الفصل الثاني

أساليب تحقيق الأمثلية

مقدمة

في عام 1993 أقدم السيد John Welch رئيس مجلس إدارة شركة General Electric على بيع القسم الخاص بصناعة مركبات الفضاء ومستلزماتها لشركة Martin Marietta ، حيث شعر هو ومعاونوه أن مثل هذا الإجراء سوف يؤدي إلى رفع مستوى الأداء في شركة General Electric وهي الشركة التي حققت أعلى قيمة على الإطلاق بين جميع الشركات الأمريكية عام 1994 . وقد سبق أن أشرنا في الفصل السابق إلى أن علم الاقتصاد الإداري (الاقتصاد التطبيقي في الإدارة) يعنى بالطرق التي يجب أن يتبعها المديرون عند قيامهم باتخاذ القرار بغية رفع مستوى الأداء أو كفاءة شركاتهم إلى أقصى درجة ممكنة . ولفهم هذه الأمور على أفضل نحو ممكن ، ينبغي علينا الإحاطة بأهم الأساليب (التقنيات) التي تهدف إلى تحقيق الأمثلية – وهو الموضوع الذي سوف نتناوله في هذا الفصل .

وسوف نبدأ هذا الفصل بوصف لعملية التحليل الحدي . ورغم ما يتسم به التحليل الحدي من بساطة إلا أنه أداة لا غنى عنها في إيضاح العديد من الجوانب المحورية لعملية اتخاذ القرار ، ولا سيما عندما يتعلق الأمر بالتوظيف الأمثل للموارد المتاحة . أما الخطوة التالية فسوف تتضمن تحليلاً لأهم استخدامات علم التفاضل ، بما في ذلك من قواعد للتفاضل واستخدام المشتقات للوصول بالدالة إلى قيمتيها العظمى والصغرى . ومع نهاية الفصل ، سنقوم بتناول فكرة الأمثلية المقيدة علاوة على قسم اختياري خاص بمضاعفات Lagrange . ولما كانت هذه المضاعفات تتطلب قدراً أكبر من العمليات الرياضية المعقدة ، لذا فقد تمت كتابة هذا الجزء بشكل يسمح للقارئ بأن يمر عليه مرور الكرام دون خسارة في المحتوى .

العلاقات الدالية

ولفهم تقنيات تحقيق الأمثلية الوارد شرحها في هذا الفصل ، ينبغي أن نلم بالأسلوب الذي سيتم به التعبير عن العلاقات الاقتصادية . ففي أحيان كثيرة يمكن التعبير عن العلاقة بين اثنين أو أكثر من المتغيرات الاقتصادية في شكل جدول أو رسم بياني . ومثال ذلك الجدول (2.1) الذي يوضح العلاقة بين السعر الذي تتقاضاه شركة Cherry وعدد الوحدات التي تبيعها الشركة يومياً . وكذلك يعبر الشكل (2.1) عن نفس العلاقة بيانياً .

جدول (2.1) العلاقة بين السعر والكمية المباعة ، شركة Cherry .

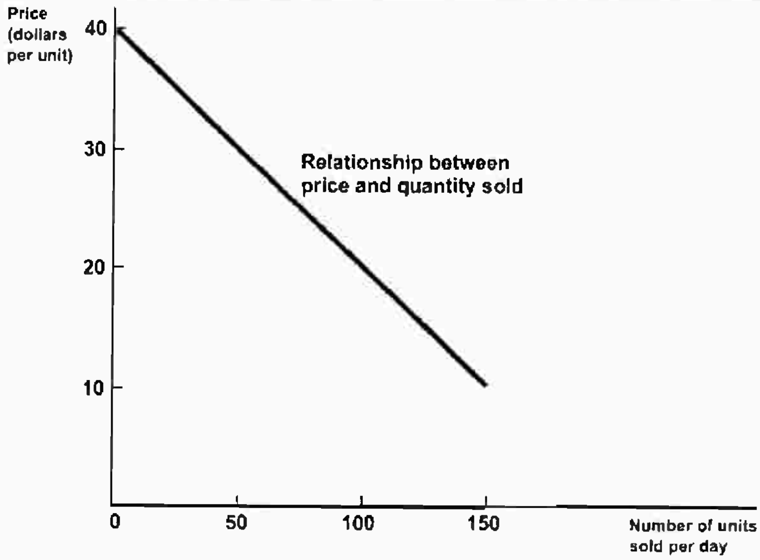
عدد الوحدات المباعة في اليوم	سعر الوحدة
150	$ 10
100	20
50	30
0	40

وليس من شك فيما للجداول والرسوم البيانية من نفع كبير ، مما يجعلنا نستخدمها بكثرة في هذا الكتاب ، كما أن هناك أسلوب آخر للتعبير عن العلاقات الاقتصادية وذلك باستخدام **المعادلات** . فكيف يمكن التعبير عن العلاقة بين عدد الوحدات **المباعة** من ناحية ، والسعر من ناحية أخرى في كل من الجدول (2.1) والشكل (2.1) في شكل معادلة ؟ يمكن التعبير عن هذا باستخدام العلاقة الدالية الافتراضية التالية :

$$Q = f(P), \qquad (2.1)$$

وحيث أن Q هي عدد الوحدات المباعة ، و P السعر . فيجب قراءة هذه المعادلة على النحو التالي : "عدد الوحدات المباعة هو عبارة عن سعر دالي"

مما يعني أن عدد الوحدات يتوقف على السعر ، أي أن عدد الوحدات المباعة هو المتغير التابع ، أما السعر فهو المتغير المستقل .



شكل (2.1) العلاقة بين السعر والكمية المباعة ، شركة Cherry : يعرض هذا الشكل البيانات الموضحة في الجدول (2.1) .

وعلى الرغم من فائدة المعادلة (2.1) إلا أنها لا توضح لنا **كيفية** اعتماد عدد الوحدات المباعة على السعر . لذا فنحن في حاجة إلى أسلوب أكثر دقة للتعبير عن هذه العلاقة ، كأن تكون :

$$Q = 200 - 5P. \qquad (2.2)$$

وبمقارنة هذه المعادلة بالبيانات الموضحة في الجدول (2.1) والشكل (2.1) يمكنك التحقق من أن هذه البيانات تتفق مع المعادلة . فمثلاً ، إذا كان السعر يساوي 10 دولاراً فينبغي أن يكون عدد الوحدات المباعة هو 150 = 5(10) – 200 ، وهي نفس النتيجة الموضحة في كل من الجدول (2.1) والشكل (2.1) بالضبط . فبغض النظر عن السعر الذي قد يقع اختيارك عليه ، يبقى عدد الوحدات التي تستخدمها كما هو ، سواء بالرجوع للجدول (2.1) أو باستخدام الشكل (2.1) أو المعادلة (2.2) .

التحليل الحدي

كثيراً ما يسهم التحليل الحدي في مساعدة المديرين على استخدام العلاقات الاقتصادية بدرجة عالية من الكفاءة ، سواء تم التعبير عن هذه العلاقات في شكل جداول أو رسوم بيانية أو معادلات . ويمكن تعريف **القيمة الحدية** لمتغير ما بأنها معدل التغيير في المتغير التابع نتيجة لما يطرأ على المتغير المستقل من تغيير بمقدار وحدة واحدة . ولإيضاح هذا المعنى ، يمكننا إلقاء نظرة على العمودين 2 & 1 من الجدول (2.2) الذين يوضحان إجمالي أرباح مؤسسة Roland عند مستويات الإنتاج المختلفة . وفي هذه الحالة يكون إجمالي الربح هو المتغير التابع ، ومقدار الإنتاج هو المتغير المستقل . وعليه ، فإن القيمة الحدية للربح (والمعروفة **بالربح الحدي**) هي التغير في إجمالي الربح عندما يتغير الإنتاج بمقدار وحدة واحدة .

والعمود 3 في الجدول (2.2) يوضح القيمة الحدية للربح . فإذا زاد الإنتاج من صفر إلى وحدة واحدة ، فإن العمود 2 يظهر زيادة الربح بمقدار 100دولاراً (من 0 إلى 100) . وهكذا نرى أن الربح الحدي في العمود 3 يساوي 100 دولاراً إذا ما كان الإنتاج ما بين صفر ووحدة واحدة . أما إذا زاد الإنتاج من وحدة إلى اثنين ، فمن الطبيعي أن يزيد الربح بمقدار 150 دولاراً . (من 100 إلى 250 دولاراً) . أي أن الربح الحدي المبين في العمود 3 يساوي 150 دولاراً إذا تراوح الإنتاج من وحدة إلى اثنين .

جدول (2.2) العلاقة بين الإنتاج والربح شركة ، مؤسسة Roland

(1) عدد الوحدات المنتجة في اليوم	(2) إجمالي الربح	(3) الربح الحدي	(4) متوسط الربح
0	0	100	—
1	100	150	100
2	250	350	125
3	600	400	200
4	1,000	350	250
5	1,350	150	270
6	1,500	50	250
7	1,550	– 50	221
8	1,500	– 100	188
9	1,400	– 200	156
10	1,200		120

ولعل أهم النقاط التي يجب ذكرها عند الحديث عن مثل هذا النوع من العلاقات الحدية ، هي أن المتغير التابع – وهو إجمالي الربح في هذه الحالة – يبلغ أعلى درجة له عندما تتغير قيمته الحدية من الموجب إلى السالب . ولفهم هذه الحقيقة ، علينا بمراجعة الجدول (2.2) فكلما ظل الربح الحدي موجباً كلما تمكنت مؤسسة Roland من زيادة إجمالي أرباحها عن طريق زيادة الإنتاج . فمثلاً إذا كان الإنتاج يتراوح ما بين 5 إلى 6 وحدات ، يكون الربح الحدي موجباً أي (150 دولاراً) . أي أن إجمالي ربح الشركة سوف يرتفع إلى 150 دولاراً إذا ما زاد الإنتاج من 5 إلى 6 وحدات . أما إذا تعرض الربح الحدي إلى التغير من الإيجاب إلى السلب ، فمن الطبيعي أن ينخفض الربح ، وقد يستمر في الانخفاض تبعاً لأي زيادة في الإنتاج . ويتم الوصول إلى هذه النقطة في الجدول (2.2) عندما تتمكن الشركة من إنتاج 7 وحدات ، أما إذا نجحت الشركة في إنتاج عدد أكبر من الوحدات (8 مثلاً) ، فإن الربح الحدي يتغير من الإيجاب إلى السلب – وينخفض إجمالي الربح إلى 50 دولاراً وهكذا – وكما سبق وأشرنا – فإن المتغير التابع – وهو إجمالي الربح في هذه الحالة – يصل إلى أقصى مستواه عندما تتغير القيمة الحدية من الإيجاب إلى السلب .

ولما كان المديرون يولون اهتماماً كبيراً للوصول بالربح (وغيره من مقاييس الأداء) إلى أعلى مستوى ممكن ، لذا فإن هذه النتيجة تعد ذات نفع كبير ، حيث تؤكد على ضرورة الاهتمام بالقيمة الحدية ، كما أنها تشير إلى المخاطر التي قد تنشأ عن استخدام متوسط القيمة كبديل لها . هذا ويوضح الجدول (2.2) العمود 4 أن متوسط الربح هو إجمالي الربح مقسوماً على عدد الوحدات المنتجة . وقد يبدو أنه من الصائب اختيار نوع الإنتاج الذي يدر أعلى متوسط ممكن من الربح ، وهو الأمر الذي اتبعه عدداً لا حصر له من المديرين . ومع ذلك ، فقد أثبتت التجربة عدم نجاح مثل هذا الاختيار ، ولا سيما إذا كان المدير يرغب في زيادة أرباح شركته إلى أقصى حد ممكن . أما الاختيار الأكثر صواباً فهو نوع الإنتاج الذي تميل أرباحه الحدية إلى الانحراف من الإيجاب إلى السلب كما سبق وأوضحنا في الفقرة السابقة .

وللبرهنة على ذلك ، علينا بتحديد الإنتاج الذي يحقق أعلى متوسط للربح كما هو مبين في الجدول (2.2) وبمقارنة الأرقام المبينة في العمود 4 نجد أن هذا الإنتاج هو 5 وحدات ، ويتضح من العمود 2 أن إجمالي الربح لهذا الإنتاج يساوي 1,350 دولار . وكنا قد أوضحنا في الفقرة قبل السابقة أن الإنتاج الذي يميل ربحه الحدي إلى الانحراف من الإيجاب إلى السلب هو 7 وحدات ، ويوضح العمود 2 أن إجمالي الربح لمثل هذا الإنتاج يساوي 1,550 دولار مما يوضح أن إجمالي الربح يزيد بمقدار 200 دولار في حالة زيادة الإنتاج من 5 إلى 7 وحدات . ومن ثم يمكننا القول بأنه إذا قام مديرو هذه الشركة باختيار نوع الإنتاج الذي يحقق أعلى متوسط ربح ، فإن هذا يعني تضحيتهم بنحو 200 دولاراً يومياً من الأرباح التي كان يمكن أن تحققها الشركة في حالة اختيارهم لنوع الإنتاج الذي يميل ربحه الحدي إلى الانحراف من الإيجاب إلى السلب.

ويجدر بنا محاولة فهم العلاقة القائمة بين القيمة الحدية والمتوسطة : كلما كانت القيمة الحدية هي التي تمثل ما يطرأ على الإجمالي من تغيير ، لذا فمن الطبيعي أن يزداد متوسط القيمة إذا كانت الحدية هي الأعلى ، وأن ينخفض متوسط القيمة إذا كانت القيمة الحدية هي الأدنى . ويوضح الجدول

(2.2) جميع هذه الاحتمالات : ففي الوحدات الخمسة الأولي من الإنتاج يرتفع الربح الحدي عن متوسط الربح حيث أن الأرباح الناجمة عن الوحدات الإضافية يكون أعلى من متوسط الربح ، وهو الأمر الذي يؤدي إلى رفع متوسط الربح مع زيادة الإنتاج . ويحدث العكس في الوحدات الخمسة التالية من الإنتاج ، حيث يكون الربح الحدي أدنى من متوسط الربح ، وكلما زاد الإنتاج بمقدار وحدة إضافية ، كلما انخفض الربح الحدي عن متوسط الربح ، وهو الأمر الذي يؤدي إلى انخفاض متوسط الربح مع زيادة الإنتاج .

العلاقة بين إجمالي القيمة ، والقيمة الحدية ، ومتوسط القيمة

ولفهم أكثر وضوحا للعلاقة القائمة بين إجمالي القيمة والقيمة الحدية ومتوسط القيمة ، علينا مراجعة الشكل (2.2) الذي يعرض العلاقة بين إجمالي الربح ومتوسط الربح والربح الحدي لمؤسسة Roland من ناحية وإنتاجها من ناحية أخري . فمن الواضح أن العلاقة بين الإنتاج والربح في هذه الحالة هي نفس العلاقة المبينة بالجدول (2.2) ، والفرق الوحيد أنه بدلا من استخدام أرقام بعينها لتحديد الإنتاج أو الربح سنقوم باستخدام بعض الرموز مثل Q_0 و Q_1 لمستويات الإنتاج المختلفة . والرمز π_0 لمستويات الربح . ولا تقتصر صلاحية هذه النتائج على مجموعة من القيم الرقمية دون غيرها ، بل أنها ذات نفع عام . ولعل أول شيء ينبغي علينا ملاحظته هو أن الشكل (2.2) يحتوي على تجزئين : الرسم البياني A يوضح العلاقة بين إجمالي الربح والإنتاج ، بينما الرسم البياني B يوضح العلاقة بين متوسط الربح والربح الحدي من ناحية والإنتاج من ناحية أخري . كما نلاحظ أن المنظور الأفقي للرسم البياني A مطابق تماماً لنظيره في الرسم البياني B ، وهو الأمر الذي يجعل مقداراً بعينه من الإنتاج (مثل Q_0) على بعد متساو من نقطة الأصل في كل من الرسمين البيانيين (A و B) .

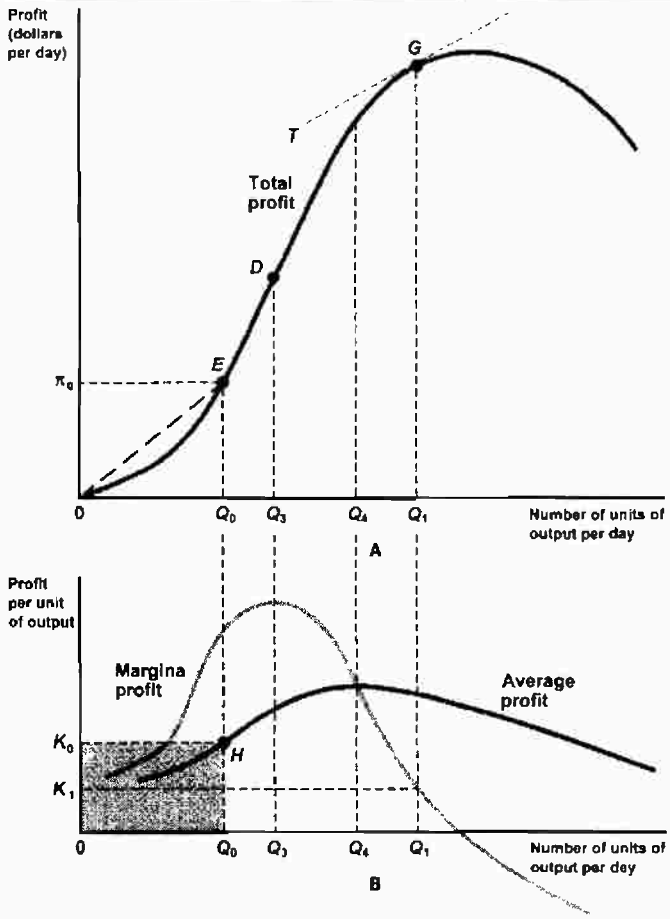
ومن الناحية العملية يندر أن نتعامل مباشرة بالعلاقات بين : (1) إجمالي الربح والإنتاج ، (2) متوسط الربح والإنتاج ، وذلك لسهولة اشتقاق العلاقة الثانية من العلاقة الأولي . ويمكن التحقق من ذلك بتطبيق هذا المبدأ على أي نوع من الإنتاج بعينه مثل Q_0 حيث نجد أن متوسط الربح في هذه الحالة يساوي ميل الشعاع المستقيم من نقطة الأصل إلى النقطة E ، وهي نفس النقطة على منحنى إجمالي الإنتاج المناظرة لنوع الإنتاج Q_0 . وللدلالة على ذلك يمكننا ملاحظة أن متوسط الربح لهذا المستوي من الإنتاج يساوي π_0 / Q_0 حيث π_0 هو مستوي إجمالي الربح إذا كان الإنتاج هو Q_0 . ولما كان ميل المستقيم يساوي المسافة الرأسية بين نقطتين على المستقيم مقسوما على المسافة الأفقية بينهما ، فإن ميل المستقيم من نقطة الأصل إلى النقطة E يساوي π_0 / Q_0 .[1] وهكذا فإن ميل المستقيم $0E$ يساوي متوسط الربح لهذا الإنتاج - وبعبارة أخري ، نجد أن K_0 في الرسم B من الشكل (2.2) مساو لميل المستقيم $0E$. وللتثبت من علاقة بين متوسط الربح والإنتاج بناء على العلاقة بين إجمالي الربح والإنتاج يمكننا معاودة تطبيق هذه القاعدة على جميع مستويات الإنتاج وليس على Q_0 فقط . هذا ويعرض الرسم B منحنى متوسط الربح الناتج عن هذه المعادلة .

أما إذا اتجهنا إلى الرسم B لتحديد العلاقة بين الربح الحدي والإنتاج نجد أنه من السهل استنتاجها من العلاقة بين إجمالي الربح والإنتاج - وهي مبينة بالرسم A . ولنأخذ مثلا الإنتاج Q_1 حيث نجد أن الربح الحدي لهذا الإنتاج يساوي ميل مماس منحنى إجمالي الربح (في الرسم A) عند النقطة التي يكون فيها الإنتاج Q_1 . وبعبارة أخرى فإن الربح الحدي يساوي ميل الخط المستقيم T في الشكل (2.2) ، وهو مماس منحنى إجمالي الربح عند النقطة G. وأقل ما يمكننا عمله للتحقق من ذلك هو النظر إلى الشكل(2.3) الذي يمدنا بصورة مبكرة لمنحنى الربح بمنطقة الجوار للنقطة G .

نعود فنذكر أن الربح الحدي هو الربح الناشئ عن زيادة صغيرة في الإنتاج (بمقدار وحدة واحدة) . فإذا زاد الإنتاج من Q_1 إلى Q_2 ، يزداد إجمالي الربح من π_1 إلى π_2 ، كما نري في الشكل (2.3) . وعليه فإن الربح الإضافي لكل وحدة من الإنتاج يساوي $(\pi_2 - \pi_1) \div (Q_2 - Q_1)$ وهو ميل المستقيم GK . إلا أن مثل هذه الزيادة في الإنتاج تعد ضخمة للغاية . لذا نحاول افتراض فيما بتخفيض الإنتاج من Q_2 حتى يقترب إلى Q_1. مع التركيز على محاولة جعل القيمة الجديدة لـ Q_2 هي Q'_2 . فإذا زاد الإنتاج من Q_1 إلى Q'_2 ، فإن الربح الفائض عن كل وحدة من الإنتاج يساوي $(\pi'_2 - \pi_1) \div (Q'_2 - Q_1)$ ، وهو ميل المستقيم GL . أما إذا قمنا بمواصلة تخفيض الإنتاج من Q_2 حتى تصبح المسافة بين Q_1 و Q_2 صغيرة جدا ، فإن ميل المماس (المستقيم T) عند النقطة G يصبح مقياساً دقيقاً $(\pi_2 - \pi_1) \div (Q_2 - Q_1)$. فإذا ما بلغنا نهاية التغيرات الممكن إجراءها في الإنتاج في منطقة جوار صغيرة جدا حول Q_1 ، نجد أن ميل المماس هو الربح الحدي - ويكون هذا الميل مساو لـ K_1 في الرسم B من

[1] المسافة الرأسية بين نقطة الأصل والنقطة E تساوي π_0 ، والمسافة الأفقية بين هاتين النقطتين تساوي Q_0 . وهكذا فإن المسافة الرأسية مقسومة على المسافة الأفقية تساوي π_0 / Q_0 .

الشكل (2.2) . وللتثبت من العلاقة بين الربح الحدي والإنتاج بناءا على العلاقة بين إجمالي الربح والإنتاج يمكننا معاودة تطبيق هذه القاعدة على جميع مستويات الإنتاج وليس على Q_1 فقط . هذا ويعرض الرسم B في شكل (2.2) منحنى الربح الحدي الناتج عن هذه المعادلة .



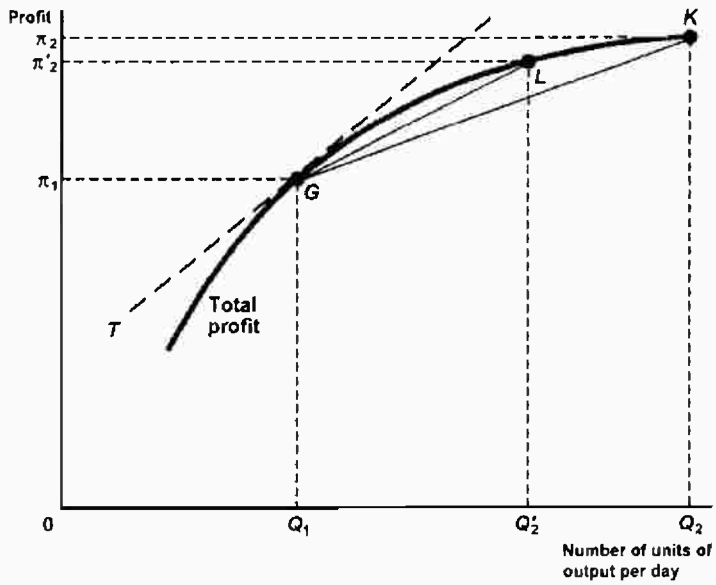
شكل (2.2) إجمالي الربح ، ومتوسط الربح ، والربح الحدي ، مؤسسة Roland : يمكن اشتقاق منحنى متوسط الربح ومنحنى الربح الحدي في الرسم B هندسياً من منحنى إجمالي الربح في الرسم A .

وربما يتوفر لدينا منحنى متوسط الربح كذلك الموضح في الرسم B. فإذا أردنا اشتقاق المنحنى الثاني من المنحنى الأول علينا بملاحظة أن إجمالي الربح يساوي متوسط الربح مضروبا في الإنتاج . فإذا كان الإنتاج يساوي Q_0 يكون إجمالي الربح مساو لـ K_0 مضروبا في Q_0 ، وهي منطقة المستطيل المظلل OK_0HQ_0 في الرسم B . أي أن π_0 في الرسم A تساوي مساحة المستطيل OK_0HQ_0 في الرسم B. أما إذا أردنا اشتقاق العلاقة بين إجمالي الربح والإنتاج من العلاقة بين متوسط الربح والإنتاج فعلينا بمعاودة هذه القاعدة على جميع مستويات الإنتاج ، حيث نلاحظ وجود تناظر لمنطقة المستطيل هذه مع كل من مستويات الإنتاج المختلفة وليس Q_0 فقط . هذا ويعرض الرسم A منحنى إجمالي الربح الناتج عن هذه المعادلة.

هذا وينبغي التأكيد على أمرين آخرين متعلقين بمنحنيات الربح الإجمالي والمتوسط والحدي المبينة بالشكل (2.2) :

أولاً : يوضح الرسم A لأول وهلة أن الربح الحدي يأخذ في الارتفاع مع تزايد الإنتاج من صفر إلى Q_3 وأنه ينخفض مع تزايد الإنتاج أكثر فأكثر . ترى ما سبب وضوح هذا في الرسم A ؟ يرجع السبب في ذلك إلى أن ميل منحنى إجمالي الربح يزيد كلما اتجهنا من نقطة الأصل إلى النقطة D . وبعبارة أخرى ، نجد أن الخطوط المرسومة بمماس منحنى إجمالي الربح تصبح أكثر انحصاراً كلما اتجهنا من نقطة الأصل إلى النقطة D . فإنه من الطبيعي أن يزيد الميل مع تزايد الإنتاج من صفر إلى Q_3 ، وإلى اليمين من النقطة D ، نجد أن ميل منحنى إجمالي الربح يأخذ في الانخفاض مع تزايد الإنتاج ، حيث أن الخطوط المرسومة بمماس منحنى إجمالي الربح تصبح أقل انحصارا كلما اتجهنا يمين النقطة D ولما كان الربح الحدي يساوي ميل هذا المماس لذا فإنه من الطبيعي أن ينخفض عند زيادة الإنتاج أكثر من Q_3 .

ثانيا : يؤكد الرسم B في الشكل (2.2) تلك القاعدة السابق ذكرها ، وهي أن منحنى متوسط الربح يأخذ في الارتفاع إذا كان أدنى من منحنى الربح الحدي ، وأنه يأخذ في الانخفاض إذا كان أعلى منه . كما نلاحظ أن منحنى متوسط الربح يكون أدنى من منحنى الربح الحدي عند مستويات الإنتاج التي تقل عن Q_4 ، وهكذا يأخذ الربح الحدي في رفع متوسط الربح إلى أعلى ، مما يترتب عليه ارتفاع منحنى متوسط الربح . وعلى العكس من ذلك يكون منحنى متوسط الربح أعلى من منحنى الربح الحدي عند مستويات الإنتاج الأعلى من Q_4 . وهكذا يأخذ الربح الحدي في جذب متوسط الربح إلى أدنى ، مما يترتب عليه انخفاض منحنى متوسط الربح .



شكل (2.3) الربح الحدي يساوي ميل مماس منحنى إجمالي الربح : تصبح المسافة بين Q_1 و Q_2 صغيرة للغاية ويصبح ميل المستقيم T تعبيراً ممتازاً عن $(\pi_2 - \pi_1) / (Q_2 - Q_1)$.

مفهوم الاشتقاق في الدوال الرياضية

عند الحديث عن مؤسسة Roland ، قمنا باستخدام الجدول (2.2) - الذي يوضح العلاقة بين إنتاج الشركة وأرباحها - وذلك بغرض الوقوف على مستوى الإنتاج الذي يحقق أعلى أرباح ممكنة . إلا أن مثل هذه الجداول عادة ما تكون معقدة وغير دقيقة ، مما يجعلها غير صالحة للاستخدام لغرض مثل هذا . ومن ثم فإننا نقوم باستخدام المعادلات التي توضح العلاقة بين المتغير الذي نسعى إلى معظمته (أي الربح) ، والمتغير أو المتغيرات الواقعة تحت سيطرة صانع القرار (أي الإنتاج) . وبفضل هذه المعادلات ، يمكننا الاستعانة بمفاهيم وتقنيات علم التفاضل من أجل التوصل إلى الحلول المثلى للمشكلات التي يواجهها صانع القرار .

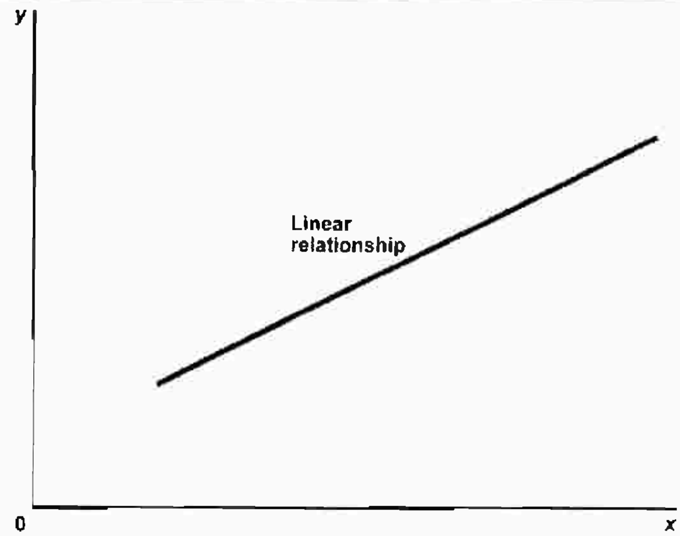
سبق وأن عرّفنا القيمة الحدية بأنها معدل التغير في قيمة متغير تابع نتيجة لما يطرأ على المتغير المستقل من تغيير بمقدار وحدة واحدة . فإذا كانت Y هي المتغير التابع ، و X هي المتغير المستقل ، فإن هذه العلاقة يعبر عنها رياضياً :

$$Y = f(X), \qquad (2.3)$$

وذلك طبقا لما هو موضح في المعادلة (2.1) . وباستخدام Δ (تسمى " دلتا " delta) لتحديد التغير ، يمكننا التعبير عن التغير الحادث في المتغير المستقل بالرمز ΔX ، وعن التغير الحادث في المتغير التابع بالرمز ΔY . وبناءاً على ذلك يمكن تقدير القيمة الحدية لـ Y كما يلي :

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{\text{التغير في } Y}{\text{التغير في } X}$$

وعلى سبيل المثال : إذا أردت زيادة X بمقدار وحدتين إلى زيادة Y بمقدار وحدة واحدة تكون $\Delta X = 2$ ، $\Delta Y = 1$ أي أن القيمة الجديدة لـ Y تساوي ½ تقريباً ، وأن المتغير التابع Y يزداد بنحو ½ في حالة المتغير المستقل X بمقدار 1 .[2]



شكل (2.4) العلاقة الخطية بين Y و X : يمكن التعبير عن العلاقة بين Y و X بخط مستقيم .

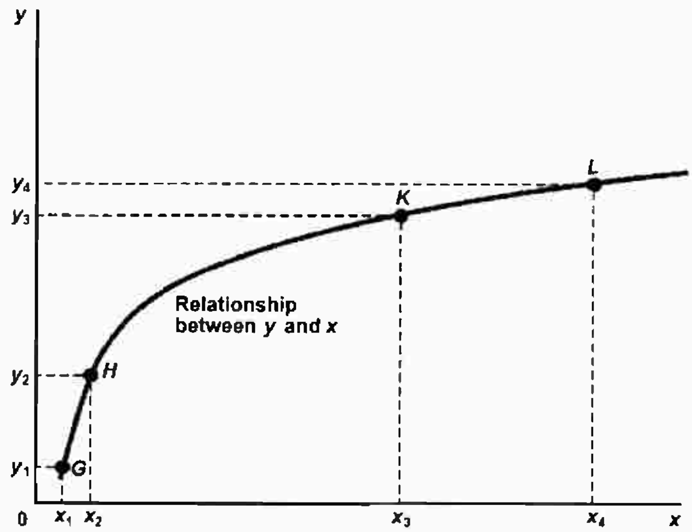
هذا ويتم التعبير عن العلاقة بين X و Y في شكل خط مستقيم – كما هو الحال في الشكل (2.4) حتى تكون قيمة $\Delta Y / \Delta X$ ثابتة . وللدلالة على ذلك ، يمكننا الرجوع إلى العلاقة بين X و Y في الشكل (2.5) . ففي حالة حدوث تحرك من النقطة G إلى النقطة H ، فإنه يحدث تغير صغير نسبيا في X (من X_1 إلى X_2) بمصاحبة تغيير كبير في Y (من Y_1 إلى Y_2). وهكذا فإن قيمة $\Delta Y / \Delta X$ بين النقطتين G و H تساوي : $(Y_2 - Y_1) / (X_2 - X_1)$ وهي قيمة كبيرة نسبياً . أما إذا حدث تحرك من النقطة K إلى النقطة L ، فإنه يحدث تغير كبير نسبيا في X (من X_3 إلى X_4) ، بمصاحبة تغير صغير في Y (من Y_3 إلى Y_4) . وعليه فإن قيمة $\Delta Y / \Delta X$ بين النقطتين K و L تساوي $(Y_4 - Y_3) / (X_4 - X_3)$ وهي قيمة صغيرة نسبياً . وترتبط قيمة $\Delta Y / \Delta X$ بمدى انحدار أو استواء المنحني في الشكل (2.5) . حيث نجد أن المنحني يميل للانحدار نسبيا بين النقطتين G و H ، الأمر الذي يعني حدوث تغير كبير في Y نتيجة لتغير صغير في X ، ولذلك تكون $\Delta Y / \Delta X$ كبيرة نسبيا . ونجد أن المنحني يأخذ في الاستواء بين النقطتين K و L ، مما يعني حدوث تغيير صغير في Y نتيجة لتغير كبير في X . وعليه تكون $\Delta Y / \Delta X$ صغيرة نسبياً.

ويمكن تعريف مشتقة Y بالنسبة إلى X بأنها نهاية $\Delta Y / \Delta X$ عند اقتراب ΔX من الصفر . وحيث أننا نشير إلى المشتقة Y بالنسبة إلى X بـ dY / dX ، لذا فإنه يمكن إعادة صياغة هذا التعريف على النحو التالي :

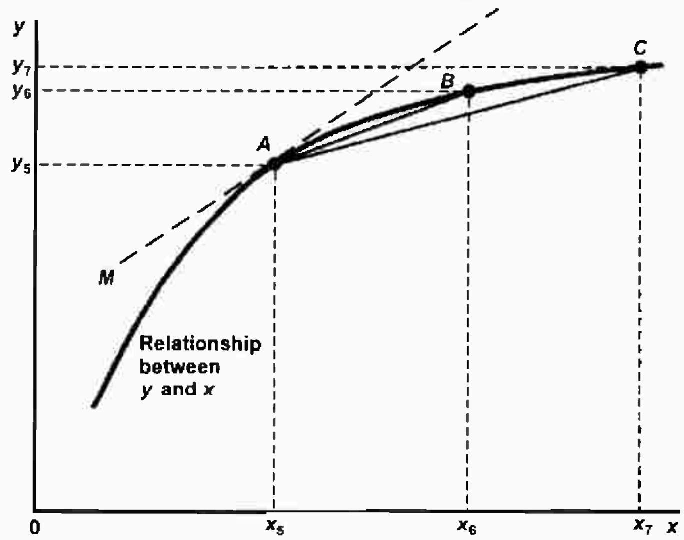
$$\frac{dY}{dY} = \underset{\Delta X \to 0}{\text{نهاية}} \frac{\Delta Y}{\Delta X} \qquad (2.5)$$

ويمكن قراءة هذه المعادلة هكذا : " مشتقة Y بالنسبة إلى X تساوي نهاية النسبة $\Delta Y / \Delta X$ عندما تؤول ΔX إلى الصفر " . يمكن فهم المقصود بلفظة نهاية بالنظر إلى الدالة $(X - 2)$. فما هي نهاية هذه الدالة عندما تؤول X إلى 2 ؟ من الواضح أنه كلما اقتربت X من 2 كلما اقتربت $(X - 2)$ من الصفر . وما هي نهاية هذه الدالة عندما تؤول X إلى الصفر ؟ من الواضح أنه كلما اقتربت X من الصفر كلما اقتربت $(X - 2)$ من -2 .

[2] لماذا نقول أن Y تزداد بما يقرب من النصف وليس بمقدار النصف تماماً ؟ السبب في ذلك هو أن Y قد لا تكون مرتبطة خطيا مع X . وسترد الإشارة إلى هذا الموضوع بشكل أكثر تفصيلاً في الفقرة التالية من النص .



شكل (2.5) كيف تتباين قيمة $\Delta Y / \Delta X$ بناء على انحدار أو استواء العلاقة بين Y و X : تكـون $\Delta Y / \Delta X$ كبيرة بين النقطتين G و H نتيجة لانحدار المنحنى ، تكون $\Delta Y / \Delta X$ صغيرة بين النقطتين L و K نتيجة لاستواء المنحنى .



شكل (2.6) المشتقة هي ميل المنحنى : عندما تكون X تساوي X_5 فإن مشتقة Y بالنسبة إلـى X تساوي ميـل المستقيم M ، وهو المماس للمنحنى عند النقطة A .

وبالرسم البياني ، نجد أن المشتقة Y بالنسبة إلى X تساوي ميل المنحنى الذي تظهر عليه (على المحور الرأسي) كدالة في X (علـى المحـور الأفقي) . وللدلالة على ذلك ، افترض أننا نرغب في إيجاد قيمة المشتقة Y بالنسبة إلى X عندما X تساوي X_5 في الشكل (2.6) . يمكننا الاستعانة بأحد المقاييس التقريبية وهو قيمة $\Delta Y / \Delta X$ عند حدوث تحرك من النقطة A إلى النقطة C ، وهذا المقياس = $(Y_7 - Y_5) \div (X_7 - X_5)$ ، وهو ميل المستقيم AC . إلا أنه مقياس أفضل ، ويتمثل في قيمة $\Delta Y / \Delta X$ عند حدوث تحرك من النقطة A إلى النقطة B وهذا المقياس يساوي $(Y_6 - Y_5) \div (X_6 - X_5)$ ، وهو ميل المستقيم AB . ترى ما الذي يجعل المقياس الثاني أفضل من الأول ؟ السبب هو أن المسافة بين النقطتين A و B أقصر من المسافة بين النقطتين A و C . والذي نريد إيجاده هو قيمة $\Delta Y / \Delta X$ عندما تكون ΔX أصغر ما يمكن . ومن الواضح – عند النهاية – أنه مع اقتراب ΔX من الصفر ، فإن النسبة $\Delta Y / \Delta X$ تساوي ميل المستقيم M وهو المرسوم مماسا للمنحنى عند النقطة A .

كيفية إيجاد المشتقة الأولى

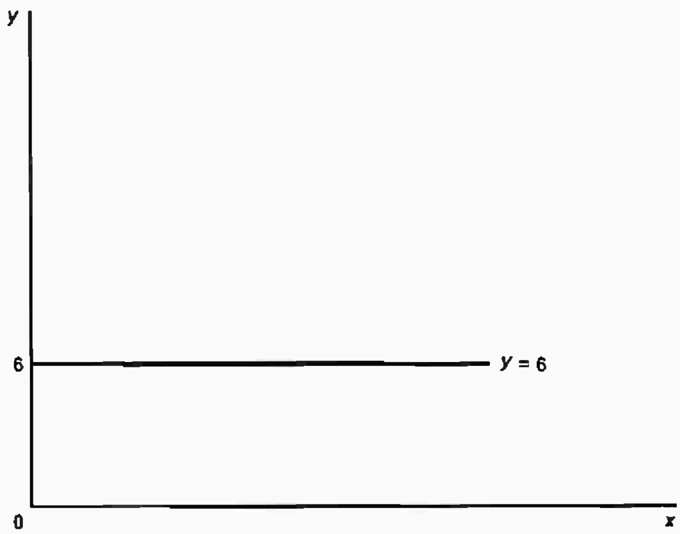
إن المديرين أمثال السيد John Welch دائماً ما يرغبون في معرفة أفضل الطرق التي تساعدهم في الوصول بمستوي الأداء في شـــركاتهم إلى الأمثلية . فإذا افترضنا أن Y هي أحد مقاييس الأداء داخل الشركة ، وأن X هي أحد المتغيرات التي يتمتع المدير بالتحكم فيها ، فإنه من الطبيعـــي أن يرغب المدير في معرفة قيمة X التي ستؤدي بدورها إلى معظمة Y . هذا وسوف نري في الأجزاء التالية من هذا الفصل أهمية التعرف على مشـــتقة Y بالنسبة لـــ X ، بينما يقتصر دور هذا القسم على تعلم كيفية إيجاد المشتقة .

•تفاضل الثوابت :

إذا كان المتغير التابع Y ثابتاً ، فإن مشتقته بالنسبة إلى X تساوي صفر دائما ، أي أنه إذا كانت $Y = a$ (عندما يكون a ثابتاً) ، فإن:

$$\frac{dY}{dX} = 0 \qquad (2.6)$$

مثال : وبفرض أن $Y = 6$ كما هو مبين بالشكل (2.7) . فإن قيمة Y لا تتغير بينما X تتغير ، لذا فإن dY / dX تساوي صفر دائماً . كما يمكـــن التعبير عن ذلك هندسيا ، حيث ذكرنا فيما سبق أن dY / dX تساوي ميل المنحني الذي تظهر فيه Y كدالة في X وكما هو واضـــــح في الشـــكل (2.7) نجد أن هذا الميل يساوي صفر ، أي أن dY / dX تساوي صفر دائما .



شكل (2.7) حالة $Y = 6$: في حالة عندما تكون dY / dX تساوي صفر ، حيث أن ميل هذا المستقيم الأفقي يســـاوي صفر .

•تفاضل الدوال الأسّية :

يمكن التعبير عن المشتقة العليا (الأسّية) كما يلي : $Y = aX^b$.

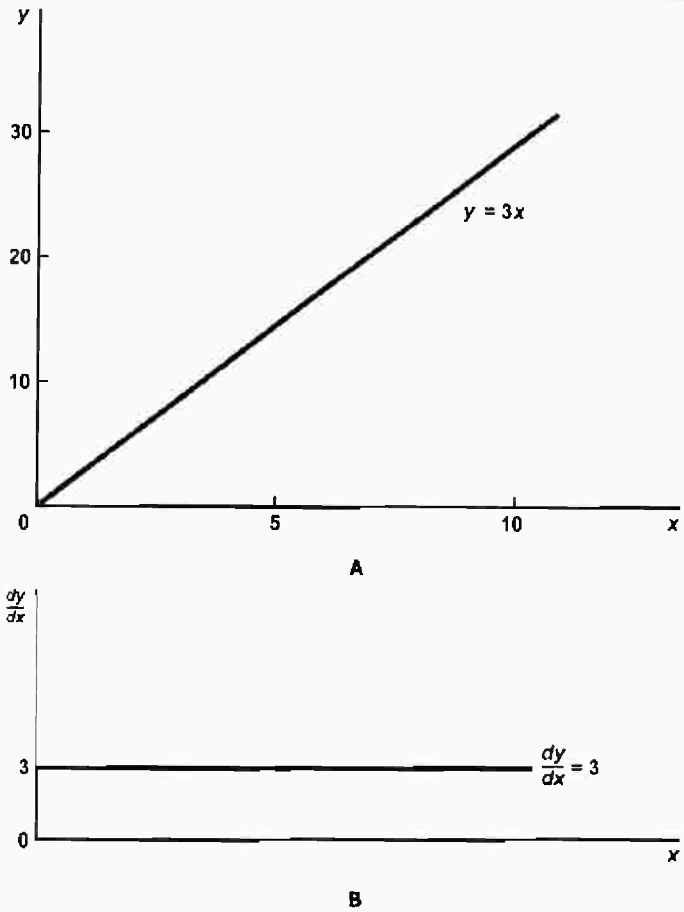
حيث a و b ثوابت ، فإذا كانت العلاقة بين X و Y من هذا النوع تكون مشتقة Y بالنسبة إلى X تساوي الثـــابت a مضروبـــاً في قيمـــة الأس b مضروباً في المتغير X المرفوع إلى الأس $b - 1$:

$$\frac{dY}{dX} = b \cdot a \cdot X^{b-1} \qquad (2.7)$$

مثال : بفرض أن $Y = 3X$ الموضحة بيانيا في الرسم A بالشكل (2.8) وباستخدام المعادلة (2.7) ، نجد أنه :

$$\frac{dY}{dX} = 1 \cdot 3 \cdot X^0 = 3,$$

وبما أن $a = 3$ ، و $b = 1$. لذا فإن قيمة dY / dX [الموضحة بيانيا في الرسم B من الشكل (2.8)] هي 3 ، بغض النظر عن قيمة X . كمـا نتذكر ما ورد في القسم السابق أن dY / dX تساوي ميل المنحني الذي تظهر فيه Y كدالة في X . وفي هذه الحالة يكون المنحني عبارة عـن خـط مستقيم - كما هو موضح في الشكل (2.7) .

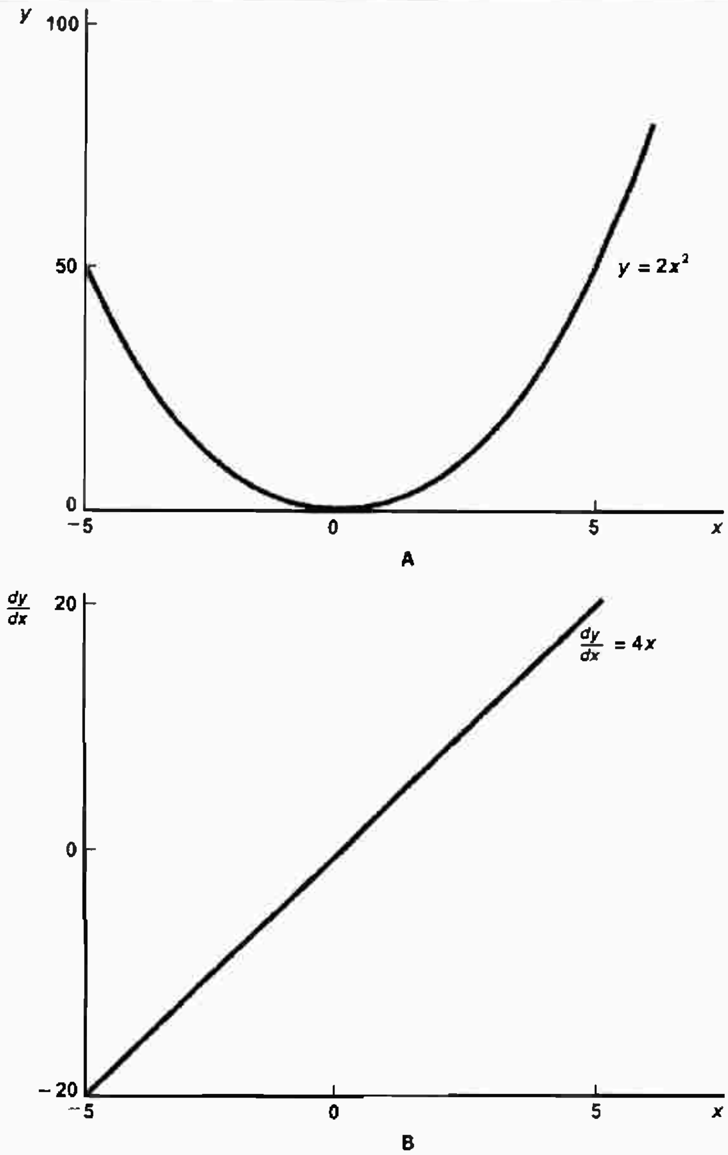


شكل (2.8) حالة $Y = 3X$: في هذه الحالة تكون dY / dX تساوي 3 ، حيث أن ميل هذا المستقيم فـي الرسـم A يساوي 3 .

مثال : بفرض أن $Y = 2X^2$ وهو الأمر الموضح بيانيا في الرسم A بالشكل (2.9) وبتطبيق المعادلة (2.7) ، نجد أن :

$$\frac{dY}{dX} = 2 \cdot 2 \cdot X^1 = 4X,$$

حيث أن $a = 2$ ، و $b = 2$. وعليه فإن قيمة dY / dX [الموضحة بيانيا في الرسم B بالشكل (2.9)] تتناسب مع X وكما هو متوقع ، نجد أن dY / dX سالبة عندما يكون ميل المنحني في الرسم A سالباً ، وأن يكون موجبا عندما يكون نفس الميل موجباً والسبب في ذلك - كما أكدنا مراراً وتكراراً - هو أن dY / dX تساوي ميل هذا المنحني .



شكل (2.9) حالة $Y = 2X^2$: في هذه الحالة تكون $dY / dX = 4X$ ، حيث أن ميل المنحنى في الرسم A يســـاوي $4X$.

•تفاضل المجموع والفروق :

بفرض أن U و W هما متغيران تابعان لـــ X أي أن: $U = g(X)$ & $W = h(X)$.

وتشير g إلى العلاقة الدالية بين U و X كما تشير h إلى العلاقة بين W و X . وبفرض أيضاً أن : $Y = U + W$.

أي أن Y هي مجموع U و W . وفي هذه الحالة تكون مشتقة Y بالنسبة إلى X مساوية لمجموع مشتقات هذه الحدود كل على حدى :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dU}{dX} + \frac{dW}{dX} \qquad (2.8)$$

أما إذا كانت : $Y = U - W$.

فإن مشتقة Y بالنسبة إلى X تساوي الفرق بين مشتقات تلك الحدود كل على حده :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dU}{dX} - \frac{dW}{dX} \qquad (2.9)$$

مثال : وبفرض أن : $U = g(X) = 3X^3$

& $W = h(X) = 4X^2$

فإن : $Y = U + W = 3X^3 + 4X^2$

$$\frac{dY}{dX} = 9X^2 + 8X \qquad (2.10)$$

ولفهم السبب في ذلك ، علينا بمراجعة المعادلة (2.8) حيث نجد أن :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dU}{dX} + \frac{dW}{dX} \qquad (2.11)$$

وبتطبيق المعادلة (2.7) يصبح :

$$\frac{dU}{dX} = 9X^2; \ \frac{dW}{dX} = 8X .$$

وبالتعويض عن قيمة هذه المشتقات في المعادلة (2.11) ، تنتج المعادلة (2.10)

مثال : بفرض أن : $Y = U - W$ ، حيث $U = 8X^2$ ، و $W = 9X$. فإن :

$$\frac{dY}{dX} = 16X - 9,$$

وطبقاً للمعادلة (2.9) ، وبتطبيق المعادلة (2.7) فإن :

$$\frac{dU}{dX} = 16X; \ \frac{dW}{dX} = 9$$

♦الدوال متعددة الحدود

•تفاضل حاصل الضرب :

إن مشتقة حاصل ضرب حدين تساوي مجموع (الحد الأول مضروبا في مشتقة الحد الثاني زائد الحد الثاني مضروباً في مشتقة الحد الأول) .

وعليه ، فإذا كانت : $Y = U . W$ ، فإن :

$$\frac{dY}{dX} = U \cdot \frac{dW}{dX} + W \cdot \frac{dU}{dX} \qquad (2.12)$$

مثال : إذا كانت $Y = 6X(3 - X^2)$ وبوضع : $U = 6X$ و $W = 3 - X^2$ فإن :

$$\begin{aligned}\frac{dY}{dX} &= 6X\left(\frac{dW}{dX}\right) + \left(3 - X^2\right)\left(\frac{dU}{dX}\right) \\ &= 6X(-2X) + \left(3 - X^2\right)(6) \\ &= -12X^2 + 18 - 6X^2 \\ &= 18 - 18X^2\end{aligned}$$

الحد الأول $(6X)$ مضروباً في مشتقة الحد الثاني $(-2X)$ والناتج يضاف إلى الحد الثاني $(3 - X^2)$ مضروباً في مشتقة الحد الأول (6) . كما هو موضح أعلاه والناتج يكون : $18 - 18X^2$.

•تفاضل خارج القسمة :

إذا كانت $Y = U / W$ فإن مشتقة Y بالنسبة إلى X هي :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{W \cdot \frac{dU}{dX} - U \cdot \frac{dW}{dX}}{W^2} \qquad (2.13)$$

وبعبارة أخرى فإن مشتقة خارج قسمة حدين = حاصل ضرب المقام في مشتقة البسط مطروحاً منه حاصل ضرب البسط في مشتقة المقام - والكل

مقسوما على مربع المقام .

مثال : لنأخذ مسألة إيجاد مشتقة المعادلة :

$$Y = \frac{5X^3}{3-4X}$$

وإذا كانت : $U = 5X^3$ & $W = 3 - 4X$ ، فإن :

$$\frac{dU}{dX} = 15X^2;\ \frac{dW}{dX} = -4$$

وعليه ، فبتطبيق المعادلة (2.13) ينتج أن :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{(3-4X)(15X^2) - 5X^3(-4)}{(3-4X)^2}$$

$$= \frac{45X^2 - 60X^3 + 20X^3}{(3-4X)^2}$$

$$= \frac{45X^2 - 40X^3}{(3-4X)^2}$$

•مشتقة دالة الدالة (قاعدة السلسلة) :[3]

أحياناً ما يعتمد أحد المتغيرات على متغير أخر ، ثم يعتمد هذا الآخر على متغير ثالث .

فمثلاً إذا كانت : $Y = f(W)$ & $W = g(X)$.

فإن مشتقة Y بالنسبة إلى X في هذه الحالة تكون :

$$\frac{dY}{dX} = \frac{dY}{dW} \cdot \frac{dW}{dX} \qquad (2.14)$$

أي أن إيجاد هذه المشتقة يتطلب إيجاد مشتقة Y بالنسبة إلى W مضروبة في مشتقة W بالنسبة إلى X .

مثال : بفرض أن : $Y = 4W + W^3$ ، و $W = 3X^2$. ولإيجاد قيمة dY/dX يجب إيجاد قيمة dY/dW ، وأيضاً dW/dX كما يلي :

$$\frac{dY}{dW} = 4 + 3W^2$$

$$= 4 + 3(3X^2)^2$$

$$= 4 + 27X^4$$

$$\frac{dW}{dX} = 6X$$

وأخيراً نضرب dY/dW في dW/dX لإيجاد قيمة dY/dX :

$$\frac{dY}{dX} = (4 + 27X^4)(6X)$$

$$= 24X + 162X^5$$

[3] يمكن المرور على هذا الجزء مرور الكرام دون الإخلال بتسلسل الموضوع .

تخصيص ميزانية الدعاية لمشروب TANG

يعني المحللون والمديرون بالاستعانة بعلم التفاضل لمساعدتهم في حل كافة أنواع المشكلات التي تواجههم . ولعل أهم الأمثلة على ذلك تلك الدراسة التي قامت بها وكالة الدعاية والإعلان الشهيرة Young and Rubicam لصالح شركة مشروبات TANG ، وهي أحد عملائها من شركات General Foods و TANG هو الاسم التجاري لمشروب البرتقال سريع التحضير . وقد أجرت وكالة Young and Rubicam تلك الدراسة للوقوف على آثار نفقات الدعاية على مبيعات TANG وقد دلت هذه الدراسة على وجود علاقة بين نفقات الدعاية والمبيعات في أثنين من المناطق الهامة وجاءت تلك النتائج على النحو التالي : *

$S_1 = 10 + 5A_1 - 1.5A_1^2$
$S_2 = 12 + 4A_2 - 0.5A_2^2$

حيث S_1 هي مبيعات TANG (بملايين الدولارات سنوياً) في المنطقة الأولى ، S_2 هي مبيعات الشركة في المنطقة الثانية ، و A_1 هي نفقات الإعلان لمشروب TANG (بملايين الدولارات سنوياً) في المنطقة الأولى ، و A_2 هي نفقات الإعلان في المنطقة الثانية . وكانت وكالة Young and Rubicam ترمي إلى تحديد مقدار المبيعات الإضافية التي يمكن أن يحققها كل دولار تنفقه الوكالة على الإعلان في كل من المنطقتين . وللإجابة على مثل هذا السؤال قامت الوكالة بحساب مشتقة المبيعات بالنسبة لنفقات الإعلان لكل منطقة على حده . وجاءت النتائج على النحو التالي :

$$\frac{dS_1}{dA_1} = 5 - 3A_1$$

$$\frac{dS_2}{dA_2} = 4 - A_2$$

وهكذا فقد جاءت آثار كل دولار تم إنفاقه على الإعلان في كل من المنطقتين مترتبة على مقدار ما تم إنفاقه في الدعاية . وبافتراض أنه قد تم إنفاق 0.5 مليون دولار على الدعاية في المنطقة الأولى ، و 1 مليون دولار في المنطقة الثانية ، فإن :

$$\frac{dS_1}{dA_1} = 5 - 3(0.5) = 3.5$$

$$\frac{dS_2}{dA_2} = 4 - 1 = 3$$

وعليه ، نجد أن كل دولار تم إنفاقه على الدعاية قد حقق عائد من المبيعات الإضافية بمقدار 3.50 دولار في المنطقة الأولى ، و 3.00 دولار فقط في المنطقة الثانية . وبناء على هذه النتائج طرحت وكالة Young and Rubicam عدة توصيات لشركة General Foods تتعلق بتخصيص ميزانية الدعاية بمشروب TANG تبعا لكل منطقة على حده . حيث أوصت الوكالة على نحو خاص بأنه إذا كانت General Foods ترغب في زيادة إجمالي مبيعات TANG ، فإنه يتحتم عليها إنفاق المزيد من المال على الدعاية في المنطقة الأولى ، ومقدارا أقل في المنطقة الثانية . ولا يعني هذا زيادة في إجمالي ميزانية General Foods للدعاية، حيث أن تخفيض النفقات الإضافية للدعاية في المنطقة الثانية ستعوض عن النفقات الإضافية للدعاية في المنطقة الأولى. ترى كيف توصلت وكالة الدعاية إلى مثل هذا الاستنتاج . لقد تجلت لهم حقيقة أن كل دولار ينفقونه على الدعاية سيحقق زيادة إضافية في المبيعات في المنطقة الأولى أكبر من تلك الزيادة التي يمكن تحقيقها في المنطقة الثانية ، مما يعني ضرورة القيام بإعادة النظر في تخصيص ميزانية الدعاية . ولفهم هذا الأمر، علينا بالتفكير فيما قد يحدث في حالة إنفاق دولار إضافي على الدعاية في المنطقة الأولى، وما قد يحدث في حالة إنقاص دولار واحد من نفقات الدعاية في المنطقة الثانية. وتكون النتيجة كما هو موضح أعلاه - هي زيادة المبيعات بمقدار 3.50 دولار في المنطقة الأولى، مقابل انخفاضها بمقدار 3.00 دولار في المنطقة الثانية وتكون المحصلة النهائية هي: 0.50 $ = 3.00 $ - 3.50 $ زيادة في إجمالي

المبيعات . وعليه فإذا ما كانت شركة General Foods ترغب في زيادة مبيعات TANG كان من اللازم عليها التوصية بإعادة النظر في تخصيص ميزانية الدعاية لصالح المنطقة الأولى . **

* على الرغم من أن هذه المعادلات هي من النوع الذي استحدثته وكالة Young and Rubicam للدعاية ، إلا أن المعادلات الرقمية تعد صالحة كفروض نظرية . ولا يعد هذا من الأهمية بالمكان في الوقت الحالي ، حيث يقتصر الهدف هنا للملامح العامة لهذه الدراسة التطبيقية ، وما هو دور علم التفاصل ، مع عدم الاهتمام بالأرقام في حد ذاتها . هذا ويشتمل الفصل الخامس على وصف تفصيلي للأساليب الممكن إتباعها لتقدير مثل هذه المعاملات . كذلك يفترض أن يتوقف مقدار المبيعات في كل من المنطقتين على حجم الدعاية في نفس المنطقة .

** F. De Bruicker, J. Quelch, and S. Wart, Cases in Consumer Behavior, 2d ed. (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1986) وكنا قد قمنا بطرح هذه الدراسة التطبيقية في صورة مبسطة وذلك لأغراض تعليمية بحتة .

الاستعانة بالمشتقات
في معالجة القيم العظمى والصغرى

بعد إيجاد مشتقة Y بالنسبة لـ X يتعين علينا معرفة الطريقة التي تمكننا من تحديد قيمة X التي ستؤدي إلى الوصول بـ Y إلى أعلى أو أدنى قيمة لها . هذا ويتعين علينا أدراك أنه لا تكون هناك نقطة عظمى أو صغرى إلا إذا كان ميل المنحنى الذي تظهر فيه Y على المحور الرأسي ؛ و X على المحور الأفقي مساوياً للصفر . فبفرض أن Y تساوي ربح شركة Monroe و X تساوي مستوى الإنتاج لدى الشركة . إذا كانت العلاقة بين Y و X هي على النحو المبين بالمنحنى في الرسم A من الشكل (2.10) ، فإن القيمة العظمى لـ Y لا تحدث إلاّ عندما تكون $X = 10$ ، والتي عندها يكون ميل المنحنى يساوي صفر . وبما أن مشتقة Y بالنسبة لـ X تساوي ميل هذا المنحنى ، فإنه من الطبيعي ألاّ يمكن أن تكون Y قيمة عظمى أو صغرى إلا إذا كانت هذه المشتقة تساوي صفر . وللتحقق من هذا علينا بملاحظة أن العلاقة بين Y و X في الشكل (2.10) هي :

$$Y = -50 + 100X - 5X^2 , \qquad (2.15)$$

أي أن :

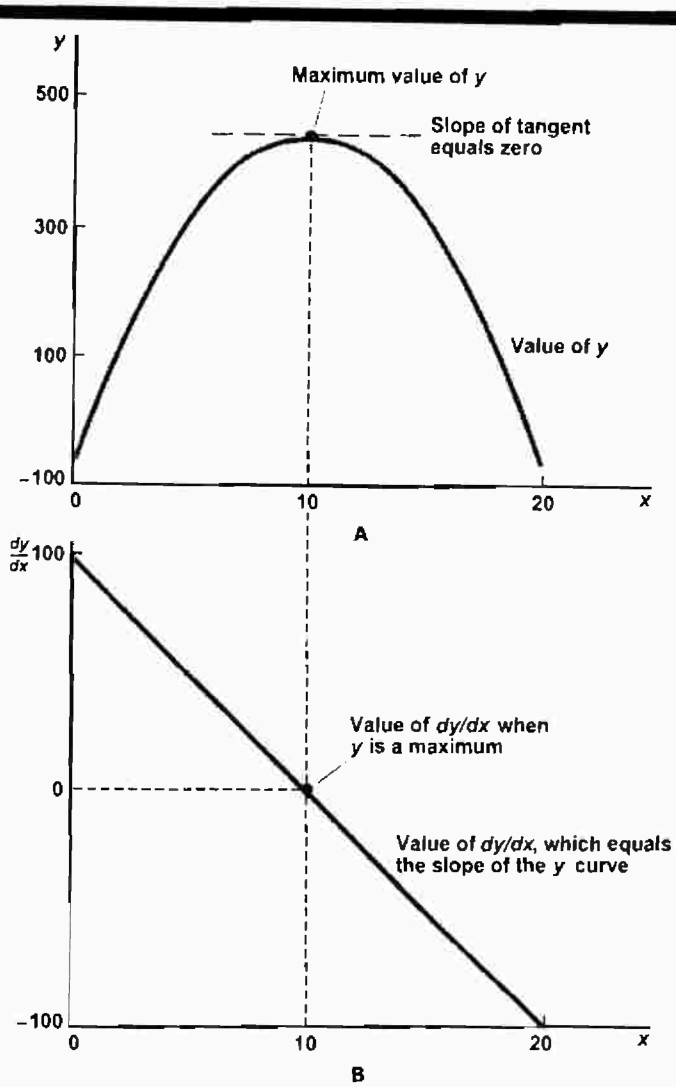
$$\frac{dY}{dX} = 100 - 10X \qquad (2.16)$$

وهكذا ، فإذا كانت هذه المشتقة تساوي صفر ، فإنه :

$$100 - 10X = 0$$
$$X = 10$$

وهذه هي قيمة X عندما تبلغ Y قيمتها العظمى كما سبق وأشرنا أعلاه . وأهم ما يجب معرفته هو أنه لإيجاد قيمة X التي من شأنها الوصول بـ Y إلى أقصى أو أدنى قيمة لها يتحتم إيجاد قيمة X عندما تكون هذه المشتقة تساوي صفر . ويوضح الرسم B في الشكل (2.10) بيانياً أن هذه المشتقة تساوي صفر عندما تبلغ Y قيمتها العظمى . إلا أن الاعتماد على هذه الحقيقة بمفردها – وهي أن هذه المشتقة تساوي صفر – لا يساعدنا على التمييز بين نقطتين على المنحنى ، النقطة التي تبلغ فيها Y قيمتها العظمى ، والنقطة التي تبلغ فيها Y قيمتها الصغرى .

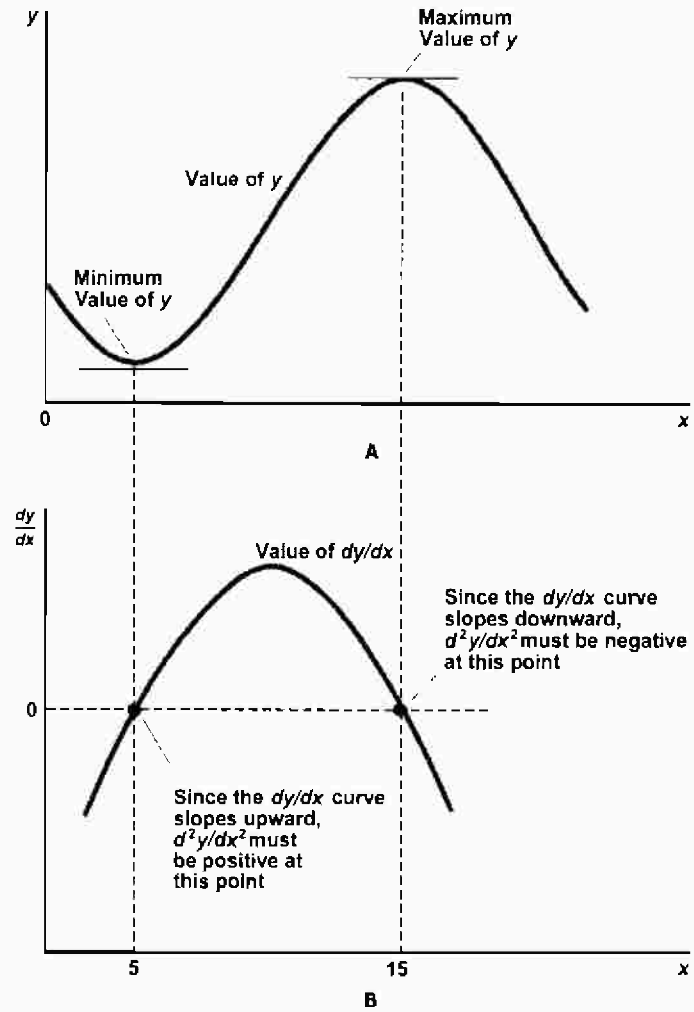
مثال : يوضح الشكل (2.11) أن هذه المشتقة تساوي صفر عندما $X = 5$ وعندما $X = 15$. فعندما $X = 15$ ، تبلغ Y قيمتها العظمى أما عندما $X = 5$ فإن Y تبلغ قيمتها الصغرى . وللتمييز بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى يتحتم إيجاد مشتقة Y الثانية بالنسبة لـ X ، التي يشار إليها هكذا : d^2Y / dX^2 ، أي مشتقة dY / dX .



شكل (2.10) قيمة المشتقة الأولى عندما تكون Y قيمة عظمى : عندما $X = 10$ ، فإن dY/dX تساوي صفر .

مثال : يتضح من الشكل (2.10) أن مشتقة Y الثانية بالنسبة لــ X هي مشتقة الدالة في المعادلة (2.16) ، أي أنها تساوي 10− . والمشتقة الثانية هي التي تقيس ميل المنحنى الذي يوضح العلاقة بين dY / dX (المشتقة الأولى) و X . وكما أن المشتقة الأولى (dY / dX) هي التي تقيس ميل منحنى Y في الرسم A بالشكل (2.11) ، فإن المشتقة الثانية (d^2Y / dX^2) هي التي تقيس ميل منحنى dY / dX في الرسم B بالشكل (2.11) . فكما أن المشتقة الأولى هي التي تقيس ميل منحنى إجمالي الربح ، فإن المشتقة الثانية هي التي تقيس ميل منحنى الربح الحدي . ولعل السبب في ما للمشتقة الثانية من أهمية كبرى هو أنها تكون سالبة دائماً عند نقطة القيمة العظمى وموجبة دائما عند نقطة القيمة الصغرى . ولذا فإن كل ما نحتاجه للتمييز بين نقطتي القيمة العظمى والقيمة الصغرى هو تحديد سلب أو إيجاب المشتقة الثانية في كل من النقطتين .

ولفهم السبب في كون المشتقة الثانية سالبة دائما عند نقطة القيمة العظمى وموجبة دائما عند نقطة القيمة الصغرى علينا بالرجوع إلى الشكل (2.11) . عندما تكون المشتقة الثانية سالبة ، فإن هذا يعني أن ميل dY / dX في الرسم B سالب . ولما كانت dY / dX تساوي ميل منحنى Y في الرسم A فإنه من الطبيعي أن ميل منحنى Y ينخفض مع ارتفاع X . ودائما ما تكون الأمور على هذا النحو عند نقطة القيمة العظمى، كما هو الحال عندما تساوي $X = 15$. ومن ناحية أخرى فعندما تكون المشتقة الثانية موجبة فإن هذا يعني أن ميل منحنى dY / dX في الرسم B موجب، أي أن ميل منحنى Y في الرسم A يرتفع مع انخفاض X ودائما ما تكون الأمور على هذا النحو عند نقطة القيمة الصغرى ، كما هو الحال عندما $X = 5$.



شكل (2.11) استخدام المشتقة الثانية للتمييز بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى : عند القيمة العظمى ($X = 15$) تكون $\mathrm{d}^2Y/\mathrm{d}X^2$ سالبة ، وعند القيمة الصغرى ($X = 5$) تكون $\mathrm{d}^2Y/\mathrm{d}X^2$ موجبة .

مثال : ولإيضاح كيفية الاستعانة بالمشتقات لحل مشكلات القيمة العظمى أو الصغرى ، علينا بافتراض أن العلاقة بين الربح والإنتاج في شركة Kantor هي : $Y = -1 + 9X - 6X^2 + X^3$

حيث Y تساوي الربح السنوي (بملايين الدولارات) ، و X تساوي الإنتاج السنوي (بملايين الوحدات) . وتنطبق هذه المعادلة فقط على قيمة X المساوية لـ 3 أو أقل ($X \leq 3$) ، حيث أن ضوابط العملية الإنتاجية قد تعوق الشركة عند طرح كمية من الإنتاج أكثر من 3 مليون وحدة سنويا . ولإيجاد قيم الإنتاج التي تؤدي إلى تحقيق القيمة العظمى أو الصغرى للربح يتحتم علينا إيجاد مشتقة Y بالنسبة إلى X وجعلها مساوية للصفر .

$$\frac{dY}{dX} = 9 - 12X + 3X^2 = 0 \qquad (2.17)$$

ولحل هذه المعادلة لـ X ، نجد أن القيمتين (1 و 3) لـ X تؤدي إلى جعل هذه المشتقة مساوية للصفر .[4]

[4] إذا كانت المعادلة هي من النوع الرباعي العام :

$$Y = aX^2 + bX + c$$

وتكون قيم X عندما Y تساوي صفر هي :

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

في المعادلة الموجودة بالنص نجد أن : $a = 3$ و $b = -12$ و $c = 9$. هكذا فإن :

وللوقوف على إذا ما كانت كل من هذين المستويين للإنتاج سيؤدي إلى الوصول بالربح إلى أقصى أو أدنى قيمة له ، علينا بإيجاد قيمة المشتقة الثانية عند كل من قيمتي X . وباعتبار أن مشتقة dY / dX المبينة في المعادلة (2.17) تساوي $9 - 12X + 3X^2$ ، نجد أن :

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -12 + 6X$$

وإذا كانت $X = 1$ فإن :

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -12 + 6(1) = -6$$

المشتقة الثانية سالبة ، لذا فإن الربح يبلغ قيمته العظمى في حالة بلوغ الإنتاج 1 مليون وحدة . أما إذا كانت $X = 3$ فإن :

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = -12 + 6(3) = 6$$

وبما أن المشتقة الثانية موجبة ، لذا فإن الربح يبلغ قيمته الصغرى في حالة بلوغ الإنتاج 3 مليون وحدة .

تحليل القرارات الإدارية

الحجم الأمثل لدور رعاية المسنين

في كل عام تنفق الولايات المتحدة ما يقرب من 70 بليون دولار على دور المسنين ، مع تزايد هذا المبلغ في كل عام نتيجة لارتفاع متوسط الأعمار بين أفراد الشعب الأمريكي ، ويذكر السيد Peter Sidoti من هيئة Nat West للضمان الاجتماعي : " أن دور المسنين هي الميدان الوحيد في ميادين الرعاية الصحية الذي ما يزال يعاني من النقص . " * وطبقا لإحدى الدراسات التي أجرتها Niccie Mckay من جامعة Trinity فإن متوسط التكلفة اليومية للفرد الواحد في أحد دور المسنين الاستثمارية هو :

$$Y = A - 0.16X + 0.00137X^2$$

حيث X هي عدد الأشخاص الذين يستوعبهم الدار في اليوم الواحد على مدار العام (مقاساً بالآلف) ، حيث A هي العدد الذي يتوقف على المنطقة التي توجد فيها الدار (أو غير ذلك من العوامل المماثلة) ، مع استثناء X .

(أ) بناء على نتائج تلك الدراسة ، فما هو الحجم المناسب لدار المسنين (مقاساً بعدد الأفراد الممكن استيعابهم في اليوم الواحد) الذي يؤول بتكلفة الفرد الواحد في اليوم الواحد إلى أدنى مستوى ممكن .

(ب) دلل على أن النتيجة التي توصلت إليها تؤدي إلى الحصول على القيمة الصغرى - لا العظمى - للتكلفة اليومية للفرد .

(ج) هل ترى أن عدد الأفراد الممكن استيعابهم في اليوم الواحد هو المقياس الصحيح لسعة دار المسنين ؟ نعم أو لا ولماذا ؟

الحـــل :

(أ) لإيجاد قيمة X التي من شأنها الوصول بـــ Y إلى قيمتها الصغرى ، يتعين علينا جعل مشتقة Y بالنسبة إلى X تساوي صفر :

$$\frac{dY}{dX} = -0.16 + 0.00274X = 0$$

وهكذا فإن : $X = 0.16 / 0.00274 = 58.4$.

(ب) بما أن :

$$X = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 108}}{6} = 2 \pm 1$$

وعليه فإن $Y = 0$ عندما $X = 1 , 3$

$$\frac{d^2Y}{dX^2} = 0.00274$$

ونظراً لأن d^2Y / dX^2 موجبة . فإن Y تكون هي القيمة الصغرى - لا العظمى - عند النقطة حيث $dY / dX = 0$.

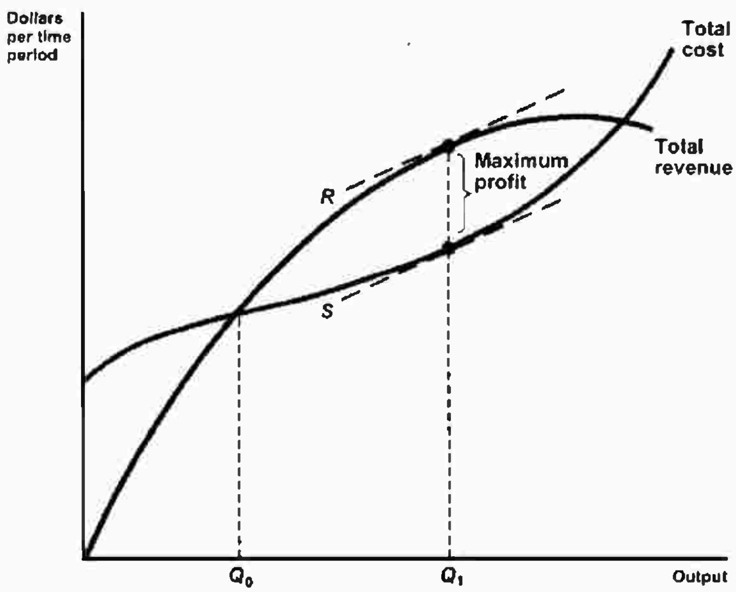
(ج) يعد هذا مقياسا بدائيا حيث أن بعض المرضى يحتاجون إلى رعاية أكثر كثافة وتعقيدا من تلك التي يحتاجها البعض الأخر من المرضى. **

* *New York Times*, February 27, 1994, p. F5.

** لمزيد من الدراسة راجع : N. McKay " The Effect of Chain Ownership on Nursing Home Costs," *Health Services Research*, April 1991.

مبدأ تساوي التكاليف الحدية مع الإيرادات الحدية لتحقيق الأمثلية

وبعد أن تسنى لنا التعرف على كيفية الاستعانة بعلم التفاضل لحل مشكلات الأمثلية العظمى أو الصغرى ، يصبح من السهل علينا إدراك حقيقة هامة ، وهي أن القاعدة الأساسية لمعظمة الربح ، لا تتأتى إلا حينما تتساوى التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي . ويوضح الشكل (2.12) دوال إجمالي التكاليف وأجمالي الإيرادات لشركة ما . وبما أن إجمالي الربح يساوي إجمالي الإيرادات مطروحاً منه إجمالي التكلفة ، لذا فإن إجمالي الربح يكون مساوياً للمسافة الرأسية بين منحنى إجمالي الإيرادات ومنحنى إجمالي التكلفة عند أي مستوى من مستويات الإنتاج المختلفة . هذا وتصل هذه المسافة إلى أقصاها عند مستوى الإنتاج $Q_1$1111111111111 ، حيث يتساوى ميل منحنى إجمالي الإيرادات مع ميل منحنى إجمالي التكلفة ولما كان ميل منحنى إجمالي الإيرادات هو الإيراد الحدي وميل منحنى إجمالي التكلفة هو التكلفة الحدية ، فإن هذا يعني وصول الربح إلى أقصى حد ممكن عندما تتساوى التكلفة الحدية مع الإيرادات الحدية .



شكل (2.12) قاعدة تساوي التكلفة الحدية مع الإيراد الحدي لمعظمة الربح : عند مستوى الإنتاج Q_1 يتمعظم الربح نظراً لأن الإيراد الحدي (والذي يساوي ميل المستقيم R) يساوي التكلفة الحدية (والتي تساوي ميل المستقيم S).

وبفحص الشكل (2.12) يتبين أن Q_1 هو مستوى الإنتاج الذي يمكن أن يحقق أعلى مستوى ممكن من الربح . أما مستويات الإنتاج الأدنى من Q_0 فإنها تتسبب في تكبد الشركات للخسائر (حيث ترتفع إجمالي التكلفة في هذه الحالة عن إجمالي الإيرادات) ، كما يتعذر أن تؤدي مستويات الإنتاج هذه إلى معظمة الربح ومع تزايد الإنتاج أكثر من Q_0 ، تأخذ إجمالي الإيرادات في الزيادة بشكل أكبر وأسرع من زيادة إجمالي التكلفة ، مما يؤدي بالضرورة إلى زيادة الربح . وطالما بقي ميل منحنى إجمالي الإيرادات – المساوي للإيرادات الحدية – أعلى من ميل منحنى إجمالي التكلفة – المساوي للتكلفة الحدية – كان من الطبيعي استمرار زيادة الربح مع زيادة الإنتاج . وعندما يتساوى ميل المنحنيين – بمعنى تساوي الإيرادات الحدية مع التكلفة الحدية – يتوقف الربح عن الزيادة ، حيث يكون قد بلغ نهايته العظمى . وبما أن هذه الميول تتساوى جميعها عند مستوى الإنتاج Q_1 ، لذا يمكن اعتبار هذا المستوى من الإنتاج هو المستوى الأمثل الذي يحقق أقصى ربح ممكن .

وباستخدام علم التفاضل يمكننا فهم الأسباب التي تجعل الشركات تعظم أرباحها عندما تتساوى التكلفة الحدية مع الإيرادات الحدية . ولعل أول ما يمكن ملاحظته هو أن : $\pi = TR - TC$

حيث π تساوي إجمالي الربح ، TR تساوي إجمالي الإيرادات ، و TC تساوي إجمالي التكلفة . وباستخدام مشتقة π بالنسبة إلى Q (مستوى الإنتاج) نجد أن :

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ}$$

ولكي تكون π نهاية عظمى ، يجب أن تكون هذه المشتقة مساوية للصفر ، فيكون من الصحيح أن :

$$\frac{dTR}{dQ} = \frac{dTC}{dQ} \qquad (2.18)$$

وبما أنه يمكن تعريف الإيرادات الحدية بأنها dTR / dQ والتكلفة الحدية بأنها dTC / dQ ، لذا فإنه من الطبيعي أن يتساوى إجمالي الإيرادات مع إجمالي التكلفة .[5]

مفاهيم وثيقة الصلة

ادعاء وجود خطأ في تصميم طائرات الشبح القاذفة للقنابل

يعد علم الاقتصاد الإداري ذا نفع كبير في مجال صناعة الطائرات وغيرها من معدات الفضاء ، ومع ذلك أحياناً ما تقع أخطاء جسيمة ، كما حدث عند القيام بتصميم طائرات الشبح القاذفة للقنابل. لقد تكلفت صناعة طائرة الشبح B-2 عدة ملايين من الدولارات إلا أن السيد Joseph Foa – وهو أستاذ علم الهندسة بجامعة George Washington –يؤكد على وجود خطأ جوهري في تصميم طائرة الشبح نتيجة لقيام اثنين من مهندسي ديناميكا الفضاء بالخلط بين نقطة القيمة الصغرى ونقطة القيمة العظمى. والجدير بالذكر أن طائرة الشبح B-2 قد صممت في الأصل. بحيث تكون طائرة نفاثة من نوع " الجناح الطائر ". قام هذان المهندسان – William Sears و Irving Ashkenas (واللذان كانا يعملان في شركة Northrop حتى ذلك الوقت) – باستخدام بعض القواعد الرياضية بغية الوقوف على كيفية تحديد حجم الطائرة بأفضل تناسب ممكن بين جناحيها وهيكلها للوصول بالطائرة إلى أقصى مدى ممكن . وبأخذ دالة المدى بالنسبة للحجم ، وجد المهندسان أن هذه المشتقة تساوي صفر عندما يكون معظم الحجم متركزاً في الجناح، الأمر الذي جعلهما يستنتجان أن تصميم الجناح الطائر هو الأفضل للحصول على أقصى مدى ممكن للطائرة .

وفي دراسة لاحقة، خرج الأستاذ Foa على الجميع بمفاجأة مذهلة، حيث أثبت أن المشتقة الثانية في ظل هذه المعطيات لابد وأن تكون موجبة ، وليست سالبة كما تخيل كل من William Sears و Irving Ashkenas ، مما يعني أن تصميم الجناح الطائر يؤدي إلى الحصول على أدنى (وليس أقصى مدى ممكن لطائرات الشبح) بل أن الأستاذ Foa ذهب إلى أبعد من ذلك عندما صرح بأن "*تصميم الجناح الطائر كان أسوأ*

[5] ينبغي التأكيد على أمرين : (1) من أجل معظمة الربح ، ينبغي أن تكون $d^2\pi / dQ^2$ سالبة . (2) إن التحليل في هذا الجزء (كما هو الحال في باقي أجزاء الكتاب) يؤدي إلى تحديد قيمة عظمى نسبية ، وأحيانا لا تكون القيمة العظمى النسبية هي القيمة العظمى المطلقة . ففي أحوال معينة ، يكون مستوى الإنتاج المؤدي إلى معظمة الأرباح (أو تخفيض التكاليف إلى أدنى حد ممكن) يساوي صفر – كما هو موضح في الفصل الحدي عشر .

خيارات التصميم المحتملة بمقاييس ديناميكا الفضاء " . ويعد هذا المثل من الأهمية بمكان ، حيث أنه يؤكد على ضرورة النظر إلى المشتقة الثانية والتحقق من عدم وجود لبس بين نقطة القيمة العظمى ونقطة القيمة الصغرى . وبينما ينادي المعجبون بهذه الطائرة بأنها طائرة ممتازة على الرغم من هذا الخطأ في التصميم ، لا نجد أحداً ينكر أن هذا الخطأ يدعو إلى الشعور بالحرج . *

* تعتمد هذه الدراسة على : W. Biddle , " Skeleton Alleged in Stealth Bomber's Closed " Seienee (May 12 , 1989) .

•التفاضل الجزئي ومعظمة الدوال متعددة الحدود :

لقد ركزنا فيما سبق على تلك المواقف التي يعتمد فيها أحد المتغيرات على متغير واحد فقط . وعلى الرغم من أهمية هذه المواقف ، إلا أنه توجد حالات عديدة يعتمد فيها أحد المتغيرات على عدد كبير من المتغيرات الأخرى ، بدلا من اعتماده على متغير واحد بعينه . ولنأخذ مثل شركة Merrimack التي تقوم بإنتاج نوعين من السلع ، وتعتمد الأرباح التي تحققها الشركة على مقدار ما تنتجه من كل من السلعتين ، بمعنى أن :

$$\pi = f(Q1 , Q2) , \qquad (2.19)$$

حيث π هي ربح الشركة ، Q_1 إنتاجها من السلعة الأولى ، و Q_2 إنتاجها من السلعة الثانية .

ولإيجاد قيمة المتغيرات المستقلة كل على حده (Q_1 و Q_2) التي تؤدي إلى معظمة المتغير التابع (π) ، يتحتم علينا معرفة الأثر الحدي لكل من المتغيرات المستقلة على المتغير التابع ، مع افتراض ثبات آثر جميع المتغيرات المستقلة الأخرى . فيتحتم علينا معرفة الأثر الحدي لـ Q_1 على π عند ثبات Q_2 ، كما نحتاج إلى معرفة الأثر الحدي لـ Q_2 على π عند ثبات Q_1 . وللحصول على هذه المعلومات ، يتعين علينا الحصول على المشتقة الجزئية لـ π بالنسبة إلى Q_1 والمشقة الجزئية لـ π بالنسبة إلى Q_2 .

وللحصول على المشتقة الجزئية لـ π بالنسبة لـ Q_1 ، والمشار إليها $(\partial\pi / \partial Q_1)$ ، يجب تطبيق قواعد إيجاد المشتقات السابق توضيحها في هذا الفصل على المعادلة (2.19) ، مع معاملة Q_2 كثابت . وللحصول على المشتقة الجزئية لـ π بالنسبة إلى Q_2 ، المشار إليها $(\partial\pi / \partial Q_2)$ يجب تطبيق نفس القواعد على المعادلة (2.19) ، مع معاملة Q_1 كثابت .

مثال : لنفترض أن العلاقة بين أرباح شركة Merrimack (بآلاف الدولارات) وإنتاجها من كل من السلعتين هي :

$$\pi = -20 + 100Q_1 + 80Q_2 - 10Q_1^2 - 10Q_2^2 - 5Q_1Q_2 \qquad (2.20)$$

لإيجاد المشتقة الجزئية لـ π بالنسبة إلى Q_1 ، نقوم بمعاملة Q_2 كثابت ، فنجد أن :

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 100 - 20Q_1 - 5Q_2$$

لإيجاد المشتقة الجزئية لـ π بالنسبة إلى Q_2 ، نقوم بمعاملة Q_1 كثابت ، فنجد أن :

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 80 - 20Q_2 - 5Q_1$$

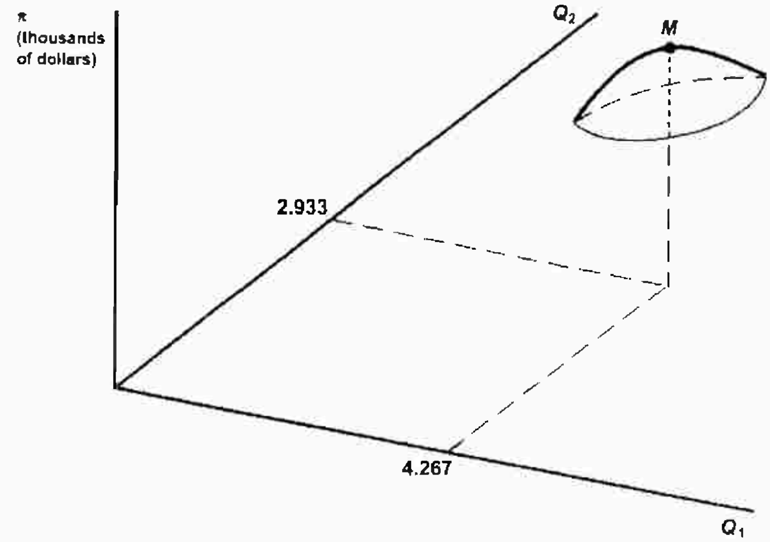
وبمجرد الوصول إلى المشتقات الجزئية ، يكون من السهل نسبيا تحديد قيم المتغيرات الثابت التي تؤدي إلى معظمة المتغير التابع . ويكون كل ما ينبغي عمله هو جعل جميع المشتقات الجزئية مساوية للصفر . وهكذا يكون الوضع بالنسبة إلى شركة Merrimack :

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_1} = 100 - 20Q_1 - 5Q_2 = 0 \qquad (2.21)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial Q_2} = 80 - 20Q_2 - 5Q_1 = 0 \qquad (2.22)$$

والمعادلتان (2.21) و (2.22) هما معادلتان في مجهولين ، وبحل هاتين المعادلتين معا ، نجد أن أرباح الشركة تبلغ أقصى حد لها عندما $Q_1 =$ 4.267 و $Q_2 = 2.933$. وبعبارة أخرى فإن معظمة الأرباح تقتضي قيام الشركة بإنتاج ما لا يقل عن 4.267 من الوحدات من السلعة الأولى، وما لا يقل عن 2.933 من الوحدات من السلعة الثانية في حدود فترة زمنية معينة . فإذا نجحت الشركة في ذلك، سوف تبلغ أرباحها 311 دولار في

غضون تلك الفترة المحددة .[6] وللتعرف على السبب في أهمية مساواة جميع المشتقات للصفر ، علينا بالرجوع إلى الشكل (2.13) الذي يوضح العلاقة في المعادلة (2.20) بين π و Q_1 و Q_2 في ذلك المدى حيث π تقترب من قيمتها العظمى . وكما هو واضح ، يتم التعبير عن هذه العلاقة في شكل مسطح ثلاثي الأبعاد . وتبلغ π قيمتها العظمى عند النقطة M ، حيث يكون هذا المسطح مستوياً . كما يظهر في الرسم منظور آخر مماساً لهذا السطح عند النقطة M ، ويتوازى تماماً مع المنظور Q_1Q_2 ، أي أن ميل هذا السطح بالنسبة لـ Q_1 أو Q_2 مساوياً للصفر. وبما أن المشتقات الجزئية في المعادلتين (2.21) و (2.22) تساوي هذا الميل، لذا فإنه من الضروري أن يكون هذا الميل نفسه يساوي صفر عند نقطة النهاية العظمى M .[7]



شكل (2.13) العلاقة بين π و Q_1 و Q_2 : عند نقطة M ، تكون π قيمة عظمى ، ويكون السطح المعبر عن هذه العلاقة مستوي ، كما يكون ميل هذا السطح بالنسبة لـ Q_1 و Q_2 مساوياً للصفر .

تحليل القرارات الإدارية

آثار الدعاية والإعلان على مبيعات TANG

سبق وأن تعرضنا إلى تلك الدراسة التي قامت بها وكالة Young and Rubicam للدعاية للوقوف على آثار نفقات الدعاية على مبيعات TANG . وقد توصلت وكالة الدعاية إلى أن العلاقة بين نفقات الدعاية والمبيعات في اثنين من المناطق كانت على النحو التالي :

$$S_1 = 10 + 5A_1 - 1.5A_1^2$$
$$S_2 = 12 + 4A_2 - 0.5A_2^2$$

حيث S_1 هي مبيعات TANG في المنطقة الأولى (بملايين الدولارات سنوياً) ، حيث S_2 هي مبيعات TANG في المنطقة الثانية ، A_1 هي نفقات الدعاية في المنطقة الأولى (بملايين الدولارات سنوياً) ، و A_2 هي نفقات الدعاية في المنطقة الثانية .

(أ) إذا كانت General Foods - التي تقوم بالدعاية والتسويق لمشروب TANG - ترغب في معظمة مبيعات TANG في المنطقة الأولى، فما حجم نفقات الدعاية التي ينبغي عليها تحملها ؟

---

[6] بإضافة 4.267 لـ Q_1 و 2.933 لـ Q_2 في المعادلة (2.20) نجد أن :

$$\pi = -20 + 100(4.267) + 80(2.933) - 10(4.267)^2 - 10(2.933)^2 - 5(4.267)(2.933) = 311$$

[7] يمكن الرجوع إلى شروط الدرجة الثانية للتمييز بين القيمة العظمى والقيمة الصغرى في أي من كتب التفاضل . ولا تعد مناقشة هذا الأمر من الأهمية بمكان في الوقت الحالي . كما نلاحظ أن الأسلوب المقدم في هذا الجزء يؤدي إلى الحصول على قيمة عظمى نسبية وليست مطلقة .

(ب) إذا كانت General Foods ترغب في معظمة مبيعات TANG في المنطقة الثانية ، فما حجم نفقات الدعاية التي ينبغي عليها تحملها ؟

(ج) دلل على أن إجابتيك السابقتين تؤديان إلى الوصول بالمبيعات إلى أقصى – وليس إلى أدنى حد ممكن .

(د) هل تحبذ قيام General Foods في معظمة مبيعات TANG ؟ نعم أو لا ولماذا ؟

الحـــل :

(أ) لإيجاد قيمة A_1 التي تؤدي إلى معظمة S_1 ، ينبغي علينا أن نجعل مشتقة S_1 بالنسبة إلى A_1 تساوي صفر :

$$\frac{dS_1}{dA_1} = 5 - 3A_1 = 0$$

وعليه ، فإن $A_1 = 5/3$ مليون دولار .

(ب) لإيجاد قيمة A_2 التي تؤدي إلى معظمة S_2 ، يتعين علينا أن نجعل مشتقة S_2 بالنسبة إلى A_2 تساوي صفر :

$$\frac{dS_2}{dA_2} = 4 - A_2 = 0$$

وعليه ، فإن $A_2 = 4$ مليون دولار .

(ج) بما أن :

$$\frac{d^2S_1}{dA_1^{\ 2}} = -3$$

لذا فإنه من الضروري أن تكون S_1 قيمة عظمى عند النقطة ، حيث $dS_1 / dA_1 = 0$ ، وبما أن : $d^2S_2 / dA_2^{\ 2} = -1$ ؛ لذا يتعين علينا أن نجعل مشتقة S_2 بالنسبة إلى A_2 تساوي صفر . فإذا كانت S_1 و S_2 عند قيمتهما الصغرى – لا العظمى – كانت المشتقة الثانية موجبة، وليست سالبة .

(د) لا . كما سبق وأكدنا ، يفترض أن الشركات بصفة عامة تسعى إلى معظمة أرباحها – وليس مبيعاتها . فمن غير المعقول أن تسعى الشركة إلى زيادة مبيعاتها إذا كانت هذه الزيادة سوف تؤدي إلى تقليص الأرباح . ومع ذلك ، فقد توجد بعض الحالات التي تقوم فيها الشركة بزيادة مبيعاتها على الرغم مما لذلك من آثار سلبية على الأرباح في المدى القصير ، حيث تأمل الشركة في زيادة أرباحها في المدى البعيد . ومثال ذلك أن تقوم إحدى الشركات بطرح مبيعاتها بأسعار تضحية أملاً منها في كسب عملاء جدد يحتمل أن يزيدوا من أرباح الشركة في المستقبل . *

* DeBruicker, Quelch, and Ward, Cases in Consumer Behavior.

الأمثلية المقيدة

كنا قد ذكرنا في الفصل الأول أن مديري الشركات وغيرها من المنظمات الأخرى عادة ما يواجهون عددا من الضوابط أو القيود التي تحد من الخيارات المتاحة لديهم . فكثيرا ما يحتاج مدير الإنتاج إلى تخفيض نفقات شركته إلى أدنى حد ممكن . ولكنه يصطدم بعدم موافقة الشركة على السماح له بتخفيض الإنتاج إلى الحد الذي لا تتمكن معه الشركة من الإيفاء بتعاقداتها مع عملائها . كما قد يرغب المدير العام للشركة في زيادة الأرباح إلى أقصى حد ممكن إلا أنه قد يفشل على المدى القصير في تحديث الإنتاج أو التوسع في حجم الشركة ومعداتها .

وهناك عدة طرق من شأنها مساعدة المديرين على حل هذا النوع من المشكلات ، والتي تعرف بمشكلات الأمثلية المقيدة . ففي حالة بعض المشكلات السهلة ، حيث يوجد نوع واحد من الضوابط أو القيود ، يمكن القيام باستخدام مثل هذا القيد للتعبير عن أحد الخيارات المتاحة أمام صانع القرار ، كدالة لغيره من خيارات القرار الأخرى . وعندئذٍ يستطيع المدير أن يقوم بتطبيق تقنيات الأمثلية غير المقيدة ، والتي سبق لنا الحديث عنها .

ولمزيد من الإيضاح ، نفترض أن شركة Kloster تقوم بإنتاج نوعين من السلع ، وأن إجمالي تكلفتها :

$$TC = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2 \qquad (2.23)$$

حيث Q_1 تساوي إنتاج الشركة من السلعة الأولى في الساعة ، وأن Q_2 تساوي إنتاج الشركة من السلعة الثانية في الساعة . ونتيجة لالتزامات الشركة تجاه عملائها ، فإنه يتحتم على الشركة إنتاج ما لا يقل عن 30 وحدة في الساعة من السلعتين معا . ومن الطبيعي أن يرغب مدير شركة Kloster في الوقوف على مستويات الإنتاج من السلعتين التي من شأنها تخفيض نفقات الشركة إلى أدنى حد ممكن مع افتراض أن حاصل إنتاج السلعتين معا يساوي 30 وحدة في الساعة .

ويمكن التعبير عن مثل هذا النوع من مشاكل الأمثلية المقيدة على النحو التالي :

الحد الأدنى من $TC = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2$

إذا كان : $Q_1 + Q_2 = 30$

وبالطبع يتمثل القيد في أنه لا بد أن تكون : $(Q_1 + Q_2 = 30)$. ولحل مشكلة قيد Q_1 علينا أن نتبع الخطوات التالية :

$$Q_1 = 30 - Q_2$$

وبالتعويض عن $(30 - Q_2)$ بـــ Q_1 في المعادلة (2.23) ، نجد أن :

$$\begin{aligned} TC &= 4(30 - Q_2)^2 + 5Q_2^2 - (30 - Q_2)Q_2 \\ &= 4(900 - 60Q_2 + Q_2^2) + 5Q_2^2 - 30Q_2 + Q_2^2 \\ &= 3600 - 270Q_2 + 10Q_2^2 \qquad (2.24) \end{aligned}$$

وهنا يمكن استخدام أسلوب الأمثلية الغير مقيدة - الموضحة أعلاه - لإيجاد قيمة Q_2 بـــ TC إلى قيمتها الصغرى . وكما سبق وأشرنا ، فإنه يتعين علينا الحصول على مشتقة TC بالنسبة إلى Q_2 ، وجعلها مساوية للصفر .

$$\frac{dTC}{dQ_2} = -270 + 20Q_2 = 0$$

$$20Q_2 = 270$$

$$Q_2 = 13.5$$

وللتحقق من أنها نهاية صغرى - لا عظمى - ينبغي الحصول على المشتقة الثانية وهي :

$$\frac{d^2TC}{dQ_2^2} = 20$$

وبما أن هذه المشتقة الثانية موجبة ، لذا فإن الناتج نهاية صغرى .

ولإيجاد قيمة Q_1 التي تصل بالتكلفة الإنتاجية إلى أدنى حد ، علينا أن نتذكر أن القيد يتطلب أن تكون : $Q_1 + Q_2 = 30$ أي أن $Q_1 = 30 - Q_2$ ، ولما كنا على علم بأن القيمة المثلى لـــ Q_2 هي 13.5 ، فإنه من الطبيعي أن تكون القيمة المثلى لـــ Q_1 هي $Q_1 = 30 - 13.5 = 16.5$. وجملة القول هو أنه إذا ما أرادت شركة Kloster الحد من إجمالي تكلفتها إلى أدنى درجة ممكنة مع وجود قيد الإنتاج وهو ألا يزيد إجمالي إنتاجها من السلعتين معا عن 30 وحدة ، فإنه يتعين على الشركة القيام بإنتاج 16.5 وحدة من السلعة الأولى و 13.5 وحدة من السلعة الثانية في الساعة .[8] أي أنه ينبغي أن تقوم الشركة بإنتاج 33 وحدة من السلعة الأولى و 27 وحدة من السلعة الثانية كل ساعتين .

---

[8] **بالتعويض عن Q_1 بـــ 16.5 و عن Q_2 بـــ 13.5 ، في المعادلة (2.23) ، نجد أن إجمالي تكلفة الشركة تساوي :**

$$\begin{aligned} TC &= 4(16.5)^2 + 5(13.5)^2 - (16.5)(13.5) \\ &= 4(272.25) + 5(182.25) - 222.75 \\ &= 1089 + 911.25 - 222.75 \\ &= \$1777.5 \end{aligned}$$

مضاعفات Lagrange [9]

قد يكون الأسلوب الذي قمنا بتناوله فيما سبق ذو جدوى محدودة للتطبيق عند كثرة القيود أو تعقدهـا ، لذلـك يمكـن الاستعانة بمضاعفات Lagrange . وتنطوي هذه الطريقة الخاصة بحل مشكلات الأمثلية المقيدة على تكوين معادلة تعرف بدالة Lagrange ، وهي المعادلة التي تشتمل على كل من الدالة المراد الحصول على أقصى أو اصغر قيمة لها من ناحية والقيود أو الضوابط من ناحية أخرى . ويتم صياغة هذه المعادلة بحيث تكون هناك حقيقتان :

(1) عندما تبلغ هذه المعادلة أقصى – أو أصغر – قيمة لها ، تكون الدالة الأصلية عند أقصى – أو أصغر – قيمة لها بالفعل .

(2) وفي هذه الحالة نكون قد واجهنا كافة الضوابط أو القيود .

ولإيضاح كيفية بناء إحدى دوال Lagrange ، علينا بمعاودة الحديث عل المشكلة التي واجهتها شركة Kloster . فقـد أشـرنا إلى أن الشركة ترغب في الوصول بـ TC إلى أصغر قيمة لها بحيث : $TC = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2$ ، عند وجود قيد $Q_1 + Q_2 = 30$. ولعـل أولى الخطوات الواجب إتباعها عند تكوين دالة Lagrange لمواجهة مشكلة هذه الشركة هي القيام بإعادة صياغة القيد الذي تواجهه الشـركة في شكل معادلة مساوية للصفر :

$$30 - Q_1 - Q_2 = 0 . \qquad (2.25)$$

فإذا قمنا بضرب هذا النوع من القيود في عامل مجهول نشير إليه بـ λ ، ثم نجمع النتيجتين على الدالة التي نرغب في الحصول على قيمتها الصغـرى في المعادلة (2.23) فإننا نحصل على دالة Lagrange وهي :

$$L_{tc} = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2 + \lambda\left(30 - Q_1 - Q_2\right) \qquad (2.26)$$

ولأسباب سيرد ذكرها في الفقرة التالية يمكننا التثبت من أنه إذا ما تمكننا من إيجاد القيمة العظمى – أو الصغـرى – غـير المقيـدة لدالـة Lagrange فإن الحل سوف يكون مطابقا تماما لحل المشكلة الأصلية للقيمة العظمى – أو الصغرى – المقيدة . وبعبارة أخرى ، فإن حل مشـكلة الأمثلية المقيدة يتطلب منا القيام بتحقيق أمثلية دالة Lagrange . ففي حالة شركة Kloster ، لا بد لنا من إيجاد قيم كل من Q_1 و Q_2 و λ التي تؤدي إلى الوصول بـ L_{tc} إلى أصغر قيمة لها في المعادلة (2.26) . وللقيام بذلك ، يتحتم علينا إيجاد المشتقة الجزئية لـ L_{tc} بالنسبة إلى كل مـن هذه المتغيرات الثلاثة Q_1 و Q_2 و λ :

$$\frac{\partial L_{tc}}{\partial Q_1} = 8Q_1 - Q_2 - \lambda$$

$$\frac{\partial L_{tc}}{\partial Q_2} = -Q_1 + 10Q_2 - \lambda$$

$$\frac{\partial L_{tc}}{\partial \lambda} = -Q_1 - Q_2 + 30$$

وكما أشرنا فيما سبق ، أنه ينبغي أن نجعل هذه المشتقات الجزئية الثلاثة مساوية للصفر حتى نتمكن من الحصول على أدنى قيمة لـ L_{tc} وهكذا فإن :

$$8Q_1 - Q_2 - \lambda = 0 \qquad (2.27)$$

$$-Q_1 + 10Q_2 - \lambda = 0 \qquad (2.28)$$

$$-Q_1 + Q_2 + 30 = 0 \qquad (2.29)$$

كما أنه من الضروري ملاحظة أن المشتقة الجزئية لدالة Lagrange بالنسبة إلى λ (أي أن : $\partial L_{tc} / \partial \lambda$) عندما تكون مساوية للصفـر في المعادلة (2.29) هي نفسها القيد الموجود في مشكلة الأمثلية الأصلية [راجع المعادلة (2.25)] ويرجع السبب في ذلك إلى الأسلوب الذي تتـألف منه دالة Lagrange ولذلك فإذا كانت هذه المشتقة تساوي صفر، يمكننا التأكد من استيفاء هذا القيد الأصلي لمتطلباته . وفي هذه الحالة يكون الحد الأخير على يمين دالة Lagrange هو صفر، وهكذا تؤول دالة Lagrange إلى الدالة الأصلية التي كنا نرغب في الحصول على القيمة العظمى – أو

[9] يمكن المرور على هذا الجزء مرور الكرام دون الإخلال بتسلسل الموضوع .

الصغرى – لها وهو الأمر الذي يعني نجاحنا في حل المشكلة الأصلية للأمثلية المقيدة إذا ما تمكننا من الحصول على أكبر – أو أصغر – قيمة ممكنة لدالة Lagrange .

وبمعاودة الحديث عن شركة Kloster نجد أن المعادلات (2.27) ، (2.28) ، (2.29) هي ثلاث معادلات آنية في ثلاث مجاهيل هي Q_1 و Q_2 و λ ، فإذا تمكننا من حل هذا النوع من المعادلات لـ Q_1 و Q_2 ، فإننا نحصل على القيم المثلى لـ Q_1 و Q_2 ، وبطرح المعادلة (2.28) من المعادلة (2.27) نجد أن :

$$9Q_1 - 11Q_2 = 0 \qquad (2.30)$$

وبضرب المعادلة (2.29) في 9 وإضافة الناتج إلى المعادلة (2.30) نتمكن من إيجاد الحل لـ Q_2 :

$$\begin{array}{rl} -9Q_1 - 9Q_2 + 270 & = 0 \\ 9Q_1 - 11Q_2 & = 0 \\ \hline -20\,Q_2 + 270 & = 0 \\ Q_2 = 270 / 20 & \\ = 13.5 & \end{array}$$

وهكذا تكون القيمة المثلى لـ Q_2 هي 13.5 وبالتعويض عن Q_2 بـ 13.5 في المعادلة (2.29) ، نجد أن القيمة المثلى لـ Q_1 هي 16.5 .

وهكذا فإننا نصل إلى نفس النتيجة : وهي أن القيمة المثلى لـ Q_1 هي 16.5 وأن القيمة المثلى لـ Q_2 هي 13.5 . وبعبارة أخرى ، فإنه يتحتم على شركة Kloster إنتاج 16.5 وحدة من السلعة الأولى و 13.5 وحدة من السلعة الثانية في الساعة . كما يتضح أن طريقة مضاعفات Lagrange هذه أفضل من تلك التي سبق لنا تفصيلها وذلك لسببين على الأقل :

(1) أنها قادرة على معالجة أكثر من قيد واحد .

(2) أن قيمة λ تمد صانع القرار بمعلومات هامة ونافعة .

أما λ [والتي تعرف بمضاعف Lagrange] فإنها تستخدم خصيصا لقياس ما يحدث من تغير في العامل أو المتغير الذي نرغب في الحصول على أقصى أو أدنى قيمة له TC في هذه الحالة مع افتراض إمكانية تجاوز القيد بمقدار وحدة واحدة.[10] ***مثال*** : إذا كانت شركة Kloster ترغب في تخفيض إجمالي نفقاتها إلى أدنى حد ممكن مع وجود قيد إنتاجي يسمح لها بإجمالي إنتاج 31 وحدة من السلعتين معاً بدلاً من 30 وحدة فقط ، وكانت قيمة λ هي التي توضح مقدار الزيادة في القيمة الصغرى لـ TC ، فما هي قيمة [س س1]λ ؟ وطبقا للمعادلة (2.27) ، وبالتعويض عن $Q_1 = 16.5$ و $Q_2 = 13.5$ تصبح :

$$\lambda = 8(16.5) - 13.5 = 118.5$$

معنى هذا أنه في حالة تجاوز الإنتاج بمقدار وحدة واحدة ، بحيث يكون إجمالي الإنتاج 31 بدلاً من 30 وحدة ، فسوف يرتفع إجمالي التكلفة بمقدار 118.50 دولار .

وتعد هذه المعلومات ذات قيمة كبرى في حالة الكثير من القرارات الإدارية فعلى فرض من أنه أحد عملاء شركات Kloster أراد شراء أحد السلعتين اللتين تنتجهما الشركة مقابل 115 دولار ، سوف يتحتم على الشركة زيادة إجمالي إنتاجها إلى 31 وحدة في الساعة . وبناء على المعلومات السابق إيضاحها ، فإنه من الحماقة بمكان أن توافق الشركة على هذا العرض ، حيث أن هذه الوحدة الإضافية المنتجة سوف ترفع التكاليف بمقدار 118.50 دولار ، أي بزيادة قدرها 3.50 دولار عن الثمن الذي سوف يدفعه العميل مقابل هذه الوحدة الإضافية .

[10] تتناسب قيم λ للمتغيرات المزدوجة للبرمجة الخطية وهو ما سنقوم بمناقشته في الفصل العاشر .

التخطيط لمواجهة الاحتياج للعمالة عند بلوغ ذروتها *

توصلت إحدى كبريات الشركات المنتجة للحاسب الآلي – وذلك بعد قيامها بدراسة تاريخ مشروعات الإنتاج لديها – أنها قد مرت بحالات متكررة ومتشابهة من تزايد وتناقص العاملين في مجال المشروعات . كما وجدت الشركة أنه بإمكانها إيجاد تقدير تقريبي لعدد المهندسين الذين سوف يحتاجهم استكمال أحد هذه المشروعات بعد t شهور من بدايته – وذلك بإتباع المعادلة

$$Y = at - bt^2, \left(0 \le t \le \frac{a}{b}\right)$$

حيث Y هي عدد المهندسين المطلوبين بعد t شهر من بداية المشروع ، وحيث a و b هي الأعداد التي تتباين من مشروع إلى آخر – وهي أيضا الأعداد التي تتوقف على نوع المنتج المراد تطويره .

لقد كانت تلك الشركة ترغب في الاستعانة بهذه الطريقة في تحديد الوقت الذي ينتظر أن يصل فيه عدد المهندسين الذين تطلبهم تنفيذ أحد مشاريع تطوير الإنتاج إلى ذروته ، وكذا في تحديد مدى ضخامة هذه الذروة . كذلك يمكن لمديري بعض الشركات الاستفادة من مثل هذه التقديرات عند وضع خططهم الخاصة بالتوظيف ولاستفادة من فريق المهندسين بالشركة على أكمل وجه ممكن . باستطاعة مديري الشركة أن يستفيدوا من هذه التقديرات التي من شأنها أن تضعهم على أهبة الاستعداد لمواجهة الموقف الذي قد يتطلب زيادة أو إضافة لمهندسي الشركة . هذا وقد كان المشروع – الذي أجريت من أجله التقديرات – على وشك البداية ، وبناءاً على الخبرة المتوفرة للشركة من المشروعات المماثلة في الماضي ، جاءت تقديرات المديرين بأن $a = 18$ ، و $b = 1$ لمثل هذا النوع من المشروعات .

فإذا كنت تعمل استشاريا لهذه الشركة ، ما هي الطريقة التي سوف تتبعها لإجراء تلك التقديرات التي يحتاجها المديرون ؟

* يعتمد هذا القسم على دراسة تطبيقية حقيقية ، ومع ذلك فقد قمنا بتبسيط كل من المعادلات والمعطيات لأغراض تعليمية بحتة .

المقارنة بين الزيادة في التكاليف والزيادة في الإيرادات

قبل أن يأتي هذا الفصل إلى نهايته ، يجب علينا الإشارة إلى إمكانية اتخاذ العديد من قرارات العمل وذلك بمقارنة الزيادة في التكاليف بالزيادة في الإيرادات . فعادة ما يجد المدير نفسه أمام خيارين أو أكثر ، والمهم هو الفرق في تكلفة كل من هذه الخيارات وكذلك الفرق بين إيرادات كل منهم . فإذا كان مديرو إحدى الشركات المنتجة للميكنة يفكرون في إمكانية إضافة خط إنتاج جديد للشركة ، فإنه يتعين عليهم مقارنة الزيادة في التكلفة الناجمة عن إضافة هذا الخط بالزيادة في إيرادات الشركة المنتظر تحقيقها . فإذا تراءى لهم أن الزيادة في الإيراد سوف تفوق الزيادة في التكلفة ، كان هذا يعني أن خط الإنتاج الجديد سوف يزيد من أرباح الشركة .

لاحظ أن الزيادة في التكلفة ليست هي التكلفة الحدية فبينما نجد أن التكلفة الحدية هي التكلفة الناجمة عن زيادة صغيرة جداً في الإنتاج (وحدة واحدة) ، نجد أن الزيادة في التكلفة هي التكلفة الإضافية الناجمة عن جوهرية في الإنتاج . وبالمثل نجد أن الزيادة في الإيراد هي الإيرادات الإضافية ، الناجمة عن زيادة جوهرية في الإنتاج . بينما الإيراد الحدي هو الإيراد الناجم عن زيادة الإنتاج بمقدار ضئيل (وحدة واحدة) . افترض أنك تريد التحقق مما إذا كانت إحدى الشركات سوف تحقق زيادة في الأرباح إذا ما قامت بمضاعفة إنتاجها . إذا كانت الزيادة في التكلفة الناجمة عن الزيادة في الإنتاج هي 5 مليون دولار والزيادة في الإيرادات هي 6 مليون دولار ، فإن معنى هذا أن أرباح الشركة سوف تزيد بمقدار 1 مليون دولار إذا قامت بمضاعفة إنتاجها . أما التكلفة الحدية والإيرادات الحدية فإنها لا تمدك بمثل هذه المعلومات الهامة ، إذ أنها تقتصر على الإشارة على زيادة ضئيلة جداً في الإنتاج وليس إلى مضاعفة هذا الإنتاج .

وقد يبدو أنه من السهل المقارنة بين الزيادة في التكلفة والزيادة في الإيرادات ، إلا أنه توجد ثمة معوقات عديدة في هذا الصدد . ولعل أكثر المشكلات شيوعا هو عدم القدرة على التنبه إلى عدم أهمية التكلفة غير المتكررة ، حيث أنه لا ينبغي أخذ التكاليف المتعلقة بالماضي في الاعتبار عند اتخاذ القرارات المتعلقة بالحاضر. افترض أنك ترغب في القيام برحلة ما، وأنك تريد معرفة أيهما أرخص : الذهاب بسيارتك الخاصة، أم السفر جواً. ترى ما هي التكاليف التي يجب أخذها في الاعتبار في حالة سفرك بسيارتك الخاصة ؟ لما كانت الزيادة الوحيدة في التكاليف تتمثل في ثمن الوقود (بالإضافة إلى قدر قد يزيد أو ينقص من تمالك الإطارات واستهلاك للموتور وغيرها) لذا فإنه لا ينبغي حساب غير ذلك من التكاليف الأخرى. ولا ينبغي حساب التكاليف المتعلقة بالماضي-مثل ثمن السيارة-والتكاليف التي سوف تتحملها سواء سافرت بالسيارة أما بالطائرة (كقيمة وثيقة التأمين على سيارتك). أما إذا كنت تفكر في شراء سيارة لاستخدامها في هذه الرحلة وما يعقبها من رحلات ، فيتعين عليك حساب هذه التكاليف .[11]

ولمزيد من الإيضاح ، نضرب هذا المثال الحقيقي لإحدى الخطوط الجوية التي عمدت مؤخرا إلى القيام برحلات جوية إضافية لا تدر إلا عائداً بسيطاً لا يكاد يتجاوز التكلفة العينية لهذه الرحلات . افترض أن هذه الشركة ترغب في اتخاذ قرار بشأن ما إذا كان عليها إضافة رحلة جوية أخرى بين المدينة A والمدينة B . وبفرض أن التكاليف المخصصة – وهي التكاليف العينية بالإضافة إلى نسبة معينة من تكاليف التأمين والاستهلاك وغيرها من التكاليف المباشرة الثابتة – تبلغ 5,500 دولار للرحلة الواحدة . وبفرض أن التكاليف العينية – وهي المبلغ الحقيقي الذي ستنفقه شركة الطيران هذه للقيام بكل رحلة – تبلغ 3,000 دولار ، وأن الإيراد المنتظر للرحلة الواحدة هو 4,100 دولار . في ظل هذه المعطيات ، سيكون من الطبيعي أن تقوم الشركة بإجراء هذه الرحلات الجوية الإضافية . وهذا هو القرار الصائب ؛ حيث أن الرحلة الواحدة ستزيد أرباح الشركة بمقدار 1,100 دولار .

ويمكن إيجاز هذا كله على النحو التالي :

(1) الزيادة في الإيرادات في الرحلة الواحدة تساوي 4,100 دولار .

(2) الزيادة في التكاليف من الرحلة الواحدة تساوي 3,000 دولار .

(3) تكاليف التأمين والاستهلاك وغيرها من التكاليف المباشرة تبقى كما هي سواء تم القيام بهذه الرحلات الإضافية أم لا .

وهكذا يتضح لنا أن التكاليف المخصصة عادة ما تكون مضللة في مثل هذه الأحوال ، ومن الأفضل الاعتماد على التكاليف العينية وليس التكاليف المخصصة .

هذا وتوجد أنواع أخرى من الأخطاء التي قد تضر بالتقديرات التي تجريها الشركات بخصوص الزيادة في التكاليف . فعلى سبيل المثال ، قد ترفض إحدى الشركات إنتاج وبيع بعض الوحدات من إنتاجها بحجة أنها تعمل بكامل سعتها تقريبا ، وبحجة أن التكلفة الزائدة الناجمة عن إنتاج هذه الوحدات الإضافية تعد باهظة . وحقيقة الأمر هي أن الزيادة في التكلفة قد لا تكون مرتفعة إلى هذا الحد ، إذ أنه بإمكان الشركة القيام بإنتاج هذه الوحدات الإضافية في موسم الركود (عندما يكون هناك فائض في السعة) ، وبخاصة عندما يقبل العملاء تسلم احتياجاتهم من المنتج في ذلك الوقت بالتحديد . زد على ذلك على أنه كثيرا ما يساء تقدير الزيادة في الإيرادات . ولنضرب مثل أحد الشركات التي تفكر في إضافة منتجاً جديداً لها . فقد يقوم مديرو هذه الشركة بوضع تقديرا ما لزيادة الإيرادات الناجمة عن إضافة هذا المنتج الجديد ، ولكنهم يغفلون الحساب الدقيق للمبيعات التي سوف يحققها المنتج الجديد وأثر تلك المبيعات على مبيعات الشركة من منتجاتها الأخرى . فقد يعتقد أولئك المديرون أن المنتج الجديد لن يؤثر سلباً على المبيعات من باقي منتجات الشركة . وتأتي التجربة لتثب خطأ توقعاتهم ، مما يعني أن تقديرهم لزيادة إيرادات الشركة كان مبالغا فيه للغاية .

---

[11] يمكن الحصول على المزيد من التفاصيل الخاصة بهذا المثال في الورقة التي قدمها كل من E. Grant و W. Ireson في E. Mansfield, ed., *Managerial Economics and operation Research*, 5th ed. .

موجز بما ورد في الفصل الثاني

1- يمكن التعبير عن العلاقات الدالية في شكل جداول أو رسوم بيانية أو معادلات . ويمكن تعريف القيمة الحدية لمتغير تابع بأنها مقدار التغير في قيمته بناء على التغير الذي قد يطرأ على متغير مستقل بمقدار وحدة واحدة . يبلغ المتغير التابع قيمته العظمى عندما تنحرف قيمته الحدية من الإيجاب إلى السلب .

2- تعد مشتقة Y بالنسبة إلى X (والمعبر عنها $\mathrm{d}Y / \mathrm{d}X$) وهي نهاية النسبة $\Delta Y / \Delta X$ عندما ΔX تؤول إلى الصفر . ومن الناحية الهندسية ، نجد أن هذه المشتقة هي عبارة عن ميل المنحنى الذي تظهر فيه Y (عند المحور الرأسي) كدالة في X (عند المحور الأفقي) هذا وقد قدمنا عدد من القواعد التي تمكننا من إيجاد قيمة هذه المشتقة .

3- لإيجاد قيمة X التي تؤدي بـ Y إلى قيمتها العظمى أو الصغرى ، يتعين علينا تحديد قيمة X حيث $\mathrm{d}Y / \mathrm{d}X$ تساوي صفر . ولتحديد إذا ما كانت هذه القيمة عظمى أو صغرى ، يتعين علينا إيجاد المشتقة الثانية لـ Y بالنسبة لـ X والمعبر عنها بـ $\mathrm{d}^2Y / \mathrm{d}X^2$ ، هي مشتقة $\mathrm{d}Y / \mathrm{d}X$ فإذا ظهر أن هذه المشتقة الثانية سالبة ، كان هذا يعني أن القيمة عظمى ، أما إذا كانت موجبة ، كان هذا يعني أن القيمة صغرى .

4- عادة ما يكون المتغير التابع معتمد على عدد من المتغيرات المستقلة ، وليس متغيراً مستقلاً واحداً بعينه . ولإيجاد قيمة كل من المتغيرات المستقلة التي تؤدي بالمتغير التابع إلى قيمته العظمى ، ينبغي علينا تحديد المشتقة الجزئية لـ Y بالنسبة لكل من المتغيرات المستقلة ، والمعبر عنها بـ $\partial Y / \partial X$ ، ونجعلها مساوية للصفر . وللحصول على المشتقة الجزئية لـ Y بالنسبة لـ X نقوم بتطبيق القاعدة المألوفة لإيجاد المشتقات . ومع ذلك فإننا نعامل جميع المتغيرات المستقلة عدا X كثوابت .

5- عادة ما يواجه مديرو الشركات وغيرها من المؤسسات الأخرى العديد من الضوابط أو القيود التي تحد من الخيارات المتاحة لديهم . وفي الحالات غير المعقدة ، التي تنطوي على قيد واحد ، يمكننا استخدام هذا القيد للتعبير عن أحد خيارات القرار كدالة لخيارات القرار الأخرى كما يمكننا الاستعانة بتقنيات الأمثلية غير المقيدة .

6- أما في الحالات الأكثر تعقيداً ، فإنه يمكن معالجة مشكلات الأمثلية المقيدة باستخدام مضاعف Lagrange . تشتمل دالة Lagrange على الدالة المراد الحصول على قيمتها العظمى أو الصغرى بالإضافة إلى القيود أو الضوابط الموجودة . ولحل مشكلة الأمثلية المقيدة يتعين علينا وضع دالة Lagrange في قيمتها المثلى .

7- يمكن اتخاذ العديد من القرارات الخاصة بالعمل بمقارنة الزيادة في التكلفة مع الزيادة في الإيرادات . وفي الأغلب الأعم ، يكون على المدير المفاضلة بين خيارين أو أكثر ، والمهم في الأمر هو أن يقوم بحساب الفرق في التكلفة بين هذين الخيارين ، بالإضافة إلى حساب الفرق في الإيرادات في حالة كل منهما .

تمارين

(1) من أهم الأسئلة التي يجب مواجهتها عند بناء المستشفيات : ما هو الحجم المناسب للمتشفى (من حيث عدد المرضى الممكن استيعابهم في اليوم الواحد) الذي من شأنه الوصول بالتكلفة التي يتطلبها بقاء المريض في المستشفى ليوم واحد إلى أدنى حد ممكن ؟ وطبقا لإحدى الدراسات المرموقة ، نجد أن بالإمكان إيجاد تقدير تقريبي للتكلفة الإجمالية التي يتطلبها سير العمل داخل المستشفى (بالدولار) وذلك على النحو التالي :

$$C = 4{,}700{,}000 + 0.00013X^2$$

حيث X هي عدد المرضى الذين تقوم المستشفى برعايتهم يومياً .

(أ) قم بوضع قاعدة للعلاقة بين تكلفة المريض في اليوم الواحد وعدد المرضى الذين تستو عبهم المستشفى يومياً .

(ب) بناء على نتائج هذه الدراسة ، ما هو الحجم المناسب للمستشفى (من حيث عدد المرضى الممكن استيعابهم في اليوم الواحد) الذي من شأنه الوصول بالتكلفة التي يتطلبها بقاء المريض في المستشفى يوما واحد إلى أدنى حد ممكن ؟

(ج) دلل على أن إجابتك تؤول بالتكلفة إلى أدنى (وليس إلى أقصى) حد ممكن .

(2) قامت شركة Trumbull باستحداث منتج جديد . وطبقا لتقديرات مدير الشركة ، ينتظر أن يؤدي هذا المنتج الجديد إلى زيادة إيرادات الشركة بمقدار 5 مليون دولار سنوياً ، الأمر الذي سوف يؤدي إلى زيادة التكاليف العينية للشركة بمقدار 4 مليون دولار سنوياً ، أما التكاليف المخصصة – والتي سوف تشمل على نسبة من تكاليف التأمين والاستهلاك وغيرها من التكاليف المباشرة الثابتة – فسوف تبلغ 5.5 مليون دولار .

(أ) إن مدير شركة Trumbull يشعر بعدم جدوى القيام باستحداث هذا المنتج الجديد . فهل تراه محقاً في ذلك ؟ نعم أم لا ؟ ولماذا ؟

(ب) أما نائب مدير الشركة للبحوث فإنه يعتقد بأنه لا يوجد خيار أخر أمام الشركة سوى القيام بطرح المنتج الجديد ، لكونه قد كلف الشركة نحو 10 مليون دولار بالفعل – فهل تره محقا في ذلك ؟ نعم أم لا ؟ ولماذا ؟

(3) في شركة Martin ، نجد أن العلاقة بين الإنتاج والربح هي على النحو التالي :

الإنتاج (عدد الوحدات في اليوم)	الربح (آلاف الدولارات في اليوم)
0	−10
1	−8
2	−5
3	0
4	2
5	7
6	12
7	21
8	22
9	23
10	20

(أ) ما هي الأرباح الحدية للشركة عندما يتراوح الإنتاج بين 5 و 6 وحدات يومياً ، وعندما يتراوح الإنتاج بين 9 و 10 وحدات يومياً .

(ب) ما هو مستوى الإنتاج الذي يصل متوسط الربح عنده إلى نهايته العظمى ؟

(ج) هل يجب أن تقوم شركة Martin بطرح مقدار الإنتاج الذي يصل عنده الربح إلى نهايته العظمى ؟ نعم أم لا ولماذا ؟

(4) حاول إيجاد المشتقة الأولى لكل من الدوال التالية :

(أ) $Y = 3 + 10X + 5X^2$

(ب) $Y = 2X(4 + X^3)$

(ج) $Y = 3X \div (4 + X^3)$

(د) $Y = 4X$ |2سس| $\div (X - 3)$

(5) إن دالة إجمالي التكلفة لشركة Duemer هي $TC = 100 + 4Q + 8Q^2$ ، حيث TC هي إجمالي التكاليف و Q هي الإنتاج :

(أ) ما هي التكلفة الحدية عندما يكون الإنتاج 10 ؟

(ب) ما هي التكلفة الحدية عندما يكون الإنتاج 12 ؟

(ج) ما هي التكلفة الحدية عندما يكون الإنتاج 20 ؟

(6) يرتبط الربح بالإنتاج في شركة Bartholomew على النحو التالي : $\pi = -40 + 20Q - 3Q^2$ ، حيث π هي إجمالي الربح ، و Q هي الإنتاج .

(أ) إذا كان إنتاج الشركة يساوي 8 فما هي أرباحها الحدية ؟

(ب) قم باشتقاق المعادلة التي توضح العلاقة بين إنتاج الشركة وأرباحها الحدية .

(ج) ما هو مستوى الإنتاج الذي من شأنه معظمة الربح .

(7) حاول إيجاد المشتقات الثانية لكل من الدوال الآتية :

(أ) $Y = 4 + 9X + 3X^2$

(ب) $Y = 4X(3 + X^2)$

(ج) $Y = 4X(2 + X^3)$

(د) $Y = 4 / X$ |3سس| $+ 3$

(8) تستعين شركة Mineola بأحد الاستشاريين بهدف الحصول على تقدير دقيق للعلاقة بين إنتاجها وأرباحها . وقد صرح الاستشاري بأن هـذه العلاقة على النحو التالي :

$$\pi = -10 - 6Q + 5.5Q^2 - 2Q^3 + 0.25Q^4 .$$

(أ) هذا وقد أوصى الاستشاري بأن تقوم الشركة بجعل $Q = 1$ من أجل معظمة الربح . هل ترى أنه من الصحيح $d\pi / dQ = 0$ عندما $Q = 1$ ؟ وهل ترى أن π هي النهاية العظمى عندما $Q = 1$ ؟

(ب) ومن جانبه يرى نائب مدير الشركة أن أرباح الشركة تصل إلى أقصى حد لها عندما $Q = 2$. فهل ترى أنه محق في ذلك ؟

(ج) إذا كنت تعمل كبيراً للمديرين التنفيذيين بالشركة ترى هل كنت سوف تنظر إلى تقدير الاستشاري للعلاقة بين الإنتاج والربح على أنـه تقدير سليم ؟

(9) حاول إيجاد المشتقة Y بالنسبة إلى X لكل من الحالات التالية :

(أ) $Y = 10 + 3Z + 2X$

(ب) $Y = 18Z^2 + 4X^3$

(ج) $Y = Z^2X^8$

(د) $Y = 3Z$ |4سس| $\div (4 + X)$

(10) تقوم شركة Stock بإنتاج سلعتين في وقتا واحد الورق والكرتون والعلاقة بين π (وهي الأرباح السنوية للشركة بآلاف الدولارات) وإنتاجها من كل من السلعتين هي :

$$\pi = -50 + 40Q_1 + 30Q_2 - 5Q_1^2 - 4Q_2^2 - 3Q_1Q_2 ,$$

حيث Q_1 هي إنتاج الشركة السنوي من الورق (بالطن) ، و Q_2 هي إنتاج الشركة السنوي من الكرتون (بالطن) .

(أ) حاول إيجاد مستوى الإنتاج الذي يجب أن تحققه الشركة في حالة كل من السلعتين تصل بالأرباح إلى نهايتها العظمى .

(ب) هل ترى أن الإجابة السابقة سوف تتغير في حالة فرض ضريبة سنوية على الشركة بمقدار 5,000 دولار ؟ وكيف يكون التغيير في الإجابة إن حدث ؟

(11) تقوم شركة Miller بالاستعانة بالعمالة المدربة وغير المدربة من آجل القيام بتنفيذ بعض مشروعات البناء . وتتوقف تكلفة تنفيذ المشروع على عدد ساعات العمالة المدربة وعدد ساعات العمالة غير المدربة ، وتكون العلاقة بينهما :

$$C = 4 - 3X_1 - 4X_2 + 2X_1^2 + 3X_2^2 + X_1X_2$$

حيث C هي التكلفة (بآلاف الدولارات) و X_1 عدد ساعات العمالة المدربة (بالآلاف) و X_2 عد ساعات العمالة غير المدربة (بالآلاف).

(أ) حاول إيجاد عدد ساعات العمالة المدربة وعدد ساعات العمالة غير المدربة التي من شأنها الوصول بتكلفة تنفيذ المشروع إلى أدنى حد ممكن.

(ب) إذا كان من الضروري قيام الشركة باستخراج الرخصة التي يصرح لها بتنفيذ هذا المشروع ، هي الرخصة التي يتكلف استخراجها 2,000 دولار ، (وإذا لم يتم إدراك هذه التكلفة ضمن C) ، فهل من الممكن أن تؤدي هذه التكلفة الإضافية إلى تغير الإجابة السابقة ؟ وكيف يكون التغير إن حدث ؟

(12) تعمل السيدة Ilona Stafford مديرة لإحدى الشركات الصغيرة التي تقوم بإنتاج السجاجيد المصنوعة من الأصواف والأقطان . وتبلغ التكلفة الإجمالية اليومية لهذا الشركة (بالدولار) :

$$C = 7X_1^2 + 9X_2^2 - 1.5X_1X_2$$

حيث X_1 هي عدد السجاجيد القطنية المنتجة يومياً ، و X_2 هي عدد السجاجيد المصنوعة من الصوف المنتجة يومياً . ونتيجة لالتزام الشركة تجاه عملائها من تجار التجزئة فإنه يتعين عليها إنتاج ما لا يقل عن 10 من السجاجيد يومياً ، مع عدم تحديد النسبة بين السجاجيد القطنية والسجاجيد الصوفية .

(أ) إذا كانت الشركة ترغب في تخفيض إنتاجها إلى أدنى حد ممكن (دون المساس بالتزاماتها إزاء عملائها من تجار التجزئة) ، فما هو عدد السجاجيد القطنية والصوفية الواجب على الشركة إنتاجها يومياً ؟ (لا تقم باستخدام مضاعف Lagrange) .

(ب) هل يبدو أنه من الصعب أن تحاول الشركة الإقلال من تكاليفها إلى أدنى حد ممكن في ظل هذه الظروف ؟ نعم أم لا ولماذا ؟

(ج) هل يمكن أن تقوم الشركة بإنتاج أعداد كسرية من السجاجيد يومياً ؟

(13) (أ) قم الآن باستخدام طريقة مضاعف Lagrange للإجابة على المسألة السابقة ؟

(ب) هل تحصل على نفس الإجابة مع عدم استخدام نفس الطريقة في الحل ؟

(ج) كم تساوي λ ؟ وما معنى ذلك ؟