البرمجة الخطية إلا في المجال التي تنطوي على مشكلات النقل والتصنيع ، إلا أن ذلك ليس صحيحاً . فقد قام بنك الاحتياطي الفيدرالي بإسداء النصح اللازم للبنوك التجارية بخصوص كيفية استخدام البرمجة الخطية<sup>9</sup> ولناخذ مثال First National Bank حيث يوجد نوعان من الأصول ، قروض واستثمارات . ولأن البنك لديه 400 مليون دولار يجب تخصيصها بين هذين النوعين من الأصول فإن :

$$+ L \leq 400 \quad (10.35)$$

حيث  $I$  هي كمية الاستثمارات و  $L$  هي كمية القروض التي يمنحها البنك . ويرغب البنك ألا تقل القروض عن 150 مليون دولار ، أي :

$$I \geq 150 \quad (10.36)$$

ولأن الاستثمارات يمكن تحويلها إلى نقود سائلة بشكل أسرع من القروض ، فإن البنك يرغب في ألا تقل الاستثمارات عن 20% من إجمالي قروض واستثماراته ، لذلك :

$$I \geq 0.20(L + I)$$

أو

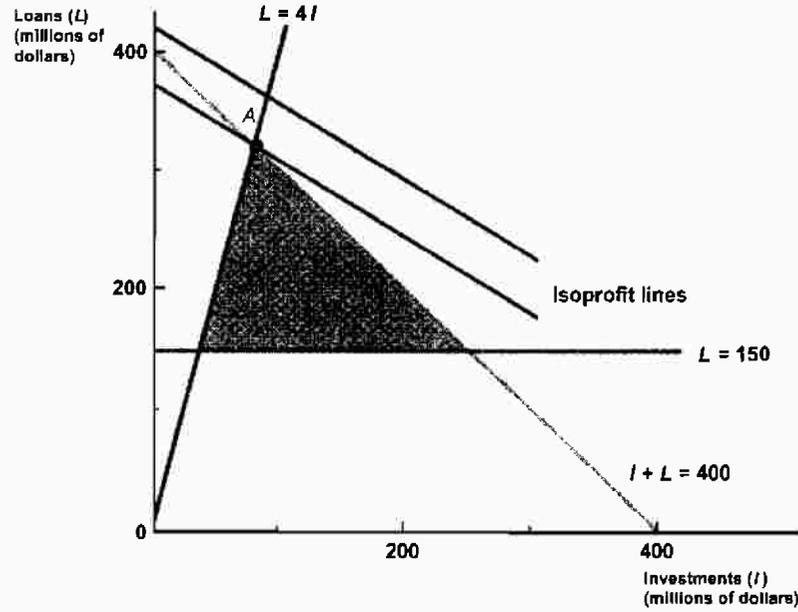
$$I \leq 4I \quad (10.37)$$

ويرغب مدير البنك في معظمة الأرباح ، فإذا كان البنك يحصل على عائد قدره 16% على القروض و 10% على الاستثمارات ، فإن الأرباح تساوي :

$$\pi = 0.16L + 0.10I \quad (10.38)$$

وهكذا تلخص مشكلة المديرين في معظمة  $\pi$  مع مراعاة الشروط في (10.35) و (10.36) و (10.37) وبشرط أن  $I > 0$  و  $L > 0$  . وتعد هذه واحدة من تطبيقات البرمجة الخطية ، وكما هو موضح بالشكل (10.12) فإنه يمكن حل هذه المشكلة بيانياً ، وعند الوفاء بكل الشروط ، يتعين على البنك اختيار إحدى النقاط في المنطقة المظللة في الشكل (10.12) . لاحظ أنه يتعين على البنك اختيار إحدى النقاط التي تقع أعلى أو أدنى الخط حيث  $L = 150$  وذلك للوفاء بالشرط في (10.36) . كما يجب عليه اختيار إحدى النقاط التي تقع أعلى أو أدنى الخط حيث  $I + L = 400$  وذلك للوفاء بالشرط في (10.35) ، وأخيراً يجب عليه اختيار إحدى النقاط أعلى أو أدنى الخط حيث  $L = 4I$  وذلك للوفاء بالشرط في (10.37) . هذا ويمكننا رسم منحنيات الأرباح المتساوية في الشكل (10.12) وذلك باستخدام المعادلة (10.38) . ولعظمه الأرباح ، يجب على المديرين اختيار إحدى النقاط في المنطقة المظللة والتي تقع أعلى منحنيات الأرباح المتساوية . ومن الواضح أن هذه النقطة هي  $A$  حيث يخصص البنك 320 مليون دولار للقروض و 80 مليون دولار للاستثمارات . وعلى الرغم من سهولة وبساطة هذا المثال ، إلا أنه يعد أحد الأمثلة المفيدة على قدرة البرمجة الخطية في حل المشكلات غير الصناعية . وما من شك في أن أهمية هذه التقنية تتجاوز حالات الإنتاج لتمتد إلى عالم التمويل والتسويق .

<sup>9</sup> A. Broadus, "Linear Programming: A New Approach to Bank Portfolio Management," *Federal Reserve Bank of Richmond Monthly Review*.



مكل (10.12) المحفظة المثلى للقروض والاستثمارات : أفضل نقطة هي  $A$  ، حيث يستثمر البنك 320 مليون دولار في القروض و 80 مليون دولار في الاستثمارات .

## الركن الاستشاري

### تقييم العملية التنظيمية لأحد برامج الشحن \*

تم تأسيس شركة رائدة في مجال تصنيع وتوزيع المنتجات الاستهلاكية بحيث تقوم على مبدأ لامركزية الإدارة . وطبقاً لهذا المبدأ فإن كلاً من المخازن الإقليمية الستة تخضع لأحد مديري المبيعات الإقليميين - وهم الذين يقررون كمية المنتجات التي يتم طلبها من مصانع الشركة . ولما كان المخزون مكلفاً يدفع تكاليف الشحن ، كان من المتوقع أن يقوم كل مدير إقليمي بوضع ما لديه من طلبات بشكل يؤدي إلى تلبية نفقاته الخاصة ونفقات الشركة بصفة عامة . إلا أن واحداً من مصانع الشركة كان يقع بعيداً عن كل المخازن حتى أن أحداً من مديري المخازن الإقليمية الستة لم يكن يحول طلباته إليه إلا إذا اضطرته الضرورة القصوى إلى ذلك ؛ كأن تقوم المصانع الخمس الأخرى برفض الطلبات لعجزها عن مواجهة ضغوط الطلب المتزايدة عليها . لذلك فإن هذه المصانع تعمل طبقاً لمبدأ أسبقية الطلبات ، فمن يطلب مبكراً يتسلم مبكراً . فإذا كنت تعمل كمستشاراً لهذه الشركة ، فما هي مقترحاتك بخصوص نظام الشحن لهذه الشركة ؟

\* لاختبار مماثل لهذه الحالة راجع : N. Harlan, C. Christenson, and R. Vancil, *Managerial Economics: Text and Cases* (Home wood, III. : Irwin, 1962).

### شركة Apple ومشروع تطوير جهاز Lisa-Macintosh \*

في عام 1982 بدأ Steve Jobs - الرئيس التنفيذي لشركة Apple - في تطوير عائلة جديدة من المنتجات - هي أجهزة الكمبيوتر الشخصي من طراز Lisa-Macintosh . حقيقة الأمر هو أن المنتج الجديد كان موجهاً صوب سوق رجال الأعمال والمحترفين في التعامل مع أجهزة الكمبيوتر الشخصية ، ولم يكن موجهاً بأي حال من الأحوال صوب السوق التعليمية - والتي كانت أجهزة Apple مسيطرة عليها بالفعل . وقد تم تنفيذ هذا المشروع بواسطة فريق صغير يتبع Jobs مباشرة . وقد كان مشروعاً طموحاً تم إسناده إلى عدد من ذوي الكفاءة ، الذين فهم اتصال يوم بالإدارة العليا في الشركة .

وسرعان ما احتل الجهاز الجديد مكانه كأحد أهم الأجهزة الجديدة التي طورها الشركة ، وهو ما جعل سعره يتراوح ما بين 8,000 دولار إلى 10,000 دولار في بادئ الأمر . وكانت الفكرة تتمثل في البدء بتطوير هذا الجهاز نفسه حتى يمكن له إظهار فاعلية التكنولوجيا الجديدة المنوط بتسيدها بغرض استخدامه للمساعدة في الحصول على منتج آخر أضخم من حيث الأهمية والحجم - وهو جهاز Macintosh . وكان كلاً من Lisa و Macintosh يلعبان دوراً هندسياً في المقام الأول بينما كان التسويق يأتي في المرتبة الثانية - أو أقل . ولم تأت مواصفات Lisa متماشياً مع احتياجات مكاتب الشركات ، والتي كان اهتمامها منصّباً على الدعم الميداني والبرامج التطبيقية وسهولة الاتصال ، بل كانت المواصفات أكثر تماشياً مع أغراض المشروعات التجارية الصغيرة والجامعات مما هو الأمر في حالة الشركات الكبرى .

وعلى الرغم من أن تصميم Lisa كان مبتكراً للغاية ، إلا أن المبيعات لم تصل مطلقاً إلى الحد المرجو . وكان من الضروري إجراء تعديل علمي لتصميم Macintosh مرة تلو الأخرى قبل أن يصبح هذا التصميم متوافقاً مع متطلبات السوق . ومع أن الخطة كانت ترمي إلى إدخال Macintosh إلى الأسواق بحلول مارس 1983 ، إلا أن ذلك قد تأجل مراراً ولم يتحقق إلا في أوائل عام 1984 عندما تم إذاعة إعلان تليفزيوني يعرض IBM في صورة الحاكم الشيوعي الطاغية - Big Brother - بينما يعرض Macintosh في صورة جهاز الكمبيوتر الذي يمثل الذئب الخفي لرجال الأعمال . وعلى الرغم من تلك الإعلانات لم يحقق Macintosh نجاحاً كبيراً في سوق العمل المستهدف ، وكان أحد الأسباب قلة البرامج المتوافرة .

وقد بدأت شركة Apple بوضع خطة ترمي إلى إنشاء مصنع بدرجة عالية من الأوتوماتية ( الآلية ) لإنتاج أجهزة Macintosh عند بدء تسويقه . لكن عند بدء تشغيل المصنع الذي تكلف 20 مليون دولار في أوائل 1984 لم تكن الناحية الأوتوماتية قد وصلت إلى الحد المطلوب ، الأمر الذي أدى إلى الاستغناء عن عدد من المعدات تصل تكلفتها إلى 7 مليون دولار وذلك خلال الثمانية أشهر الأولى من الافتتاح . ولعل أحد أسباب ذلك هو افتقار مصانع Apple السابقة إلى مثل هذه الدرجة العالية من الأوتوماتية ، فحتى عام 1981 كانت الخبرة الإنتاجية للشركة تفتقر إلى حد كبير مجالات تجميع الأجهزة والتي تتطلب كثافة عمالية كبيرة .

ونظراً لكثرة العيوب التي كانت تشوب مشروع التطوير هذا ، فقد انخفضت إيرادات شركة Apple بشكل ملحوظ ، وكان ذلك يرجع جزئياً إلى مشروع Lisa-Macintosh [ راجع جدول (1) ] ، وتلا ذلك قيام السيد Steve Jobs بتقديم استقالته كرئيساً للشركة في 17 سبتمبر 1985 . وقد أقدم خليفته John Sculley ، بعد أن شعر بأن الشركة لديها زيادة كبيرة في القدرة الإنتاجية - على إغلاق مصنع الشركة في Dallas ، وتم تسريح حوالي 20% من القوة العاملة بالشركة . وأصبحت شركة Apple شيئاً مختلفاً تماماً عما كانت عليه قبل بدء مشروع تطوير Lisa-Macintosh .

جدول (1) بيان الدخل لشركة Apple .

بعد انقضاء ثلاثة شهور		
28 سبتمبر 1984	27 سبتمبر 1985	
\$ 477,400	\$ 409,709	صافي المبيعات
432,528	373,899	التكلفة والنققات
44,872	35,810	الدخل العامل قبل إمدادات التدعيم
—	3,373	إمدادات التدعيم
3,861	4,654	صافي سعر الفائدة وغيرها من أنواع الدخول
48,733	43,837	الدخل قبل الضريبة
17,927	21,480	الإمدادات قبل ضريبة الدخل
30,806	22,357	صافي الدخل
\$ 0.50	\$ 0.36	الكسب لكل سهم

\* المصدر : Wheelen and Hunger, *Cases in strategic Management and Business Policy* . كل البنود ما عدا الدخل لكل سهم بالألف دولار .

- ( أ ) إذا كان متوسط سعر الجهاز 1,500 دولار ، وإذا كان متوسط سعر التكاليف المتغيرة هو 1,200 دولار فما هي نقطة التعادل ، علماً بأن التكاليف الثابتة 15 مليون دولار سنوياً ؟
- (ب) إذا كانت دالة التبادل العكسي بين الوقت والتكاليف تشير إلى أن تقليل زمن المشروع عام واحد كان من الممكن أن يكلف 2 مليون دولار ، فما هي العوامل التي يجب وضعها في الاعتبار عند اتخاذ القرار بشأن ما إذا كان يجب إنفاق هذا المبلغ الإضافي ؟
- ( ج ) هل كانت توليفة عناصر الإنتاج الخاصة بشركة Apple لإنتاج Macintosh على دالة الإنتاج أم خارجها ؟ بمعنى هل كانت على القدر اللازم من الكفاءة أم لا ؟
- ( د ) إذا ما أولينا عنصر التسويق مجرد عناية ثانوية ، ترى ما هي عيوب Lisa-Macintosh الأخرى ؟
- (هـ) هل ترى أنه من الأفضل دائماً استغلال أكثر المصانع استخداماً لرأس المال وأكثرها آلية ؟ نعم أم لا ؟ ولماذا ؟
- ( و ) هل كان من الممكن أن تساعد البرمجة الخطية في تحديد أي نوع من مرافق الإنتاج يجب إنشاؤها وكيفية تشغيلها ؟ إذا كانت الإجابة نعم ، فكيف ؟

\* المادة في هذه الحالة مستمدة من : Hayes, Wheelwright, and Clark, *Dynamic Manufacturing*, and Wheelen and Hunger, *Cases in : strategic Management and Business Policy*. Also, see P. Feddeler, T. Wheelen, and D. Croll, "Apple Computer, Inc., 1987 ... The Second Decade."

## موجز بما ورد في الفصل العاشر

- 1- تعد البرمجة الخطية إحدى الطرق التي تسمح لصانعي القرار بحل مشكلات المعظمة والتدنية عندما تكون هناك قيود تقلل من قدرتهم على الحركة . كما أن البرمجة الخطية تساعدنا في مجال قرارات الإنتاج فعلى العكس من النظرية التقليدية الواردة في الفصل السابع ، نجد أن البرمجة الخطية لا تتعامل مع دالة الإنتاج على النحو التي هي عليه قبيل قيام المديرين بمواجهة ما لديهم من مشكلات . كما أن تحليل البرامج أسهل في تطبيقه في العديد من الجوانب ، وتسمح التقنيات الحاسبة الفعالة بالحصول على نتائج وحلول .
- 2- غالباً ما يختار المدير واحداً ( أو توليفة ) من الطرق الممكنة حتى يتسنى له إنتاج سلعة معينة ، مع الوضع في الاعتبار أنه يوجد لدى الشركة كمية محدودة من بعض عناصر الإنتاج . وقد قمنا بحل هذه المشكلة باستخدام الطرق البيانية ، حيث تم صياغة منحنيات الأرباح المتساوية ووضعها على مخطط التوليفات الكفاءة ، ثم يتم اختيار نقطة على منطقة الحلول الممكنة ، تقع عند أعلى منحنيات الأرباح المتساوية . وبالإضافة إلى ذلك فقد تعاملنا مع شكل آخر من هذه المشكلة لم تكن فيه الشركة مقيدة من حيث كمية عناصر الإنتاج المتاحة لديها .
- 3- غالباً ما تنتج الشركة أكثر من منتج واحد ويكون لديها عدد من وسائل الإنتاج ذات الكميات الثابتة مما يحدد الكمية التي يمكن إنتاجها من كسل منتج . وهذه المشكلة أيضا يمكن حلها بيانيا باستخدام منحنيات الأرباح المتساوية على مخطط التوليفات الكفاءة من عناصر الإنتاج .
- 4- لكل مشكلة من مشكلات البرمجة الخطية مشكلة مقابلة تعرف بالمشكلة الثانوية . فإذا كانت المشكلة الأساسية مشكلة معظمة كانت المشكلة الثانوية مشكلة تدنية والعكس بالعكس . ففي المثال الخاص بتحديد أفضل التوليفات لإنتاج معين ، كانت المشكلة الأساسية تبحث عن أفضل معدلات إنتاج بينما كان الغرض من المشكلة الثانوية تحديد قيم للمقاطع الثابتة . وهذه القيم المفترضة - التي تعرف بأسعار الظل - تعد ذات فائدة كبيرة لأنها توضح ما يمكن أن يحدث لأرباح الشركة إذا تمكنت بشكل أو بآخر من زيادة كل نوع من عناصر الإنتاج .
- 5- يمثل المتغير الحامل كمية العناصر غير المستغلة . وعند استخدام المتغير الحامل يمكن تحويل الشروط من متباينات إلى معادلات . وبمجرد حدوث ذلك التحويل ، يمكن استخدام الطرق الجبرية لحل مشكلة البرمجة الخطية . والعملية هي تقدير الدالة الهدف - وهي الدالة التي نحاول معزمتها أو تدنيته - عند كل ركن من أركان منطقة الحلول الممكنة . والركن الذي تكون عنده الدالة الهدف عند أعلى أو أدنى قيمة لها هو الحل الأمثل .

## تمارين

(1) يجب على Martin Casey وهو نائب الرئيس التنفيذي لشركة Summit أن يوظف عمال الشركة وآلاتها لإنتاج ثلاثة أنواع من صناديق الملفات المعدنية بالخصائص التالية :

المنتج			متطلبات عناصر الإنتاج أو الأرباح
صناديق صغيرة	صناديق متوسطة	صناديق كبيرة	
10	15	25	ساعة عمالة لكل صندوق
5	15	40	ساعة آلات لكل صندوق
\$ 12.50	\$ 25	\$ 50	الربح لكل صندوق

وتمتلك الشركة إجمالي 3,500 ساعة عمالة و 2,500 ساعة آلات يمكن استخدامها يومياً .

(أ) ما هي دالة الهدف ؟

(ب) ما هي الشروط ؟

(ج) ما هو عدد ساعات العمالة وساعات الآلات التي يجب على السيد Casey توظيفها لإنتاج كل نوع من المنتجات ؟

(2) يجب على Frank Chidester كبير مهندسي شركة Cartwright تحديد أياً من الطرق الثلاثة يجب استخدامها لإنتاج منتج الشركة وهو المناديل الورقية . ويوضح الجدول التالي خصائص كل من الطرق الثلاثة :

العملية			متطلبات عناصر الإنتاج ( لكل وحدة ناتج )
C	B	A	
1	4	2	ساعة عمالة مدربة
1	1	1	ساعة عمالة غير مدربة
5	1	3	ساعة آلات

فإذا كان سعر ساعة العمالة المدربة 11 دولار وسعر ساعة العمالة غير المدربة 5 دولار وسعر ساعة الآلات 15 دولار . ويجب على الشركة إنتاج 100 طن يومياً ويمكنها استخدام أي كمية تريدها من كل من العناصر .

(أ) ما هي الدالة الهدف ؟

(ب) ما هي الشروط ؟

(ج) ما هي العملية ( أو العمليات ) التي يجب على السيد Chidester اختيارها ؟

(د) أترى أن هذه المشكلة تعد واحدة من مشكلات البرمجة الخطية ؟ نعم أو لا ؟ ولماذا ؟

(3) تستخدم شركة Adams ثلاثة عمليات وهي X و Y و Z لإنتاج سلعة معينة . وإنتاج وحدة واحدة من تلك السلعة تحتاج العملية X إلى 2 ساعة عمالة و 1 ساعة آلات ، بينما تتطلب العملية Y 1.5 ساعة عمالة و 1.5 ساعة آلات ، أما العملية Z فتتطلب 1.1 ساعة عمالة و 2.2 ساعة آلات .

(أ) باستخدام رسم بياني تظهر فيه ساعات العمالة على المحور الرأسي وساعات الآلات على المحور الأفقي ، قم برسم خطوط الأشعة التي تمثل العمليات الثلاث .

(ب) باستخدام الرسم في الجزء (أ) قم برسم منحنى الناتج المتساوي المناظرة لـ 100 وحدة .

- (4) باستخدام البرمجة الخطية وجد نائب رئيس إدارة شركة Summers أن سعر الظل للعمالة المدربة 15 دولار في الساعة وسعر الظل للماكينة الخياطة يساوي صفر .
- ( أ ) ما الذي يشير إليه سعر الظل للعمالة المدربة ؟
- (ب) ما الذي يشير إليه سعر الظل لوقت ماكينات الخياطة ؟
- (5) افترض أن في حالة Martin Casey [ المسألة رقم (1) ] يرغب في تحديد قيمة الساعة الإضافية من العمالة ومن الآلات .
- ( أ ) ما هي المشكلة الثانوية ؟
- (ب) ما هو الحل لهذه المشكلة الثانوية ؟
- ( ج ) ما هي قيمة الساعة الإضافية من كل العناصر ؟
- (6) تستخدم شركة Murray نوعين من عناصر الإنتاج ، ساعات الآلات في حجرة التشطيب وساعات العمالة .
- ( أ ) إذا كان هناك حد أقصى قدرة 2,000 ساعة آلات و 200 ساعة عمالة متاحة أسبوعياً ، قم برسم مجموعة من التوليفات الكفأة في صورة شكل بياني .
- (ب) تستخدم العملية 1 X ساعة آلات و 1 ساعة عمالة للحصول على وحدة من الإنتاج . قم برسم الشعاع الذي يمثل هذه العملية .
- ( ج ) تستخدم العملية Y ½ ساعة آلات و 2 ساعة عمالة للحصول على وحدة من الإنتاج ، وتستخدم العملية Z 2 ساعة آلات و ½ سلعة عمالة للحصول على وحدة من الإنتاج . قم برسم خطوط الأشعة التي تمثل هاتين الطريقتين .
- ( د ) قم برسم منحنى الناتج المتساوي لـ 1,000 وحدة إنتاج ( باستخدام الثلاث عمليات الموضحة أعلاه ) .
- (هـ) افترض أن الشركة يمكنها استخدام كل ساعات الآلات التي تريدها بسعر 10 دولار في الساعة وكل ساعات العمالة التي تريدها بسعر 10 دولار في الساعة فما هي العملية التي يجب استخدامها لإنتاج 1,000 وحدة ؟
- (7) يمكن لشركة Brown استخدام ثلاثة عمليات في مصنعها بالمكبسك A و B و C لإنتاج إحدى السلع . وللحصول على كل وحدة من الإنتاج ، تحتاج العملية A لـ 2 ساعة عمالة و 1 ساعة آلات ، بينما تحتاج العملية B لـ 1.5 ساعة عمالة و 1.5 ساعة آلات ، أما العملية C فتحتاج لـ 1.1 ساعة عمالة و 2.2 ساعة آلات . ويجب على الشركة دفع 3 دولار لكل ساعة عمالة و 2 دولار لكل ساعة آلات ، لكنها لا تستطيع استخدام أكثر من 120 ساعة آلات أسبوعياً حيث أن ذلك هو أقصى قدر متاح في المدى القصير .
- ( أ ) إذا ما رغبت الشركة في إنتاج 100 وحدة أسبوعياً ، فما هو عدد الوحدات الواجب إنتاجه باستخدام العملية A ؟
- (ب) ما هو عدد الوحدات الواجب إنتاجه باستخدام العملية B ؟
- ( ج ) ما هو عدد الوحدات الواجب إنتاجه باستخدام العملية C ؟
- (8) في المسألة رقم (7) ، افترض أنه يمكن لشركة Brown استخدام أكثر من 120 ساعة آلات أسبوعياً . وفي ظل هذه الظروف ما هو عدد الوحدات الواجب إنتاجها باستخدام العمليات A و B و C ؟
- (9) طبقاً لنتائج الحاسب الآلي في الشكل (10.13) ، فإن سعر الظل ( السعر الثانوي ) للدقيقة من وقت العمالة هو 2.5 سنت ، والدقيقة من وقت الآلات 65 سنت .
- ( أ ) إذا كان بمقدور George Kramer ( راجع ملحق الفصل السابق ) استخدام عمالة إضافية بسعر 5 دولار في الساعة ، فهل يلزم عليه استخدام تلك العمالة الإضافية ؟
- (ب) إذا كان بمقدوره استخدام آلات إضافية بتكلفة 35 دولار في الساعة ، فهل يلزمه استخدام أي آلات إضافية ؟

(10) تمتلك شركة Dartmouth مصانع في ولايتي Kentucky و Oregon ومخازن في Florida و Oklahoma و Arizona .

والجدول التالي يوضح تكاليف شحن المنتجات من كل مصنع إلى كل مخزن :

المخزن			المصنع
Arizona	Oklahoma	Florida	
\$ 7	\$ 6	\$ 4	Kentucky
6	7	11	Oregon

ولا يمكن للإنتاج اليومي للمصانع أن يتخطى 4,000 طن (Kentucky) و 5,000 طن (Oregon) . ولا يمكن للطلبات اليومية للمخازن أن تقل عن 2,500 طن (Florida) و 3,500 طن (Oklahoma) و 3,000 طن (Arizona) .

( أ ) ما هي دوال الهدف ؟

(ب) ما هي الشروط ؟

( ج ) لتدنية إجمالي تكاليف الشحن ، ما هو عدد أطنان المنتج التي يجب شحنها من مصنع Kentucky إلى كل المخازن ؟

( د ) لتدنية إجمالي تكاليف الشحن ، ما هو عدد أطنان المنتج التي يجب شحنها من مصنع Oregon إلى كل من المخازن ؟

ملحوظة : الأسئلة (ج) و (د) للطلاب الذين يمكنهم استخدام برامج LINDO . ( راجع الملحق ) .

## ملحق

### إحدى الحزم البرمجية لحل مشكلات البرمجة الخطية

عند قيامنا بحل أغلب مشكلات البرمجة الخطية عملياً ( يتم ذلك ) بالاستعانة ببرامج الكمبيوتر بدلاً من الأساليب الجبرية والبيانية . ويعد برنامج LINDO أحد أهم البرامج المساعدة في حل مشكلات البرمجة الخطية لما له من شيوع وسهولة في استخدامه . ويجدر بنا الآن أن نقدم وصفاً موجزاً لإيضاح كيفية تبسيط وتيسير حل مشكلات البرمجة الخطية بواسطة الكمبيوتر .

تجدر دخول المستخدم على برنامج LINDO تظهر أمامه هذه العلامة ( : ) في أقصى يسار الشاشة . ويجب إعطاء الأمر المناسب للبرنامج بشأن ما إذا كان عليه معظمة أو تدنية دالة الهدف المستخدمة. ولعمل ذلك فإننا ندخل "MIN" أو "MAX" ثم دالة الهدف بعد ( : ) وبعد ذلك ندخل "SUBJECT TO" والتي تعد بمثابة إشارة للبرنامج أن الجزء التالي هو مجموعة الشروط أو الضوابط. وبعد الانتهاء من إدخال كافة هذه الضوابط ، نقوم بإدخال <sup>10</sup> "END" للدلالة على أن البرنامج قد حصل على كافة المعلومات المطلوبة . وأخيراً نقوم بإدخال "LOOK ALL" والذي يعد بمثابة أمر موجه للبرنامج حتى يقوم بإمدادنا بدالة الهدف وجميع الشروط أو الضوابط التي تم إدخالها. وتعد هذه الخطوة إجراءً ذا فائدة كبيرة للتحقق من عدم حدوث أخطاء. وبعد إصدار الأمر "GO" للبرنامج يخرج الحل، وبذلك يتم تشغيل البرنامج لحل مشكلة البرمجة الخطية .<sup>11</sup>

وللإيضاح ، سوف نلقي النظر على حالة السيد George Kramer - والذي يمتلك مصنعاً يقوم بإنتاج الإشارات وأربطة العنق . علمنا بأن السيد Kramer يحقق ربحاً قدره 50 سنتاً للإشارة و 2 دولار لرابطة العنق . هذا ويتطلب إنتاج الإشارات الواحد 30 ثانية فقط من العمالة في مقابل 15 دقيقة لرابطة العنق . وبصفة عامة ، فإن زمن العمالة المتوفر لدى السيد Kramer هو 12,000 دقيقة أسبوعياً يمكن تخصيصها لإنتاج الإشارات وربطات العنق ، ويمكن استخدام آلات الشركة لإنتاج كل من السلعتين ، علماً بأن إنتاج الإشارات الواحد يتطلب 0.75 دقيقة من وقت الآلات في مقابل 2.5 دقيقة لإنتاج رابطة عنق واحدة . وبصفة عامة ، فإن زمن الآلات المتوفر لدى السيد Kramer هو 5,000 دقيقة أسبوعياً .

<sup>10</sup> عند إدخال الضوابط أو الشروط يقوم برنامج LINDO بتفسير " < " بمعنى أكبر من أو مساوياً لـ ، و " > " بمعنى أقل من أو مساوياً لـ . والسبب في ذلك هو عدم وجود إمكانية لإدخال " أكبر من أو مساوياً لـ " أو " أقل من أو مساوياً لـ " في معظم لوحات المفاتيح .

ونلاحظ أنه عند قيامنا بإدخال الأمر "LOOK ALL" فإن LINDO يكون قد قام بقراءة هذه المتباينات بالطريقة الموضحة أعلاه .

<sup>11</sup> لأغراض الدراسة الحالية ، يمكنك تجاهل عدد المتكررات والخطوة التي يوجد عندها الحل .

وبما أن السيد Kramer يرغب في معظمة أرباحه ، لذا فيمكنه صياغة دالة الهدف بالشكل التالي :

$$Z = 0.5X + 2Y \quad (10.39)$$

حيث  $Z$  هو إجمالي الربح الأسبوعي و  $X$  هو عدد أربطة العنق التي يتم إنتاجها أسبوعياً . وشروط العمالة هي :

$$0.5X + 15Y \leq 12,000 \quad (10.40)$$

حيث يمكن القول أن معاملات  $X$  و  $Y$  هي عدد دقائق العمالة اللازمة لإنتاج إيشارب واربطة عنق على الترتيب ، و  $12,000$  هو إجمالي عدد دقائق العمالة المتاحة للشركة أسبوعياً وشرط الآلات هو :

$$0.75X + 2.5Y \leq 5,000 \quad (10.41)$$

حيث معاملات  $X$  و  $Y$  هي عدد دقائق الآلات اللازمة لإنتاج إيشارب واربطة عنق على الترتيب ، و  $5,000$  هو إجمالي دقائق الآلات المتاحة للشركة أسبوعياً .

```

$ LINDO
LINDO (UC 2 MARCH 85)
: MAX .5X + 2Y
? SUBJECT TO
^ .5X + 15Y < 12000
? .75X + 2.5Y < 5000
? END

: LOOK ALL

MAX      0.5 X + 2 Y
SUBJECT TO
2) 0.5 X + 15 Y <= 12000
3) 0.75 X + 2.5 Y <= 5,000

END

: GO
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

I)
VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
X                  4500.000000    0.000000
Y                  650.000000    0.000000

ROW              SLACK OR SURPLUS    DUAL PRICES
2)                0.000000          0.025000
3)                0.000000          0.650000

NO. ITERATIONS=    2

```

### شكل (10.13) حل المسألة المتعلقة بالسيد George Kramer .

فإذا قمنا باستخدام برنامج LINDO ، فسوف تكون الخطوة الأولى هي إدخال دالة الهدف والشروط على النحو الموضح بالشكل (10.13) والذي يعرض هذه المشكلة في صورة مطبوعة الكمبيوتر النهائية . وبعد إدخال المعلومات ، يمكننا استخدام أمر "LOOK ALL" للتأكد من دقة المدخلات . أما الأمر "GO" فهو المسئول عن إعطاء الإشارة للكمبيوتر لكي يبدأ في حل المشكلة . ويقوم البرنامج بإمدادنا بقيمة ( دالة الهدف ) والذي يشكل أقصى ربح يمكن للسيد Kramer الحصول عليه في ظل وجود هذه الشروط أو الضوابط : 3,550 دولار أسبوعياً كما يمدنا البرنامج بأفضل توليفة من الإيشاربات ( $X$ ) واربطات العنق ( $Y$ ) الواجب على الشركة تحقيقها . فإذا رغبت الشركة في معظمة أرباحها في ظل وجود هذه الشروط ، فإنه يتعين عليها إنتاج 4,500 إيشارب و 650 ربطة عنق أسبوعياً . والجدير بالذكر أن العمود المعنون " العددي أو الفائض " يخبرنا بأن المتغير العددي لكل من العمالة والآلات يساوي صفر ؛ أي أنه تتم الاستفادة من كل دقيقة عمالة وآلات عند استخدام هذه التوليفة الإنتاجية . أما العمود المعنون " الأسعار الثنائية " فهو الذي يمدنا بأسعار الظل لزمن العمالة والآلات ، علماً بأن سعر الظل لدقيقة واحدة من زمن العمالة هو 2.5 سنت ، وسعر الظل لدقيقة واحدة من زمن الآلات هو 65 سنت .