الفصل الخامس

تقدير دوال الطلب

في سنة 1994 أشار السيد Sergio Zyman – مدير التسويق بشركة Coca-Cola ، وهي إحدى أكبر الشركات المعلنة في العـــالم – إلى أن شركته سوف تقلص من اهتمامها بالإعلانات في كل من التليفزيون والصحف والمجلات التقليدية ، في الوقت الذي سوف ترفع فيه حجم اهتمامـــها بالتقنيات التسويقية الحديثة كالبرامج الخاصة التي تبثها محطات التليفزيون قبيل إذاعة المباريات الرياضية الكبرى التي عادةً ما يتابعها الملايين . والجديـــر بالذكر أنه يتعين على كافة الشركات التي تداوم على إعادة تقييم استراتيجيات التسويق التي تنتهجها أن تقوم بمواءمة أو تعديل تلك الاستراتيجيات إذا تطلب الأمر ذلك . وكما سبق وأكدنا في الفصول السابقة ، فإنه يلزم للمدير الكفء أن يكون ذا إلمام جيد بدالة الطلب الخاصة بالسلع التي تنتجـــها شركته .

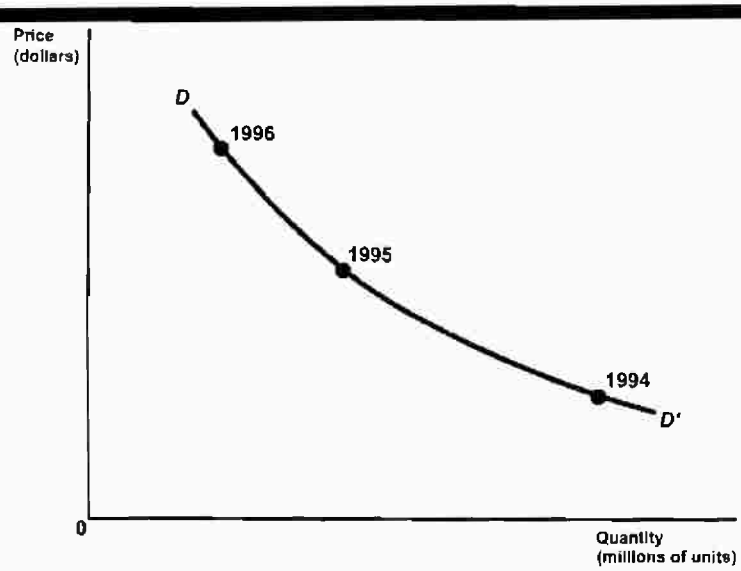
هذا وبعد أن عنيا الفصلان السابقان بنظرية الطلب سوف نتعرض في هذا الفصل لدراسة كيفية تقدير دالة الطلب على سلعة ما . ويمكـــن في هذا الصدد الاستفادة من كل من عمليات المسح التسويقي الخاصة بالمستهلكين وكذلك الخبرات التسويقية اللازمة للحصول على المعلومات الخاصـــة بدالة الطلب . إلا أن الأسلوب الأكثر إتباعاً لتقدير دالة الطلب هو ما يعرف بتحليل الانحدار . وسوف نتعرض مراراً وتكراراً لهذا النوع من التحليـــل في الفصول التالية لتقدير كل من دوال الإنتاج والتكلفة وعمليات التنبؤ مما يستوجب قدراً كبيراً من الاهتمام بهذه التقنية الإحصائية الجوهرية .

مشكلة التحديد (أو التمييز)

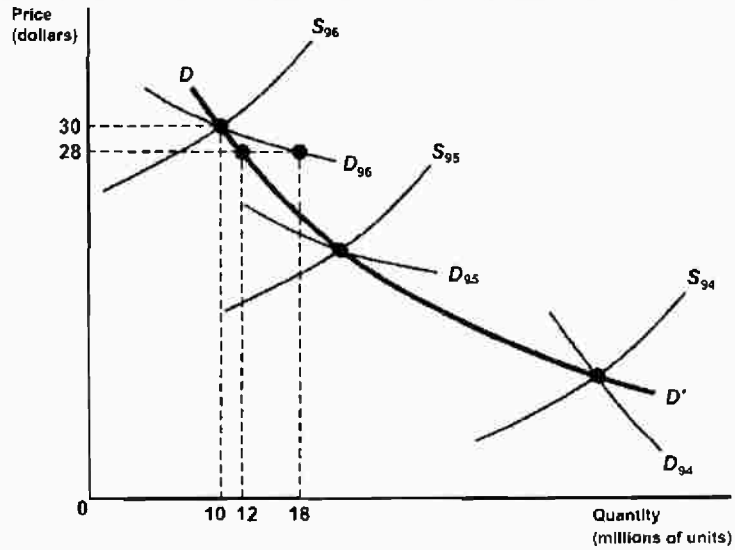
على الرغم من الأهمية القصوى التي يوليها المديرون للحصول على تقديرات دقيقة لدوال الطلب الخاصة بالسلع التي تنتجها شركاتهم أو بتلـــك الـــتي تنتجها الشركات الأخرى ، إلا أن هذا لا يعني أن يكون الحصول على مثل هذه التقديرات في متناول أيديهم دائماً . ومن المشكلات التي قد تواجـــهنا عند تقدير منحنيات الطلب على سلعة ما أن يتولد لدينا الميل إلى تحديد الكمية المطلوبة من السلعة في عام 1996 مقابل سعرها في نفس العام والكمية المطلوبة منها عام 1995 مقابل سعرها في نفس العام أيضاً وهكذا . فإذا كانت النقاط المعبرة بيانياً عن الفترة ما بين 1994 و 1996 هـــي علـــى النحو المبين في الشكل (5.1) ، فقد يتبادر إلى ذهنك استنتاجاً بأن منحنى الطلب هو DD' .

إلا أن الأمر ليس بهذه البساطة دائماً فقد رأينا في الفصل الأول أن كلاً من منحنى العرض ومنحنى الطلب هما اللذان يتحكمان في الأســـعار إذا ما كانت السوق ذات طبيعة تنافسية . وبعبارة أخرى فإن القيمة التوازنية للسعر لا تتحقق إلا عند المستوى الذي يتقاطع فيه منحنيا العرض والطلب . و الأمر الذي يـــترعي انتباهنا هو أن منحنى العرض والطلب لسلعة ما قد يتغيران من سنة إلى الأخرى . وكما يوضح الشكل (5.2) فإنه قد يطـــرأ تغير على منحنى العرض (حيث ينحرف من S_{94} في عام 1994 إلى S_{95} في عام 1995 ثم إلى S_{96} في عام 1996)كما قد يطرأ تغير على منحـــنى الطلب (حيث ينحرف من D_{94} في عام 1994 إلى D_{95} في عام 1995 ثم إلى D_{96} في عام 1996) وكما هو مبين في شكل (5.2) فـــلن DD' لا يرقى أن يكون ولو حتى – تقريبياً – منحنياً للطلب على تلك السلعة في أي من السنوات الثلاثة .

وطبقاً للموقف الموضح في الشكل (5.2) فإننا إذا ما استنتجنا أن DD' هو منحنى الطلب ، نكون قد أغفلنا أهمية مرونة الطلب السعرية لهذه السلعة . وقد تصور أن حدوث تخفيض في الأسعار خلال عام 1996 من 30 إلى 28 دولار سيؤدي إلى زيادة الكمية المطلوبـــة مـــن 10 إلى 12 مليون وحدة سنوياً ، إلا أن الشكل (5.2) يوضح أن هذا التخفيض في السعر سيؤدي إلى زيادة الكمية المطلوبة إلى 18 (وليس 12) مليون وحـــدة سنوياً . وعلى الرغم من جسامة هذا الخطأ في التقدير إلا أنه شائع ووارد الحدوث في كثير من الكتب .

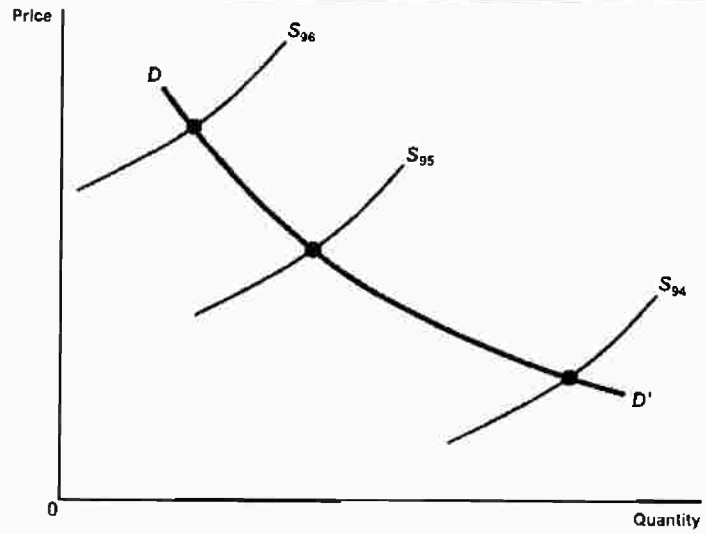


شكل (5.1) السعر مقابل الكمية في الفترة ما بين عامي 1994 و 1996 : مـن الواضـح أن DD' لا يعـبر تعبيراً جيداً عن منحنى الطلب .



شكل (5.2) منحنى الطلب المقدر مقارنة بمنحنيات الطلب الفعلية : لا يعبر DD' عن منحنيات الطلب الفعلية .

وتكمن المشكلة في عدم قدرتنا على التأكد من ثبات منحنى الطلب خلال الفترة التي جرت خلالها تلك القياسات وذلك لعدم افتراض ثبـات المتغيرات الأخرى خلاف السعر مثل ذوق المستهلك ودخله وأسعار السلع الأخرى وتكاليف الدعاية . وإذا كان منحنى الطلب ثابتاً واقتصر التغـير على منحنى العرض خلال تلك الفترة يكون من الممكن إثبات أن النقاط الموضحة في الشكل (5.1) هي تعبير صادق عن منحنى الطلب . وكما هـو مبين في الشكل (5.3) فإن التمدد أو الانكماش في منحنى العرض قد يؤدى إلى إبراز عدد من النقاط المختلفة على منحنى الطلب المراد قياسه .



شكل (5.3) منحنى الطلب الثابت ومنحنى العرض المتغير : في هذه الحالة الخاصة ، يُعبر DD' عن منحنى الطلب الفعلي .

كيف يمكننا تقدير منحنى الطلب على الرغم من عدم ثباته ؟ في واقع الأمر إنه توجد طرق عديدة تتفاوت في درجة بساطتها أو تعقيدها ، ولا تغفل تقنيات الاقتصاد القياسي حقيقة هامة وهي أن كل من السعر والكمية يرتبطان بمنحنى العرض والطلب ، وان هذين المنحنيين ينحرفان بالتفاعل مع المتغيرات الأخرى بخلاف السعر . وعلى الرغم من قيامنا بدراسة بعض أهم تقنيات الاقتصاد القياسي في هذا الفصل مثل تحليل الانحدار ، إلا أن هناك تقنيات أخرى بالغة التعقيد إلى الحد الذي يجعل دراستها في مثل هذا السياق من الأمور المتعذرة .[1] ومن الأساليب الأخرى التي يتم الاستعانة بها على نطاق واسع إجراء عدد من اللقاءات مع المستهلكين ، وكذلك الاستعانة بالخبرات التسويقية ، كما هو موضح تباعاً .

لقاءات مع المستهلكين

للحصول على المعلومات الخاصة بدالة الطلب على سلعة ما غالباً ما تقوم الشركات بإجراء لقاءات مع المستهلكين بحيث تطرح عليهم مجموعات من الأسئلة والاستفسارات تتعلق بعاداتهم الشرائية ودوافعهم ونواياهم ، فعلى سبيل المثال قد تقوم شركة ما بسؤال عينة عشوائية من المستهلكين عن حجم الزيادة في إقبالهم على استهلاك البنزين إذا ما انخفض سعره بنسبة 5% . أو قد يقوم أحد الباحثين في مجال السوق بسؤال عينة من المستهلكين عما إذا كانوا يفضلون نوع جديد من العطور عن غيره من الأنواع الكبرى الموجودة بالفعل وإذا كانت الإجابة بالإثبات فما هو المبلغ الذي يكونون على استعداد لدفعه لهذه السلعة أكثر مما يدفعونه للأنواع الموجودة بالفعل .

إلا أن عمليات المسح هذه قد تنطوي على العديد من مواطن الضعف المعروفة للجميع بافتقارها إلى الفعالية . فطرح الأسئلة على الناس بهذا الشكل المباشر عن مقدار ما هم مستعدون لشرائه من سلعة ما عند أسعار متباينة ، يأتي بإجابات قد تشوبها عدم الدقة مما يدفعنا إلى الاعتماد على طرق أخرى غير مباشرة كثيراً ما تؤتي نفعاً كبيراً . وقد أشارت اللقاءات التي أجريت مع المستهلكين إلى أن معظم المقبلين على شراء أحد أنواع الغذاء الخاصة بالأطفال مثلاً قد تأثروا في اختيارهم بتوصية الطبيب ، وأن معظمهم لم يكن لهم علم بأسعار الأنواع البديلة ؛ مما يرجح أن مرونة الطلب السعرية كانت منخفضة إلى حد بعيد .[2]

[1] راجع : J. Johnston, *Econometric Methods*, 3rd ed. (New York: McGraw-Hill, 1984); J. Kmenta. *Elements of Econometric*. 2d ed. (New York: Macmillan, 1986); or E. Berndt, *The Practice of Econometrics* (Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1991).

[2] J. Dean, "Estimating the Price Elasticity of Demand," in E. Mansfield, ed., *Managerial Economics and Operations Research*, 4th ed. (New York: Norton, 1980).

وعلى الرغم مما يشوب هذه الأساليب من قصور ، إلا أن عدداً لا بأس به من مديري الشركات على قناعة بأنها تكشف النقاب عن الأساليب التي يمكن أن تقوم الشركة من خلالها بالتعامل مع السوق بشكل أفضل . ومن أمثلة ذلك قيام الباحثين التابعين لشركة Campbell – وهي إحدى الشركات المنتجة للمرق سنة 1986 – باستفتاء قرابة 110,000 من المستهلكين لسؤالهم عن أمور متعلقة بالطعم ، وطريقة التجهيز ، والقيمة الغذائية للمنتج . وبناء على هذه الاستفتاءات ، تراءى للشركة أن تقوم بإجراء تغييرات في خمسة من أنواع التوابل المستخدمة في إعداد قوائم الطعام الذي تنتجه الشركة ، كما تم استحداث خط إنتاج جديد لإنتاج أنواع من المرق تحتوي على نسبة منخفضة من الملح – تعرف بالطلبات الخاصة . وأخيراً قد تتصف بعض إجابات المستهلكين بشيء من الغموض ، إذ قد أظهرت بعض نتائج الأبحاث التي تم إجراءها في هذا الخصوص أنه توجد ثمة مميزات لقيام بعض من يتم سؤالهم بالإجابة كتابة وليس شفاهة ، حيث أن الإجابة المكتوبة تمكنهم من الإجابة بصدق على الأسئلة المتعلقة بمشاعرهم أكثر مما هو الأمر في حالة الإجابة وجهاً لوجه .[3]

الخبرات التسويقية

ومن الطرق الأخرى المتبعة لتقدير منحنى الطلب لسلعة ما القيام بإجراء تجارب تسويقية مباشرة وتتمثل الفكرة في تغيير سعر السلعة مع محاولة الإبقاء على باقي عناصر السوق ثابتة بقدر الإمكان (أو وضع التغيرات التي قد تطرأ على عناصر السوق في الاعتبار على أقل تقدير) فمنذ عدة سنوات قام أحد منتجي الأحبار بإجراء إحدى التجارب للوقوف على مرونة الطلب السعرية لسلعته ، وذلك برفع السعر من 15 إلى 25 سنت في أربعة من المدن المختلفة ، وجاءت النتائج مبينة افتقار الطلب إلى المرونة .

وعندئذ أجريت محاولات أخرى لتقدير مرونة الطلب المضادة لأنواع أخرى من الأحبار . هذا وتأخذ بعض التجارب التي يتم إجراؤها أحياناً شكلاً أقرب ما يكون إلى التجارب المعملية ، حيث تقوم بإعطاء قدر من المال لعدد من المستهلكين ليقوموا بالتسوق في متاجر مصممة خصيصاً لتلك التجارب . ويتمتع القائم بالتجربة بإمكانية اختيار الأسعار والتوليفات بل وأماكن السلع المعروضة – كل بغرض الوقوف والتعرف على قرارات المستهلك الشرائية . وعلى الرغم مما لهذه الطريقة من نفع ، إلا أنها تغفل أمراً هاماً وهي أن المشاركين في مثل هذه التجارب يكونون على وعي بأن تصرفاتهم خاضعة للمتابعة والمراقبة مما يؤثر على سلوكياتهم الشرائية ، فتأتي مغايرة لما كان متوقعاً في ظل ظروف أكثر طبيعية .

وقبيل إجراء أي من التجارب التسويقية ينبغي مقارنة تكاليفها بالأرباح المتوقعة ، فأحياناً ما تكون التجارب المباشرة باهظة التكاليف كما قد تنطوي على كثير من المخاطر إما لانصراف العملاء أو لتقلص الأرباح فإذا زاد سعر سلعة ما نتيجة لإجراء إحدى التجارب التسويقية ، فقد يتسبب ذلك في تحول المستهلكين الأساسيين عن السلعة . هذا ويعد التحكم التام في مثل هذه التجارب أمراً نادراً وكثير ما تعجز هذه التجارب عن إمدادنا بما نحتاجه من معلومات نتيجة لقصر المدة التي تستغرقها مثل هذه التجارب أو لضآلة عدد الملاحظات المستقاة من خلالها . وعلى الرغم من ذلك ، فإنه لا مناص أمامنا من الاستعانة بهذه التجارب أحياناً لما لها من قيمة كبيرة ، كما هو واضح في الدراسة التطبيقية الواقعية التالية .

تجربة *L'Eggs*

تقوم شركة L'eggs وهي إحدى فروع مؤسسة Hanes بتسويق جوارب L'eggs للسيدات ، وهو أحد أهم أنواع الجوارب على مستوى الولايات المتحدة من حيث الشهرة والدعاية ، إلى الحد الذي يجعله متوفراً في منافذ بيع الطعام والدواء . وطبقاً لبعض التقديرات ، فقد حقق هذا النوع أكبر حجم للمبيعات ، متفوقاً في ذلك على باقي الأنواع المنافسة في هذه الصناعة . وفي سنة 1973 ، قام السيد Jack Ward مدير الإنتاج بالشركة بتوجيه اهتمامه إلى طرح أربعة بدائل محسنة هي :

(1) عبوة تحوي زوجين بتخفيض 40 سنتاً في السعر .
(2) عبوة تحوي زوجين بتخفيض 25 سنتاً في السعر .
3) تخفيض 20 سنتاً على كل زوج من هذه الجوارب .
(4) إرسال كوبونات إلى المنازل قيمة كل منها 25 سنتاً ، يتم تخفيضها من السعر الأصلي عند قيام المستهلك بشراء زوج واحد من هذه الجوارب .[4]

---

[3] *New York Times*, November 8, 1987, p. 4F. Also, see W. Baumol, "The Empirical Determination of Demand Relationships," in E. Mansfield, *Managerial Economics and Operations Research*, 5th ed.

[4] تعتمد المادة الواردة في هذا الجزء على : DeBruieker, Queleh, and Ward, *Cases in Consumer Behavior*, 2nd ed .

ولاختبار هذه البدائل الأربعة المحسنة قرر Jerry Clawson - مدير أبحاث التسويق بالشركة - أن يقوم بتطبيق كل منها على سبيل الاختبار في سوق مصممة خصيصاً ومنتقاة بعناية فائقة على أن تتم مقارنة النتائج بأحد الأسواق التي لم تشهد أي إجراءات غير عادية ، وتحديداً فقد جاءت التعديلات الأربعة على النحو التالي :

1) تخفيض قدرة 40 سنت على الزوجين في Syracuse بولاية New York .

2) تخفيض قدرة 25 سنت على الزوجين في Columbus بولاية Ohio .

3) تخفيض قدرة 20 سنت على الزوج الواحد في Denver .

4) إرسال كوبونات إلى المنازل في Cincinnati قيمة كل منها 25 سنت يتم تخفيضها عند شراء زوج واحد من هذه الجوارب .

وتلا ذلك إجراء مقارنة بين هذه النتائج وتلك التي حدثت في سوق Boise بولاية Idaho وهي السوق التي لم تشهد أي تعديلات خاصة .

وطبقاً لما صرح به فريق أبحاث المبيعات بالشركة ، فقد جاءت النتائج على النحو التالي : " *جاء النوع الأول - الذي شهد تخفيض قدره 40 سنت للزوجين - في مقدمة هذه الأنواع الأربعة من حيث الفاعلية حيث حقق زيادة تراكمية في المبيعات قدرها 53% على المدى القصير ، وظهرت آثار هذه الزيادة بعد مرور 6 أسابيع . وجاء النوع الثالث - الذي شهد تخفيض قدره 20 سنت للزوج - في المرتبة الثانية محققاً زيادة تراكمية في المبيعات قدرها 20% وظهرت آثار هذه الزيادة بعد مرور 8 أسابيع . أما النوع الأقل تأثراً فقد تمثل في الكوبونات - التي تم إرسالها إلى المنازل - والتي حققت زيادة تراكمية في المبيعات قدرها 3% فقط ، وظهرت آثارها بعد مرور 8 أسابيع .* " [5]

وبعد ذلك مثالاً لكيفية قيام الشركات بالحصول على المعلومات الخاصة بدوال الطلب في السوق . وفي هذه الحالة رأينا كيف عُنِيَ المديرون بالآثار المترتبة على كل من شكل وحجم التخفيض في الأسعار ، كما انهم لم يبالوا إلا بتخفيض مؤقت للأسعار . وهناك حالات أخرى تهتم فيها الشركات بالآثار المترتبة على التغيرات السعرية الطويلة الأمد أو بالتغيرات التي تطرأ على خصائص المنتج أو حتى أساليب الدعاية . وبغض النظر عن هذا وذاك فإن هذا النوع من أبحاث السوق يلعب دوراً هاماً في توفير البيانات الخاصة بتقدير دوال الطلب .

تحليل الانحدار

على الرغم مما تتميز به لقاءات المستهلكين والتجارب التسويقية المباشرة من أهمية كمصادر هامة للمعلومات الخاصة بدوال الطلب إلا أنها ليست شائعة الاستخدام بنفس درجة شيوع أساليب تحليل الانحدار . وبدايةً لنفرض أن دالة الطلب لإحدى الشركات هي على الشكل التالي :

$$Y = A + B_1X + B_2P + B_3I + B_4P_r \qquad (5.1)$$

حيث أن Y هي الكمية المطلوبة من السلعة التي تنتجها الشركة ، و X هي تكاليف البيع شاملة تكاليف الدعاية الخاصة بالشركة ، و P هي سعر السلعة ، و I هي دخل الفرد الممكن إنفاقه ، و P_r هي أسعار السلع المنافسة . وما نرغب في الحصول عليه يتمثل في إيجاد تقديرات كَمية لقيم كل من المعاملات : A و B_1 و B_2 و B_3 و B_4 . ويساعدنا تحليل الانحدار في التوصل إلى تلك القيم ، انطلاقاً من توافر البيانات المتعلقة بكل من Y و X و P و I و P_r .

وسنقوم في هذا الفصل بشرح تفصيلي لكل من طبيعة وطرق تطبيق تحليل الانحدار ، والذي يعد بمثابة إحدى التقنيات الإحصائية التي يمكن استخدامها في العديد من أشكال العلاقات الاقتصادية وليس فقط دوال الطلب . وسوف نبدأ بدراسة الحالات البسيطة حيث يكون العامل الوحيد المؤثر على الكمية المطلوبة هو تكاليف المبيعات الخاصة بالشركة . وبعد ذلك سننتقل إلى الحالات الأكثر تعقيداً (أو الأكثر واقعية) حيث تتأثر الكمية المطلوبة بأكثر من عامل كما هو واضح في المعادلة (5.1) .

ويشرح تحليل الانحدار الطريقة التي يرتبط بها متغير ما بمتغير آخر (وكما سنرى في جزء لاحق من هذا الفصل فإن تقنيات الانحدار قابلة لأن تتناول أكثر من متغيرين في وقت واحد ولكننا سنركز على الحالات التي يتم فيها التعامل مع متغيرين فقط) . يقوم تحليل الانحدار بصياغة معادلة يمكن استخدامها لتقدير قيمة غير معلومة لمتغير ما من خلال قيمة معلومة لمتغير آخر . فيفرض أن شركة Miller لصناعة الدواء تنوي إنفاق 4 مليون دولار في العام القادم في مجال تكاليف المبيعات (كالتطوير والدعاية والأنشطة الأخرى المتعلقة بالسوق) وأنها ترغب في تقدير حجم مبيعاتها للعام القادم بناء على البيانات الواردة في جدول (5.1) والخاصة بمبيعاتها وتكاليف البيع في السنوات التسع السابقة، في هذه الحالة لا تؤدي معرفتنا بتكاليف البيع

[5] تتم مناقشة صلاحية هذه النتائج في نفس المرجع السابق .

للشركة في العام القادم إلى التكهن بحجم المبيعات لنفس العام . وهنا تكمن أهمية تحليل الانحدار حيث أنه هو الأداة التي تفسر لنا ارتباط حجم المبيعات الخاصة بشركة ما بتكاليف البيع التي تتكبدها تلك الشركة .

جدول (5.1) المبيعات ونفقات البيع (أو التكلفة) لشركة Miller ، عينة لتسع سنوات .

تكلفة البيع (بملايين الدولارات)	المبيعات (بملايين الوحدات)
1	4
2	6
4	8
8	14
6	12
5	10
8	16
9	16
7	12

نموذج الانحدار البسيط

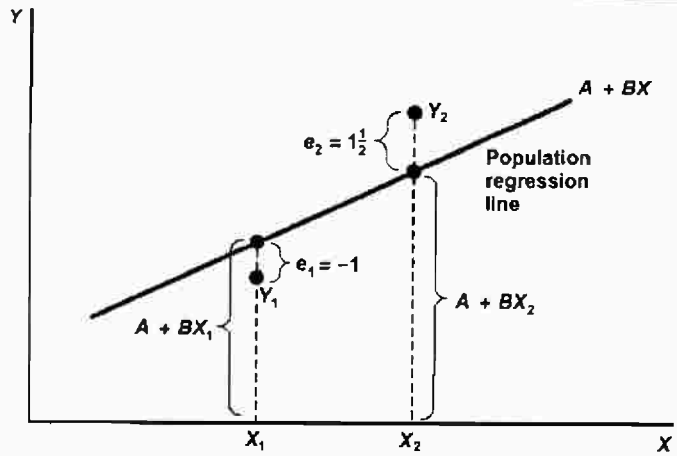
كما تذكر في الفصل الأول ، فإن النموذج هو عبارة عن تجسيد مثالي ومبسط للواقع . ونقوم في هذا الجزء بشرح تفصيلي للنموذج أو مجموعة الافتراضات المبسطة التي يقوم عليها تحليل الانحدار . وسوف نبدأ بإلقاء نظرة على مجموعة الملاحظات المتعلقة بعدد من المتغيرات التابعة والمستقلة . ففي حالة شركة Miller يمكننا التعرف على مجموعة من البيانات المتعلقة بكل من المبيعات وتكاليف البيع الخاصة بالشركة . وقد تتضمن هذه المجموعة علاقة بين مستوى المبيعات ومستوى التكاليف الذي يتوافق مع تاريخ الشركة .

وهذا ونلاحظ هنا أن الوسط الحسابي لمتغير ما يساوي مجموع قيمة مقسوماً على عددها . ومن ثم فإن متوسطاً لقيم أربعة 3 و 2 و 1 وصفر هو $(3 + 2 + 1 + 0) / 4 = 1.5$. ويفترض تحليل الانحدار أن متوسط قيمة Y هي دالة خطية لـ X إذا كانت قيمة Y معلومة أي بافتراض أن يكون متوسط قيمة المتغير التابع دالة خطية للمتغير المستقل ، وأن تكون المعادلة الخاصة بهذا الخط هي $A + BX$ ، كما هو موضح في الشكل (5.4) ويعرف هذا الخط المستقيم بخط الانحدار الكلي أو خط الانحدار الحقيقي .

$$Y_i = A + BX_i + e_i \qquad (5.2)$$

حيث Y_i هي قيم الواقع المسجلة للمتغير التابع ، X_i هي قيم الواقع المسجلة للمتغير المستقل . ومن الضروري ملاحظة أن e_i هو حد الخطأ ، بمعنى أنه مقدار عشوائي يتم إضافته إلى $A + BX_i$ (أو طرحه منها إذا كانت e_i سالبة) . وبسبب وجود حد الخطأ هذا ، فإن قيم Y_i تقع بالقرب من خط الانحدار الكلي وليس عليه . وكما هو مبين في الشكل (5.4) ، فإذا كانت e_1 (قيمة حد الخطأ للمشاهدات الأولى) تساوي 1.- ، فإن Y_1 تقع تحت خط الانحدار الكلي بمقدار 1 ، وإذا كانت e_2 (قيمة حد الخطأ للمشاهدات الثانية) تساوي 1.50 + ، فإن Y_2 تقع فوق خط الانحدار الكلي بمقدار 1.50 . ويفترض تحليل الانحدار أن قيم e_i هي قيم مستقلة وان قيمتها المتوسطة تساوي صفر .[6] على الرغم أنه يصعب تلبية كل الافتراضات التي ينطوي عليها تحليل الانحدار بشكل كامل ، إلا أنها كثيراً ما تقترب من الواقع بشكل يجعلها إحدى التقنيات ذات الكفاءة العالية . ومع ذلك فمن الضروري أن نبادر بالتأكيد على وجوب اقتراب كافة الافتراضات من الصحة والواقع خشية أن تصبح النتائج المترتبة على تحليل الانحدار مضللة .

[6] تكون قيمتا e_1 و e_2 متغيران مستقلان إذا كان احتمال التوزيع لـ e_1 لا يعتمد على قيمة e_2 وإذا كان احتمال التوزيع لـ e_2 لا يعتمد على قيمة e_1 . كما يفترض تحليل الانحدار أن نسبة التغير في قيم e_i يبقى ثابتاً بغض النظر عن قيمة X . هذا وتفترض كثير من الاختبارات التالي ذكرها أن قيم e_i هي من النوع الموزع بشكل طبيعي . ولمزيد من الدراسة الخاصة بالتوزيع الطبيعي راجع الملحق B .



شكل (5.4) نموذج الانحدار : تقع متوسط قيمة Y على خط الانحدار الكلي .

خط الانحدار التقديري (المُقدَّر)

إن الغرض من تحليل الانحدار هو الحصول على معادلة رياضية للخط الذي يصف متوسط العلاقة بين المتغير التابع و المتغير المستقل . ويتم حساب هذا الخط من خلال عينة المشاهدات التي تم الحصول عليها من الواقع الحي . هذا ولا ينبغي أن نخلط بينه وبين خط الانحدار الكلي الذي تمت مناقشته في الجزء السابق . فبينما يقوم خط الانحدار الكلي على المجموع الكلي للمشاهدات ، يقوم خط الانحدار المقدر على متوسط هذه المشاهدات . والذي يعبر عنه رياضياً :

$$\hat{Y} = a + bX$$

حيث $\hat{Y}$ هي قيمة المتغير التابع الذي يتنبأ به خط الانحدار ، a و b هما التقييم الحسابي لـ A و B . (كما يمكن تعريفها كدالة لعينة المشاهدات التي يتم استخدامها لتقدير القيمة الحسابية للمعامل .) فعلى سبيل المثال ، فإن الوسط الحسابي لعينة من المشاهدات كثيراً ما تستخدم كتقدير حسابي لحجم المشاهدات الكلية . ولما كانت هذه المعادلة تنطوي على أن :

$$\hat{Y} = a$$

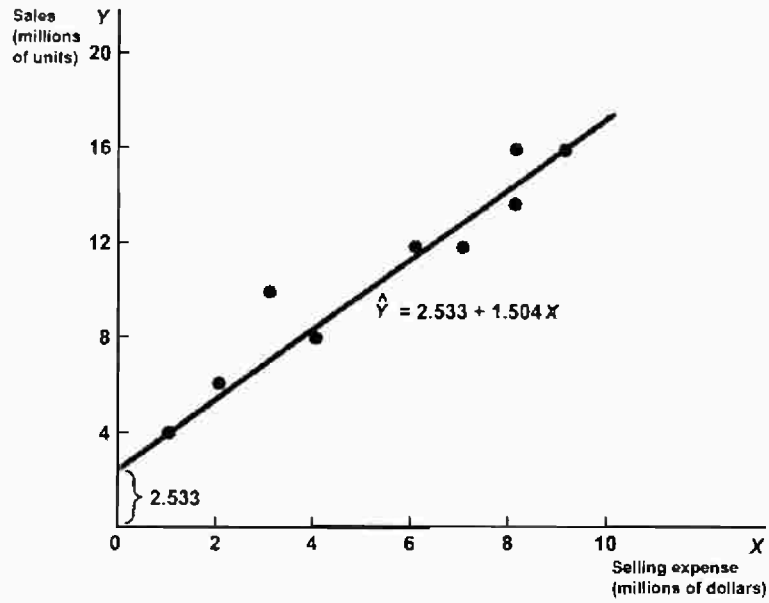
عند $X = 0$ ، لذا فإنه من الطبيعي أن تكون a هي قيمة $\hat{Y}$ وهي النقطة التي يتقاطع فيها خط الانحدار مع المحور Y . ولذا فغالباً ما نشير إلى a بأنها الجزء المقطوع من Y أو من خط الانحدار . أما b فهي ميل الخط التي تقيس مقدار التغير في القيم المتوقعة لـ Y نتيجة زيادة X بمقدار وحدة واحدة . هذا ويوضح شكل (5.5) خط الانحدار المقدر ، أما البيانات الخاصة بالمبيعات وتكاليف البيع في شركة Miller ، فيعبر عنها بمعادلة الانحدار الآتية :

$$\hat{Y} = 2.533 + 1.504X$$

حيث $\hat{Y}$ هي المبيعات بملايين الوحدات ، و X هي تكاليف البيع بملايين الدولارات . وإذا كان الأمر كذلك ، فإلى ماذا يشير الرقم 2.533 ؟ إنها قيمة a أو التقييم الحسابي لـ A . وإلى ماذا يشير الرقم 1.504 ؟ إنها قيمة b أو التقييم الحسابي لـ B . وليس من الضروري الآن معرفة كيفية صياغة هذه المعادلة على هذا النحو . لأن ما يهمنا في الوقت الحالي هو التعرف على كيفية تفسيرها . وفي بداية الأمر ، ينبغي أن نلاحظ وجود فرق بين Y و $\hat{Y}$. فبينما Y تشير إلى قيمة المبيعات الفعلية التي تمت ملاحظتها وتسجيلها ، فإن $\hat{Y}$ تشير إلى قيمة المبيعات المقدرة على خط الانحدار . فعلى سبيل المثال يوضح العمود الأول من الجدول (5.1) القيمة الفعلية للمبيعات في العام الأول وهي 4 مليون وحدة حيث كانت تكاليف البيع 1 مليون دولار . ومن ثم فإن $Y = 4$ مليون وحدة ، عندما تكون $X = 1$. ولكننا نجد عند التطبيق والتعويض في معادلة خط الانحدار :

$$\hat{Y} = 2.533 + 1.504(1)$$

أي $Y = 4.037$ مليون وحدة عندما $X = 1$. أي بينما ينبئنا خط الانحدار بأن المبيعات تساوي 4.037 مليون وحدة عندما تكون تكاليف البيع 1 مليون دولار ، فإن المبيعات الفعلية (في السنة الأولى) كانت 4 مليون وحدة فقط - أي باكتشاف خطأ قدره 0.037 .



شكل (5.5) خط الانحدار المقدر : يعد هذا الخط تقديراً لخط الانحدار الكلي .

هذا ومن الضروري أن تكون لدينا القدرة على تحديد وفهم وتفسير تقاطع Y مع خط الانحدار وميله . ما هو تقاطع $\hat{Y}$ لخط الانحدار في حالة شركة Miller ؟ الإجابة 2.533 مليون وحدة . وهذا يعني أنه إذا كانت تكاليف البيع في الشركة تساوي صفر ، فإن 2.533 مليون وحدة هي قيمة المتغير التابع الذي يتقاطع عنده خط الانحدار مع المحور الرأسي . [كما هو موضح في الشكل (5.5) .] وبنفس الأسلوب ، ما هو ميل خط الانحدار في هذه الحالة ؟ الإجابة هي 1.504 مما يعني أن المبيعات المقدرة سترتفع بمقدار 1.504 مليون وحدة عندما تزيد تكاليف البيع بمقدار 1 مليون دولار .

طريقة المربعات الصغرى

يعرف الأسلوب المستخدم في تحديد قيم كل من b ، a بأسلوب المربعات الصغرى . ونظراً لأن الانحرافات في قيمة كل مشاهدة من مشاهدات الواقع لـ Y على خط الانحدار تساوي $Y_i - \hat{Y}_i$ ، فيكون مجموع مربع هذه الانحرافات يساوي :

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(Y_i - a - bX_i)^2 \qquad (5.3)$$

حيث n هي حجم العينة المراد تحليلها . [7] وباستخدام التقنية الوارد شرحها في الفصل الثاني ، يمكننا الحصول على قيم a ، b التي تؤدي إلى تقليل قيمة الصياغة الواردة في المعادلة (5.3) . فبمفاضلتها بالنسبة لكل من b ، a وبجعل هذه المشتقات الجزئية مساوية للصفر ، فإن :

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(Y_i - a - bX_i) = 0 \qquad (5.4)$$

---

[7] سبق وأن أشرنا في الفصل الأول ، إلى أن Σ هي إشارة التجميع الرياضي . فماذا تعني ΣX_i ؟ إنها تعني أنه ينبغي تجميع الأرقام الواردة إلى اليمين من إشارة التجميع (ألا وهي قيم X_i) من النهاية المنخفضة عند i (وهي المعطاة أسفل الرمز Σ) إلى النهاية العليا عند i (وهي المعطاة فوق الرمز Σ) وهكذا فإن :

$$\sum_{i=1}^{n} X_i$$

وهو يعني نفس الشيء فيكون : $X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_n$.

$$\frac{\partial \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n} X_i(Y_i - a - bX_i) = 0 \qquad (5.5)$$

وبحل المعادلتين الآنيتين (5.4) و (5.5) . وجعل $\overline{X}$ تساوي متوسط قيمة X في العينة ، و $\overline{Y}$ تساوي متوسط قيمة Y ، فإننا نجد أن :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} \qquad (5.6)$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{X} \qquad (5.7)$$

وغالباً ما تعرف قيمة b في المعادلة (5.6) بمعامل الانحدار المقدر . ومن وجهة النظر الحسابية فإنه غالباً ما يكون من الأيسر استخدام صيغة لـ b قد تختلف بعض الشيء عن تلك الواردة في المعادلة (5.6) . وهذه الصيغة البديلة التي تعطي نفس النتيجة ، والموضحة في المعادلة (5.6) ، هي :

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_iY_i - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2}$$

جدول (5.2) حسابات كل من : ΣX_i , ΣY_i , ΣX_i^2 , ΣY_i^2 , ΣX_iY_i .

	X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	X_iY_i
	1	4	1	16	4
	2	6	4	36	12
	4	8	16	64	32
	8	14	64	196	112
	6	12	36	144	72
	5	10	25	100	50
	8	16	64	256	128
	9	16	81	256	144
	7	12	49	144	84
المجموع	50	98	340	1,212	638

$$\overline{X} = \frac{50}{9} = 5.556$$

$$\overline{Y} = \frac{98}{9} = 10.889$$

وفي حالة شركة Miller فإن الجدول (5.2) يوضح حسابات كل من ΣX_iY_i و ΣX_i^2 و ΣX_i و ΣY_i . وبالتعويض المباشر ينتج أن :

$$b = \frac{9(638) - (50)(98)}{9(340) - 50^2} = 1.504$$

ومن ثم فإن قيمة b ، أو التقييم الحسابي لـ B ، هي 1.504 وهي نفس النتيجة في الجزء السابق . أي أن الزيادة في تكاليف البيع بمقدار 1 مليون دولار تعني زيادة في مقدار المبيعات بنحو 1.504 مليون وحدة .

وبعد قيامنا بحساب b ، يكون من اليسير علينا تقدير قيمة a ، وهي التقييم الحسابي لـ A ، وطبقاً للمعادلة (5.7) ، فإن :

$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

حيث $\overline{Y}$ هي متوسط قيم Y ، و $\overline{X}$ هي متوسط قيم X . وكما هو موضح في الجدول (5.2) ، فإن $\overline{Y} = 10.889$ ، $\overline{X} = 5.556$ لذا فإن :

$$a = 10.889 - 1.504(5.556)$$
$$= 2.533$$

وعليه ، تكون قيمة المربعات الصغرى لـ A هي 2.533 مليون وحدة ، وهي نفس النتيجة الواردة في الجزء السابق .

وبعد الحصول على قيمتي a و b ، يكون من السهل تحديد متوسط العلاقة بين المبيعات وتكاليف البيع لشركة Miller . وتكون العلاقة على النحو التالي :

$$\hat{Y} = 2.533 + 1.504X \qquad (5.8)$$

حيث يتم قياس $\hat{Y}$ بملايين الوحدات ، X بملايين الدولارات . وكما ذكرنا ، فإن هذا الخط يعرف بخط الانحدار أو بخط انحدار Y على X . وهو الخط الذي عرَّفناه في الجزء السابق والمرسوم في شكل (5.5) . هذا وبعد أن توصلنا إلى كيفية اشتقاق هذا الخط وبناءه رياضياً ، علينا أن نتعرف على إمكانيات الحاسب الآلي كي يتمكن بمفرده من إجراء تلك الحسابات .

ولإيضاح كيفية استخدام مثل هذا النوع من خطوط الانحدار ، نفرض أن إدارة شركة ما تريد التنبؤ بمبيعات الشركة إذا تم تخصيص 4 مليون دولار لتكاليف البيع . وبتطبيق المعادلة (5.8) يتوقع أن تكون المبيعات على النحو التالي :

$$2.533 + 1.504(4) = 8.549 \qquad (5.9)$$

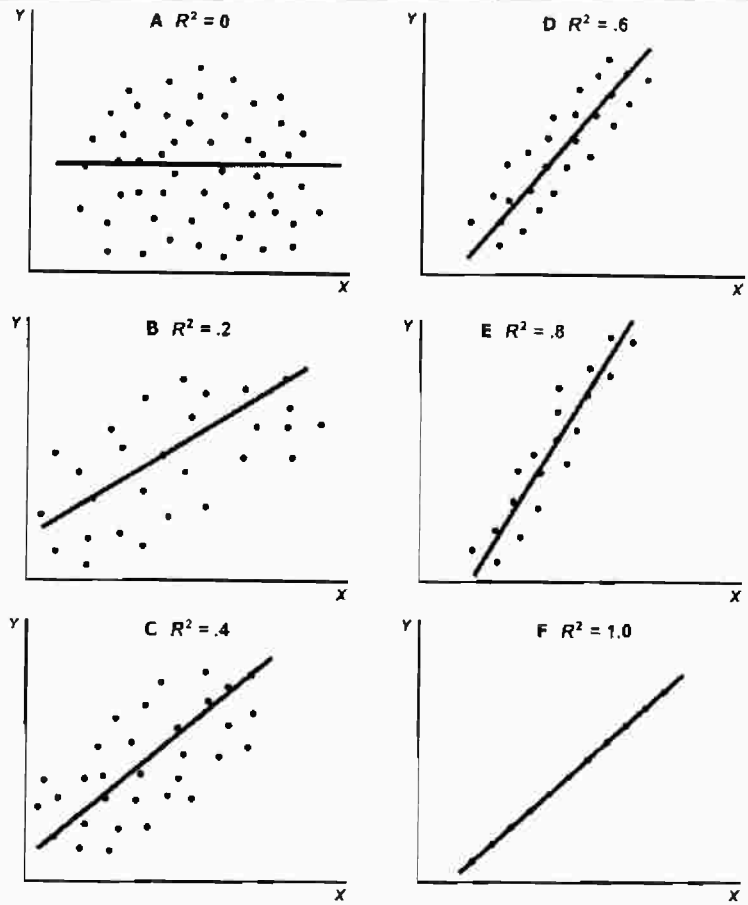
وبما أن المبيعات تقاس بملايين الوحدات ، فمن المتوقع أن يصل حجم المبيعات إلى 8.549 مليون وحدة .

التقدير الكمي لمعامل تحديد الجودة (R^2)

بعد أن انتهينا من حساب خط الانحدار ، فإننا نبحث الآن عن مدى جودة هذا الخط وملائمته شكلاً وتعبيراً عن كم البيانات الذي يحتويه . وكما يتضح من الشكل (5.6) فقد تكون هناك اختلافات كبيرة في درجة ملائمة خط الانحدار لمجموعة البيانات . فمن الواضح أن خط الانحدار في الشكل F بالشكل (5.6) يعد أكثر ملائمة من خط الانحدار الوارد في الرسم B في نفس الشكل . فكيف يمكننا قياس مدى ملائمة خط الانحدار للبيانات ؟

من الجدير بالذكر أن أشهر القياسات المستخدمة لتقدير مدى ملائمة خط الانحدار للمعلومات المستخدمة هو ما يعرف بمعامل تحديد الجودة . ومن غير الضروري معرفة طريقة حساب هذا المعامل وكيفية اشتقاقه ، حيث أنه نادراً ما يتم حسابه بالطرق العادية . بل أنه أحد البنود التي يشار إليها بـ R^2 على مطبوعات الحاسب الآلي كما سنرى فيما بعد .

وتتراوح قيمة هذا المعامل ما بين صفر و 1 . وكلما اقتربت القيمة من 1 زادت درجة الملائمة ، وكلما اقتربت من صفر كلما قلت الملائمة . وفي حالة شركة Miller فإن معامل تحديد الجودة بين المبيعات وتكاليف البيع هو 0.97 ، وهو يدل على وجود درجة عالية من الملائمة . ولفهم ما قد تعنيه قيمة معينة لهذا المعامل ، علينا بإلقاء نظرة على الرسوم الست الواردة في الشكل (5.6) .



شكل (5.6) ستة خطوط مختلفة للانحدار : معامل تحديد الجودة عند قيم مختلفة * : 0 ، 0.2 ، 0.4 ، 0.6 ، 0.8 ، 1.0 .

* في الحالات التي لا يوجد فيها إلا متغير مستقل واحد عادة ما يشار إلى معامل تحديد الجودة بـ r^2 بدلاً من R^2 . إلا أن مطبوعات الكمبيوتر تستخدم R^2 دائماً بغض النظر عن عدد المتغيرات المستقلة . ونحن نستخدم R^2 هاهنا على الرغم من وجود متغير مستقل واحد . راجع الملاحظة 8 .

الرسم A : إذا كان معامل تحديد الجودة R^2 يساوي صفر ، لا تكون هناك علاقة على الإطلاق بين المتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة .

الرسم B : إذا كان المعامل يساوي 0.2 كانت هناك ملائمة ضئيلة للغاية بين خط الانحدار والبيانات .

الرسم C : إذا كان المعامل يساوي 0.4 تصبح الملائمة بين خط الانحدار والبيانات أفضل نوعاً ما ولكنها ليست كاملة .

الرسم D : إذا كان المعامل يساوي 0.6 تكون الملائمة جيدة إلى حد كبير .

الرسم E : إذا كان المعامل يساوي 0.8 تكون الملائمة أكثر جودة .

الرسم F : إذا كان المعامل يساوي 1 تكون الملائمة مثالية .[8] (وسوف نورد شرحاً تفصيلياً لمعامل تحديد الجودة في ملحق هذا الفصل .)

[8] عند القيام بإجراء هذه الحسابات دون الاستعانة بالكمبيوتر ، فإنه بالإمكان الاستعانة بهذه المعادلة الخاصة لاشتقاق معامل الارتباط الخطي r وهي :

$$r^2 = \frac{\left[n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)\right]^2}{\left[n\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2\right]\left[n\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right)^2\right]}$$

ويشتمل الجدول (5.2) على المقادير الواجب إدراجها في هذه المعادلة .

لاحظ أن الجذر التربيعي لـ r^2 ، وهو المشار إليه بمعامل الارتباط ، يستخدم كذلك لقياس مدى ملائمة معادلة الانحدار البسيط مع البيانات المتوفرة . (علماً بأن رمز الجذر التربيعي هو نفس الرمز الخاص بـ b .)

الاستفادة التطبيقية بمعامل تحديد الجودة في صناعة الدراجات البخارية اليابانية

طلبت شركة Harley-Davidson في أواخر عام 1982 من المفوضية الدولية للتجارة – وهي الوكالة الفيدرالية المعنية بتقصي الحقائق الخاصة بما قد يلحق ببعض الشركات والعمال من أضرار جسيمة بسبب الواردات – أن تقدم لها العون لمواجهة الواردات من الدراجات البخارية اليابانية والتي زعمت الشركة أن اليابانيين يطرحونها في الأسواق اليابانية بأسعار منخفضة إلى الحد الذي لا تتمكن معه شركة Harley-Davidson من مواجهتها . والجدير بالذكر أن المادة 201 من القانون التجاري لعام 1974 تخول للمفوضية الدولية للتجارة سلطة فرض تعريفات جمركية أو رسوم خاصة على بعض السلع المستوردة ، " بغرض منح الصناعات المحلية المتضررة مهلة من الوقت ريثما تصبح قادرة على العودة إلى مضمار المنافسة " . وللحصول على هذه الميزة يتعين على القائمين على الصناعة المتضررة إعطاء الدلائل الكافية على أن ما لحق بهم من ضرر إنما هو راجع إلى زيادة الواردات ، وليس إلى سبب آخر كسوء الإدارة أو الكساد .

ورداً على ذلك صرحت كبرى الشركات اليابانية المصنعة للدراجات البخارية مثل Honda و Kawasaki و Suzuki و Yamaha . بأن الواردات من الدراجات البخارية اليابانية بريئة مما حاق بشركة Harley-Davidson من انخفاض حاد في حصتها بالسوق ، وأكدت تلك الشركات على أن السبب الحقيقي يرجع إلى الظروف الاقتصادية العامة ولاسيما الكساد الذي شهدته السنوات الأولى من الثمانينيات . كما أشارت الشركات اليابانية إلى أن مثل هذا النوع من الدرجات البخارية – والذي تصل تكلفة إحداها إلى نحو 7,000 دولار – تعد " إحدى السلع الاستهلاكية التي لا يقدر على شرائها إلا المرفهون " ، وأنه من المنتظر دائماً أن تتعرض مثل هذه السلع لحدوث انخفاض حاد في مبيعاتها في أوقات الكساد .

ومساندة لهذا الرأي قام كبير الاستشاريين الاقتصاديين للشركات اليابانية (وهو السيد John Reilly من مؤسسة ICF) بعرض أحد عمليات حساب تحليل الانحدار ، والتي جاءت على النحو التالي :

- مبيعات شركة Harley-Davidson هي المتغير التابع .
- مستوى عمالة ذوي الياقات الزرقاء – وهو أحد مقاييس الظروف الاقتصادية العامة – هو المتغير المستقل .
- R^2 تساوي 0.73 .

ثم قام السيد Reilly بعرض تحليل انحدار آخر على النحو التالي :

- مبيعات شركة Harley-Davidson هي المتغير التابع .
- مستوى مبيعات الدراجات البخارية اليابانية هو المتغير المستقل .
- R^2 لا تتجاوز 0.22 .

وبمقارنة هذين التحليلين ومعاملي تحديد الجودة الواردين فيهما ، استنتج السيد Reilly أن مبيعات شركة Harley-Davidson قد تأثرت بالظروف الاقتصادية العامة أكثر مما تأثرت بمبيعات الدراجات البخارية اليابانية .

وما من شك في أن مثل هذا التحليل لا يطلعنا على الآثار المترتبة على مبيعات وأرباح شركة Harley-Davidson من جراء أسعار الدراجات البخارية اليابانية . هذا وقد نوهت مجموعة من وجهات النظر إلى أن المطلوب هو إيجاد تقدير لدالة طلب السوق على دراجات Harley-Davidson ، وهو التحليل الذي ينبغي أن يربط بين مبيعات Harley-Davidson من ناحية وبأسعار دراجاتها البخارية – وأسعار الدراجات البخارية اليابانية – ومستوى الدخل الممكن إنفاقه ، وغير ذلك من المتغيرات الواردة في الفصل الثالث من ناحية أخرى . ومهما يكن من أمر ، وعلى الرغم مما ساقته الشركات اليابانية من حجج وأدلة ، إلا أنها لم تحظى بتأييد المفوضية الفيدرالية للتجارة . وعلى العكس من ذلك ، أعطت المفوضية

وكما هو موضح في الملاحظة (*) التابعة للشكل (5.6) فإنه عادة ما تشير مطبوعات الكمبيوتر إلى معامل تحديد الجودة بالرمز R^2 . وذلك على الرغم من أن علماء الإحصاء عادة ما يشيرون إليه بالرمز r^2 عندما لا يكون هناك أكثر من متغير مستقل واحد .

مساندتها الكاملة للالتماس الذي تقدمت به شركة Harley-Davidson ، وقد تبلورت هذه المساندة في الأول من إبريل 1983 في قرار الرئيس الأمريكي Ronald Reagan بفرض تعريفة جمركية ضخمة (تقترب من 50%) على الواردات اليابانية من الدراجات البخارية .*

* "Revving Up for Relief: Harley-Davidson at the ITC," a case in the study guide accompanying this textbook.
ولمزيد من الدراسة أنظر : J. Gomez-Ibanez and J. Kalt, *Cases in Microeconomics* (Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1990); *Well Made in America*

الانحدار المتعدد

قمنا في الأجزاء السابقة من هذا الفصل بمناقشة تقنية الانحدار في الحالات التي لم يكن فيها سوى متغير مستقل واحد . إلا أن التطبيقات العملية لتحليل الانحدار غالباً ما تستلزم إدراج عاملين مستقلين آخرين أو أكثر ، والآن سنقوم بتوسيع نطاق المناقشة إلى الحالات التي تحتمل وجود أكثر من مستقل واحد . بينما يشتمل الانحدار البسيط على عامل واحد مستقل يشتمل الانحدار المتعدد على عاملين مستقلين أو أكثر . وعادةً ما يتم تنفيذ عمليات الانحدار المتعدد بواسطة الحاسب الآلي من خلال الاستعانة بالبرامج الإحصائية مثل Minitab أو SAS أو SPSS ؛ ولذلك فلا يوجد أي داعي لقيامنا بتعلم كيفية عمل ذلك بأنفسنا . وتعتبر الخطوة الأولى في تحليل الانحدار المتعدد هي التعرف على المتغيرات المستقلة وتحديد الشكل الرياضي للمعادلة لإيجاد العلاقة بين متوسط قيمة المتغير التابع والمتغيرات المستقلة .

ونعاود الحديث عن شركة Miller لصناعة الدواء ، حيث نفترض أن المديرين التنفيذيين للشركة يشعرون بأن حجم المبيعات يتوقف على مستوى الأسعار وتكاليف البيع . وبشكل محدد فإنهم يفترضون أن :

$$Y_i = A + B_1 X_i + B_2 P_i + e_i \qquad (5.10)$$

حيث X_i هي تكاليف البيع بملايين الدولارات خلال عام ، و P_i هي سعر السلعة التي تنتجها الشركة بالدولار خلال كل عام ith (مقاسة بمقدار الانحراف عن السعر الحالي وهو 10 دولار) . ويفترض بالطبع أن تكون B_2 سالبة وهو النموذج الذي يختلف عن النموذج الوارد في المعادلة (5.2). حيث يفترض أن Y (وهي مبيعات الشركة خلال العام) تعتمد على عاملين مستقلين وليس عامل واحد . وبالطبع لا يوجد مانع من وجود أكثر من متغير مستقل طالما توفرت البيانات المتعلقة بقيم هذه المتغيرات ، وطالما أنه توجد دلائل تجعلنا متوقعين أن يكون لها تأثير على Y_i . وعلى سبيل التبسيط ، نفترض أن المديرين التنفيذيين للشركة يعتقدون أنه لا يصح إدراج سوى تكاليف البيع والأسعار كمتغيرين مستقلين .[9]

والهدف من تحليل الانحدار المتعدد هو تقدير القيم الثابتة غير المعروفة (A و B_1 و B_2) في المعادلة (5.10) . وكما هو الحال في عملية الانحدار البسيط فإنه يتم تقدير هذه الثوابت بتربيع مجموع انحرافات القيم المرصودة للمتغير التابع عن القيمة المتوقعة لنفس المتغير الواردة في معادلة الانحدار . وبفرض أن a هو التقييم الحسابي لـ A ، و b_1 هو التقييم الحسابي لـ B_1 ، و b_2 هو التقييم الحسابي لـ B_2 . إذن فإن القيمة المتوقعة للمتغير التابع Y في معادلة الانحدار هي :

$$\hat{Y}_i = a - b_1 X_i + b_2 P_i$$

ويكون انحراف القيمة المتوقعة عن القيمة الفعلية للمتغير التابع هو :

$$Y_i - \hat{Y}_i = Y_i - a - b_1 X_i + b_2 P_i$$

وعليه ، فإذا قمنا بتربيع هذه الانحرافات وجمعها إلى بعضها البعض كانت النتيجة :

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - a - b_1 X_i + b_2 P\right)^2 \qquad (5.11)$$

حيث n هي عدد المشاهدات المرصودة في عينة البحث . وكما سبق وأشرنا فإن قيم a ، b_1 ، b_2 تؤدي إلى تقليص الصياغة الواردة في المعادلة (5.11) كما هو الحال في التحليل الانحداري البسيط .

[9] وكما هو الحال في عملية الانحدار البسيط ، فإنه يفترض أن يكون متوسط قيمة e_i هو الصفر وإن تكون قيم e_i مستقلة إحصائياً . (راجع الملاحظة 6)

هذا ومن السهل الحصول على برامج الكمبيوتر والاستعانة بها لتقدير القيمة الحسابية للمعاملات . وبناءً على البيانات الـــواردة في الجـــدول (5.3) فإن نتائج الكمبيوتر توضح أن : $b_1 = 1.76$ و $b_2 = -0.35$ و $a = 2.53$. وعليه ، تكون معادلة الانحدار هي :

$$Y_i = 2.53 + 1.76\,X_i - 0.35\,P_i \qquad (5.12)$$

علماً بأن القيمة المتوقعة لـــ B_1 هي 1.76 ، وذلك على العكس من تقديرنا السابق لـــ B وهو 1.50 . بمعنى أن كل زيادة في تكلفة المبيعات بمقدار 1 مليون دولار تؤدي إلى زيادة في حجم المبيعات بنحو 1.76 مليون وحدة ، وذلك على عكس 1.50 مليون وحدة في عملية الانحدار البســـيط في المعادلة (5.8) . ويرجع السبب في اختلاف هذه التقديرات إلى أن التقديرات الحالية لأثر تكلفة البيع على حجم المبيعات تفترض ثبات السعر ، بينمـــا لا يوجد هذا الافتراض في التقديرات السابقة . ولما كان عامل السعر ذا أثر كبير على حجم المبيعات ، فإنه من المحتمل أن تتسم التقديرات الســـابقة بعدم الدقة – أو إحصائياً بالتحيز – من حيث تقديرها لأثر تكلفة البيع على حجم المبيعات .[10]

جدول (5.3) المبيعات وتكاليف البيع والسعر لشركة Miller ، عينة لتسع سنوات

تكلفة البيع (بملايين الدولارات)	المبيعات (بملايين الدولارات)	السعر (أقل من 10 دولار)
2	6	0
1	4	1
8	16	2
5	10	3
6	12	4
4	8	5
7	12	6
9	16	7
8	14	8

الركن الاستشاري

حصة السوق الخاصة

بأحد المولدات الكهربائية الجديدة وسعره *

قامت إحدى الشركات الكبرى لتصنيع السلع الكهربائية باستحداث نوع جديد من المولدات الكهربائية . وعقب الانتهاء من التصميـــم الهندســـي للمنتج شرع مديرو الشركة في وضع خطط طويلة الأمد لتسويق هذا المنتج . ومن خلال عمليات المسح الميداني وتحليل المعلومات المتوفرة قررت لجنـة البحوث التابعة للشركة أن حجم المبيعات السنوية من هذا النوع من المولدات سوف يبلغ 10,000 وحدة سنوياً . كما اتضح أن حصة الشـــركة في سوق هذه السلعة سوف تتوقف على السعر الذي سوف تحدده الشركة . وهنا صرح قسم بحوث التسويق التابع للشركة بأن العلاقة بـــين الســـعر وحصة السوق سوف تكون على النحو التالي :

---

[10] في واقع الأمر ، أنه لا يفترض أن يكون هذا الانحدار ملائما إلا عندما تكون X_i و P_i قابلة للتغير في إطار محدد . فإذا كانت P_i كبيرة و X_i صغـــيرة ، أمكن للانحدار أن يتنبأ بأن قيمة المبيعات سالبة ، وهو ما لا يجب السماح به . وطالما أنه لا يتم استخدام الانحدار للتنبؤ بقيم X_i و P_i خارج نطـــاق المعلومات الواردة بالجدول (5.3) ، لذا فإن هذا لا يمثل أي مشكلة . ونحن نفترض في المعادلة (5.10) – على سبيل التبسيط – أنه يمكن النظر إلـــى أثر السعر على قيمة المبيعات (مع ثبات تكلفة البيع) باعتباره خطياً في المدى المحيط به . ومن ناحية أخرى ، يمكننا افتراض أنه رباعيـــاً ، أو أنـــه يمكن استخدام دالة طلب المرونة الثابتة والتي تم مناقشتها في الفصل الثالث .

السعر	حصة السوق
$ 800	11.0
900	10.2
1,000	9.2
1,100	8.4
1,200	7.5
1,300	6.6
1,400	5.6

وقد وجد مديرو الشركة أنفسهم في حاجة ماسة إلى إسداء المشورة الخاصة بسعر المنتج الجديد ، وقد تبلورت حاجتهم في هـذا الصـدد إلى الرغبة في التوصل لمعادلة بسيطة تعبر عن الكمية المطلوبة من المنتج الجديد سنوياً كدالة لسعر هذا المنتج . كما كان المديرون أيضاً في حاجـة إلى أي معلومات تتعلق بمدى قدرتهم على الثقة في مثل هذه المعادلة ، من حيث مصداقيتها في تقدير الكمية المطلوبة من السلعة إذا ما بلغ السـعر مـا بـين 1,500 – 1,600 دولار .

قم بإعداد تقرير مختصر يعرض المعلومات المطلوبة (مع ملاحظة أن الأرقام الخاصة بحصة السوق في الجدول تعبر عن نسب مئوية . أي أنـه إذا كان سعر السلعة هو 800 دولار ، فسوف تكون حصة الشركة في سوق هذه المولدات هي 11.0% . وذلك طبقاً لتقديرات قسم البحوث التـابع للشركة .)

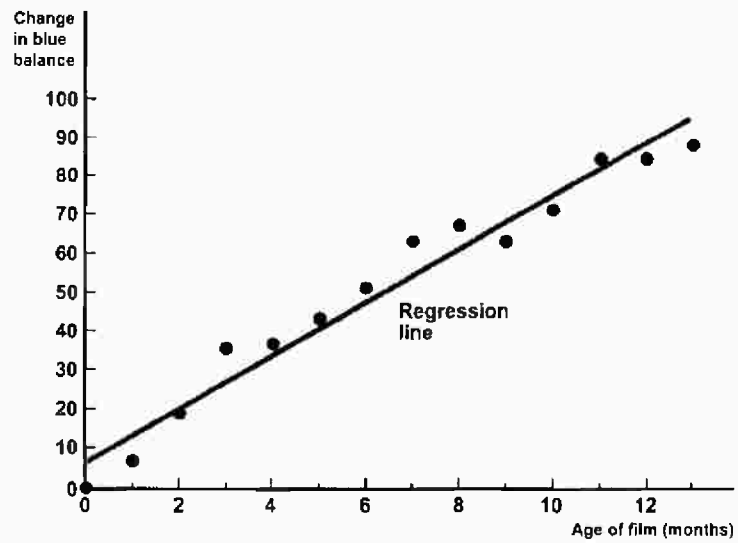
* يعتمد هذا الجزء على دراسة تطبيقية حقيقية . ومع ذلك تم إجراء تغيرات محدودة في الأرقام والمواقف .

مفاهيم وثيقة الصلة

كفاءة وأداء أفلام Polaroid

من حيث اتزان الألوان ومدى الصلاحية

لا تقتصر أهمية تحليل الانحدار على عملية تقدير دوال الطلب فقط ، بل أنها تمتد لتشمل العديد من جوانب علم الاقتصاد التطبيقي في الإدارة . وتلعب هذه التقنية دوراً هاماً بمساعدة مؤسسة Polaroid – إحدى كبرى الشركات المصنعة لكاميرات التصوير وأفلام التحميض – في إنتاج أفلامها بأعلى مستويات الجودة الممكنة . ومن بين أهم الاعتبارات التي توليها المؤسسة عنايتها القصوى مدى قدرة هذه الأفلام على الاحتفاظ بحساسيتها ، ومـا إذا كانت قادرة على إعطاء النتائج الفوتوغرافية المرضية – جنباً إلى جنب مع البيانات الخاصة بمتوسط الفترة الزمنية المنقضية بين قيام المسـتهلك بشـراء الفيلم ومدة صلاحيته للاستخدام – كُلٍ بقصد مـاعدة مؤسسة Polaroid على إجراء التغيرات الصناعية المطلوبـة للحفـاظ علـى عملائـها ، ومـاعدتهم في الحصول على أعلى جودة ممكنة . يعد اتزان الألوان هو أحد أهم الأمور المميزة للأفلام الفوتوغرافية ، ويشير هذا إلى قدرة الفيلم علـى إظهار اللون بصورة واضحة . وعندما أرادت شركة Polaroid الوقوف على أثر العامل الزمني على اتزان الألوان بأفلامها ، قامت الشركة بانتقـاء 14 عينة منفصلة تم تصنيعها في شهور مختلفة ، وترجع أقدمها إلى نحو 13 شهر مضت . وتم قياس كل من هذه العينات للتحقق من مـدى التغـير الحادث في اتزان اللون الأزرق . وكما يوضح الرسم التالي ، فإن اللون الأزرق يزداد زرقة (أي أنه يزداد جودة) كلما طال عمره .



وباستخدام التقنيات الوارد شرحها في هذا الفصل قامت شركة Polaroid بتقدير خط الانحدار الخاص بها على النحو التالي :

$$\hat{Y} = 8.194 + 6.756X$$

حيث Y هي التغير في اتزان اللون الأزرق ، و X هي عمر الفيلم بالشهر ، وقد بلغ معامل تحديد الجودة 0.966 وهو ما يظهر درجة عالية من الملائمة مع البيانات . وطبقاً لمسئولي شركة Polaroid ، فقد كانت عملية تحليل الانحدار على قدر كبير من الأهمية . فقد ساهمت هذه العملية - بالإضافة إلى البيانات المتعلقة بأنماط وأساليب المستهلك في الشراء - في مساعدة الشركة على إنتاج أفلام تقترب خصائص الجودة بها إلى الدرجة المثلى المطلوبة وقت استخدامها . أي أن الشركة قد تمكنت من الحصول على المعلومات التي تساعدها في مواجهة ما قد يطرأ على الإنتاج من تغيرات جذرية مما يؤثر على أداء الفيلم نتيجة لعنصر الزمن .*

* D. Anderson, D. Sweeney, and T. Williams, *Statistics for Business and Economics*, 3rd ed. (St. Paul. Minn.: West. 1987), p. 523.

البرمجيات والمطبوعات الخاصة بالحاسب الآلي

سبق وأن أشرنا إلى أن اغلب عمليات تحليل الانحدار تتم في يومنا هذا بواسطة الكمبيوتر وليس بالطرق العادية ، ولذا فإنه يتعين علينا أن نلم بجوانب الاستخدام الكفء للكمبيوتر والقدرة على تفسير مطبوعاته الخاصة بتحليل الانحدار . ولما كانت البرامج الجاهزة لحساب الانحدار كثيرة ومتعددة ، لذا فإنه من الصعب الحصول على قائمة بمفردات معينة قد لا تفي بالغرض . ومع ذلك فإن الأنواع المتعددة للمطبوعات قد تتشابه إلى الحد الذي يجعل من المفيد إلقاء النظر على نموذجين منها ، مثل SAS و Minitab .

يوضح الشكل (5.7) مطبوعات Minitab للانحدار المتعدد الخاصة بمبيعات شركة Miller (المشار إليها بـ $C1$) على تكلفة مبيعاتها ($C2$) والسعر ($C3$) . وطبقاً لهذه المطبوعة ، فإن معادلة الانحدار هي :

$$C1 = 2.529 + 1.758\ C2 + 0.352\ C3$$

وهو ما يختلف قليلاً عن المعادلة (5.12) بسبب أخطاء التقريب . ويوضح العمود المُعَنوَن "Coef" معامل الانحدار لكل متغير مستقل (وهو ما يعرف بالمتبأ به) . كذلك يقع القاطع بهذا الانحدار عند الرقم الأعلى في العمود الرأسي (أي الرقم الموجود في الصف الرأسي حيث يكون المتبأ به ثابتاً) . كما يظهر معامل تحديد الجودة R^2 في وسط المطبوعة . وغالباً ما يشار إليه في حالات تحليل الانحدار المتعدد بمعامل تحديد الجودة المتعدد .[11]

[11] عادة ما نشير إلى الجذر التربيعي لمعامل التحديد المتعدد كمعامل للارتباط الخطي ، يُرمز إليه بـ R . والتي أحياناً ما تستخدم لقياس مدى ملائمة معادلة الانحدار المتعدد مع البيانات المتوفرة . هذا ولا يمكن أن يطرأ تناقص على معامل التحديد المتعدد غير المعدل R^2 كنتيجة لإضافة متغير مستقل أخر . وباستبعاد هذه الخاصية . نجد أن هناك مقياساً آخر وهو معامل التحديد المتعدد (المعدل) adj. R^2 كما في الشكل (5.7) .

```
MTB > regress c1 on 2 predictors in c2 and c3

The regression equation is
C1 = 2.53 + 1.76 C2 - 0.352 C3

Predictor        Coef        Stdev    t-ratio        p
Constant       2.5294       0.2884       8.77    0.000
C2           1.75805      0.06937      25.34    0.000
C3          -0.35187      0.07064      -4.98    0.002

s = 0.3702      R-sq = 99.4%     R-sq(adj) = 99.2%

Analysis of Variance

SOURCE        DF          SS          MS          F        p
Regression     2     144.067      72.033     525.72    0.000
Error          6       0.822       0.137
Total          8     144.889

SOURCE        DF       SEQ SS
C2             1     140.667
C3             1       3.399
```

شكل (5.7) مطبوعة Minitab لنتائج الانحدار المتعدد .

يوضح شكل (5.8) مطبوعة SAS لنفس الانحدار ، حيث يقع الثابت عند رقم 2.529431 في الصف الأفقي المُعَنوَن " القـاطع " . أو في العمود الرأسي المُعَنوَن " التقدير الحسابي للمعامل " . ولإيجاد معامل تكلفة البيع ، نقوم بإيجاد الرقم 1.758049 في الصف الأفقي المُعَنـوَن "C2" ، أو في الصف الرأسي المُعَنوَن " التقدير الحسابي للمعامل " . ولإيجاد انحدار معامل السعر ، نقوم بإيجاد الرقم (0.351870–) في الصف الأفقي المُعَنوَن "C3" أو في العمود الرأسي المُعَنوَن " التقدير الحسابي للمعامل " ونلاحظ أن معامل تحديد الجودة المتعدد R^2 هو الرقم 0.9943 إلى اليمين .

```
Dependent Variable: C1

Analysis of Variance

                          Sum of          Mean
Source            DF     Squares        Square     F Value     Prob>F

Model              2   144.06678      72.03339     525.718     0.0001
Error              6     0.82211       0.13702
C Total            8   144.88889

    Root MSE       0.37016    R-square       0.9943
    Dep Mean      10.88889    Adj R-sq       0.9924
    C.V.           3.39944

Parameter Estimates

                   Parameter       Standard    T for H0:
Variable  DF        Estimate          Error   Parameter=0    Prob > |T|

INTERCEP   1       2.529431     0.28842968         8.770        0.0001
C2         1       1.758049     0.06937127        25.343        0.0001
C3         1      -0.351870     0.07064425        -4.981        0.0025
```

شكل (5.8) مطبوعة SAS لنتائج الانحدار المتعدد .

ومن الجدير بالذكر أنه على الرغم من أن معظم العمليات المتطورة في مجال الاقتصاد القياسي تتطلب حزم إحصائية متقدمة ، إلا أنه بالإمكـان إجراء عمليات الانحدار البسيط والمتعدد بواسطة جهاز كمبيوتر شخصي يعمل وفقاً للعديد من البرامج ، مثل برامج Lotus 1-2-3 .

تعتبر الإحصائيات الإضافية التالية ذات أهمية كبرى : 1- الخطأ المعياري في التقدير ، 2- توزيع F الإحصائي ، 3- توزيع T الإحصائي . هذا وسوف ترد مناقشة موجزة عن هذه التعبيرات الإحصائية ولمزيد من التفاصيل الخاصة لكل منها ، راجع أي من كتب علم الإحصاء المعروفة .[12]

الخطأ المعياري في التقدير : يعتبر الخطأ المعياري في التقدير أحد المقاييس التي غالباً ما تستخدم لإيضاح مدى دقة نموذج الانحدار ، وهو عبارة عن إجمالي ملاحظات الأفراد التي قد ترد هنا وهناك بشأن خط الانحدار . ويشار إلى الخطأ المعياري في التقدير بالرمز s في مطبوعات Minitab في شكل (5.7) وبالجذر MSE في مطبوعات SAS في شكل (5.8) . وبمقارنة هذه المطبوعات في حالة الانحدار المتعدد لشركة Miller يتضح لنا أن الخطأ المعياري في التقدير يساوي قرابة 0.37 مليون وحدة من المبيعات . ولا غرابة بالطبع في تشابه النتائج عند استخدام أي من البرمجيات المتاحة .

ولإيضاح ما يقيسه الخطأ المعياري المقدر علينا بالرجوع إلى الشكل (5.9) ففي الرسم A يبلغ الخطأ المعياري المقدر 1.5 ، وهو أعلى بكثير مما في الشكل D والذي يبلغ 0.25 ويتضح لنا ذلك من وجود مقدار أكبر من النقاط المتناثرة حول خط الانحدار في الرسم A عما هو الحال في الرسم D . وكما أشرنا سابقاً فإن الخطأ المعياري المقدر يقيس مقدار النقاط المتناثرة الذي يتناقص كلما انتقلنا من الرسم A إلى B إلى C إلى D . أي أن الخطأ المعياري المقدر يتناقص كلما اتجهنا من الرسم A إلى B ثم إلى C و D .

ويمكن الانتفاع بهذا الخطأ المعياري المقدر عند الحاجة إلى صياغة توقعات تخضع لمدى معين - أي مدى يحتمل أن يقع المتغير التابع فيه بين دفتي قيمته . فإذا كان هذا الاحتمال واقعاً عند 0.95 فإن المدى المتوقع هو :

$$\hat{Y} \pm 2s_e \qquad (5.13)$$

حيث $\hat{Y}$ هي القيمة المتوقعة للمتغير التابع بناءاً على الانحدار البسيط ، و S_e هي الخطأ المعياري المقدر . فإذا كانت القيمة المتوقعة لمبيعات شركة Miller هي 11 مليون وحدة يكون هناك احتمال بنسبة 0.95 أن تكون مبيعات الشركة بين 10.26 = [11 − 2 × 0.37] مليون وحدة ، و 11.74 = [11 + 2 × 0.37] مليون وحدة . ومع هذا فمن الضروري ملاحظة أن المعادلة (5.13) لا تعدو وأن تكون مجرد تقريب جيد في حالة ما إذا كان متوسطها يقترب من متوسط المتغير المستقل ، وإلا فإنه من الضروري اللجوء إلى الاستعانة ببعض المبادئ أو القواعد الأخرى الأكثر تعقيداً .[13]

---

[12] راجع : E. Mansfield, *Statistics for Business and Economics*, 5th ed. (New York: Norton, 1994).

[13] المعادلة الخاصة بالخطأ المعياري المقدر هي :

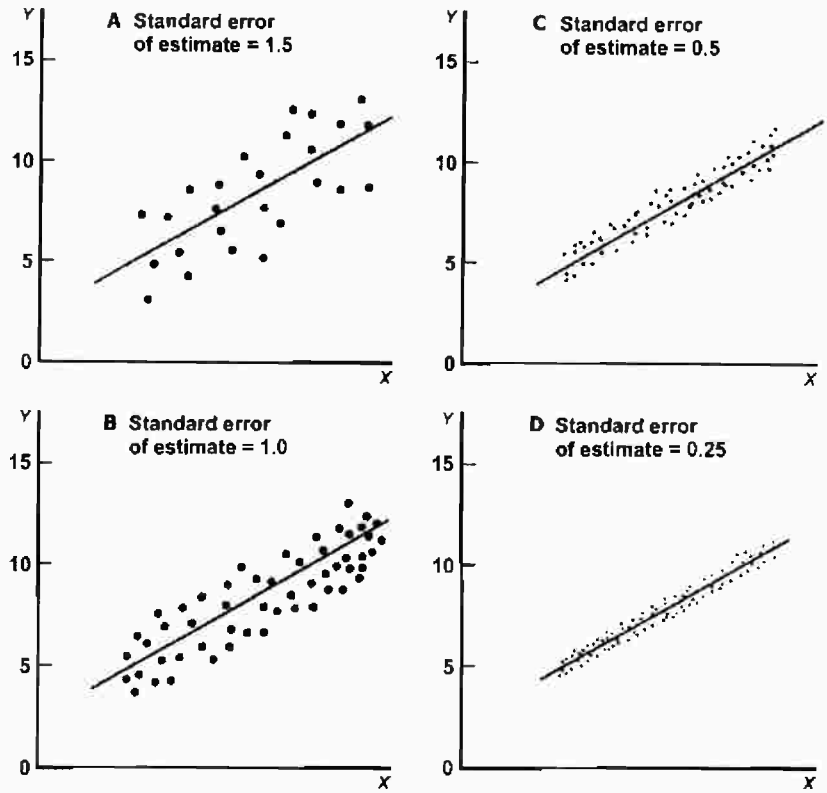
$$s_e = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{Y})^2 \div (n-k-1)}$$

حيث k هي عدد المتغيرات المستقلة .

فإذا كان حد الخطأ موزعاً بشكل طبيعي (أنظر الملحق B للحصول على شرح خاص بالتوزيع الطبيعي) ، فإن المساحة الزمنية المتوقعة (في ظل نسبة احتمال تساوي 0.95) هي :

$$\hat{Y} \pm t_{0.025} s_e \sqrt{\frac{n+1}{n} + \frac{(X^* - \overline{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2 / n}}$$

حيث t هي قيمة أحد المتغيرات إذا كان التوزيع t مع درجة اختيار تساوي $(n-2)$ يزيد عليها احتمال 0.025 ، علماً بأن X^* هي قيمة المتغير المستقل و n هو حجم العينة . (وترد مناقشة توزيع t في الملحق B .) وبهذا الشكل يكون الافتراض هو وجود متغير مستقل واحد . ولمزيد من الدراسة راجع الملاحظة السابقة .



شكل (5.9) أربع خطوط للانحدار : الخطأ المعياري المقدر يساوي 1.5 ، 1.0 ، 0.5 ، 0.25 .

توزيع F الإحصائي : غالباً ما يرغ المحلل في معرفة ما إذا كان أي من المتغيرات المستقلة ذا أثر فعَّال على المتغير التابع . ولذا ففي حالة شركة Miller قد يرغب مدير التسويق في التعرف على ما إذا كانت البيانات تشير إلى تأثر مبيعات الشركة بالسعر أو بتكاليف البيع . وللإجابة على هـذا السؤال نقوم باستخدام توزيع F الإحصائي الوارد في مطبوعات الكمبيوتر التي أشرنا إليها من قبل . وتوجد قيمة F في الصف الخامس الأفقي أسفل الأرقام الواردة في مطبوعة Minitab [انظر الشكل (5.7)] وكذلك في الصف الأفقي الأعلى في الأرقام الواردة في مطبوعة SAS [أنظر الشكل (5.8)] . وتوضح المطبوعات قيمة F في شركة Miller والتي تساوي 525.72 .

وتتسم قيمة F الكبيرة بإمكانية تأثر المتغير التابع بواحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة . وفي هذه الحالة عادةً ما نقوم باستخدام جداول توزيع F وهي عبارة عن توزيع أحد الاحتمالات المرموز إليها بالأحرف الأولى للإحصائي البريطاني الشهير R. *A*. Fisher ، لتحديد احتمـال ظـهور إحدى القيم المرصودة لتوزيع F الإحصائي بمحض الصدفة ، بفرض أن المتغير التابع لا يتأثر بأي من المتغيرات المستقلة (راجع الملحق B) وكذلـك يظهر هذا الاحتمال أيضاً مبيناً في مطبوعات الكمبيوتر ، وهو الرمز "P" (الذي يقـع يمـين F مباشـرة في مطبوعـة Minitab) ، وبـالرمز "Prob. > F" (الذي يقع يمين قيمة F مباشرة في مطبوعة SAS) . وهكذا تكون قيمة الاحتمال هي 0.001 في مطبوعـة SAS أو 0.000 في مطبوعة (Minitab) ، ويكون الفرق في هذه الحالة ناجماً عن عمليات التقريب .

وفي ظل هذا الاحتمال تصبح الإجابة على تساؤل مدير التسويق أمراً سهلاً فمن الواضح أن هذا الاحتمال ضئيل للغاية ، حتى أنه لا يعـدو أن يكون نحو 1 في الـ 10,000 ، أي أن الصدفة لا يمكن أن تتيح وجود هذه العلاقة بين المتغيرات التابعة والمستقلة إلا بهذه النسبة الضئيلة . وهو الأمر الذي يعطي الدليل على تأثر مبيعات الشركة بأي من السعر أو تكاليف البيع أو كليهما .

توزيع T الإحصائي : كثيراً ما يعني القائمون على الإدارة و التحليل بمسألة إمكانية تأثر المتغير التابع بأحد المتغيرات المستقلة . فقد يرغب رئيس شركة Miller في تحديد ما إذا كان المبلغ المخصص لتكاليف البيع يؤثر فعلياً على مبيعات الشركة . وكما نعرف في المعادلة (5.12) فإن التقدير الحسابي لـ B_1 هو 1.76 ، وهو ما يعني أن تكاليف البيع تؤثر على المبيعات ، إلا أن هذا التقدير قد يختلف من عينة لأخرى وقد يكون موجباً بمحض الصدفة حتى ولو كانت القيمة الحقيقية لـ B_1 تساوي صفر .

ولاختبار ما إذا كانت القيمة الحقيقية لـ B_1 هي صفر علينا إلقاء نظرة على توزيع T الإحصائي لـ B_1 والذي يظهر من خلال مطبوعات الكمبيوتر . وبالنسبة لبرنامج Minitab نجد أن B_1 هي معامل الانحدار لـ $C2$ ، حيث نشير لتكاليف البيع بالرمز $C2$. ولإيجاد توزيع T الإحصائي لـ B_1 ، علينا تحديد الصف الأفقي من الأرقام في المطبوعة ، حيث يكون المتنبأ به هو $C2$، ثم الحصول على الرقم في العمود الرئيسي المعنون بـ "t-ratio" . أما في حالة برنامج SAS ، فإننا نقوم بإيجاد الصف الأفقي للأرقام حيث يكون المتغير هو $C2$ ، كما نحصل على الرقم في العمود الرأسي والمعنون "T for H0: Parameter = 0." وإذا كانت حدود الخطأ في الانحدار (وهي e_i) موزعة بالشكل الطبيعي ، فإن توزيع T الإحصائي ينطوي على احتمال جيد (راجع الملحق B) .

هذا ومع تساوي العوامل الأخرى ، نجد أنه كلما زادت قيمة توزيع T الإحصائي كلما تضاءل احتمال أن تكون القيمة الحقيقية لمعامل الانحدار موضع البحث تساوي صفر . وبناءً على توزيع T ، فإنه من الممكن إجراء حساب احتمال ما إذا كانت قيمة معامل الانحدار الحقيقية تساوي صفر ، أو أن تكون T بالضخامة التي رصدناها . كما يظهر هذا الاحتمال في مطبوعات الكمبيوتر بين T مباشرة في كل من برنامجي Minitab و SAS . والفارق الوحيد أنه إذا كان البرنامج المستخدم هو Minitab ، ظهر هذا الاحتمال في العمود الرأسي المعنون "P" بينما إذا كان البرنامج المستخدم هو SAS ، ظهر هذا الاحتمال في العمود الرأسي المعنون "Prob. > | T |" . ومن الواضح أن هذا الاحتمال يساوي 0.0001 ، بغض النظر عما إذا كان البرنامج المستخدم هو Minitab أو SAS [أنظر الشكلين (5.8) ، (5.7)] .

وفي ظل وجود هذا الاحتمال ، تصبح الإجابة على السؤال الذي طرحه رئيس شركة Miller من السهولة بمكان . وكان الأمر الذي يرغب مدير الشركة في معرفته هو ما إذا كانت الكمية المخصصة لتكاليف المبيعات مؤثرة بشكل حقيقي على حجم مبيعات الشركة . وبناءً على النتائج الموضحة في الفقرة السابقة يبدو أنه من المحتمل أن تكون القيمة المخصصة لتكاليف البيع ذات اثر حقيقي على المبيعات . ومهما يكن من أمر فإن الفقرة السابقة توضح أمراً هاماً وهو أن نسبة هذا الاحتمال لا تعدو أن تكون واحد لكل 10,000 أي أن الصدفة المحضة بمفردها لا تقدر على إيجاد T بهذه الضخامة التي شاهدناها – بناءً على الخبرة السابقة للشركة .[14]

---

[14] لاحظ أن هذا يعد اختباراً ذو طرفين للافتراض القائل بأن المبيعات تتأثر بتكلفة البيع . أي أنه يمكن وضع هذا الافتراض في مواجهة الافتراض البديل القائل بأن معامل الانحدار الحقيقي لتكلفة البيع قد يكون سالباً أو موجباً . وفي حالات كثيرة ، قد تكون الاختبارات البسيطة أكثر ملائمة ، كتلك التي تعطي افتراضاً بديلاً يقول بأن معامل الانحدار الفعلي لا يمكن إلا أن يكون موجباً .

وغالباً ما يحتاج القائمون على الإدارة الحصول على تقديرات خاصة بالفترة الزمنية الخاصة بالقيمة الحقيقية لمعامل الانحدار . أي أنهم يرغبون في الحصول على حجم الاحتمال الذي يشتمل على القيمة الفعلية لمعامل الانحدار . ولإيجاد هذه المساحة الزمنية التي يبلغ احتمال اشتمالها على هذه القيمة الفعلية $(1-a)$ يمكنك حساب ما يلي :

$$b_1 \pm t_{a/2}\, s_{b1} \qquad (5.14)$$

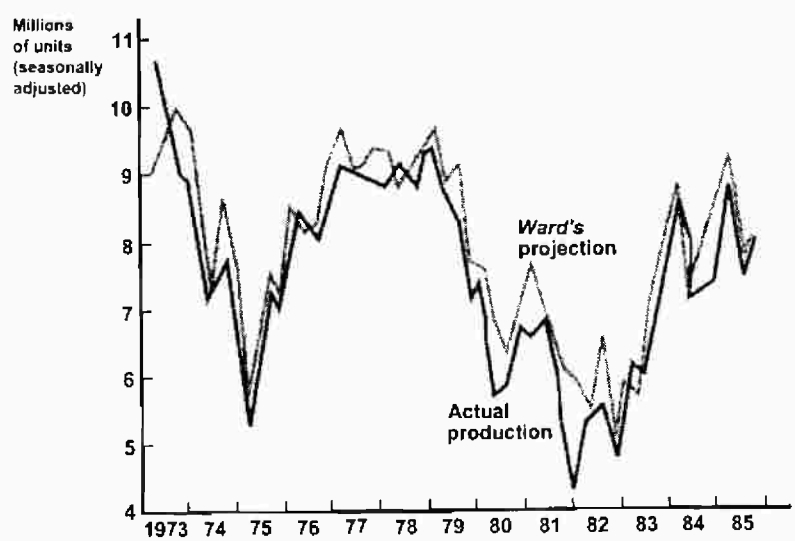
حيث S_{b1} هي الخطأ المعياري لـ b_1 (في الصف الأفقي المعنونة $C2$. وفي العمود الرأسي المعنون "Stdev" في مطبوعة Minitab . أو في الصف الأفقي المعنون $C2$ ، وفي العمود الرأسي المعنون "Standard Error" في مطبوعة SAS ، وحيث $t_{a/2}$ هي $a/2$ نقطة على توزيع t مع درجة اختيار تساوي $(n-k-1)$. (راجع الملحق B .) وإذا كانت a تساوي 0.05 ، يمكننا الحصول على مساحة زمنية يكون احتمال اشتمالها على B_1 هو 95% . وعليه ، وبالرجوع إلى شركة Miller ، فإننا نجد أن : $B_1 = 1.758$. و $s_{b1} = 0.069$. و $t_{0.025} = 2.447$ ، لذا فإنه من الطبيعي أن تكون مساحة الثقة لـ B_1 بنسبة 95% هي :

$$1.758 \pm 2.447\ (0.069)$$

أو 1.589 إلى 1.927 . ولمزيد من الدراسة راجع أي من كتب علم الإحصاء المعروفة .

إنتاج السيارات
ومدى مصداقية تنبؤات مجلة Ward

يبذل القائمون على صناعة وتوريد السيارات ، وكذا القائمون على الصناعات الأخرى ، والعديد من الوكالات الحكومية ، قصارى جهدهم للتنبؤ بحجم إنتاج السيارات في الولايات المتحدة . ومن أمثلة ذلك قيام محرر مجلة Ward للسيارات بتفويض ثمانية من أكبر الشركات المصنعة للسيارات في الولايات المتحدة للحديث عن خطط الإنتاج المحلية المنتظرة في الشهور التالية (من ثلاثة إلى ثمانية شهور) . ويوضح الشكل التالي الإنتاج المحلي الفعلي للسيارات بالإضافة إلى التنبؤات التي تطرحها مجلة Ward كل ثلاثة أشهر . كما يتضح من الرسم أن متوسط الخطأ يقترب من نصف مليون سيارة سنوياً ، أو ما يعادل 6% .



المصدر : Various issues of *Ward's Automotive Reports* (1973-85); and unpublished data from the Bureau of Economic Analysis .

وللحصول على تقدير أكثر دقة للعلاقة بين تنبؤات مجلة Ward ، والإنتاج الفعلي ، قام Ethan Harris بصياغة تحليل الانحدار بين Y (وهي الإنتاج الفعلي من السيارات) ، و X (وهي تنبؤات مجلة Ward) ، و E (وهي متوسط الخطأ خلال الثلاثة أشهر السابقة) . وجاءت النتائج على النحو التالي :

$$Y = 0.275 + 0.909X + 0.277E$$

علماً بأن معامل تحديد الجودة R^2 يساوي 0.838 .

(أ) إذا ما جاءت تنبؤات مجلة Ward الخاصة بأحد فصول السنة الأربعة أعلى بمقدار مليون سيارة مما هو الحال في فصل آخر ، فهل تتوقع أن يزيد الإنتاج الفعلي للسيارات بمقدار مليون سيارة أيضاً ؟ نعم أم لا ؟ ولماذا ؟

(ب) إذا جاءت تنبؤات Ward عن الموسم الماضي أكثر بمقدار 100,000 سيارة ، فهل يؤثر ذلك على حجم الإنتاج الفعلي بحيث يرتفع أكثر مما كان متوقعاً له إذا ما جاءت التنبؤات أقل بمقدار 100,000 سيارة ؟

(ج) هل يمدنا تحليل الانحدار بصورة ملائمة أم غير ملائمة للبيانات ؟

الحـــل

(أ) لا . حيث يتضح من المعادلة أنه إذا زادت X بمقدار 1 مليون ، فإنه من المنتظر أن تزيـــد Y بمقـــدار 0.909 × 1 مليـــون ، أو 909,000 (في حالة ثبات E) .

(ب) يحدث هذا إذا توفرت الظروف التالية : احتمال أن يزداد حجم الإنتاج الفعلي عما كان متوقعاً له إذا جاءت التنبؤات الخاصة بالموسم المـــاضي بمقدار 100,000 سيارة أقل . وللتحقق من ذلك يمكننا ملاحظة أن معامل الانحدار E في المعادلة موجب . وعليه فإن أي زيادة في E تميـل إلى الارتباط بالزيادة في Y .

(ج) ولما كان معامل تحديد الجودة المتعدد 0.8 تقريباً لذا فأنه يعتبر بمثابة دليل على وجود ملائمة جيدة (تقترب من الوضع الموضح في الرسم E في الشكل (5.6) .*

* لمزيد من الدراسة راجـــع : E. Harris, "Forecasting Automobile Output," *Federal Reserve Bank of New York Quarterly Review* (Winter 1985-86), reprinted in Mansfield, *Managerial Economics and Operations Research*, 5th ed.

العلاقات الخطية المتعددة

لعل أهم المشاكل التي قد تظهر أثناء القيام بدراسات الانحدار هي المشكلة المعروفة بالعلاقات الخطية المتعددة ، وهي عبارة عن موقف يرتبط فيه اثنـان أو أكثر من المتغيرات المستقلة ارتباطاً وثيقاً . فإذا عاودنا الحديث عن شركة Miller ، وافترضنا وجود علاقة خطية كاملة في الماضي بـــين تكلفـــة مبيعات الشركة وأسعارها ، فإن هذا النوع من الحالات يكون من المتعـــذر فيـــه تقديـــر معـــامل الانحـــدار لكـــل مـــن المتغـــيرين المســـتقلين (X و P) حيث أن البيانات المتوفرة لا تقدم أي معلومات تتعلق بتأثير أحد المتغيرين المستقلين مع افتراض ثبات العامل الآخر وكـــل مـــا يمكـــن ملاحظته هو تأثير كل من العاملين المستقلين معاً - تماماً كما كانت حركتهما في السنوات السابقة .

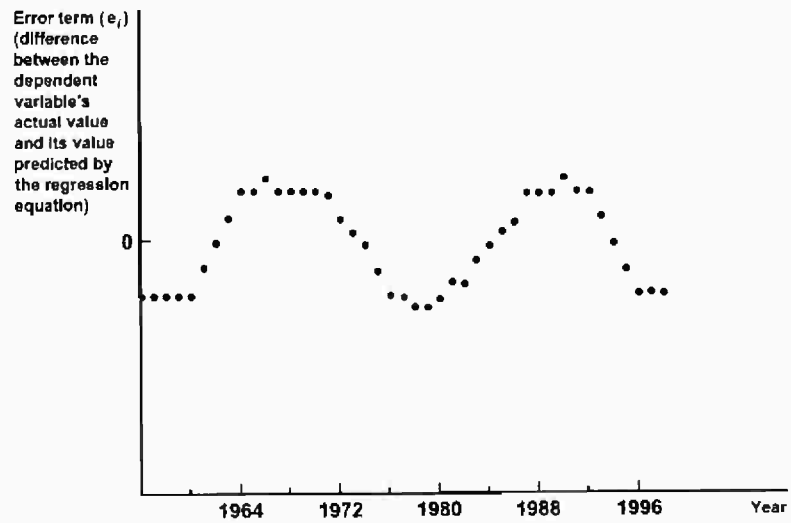
ويقوم تحليل الانحدار برصد آثار المتغيرات المستقلة وذلك بالنظر إلى مدى تأثر المتغير التابع بالمتغير المستقل عندما يكون المتغير المستقل الآخـــر ثابتاً . فإذا كان هناك متغيران مستقلان يتحركان معاً بأسلوب متلازم بحيث لا يمكننا معرفة اثر كل منهما على حدا ، كان من الضروري أن تقتصـــر ملاحظاتنا على أثر المتغيرين معاً . فإذا توفر لدينا ما يدفعنا إلى الاعتقاد بان المتغيرين المستقلين سوف يستمران في التحرك معاً بنفس الطريقة ، فعندئـــذ لن تمثل العلاقة الخطية المتعددة عائقاً يمنعنا من الاستعانة بتحليل الانحدار بغية التنبؤ بالمتغير التابع . وبما أن المتغيرين المستقلين مرتبطان ارتباطاً تاماً ، لـــذا فإن أي منهما يكفي عوضاً عن كليهما ، الأمر الذي يمكننا من استخدام متغير واحد فقط في تحليل الانحدار . أما إذا لم يكن بالإمكان التـــأكد مـــن استمرار المتغيرين المستقلين في التحرك معاً على نفس النحو فإن هذه الخطوة تصبح غير مأمونة وذلك لكونها تغفل ما للمتغير المستبعد من اثر كبير .

وفي الواقع فإننا قلما ما نواجه بحالات ترتبط فيها المتغيرات المستقلة ارتباطا وثيقا . ولكننا قد نواجه حالات ترتبط فيها المتغـــيرات المســـتقلة ارتباطاً إلى الحد الذي يجعلنا غير قادرين على إيجاد تقديرات دقيقة لمعاملات الانحدار و ذلك على الرغم من قدرتنا على إيجاد تقدير لهذه المعاملات كل على حدة . ولمواجهة مثل هذه الظروف ، يمكننا محاولة إجراء تغييرات في المتغيرات المستقلة بحيث نتمكن من تقليص العلاقات الخطيـــة المتعـــددة . فبفرض أن أحد علماء الاقتصاد التطبيقي في الإدارة يرغب في تقدير إحدى معادلات الانحدار ، بحيث تكون الكمية المطلوبة من سلعة ما سنويا هـــي المتغير التابع ومتوسط سعر هذه السلعة ودخل الفرد الممكن إنفاقه بين المستهلكين الأمريكيين هما المتغيران المستقلان . فإذا ما قمنا بقيـــاس الدخـــل الممكن إنفاقه بمقياس نقدي - أي دون مراعاة التغيير في مستوي الأسعار ، فقد تكون هناك علاقة وثيقة بين المتغيرات التابعة . أما إذا قمنـــا بقيـــاس الدخل الممكن إنفاقه بأسلوب أكثر واقعية - أي بمراعاة التغيير في مستوي الأسعار - فقد تنخفض العلاقة بشكل ملحوظ . وعلية ، فربما يتخذ هـــذا الإداري قرارة بقياس الدخل الممكن إنفاقه بالطريقة الأكثر واقعية وليس بالمقياس النقدي وحدة بغية التوصل إلى أدنى حد ممكن من العلاقات الخطيـــة المتعددة .

وإذا لم تكن مثل هذه التقنيات قادرة على الحد من العلاقة الخطية المتعددة قد لا يكون هناك بديل آخر سوي الحصول على بيانات أكـــثر لا تنطوي على مثل هذا الحد من العلاقة القائمة بين المتغيرات المستقلة . وقد لا يكون بوسعك أو بوسع مجلس الإدارة القيام بإيجاد تقدير دقيق لمعـــامل الانحدار الخاص بأحد المتغيرات التابعة المرتبط ارتباطا وثيقا بمتغير مستقل آخر .

الارتباط الذاتي

وبالإضافة إلى العلاقة الخطية المتعددة ، هناك مشكلة أخرى يمكن أن تظهر في تحليل الانحدار وهي أن حدود الخطأ (أو قيم e_i) ليست مستقلة بل أنها ترتبط ببعضها البعض ارتباطا تسلسلياً . فعلى سبيل المثال يوضح الشكل (5.10) أحد الأمثلة التي تنطوي على الحقيقة التالية : إذا كان حد الخطأ المرتبط بفترة زمنية معينة موجبا ، كان حد الخطأ المتعلق بالفترة التالية موجبا هو الآخر . وكذلك إذا كان حد الخطأ المرتبط بفترة زمنية معينة سالباً ، كان حد الخطأ المتعلق بالفترة التالية سالبا هو الآخر . وفي مثل هذه الظروف ، يمكننا القول بان حدود الخطأ ترتبط ببعضها البعض ارتباطا تسلسلياً(أي أنها مرتبطة ببعضها البعض ارتباطا ذاتياً أو تلقائياً وهو مصطلح آخر للإشارة إلى نفس المعنى) .[15] ولما كان هذا يتنافى مع الافتراضات التي ينطوي عليها تحليل الانحدار ، لذا فإنه من الضروري أن نكون قادرين على التنبؤ بإمكانية حدوثه . (وحري بنا أن نتذكر هاهنا أن تحليل الانحدار يفترض أن قيم e_i هي قيم مستقلة .)



شكل (5.10) الارتباط الذاتي لحدود الخطأ : إذا كان حد الخطأ في أحد السنوات موجبا ، كان من الطبيعي أن يبقى موجباً في السنة التالية أيضاً . وإذا كان حد الخطأ في أحد السنوات سالباً ، كان من الطبيعي أن يبقى سالباً في السنة التالية أيضاً .

وللتحقق من وجود الارتباط الذاتي في حدود الخطأ ضمن أحد عمليات تحليل الانحدار ، يمكننا الاستعانة باختبار Durbin-Watson حيث نجعل $\hat{e}_i$ هي الفرق بين Y_i و $\hat{Y}_i$ ، وهي قيمة Y_i التي يتنبأ بها الانحدار البسيط . ويمكننا تطبيق هذا الاختبار (بواسطة الكمبيوتر) وذلك بحساب :

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} (\hat{e}_i - \hat{e}_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i^{\,2}} \qquad (5.15)$$

وكان كل من Durbin و Watson قد وضعا عدة جداول تمكننا من الوقوف على مدي ارتفاع أو انخفاض d . (لاحظ أيضاً أننا نشير إلى مصطلح Durbin-Watson بـ d الإحصائي .)

وبفرض أننا نرغب في اختبار وجود ارتباط ذاتي يتصف بعلاقة إيجابية [وهو ما يعني أن e_i تتناسب طردياً مع e_{i-1} في الشكل (5.10)] . فإذا كان الأمر كذلك يتعين علينا التخلي عن فكرة عدم وجود ارتباط ذاتي إذا كانت $d < d_L$ ، وكذلك يتعين علينا قبولها إذا كانت

[15] تعد هذه إحدى حالات الارتباط الذاتي الموجب . (وهو نوع الحالات التي عادة ما تصادفنا في علم الاقتصاد التطبيقي في الإدارة) إذا أظهر حد الخطأ الخاص بفترة زمنية ما ميلا لأن يكون موجبا (أو سالبا) ، وذلك تأثرا بسلب (أو إيجاب) حد الخطأ الخاص بالفترة الزمنية السابقة (وتعد هذه إحدى حالات الارتباط الذاتي السالب) ، وهو الأمر الذي سنتناوله بمزيد من الدراسة فيما يلي .

$d > d_u$. أما إذا كانت $d_L \le d \le d_u$ فإن الاختبار يصبح غير مكتمل . وتظهر قيم كل من d_L و d_u في الملحق في جدول 7 . (لاحظ أن القيم تعتمد على حجم العينة n وليس على k ، وهي عدد المتغيرات المستقلة في الانحدار .) أما إذا فرضنا أن النظرية البديلة تفترض وجود ارتباط ذاتي سالب (وهو ما يعني أن e_i تتناسب عكسياً مع e_{i-1}) ، فعندئذ يتعين علينا التخلي عن فكرة عدم وجود ارتباط ذاتي إذا كانت $d > 4 - d_L$ ، ويتعين علينا قبولها إذا كانت $d < 4 - d_u$. أما إذا كان $4 - d_u \le d \le 4 - d_L$ ، فإن الاختبار يكون غير مكتمل .[16]

وعلى هذا فإذا ما واجهتنا مشكلة الارتباط الذاتي ، فإنه يمكن أن نقوم بأخذ الفروق الأولى لكل من المتغيرات المستقلة والتابعة الموجودة في الانحدار . ففي حالة شركة Miller مثلاً ، يمكننا استخدام التغير في حجم المبيعات للعام الماضي (بدلا من مستوى المبيعات) باعتباره المتغير التابع . كما يمكننا استخدام التغير في تكاليف البيع بالنسبة للعام الماضي (بدلا من مستوى تكاليف البيع) والتغير في السعر بالنسبة للعام الماضي (بدلا من مستوى السعر) باعتبارهما العوامل المستقلة في عملية الانحدار .[17]

مزيد من التحليل لحدود الخطأ (الفروق)

تعرفنا فيما سبق على كيفية استخدام $\hat{e}_i$ (وهي الفرق بين القيمة الحقيقة لـ Y_i والقيمة التي يتنبأ بها الانحدار البسيط) وذلك لاختبار وجود الارتباط الذاتي . ولما كانت $\hat{e}_i$ هي مقياس مدى عدم إمكانية تفسير Y_i من خلال الانحدار ، لذا فإننا كثيراً ما نشير إلى $\hat{e}_i$ بأنها الفروق أو البواقي من كل مشاهدة i^{th} . وسوف نعرض فيما يلي عددا آخر من الأساليب التي يمكن أن نقوم من خلالها باستخدام هذه الفروق (أو قيم $\hat{e}_i$) لقياس مدى تحقق الافتراضات التي ينطوي عليها تحليل الانحدار . وأول ما نقوم بعمله هو صياغة شكل ما تظهر فيه هذه الفروق في مواجهة قيم المتغيرات المستقلة (ونحن نفترض وجود متغير مستقل واحد على سبيل المثال) أي أننا نقوم بصيغة $\hat{e}_i$ في مواجهة المتغير المستقل X_i . وبناءً على ما هو موضح في الشكل (5.11) ، نلاحظ أن قيمة هذه الفروق تكون أكثر عرضة للتغير عندما تكون X_i كبيرة مما هو الحال عندما تكون صغيرة . أي أن التغير في $\hat{e}_i$ يأخذ في الزيادة كلما زادت قيم X_i . ولما كان تحليل الانحدار يفترض أن حجم التغير في حدود الخطأ هو أمر ثابت بغض النظر عن قيمة المتغير المستقل ، لذا فإن الرسم المبين في الشكل (5.11) يشير إلى عدم الالتزام بهذا الافتراض . وهناك حلاّن لعلاج هذه المشكلة : إما استخدام الانحدار المرجح أو تغيير شكل المتغير التابع ، حيث يمكننا استخدام لوغاريتم Y بدلاً من Y كمتغير تابع .[18]

وإذا كان رسم $\hat{e}_i$ مقابل X_i يشابه الشكل (5.12) ، فإن هذا مؤشر على أن العلاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع ليست خطية . وعندما تكون X منخفضة للغاية أو مرتفعة للغاية ، فإن الانحدار الخطي يُغالي من قيمة المتغير التابع وهو الأمر الذي يتضح من ميل الفروق لأن تكون سالبة . أما عندما تكون X متوسطة الحجم فإن الانحدار الخطي يميل إلى التهوين من شان قيمة المتغير التابع وهو الأمر الذي يتضح من ميل الفروق لأن تكون موجبة ويتضح من ذلك أن العلاقة التربيعية تتناسب مع البيانات بشكل افضل مما هو الأمر في حالة العلاقة الخطية ولذا فبدلا من الافتراض بصحة المعادلة (5.2) يتعين علينا أن نفترض أن :

$$Y_i = A + B_1 X_i - B_2 X_i^2 + e_i$$

وباستخدام تقنيات تحليل الانحدار المتعدد الوارد تفصيلياً فيما سبق فإنه يمكن تقدير قيم كل من A و B_1 و B_2 .

---

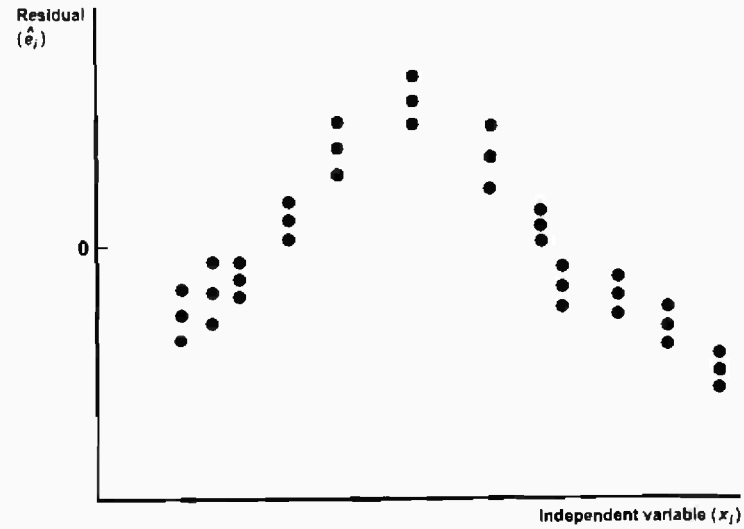
[16] للحصول على اختبار ذو طرفين لكل من الارتباط الذاتي الموجب والسالب ، ينبغي علينا التخلي عن الافتراض القائل بعدم وجود الارتباط الذاتي إذا كانت $d < d_L$ أو إذا كانت $d > 4 - d_L$ ، وقبول هذا الافتراض إذا كانت $d_u < d < 4 - d_u$. وفي غير ذلك من الحالات ، لا يكون الاختبار مكتملاً . وفي حالة الاختبار ذو طرفين ، نجد أن مستوى الأهمية يساوي ضعف مستوى الأهمية الوارد في الجدول 7 بالملحق .

[17] على الرغم مما يتمتع به أسلوب استخدام الفروق الأولى إلا أن هذا الأسلوب لا يكون ملائما دائما . ولمزيد من الدراسة أنظر : Johnston, Econometric Methods, 3rd ed. .

كما أنه من الضروري محاولة تجنب أخطاء التحديد والتي تنشأ عن عدم اشتمال الانحدار على واحد أو أكثر من المتغيرات التفسيرية الهامة . فإذا ما ظهرت أخطاء التحديد فقد تكون معاملات الانحدار المقدرة غير موضوعية ، مما ينشأ عنه عدم دقة تنبؤات معادلة الانحدار . كما قد تنشأ بعض المشكلات إذا كانت المتغيرات المستقلة في الانحدار تنطوي على أخطاء قياسية جسيمة ، حيث عادة ما تميل معاملات الانحدار لهذه المتغيرات إلى الاقتراب من الصفر .

[18] لمزيد من الدراسة راجع : Johnston, Econometric Methods, 3rd ed. .

شكل (5.11) تشير الفروق في حدود الخطأ إلى أن التغيرات ليست ثابتة : ومن الواضح أن هذه الفروق تظهر بشكل أقل عندما تكون قيم X صغيرة عما هو الحال عند قيم X الكبيرة .



شكل (5.12) تشير الفروق إلى أن العلاقة بين المتغيرات التابعة والمستقلة هي علاقة غير خطية : حيث تكون هذه الفروق سالبة عندما تكون قيم X صغيرة أو كبيرة جداً ، وموجبة عندما تكون قيم X متوسطة .

قيام رجال الاقتصاد الفيدرالي بالتنبؤ بحجم إنتاج السيارات

لما كانت صناعة السيارات في الولايات المتحدة تستوعب أكثر من نصف الكمية المباعة من المطاط والرصاص ، وكذلك نسبة كبيرة من الصلب والألومونيوم وغيرها من المواد الأخرى لذا فإنه من الواضح أن عدداً كبيراً من الشركات والوكالات الحكومية وكذا شركات السيارات أنفسها تعنى عناية جمه بالتنبؤ بحجم إنتاج السيارات . وفي عام 1985 ، نشر بنك New York الفيدرالي مقالاً يعرض كيفية الاستعانة بتقنيات الانحدار الوارد تفصيلها في هذا الفصل لمثل هذه الأغراض التنبوية . وطبقاً للسيد Ethan Harris – كاتب هذا المقال – فإن حجم الإنتاج من السيارات لكل ثلاثة أشهر يتوقف على هذه المتغيرات الخمسة التالية : 1- الدخل الحقيقي الممكن إنفاقه . 2- نسبة البيع بالتجزئة من مخزون السيارات . 3- متوسط سعر السيارة الجديدة (مقارنةً بالقائمة العامة للأسعار الاستهلاكية) . 4- مستوى أسعار السلع المعمرة بخلاف السيارات . 5- معدل الفائدة الأمثل (وهو معدل الفائدة الذي تتقاضاه البنوك من أفضل عملائها) .

في الجدول التالي تُظهر نتائج تحليل الانحدار البيانات الخاصة بالفترة بين الربع الأول من سنة 1973 إلى الربع الثالث من سنة 1985 . وأن قيم التوزيع الإحصائي لـ T لكل معامل كبيرة – أي أن القيمة الحقيقية لمعامل الانحدار تساوي صفر . وأن الاحتمال لا يتجاوز 0.01 .

المتغير	معامل الانحدار	توزيع T الإحصائي
الثابت	– 22,302	– 4.5
دخل الفرد الممكن إنفاقه	12.9	6.6
معدل الفائدة الأمثل	– 97.8	– 3.2
نسبة المبيعات للمخزون	– 19.9	– 6.1
سعر السيارة	230	5.0
الأسعار الأخرى	6.0	2.1

هذا ويبلغ معامل تحديد الجودة المتعدد (R^2) 0.862 ، كما يبلغ الخطأ المعياري المقدر 532 ، بينما يبلغ Durbin-Watson والذي نشير إليه بالرمز (d الإحصائي) 2.26 . وطبقاً للسيد Ethan Harris ، فقد تنبأت معادلة الانحدار بحجم إنتاج من السيارات مصحوبة بمتوسط خطأ يبلغ حوالي 6.9% .

(أ) هل تتوقع أن يكون معامل الانحدار من نسبة مبيعات السيارات إلى المخزون سالباً ؟ ولماذا ؟

(ب) هل يمكننا التأكد من أن القيمة الحقيقية لمعامل الانحدار لنسبة المبيعات من المخزون ليس صفر ؟ نعم أم لا ؟ ولماذا ؟

(ج) هل هناك دليل على وجود ارتباط ذاتي موجب بين حدود الخطأ ؟

(د) هل يمكن استخدام خط الانحدار لتقدير منحنى الطلب على السيارات ؟ نعم أم لا ؟ ولماذا ؟

الحـل

(أ) نعم . إذا كان حجم المخزون كبيراً بالنسبة للمبيعات ، فإنه من المتوقع أن تقوم شركات السيارات بخفض إنتاجها كما هو الأمر في حالة وجود حجم أصغر من المخزون .

(ب) نعم . فطبقاً للمناقشة الواردة أعلاه ، فإن احتمال توزيع T الإحصائي الخاص بمعامل انحدار نسبة المبيعات من المخزون على نسبة 6.1 لا يتجاوز 0.01 ، وذلك إذا كان معامل الانحدار الحقيقي يساوي صفر . وعليه ، فإذا كان معامل الانحدار الحقيقي يساوي صفر ، فإنه من غير المحتمل أن يكون توزيع T الإحصائي مساوياً لقيمتها المرصودة أو أكبر .

(ج) لا . وبما أن قيمة n هي 50 تقريباً ، و $k = 5$ ، فإن الجدول 7 بالملحق يوضح أن $d_L = 1.26$ و $d_u = 1.69$ إذا كان المستوى المعنوي أو مستوى الأهمية يساوي 0.025 . علماً بأن القيمة المرصودة لإحصاء Durbin-Watson (2.26) يفوق d_u (1.69) ، وهو ما يعني أنه يتعين علينا قبول الرأي القائل بأنه لا يوجد ارتباط ذاتي موجب .

(د) لا . ولعل أحد أهم الدلائل على صحة ذلك هو أن معامل الانحدار لأسعار السيارات موجب ومن الواضح أنه لا يمكن استخدام معادلة الانحدار كتقدير لمنحنى الطلب على السيارات .

دالة الطلب على السجائر
(دراسة تطبيقية)

بعد أن قمنا بدراسة عدد من تقنيات الانحدار بشيء من الإسهاب نتجه الآن إلى دراسة واقعية شهدت استخدام هذه التقنيات في تقدير دالة الطلب على إحدى السلع . فما من شك في أن الولايات المتحدة تزخر بالعديد من الهيئات التي تعنى بدالة الطلب على السجائر . ومن أمثلة هذه الهيئات شركات التبغ الكبرى (كشركتي Phillip Morris و RJR Nabisco) بالإضافة إلى الوكالات الحكومية كمفوضية التجارة الفيدرالية وتقوم جميع هذه الهيئات باستخدام البيانات السنوية لما بين عامي 1947 و 1982 . في عام 1984 تم تقدير دالة الطلب على السجائر في الولايات المتحدة ، حيث وضعت دالة مرونة الطلب الثابتة (التي تم مناقشتها في الفصل الثالث) موضع الأهمية كشكل رياضي افضل من المعادلات الخطية . ومن ثم فإن لوغاريتم الكمية المطلوبة هو المتغير التابع ولوغاريتمات السعر والدخل وتكاليف الدعاية وأسعار البدائل الأخرى (مثل السيجار) هي بعض المتغيرات المستقلة .[19]

أي أن معادلة الانحدار الناشئة عن ذلك هي :[20]

$$\log Q = -2.55 - 0.29 \log P + 0.08 \log A - 0.09 \log I + 0.14 \log P_c - 0.10\, C - 0.06\, D \qquad (5.16)$$
$$(-2.07) \quad (4.48) \quad (-1.00) \quad (0.92) \quad (-5.19) \quad (-3.60)$$

حيث Q هي الاستهلاك السنوي للسجائر ، و P هي متوسط السعر ، و A هي إجمالي الدعاية للسجائر ، و I هي دخل الفرد ، و P_c هي متوسط سعر السيجار ، و C هي متغير ما يساوي الواحد الصحيح إذا كانت السنة التي يتم تناولها - بعد إمداد التقرير الطبي لجمعية مرضى السرطان الذي يربط بين تدخين السجائر و الإصابة بالمرض ويساوي صفر في غير ذلك من الظروف ، و D هي متغير يساوي الواحد الصحيح أيضاً إذا كانت السنة موضع البحث تقع خلال الفترة من عام (1968 إلى عام 1970) عندما أصدرت مفوضية الاتصالات الفيدرالية قراراً بضرورة إذاعة أحد الإعلانات المناهضة للتدخين مقابل إذاعة أربعة إعلانات للدعاية للسجائر وتساوي صفر في غير ذلك من الظروف .

هذا ويجب الإشارة إلى أن الرقم الوارد بين الأقواس أسفل كل معامل انحدار هو قيمة توزيع T الإحصائي الخاص به . وتبلغ قيمة R^2 معامل تحديد الجودة المتعدد لهذا الانحدار 0.91 وهو ما يدل على وجود درجة ملائمة عالية . ويبلغ Durbin-Watson الإحصائي 1.54 ، وهو ما يدل على عدم وجود ارتباط ذاتي . وطبقاً لمطبوعات الكمبيوتر فإنه يوجد احتمال لا يزيد عن 0.05 بأن يكون توزيع T الإحصائي لمعامل انحدار اللوغاريتم P كبيراً بنفس الدرجة التي ينتظر أن تكون عليها إذا كانت قيمته الفعلية تساوي صفر . ويمكن تطبيق هذا على توزيع T الإحصائي للوغاريتمات A و C و D . وعليه يمكننا التأكد أن هذه المتغيرات لأي من اللوغاريتمات P و A و C و D تؤثر تأثيراً فعلياً على حجم استهلاك السجائر . وأول ما يمكن ملاحظته عند تفسير دالة الطلب المقدرة على السجائر ، هو أن جميع معاملات الانحدار عبارة عن أنواع محسوبة من المرونة ، وللتحقق من ذلك علينا بالرجوع إلى المعادلة (3.25) في الفصل الثالث. والتي توضح أنه في حالة دالة مرونة الطلب الثابتة فإن معامل لوغاريتم P هو

---

[19] بالرجوع الى المعادلة (3.25) نتذكر أنه إذا أخذنا لوغاريتم كل من المتغيرات المستقلة والتابعة ، كانت دالة الطلب خطية في حالة استخدام دالة مرونة الطلب الثابتة .

[20] في واقع الأمر ، قمنا بتبسيط المعادلة (5.16) بعدة أساليب متنوعة ، حيث تم حذف بعض المتغيرات التابعة وذلك للحصول على نتائج ممكن التعامل معها بشكل أمثل لأغراض تعليمية بحتة . كما نلاحظ أن اللوغاريتمات الواردة هي لوغاريتمات طبيعية [حيث أن x تساوي اللوغاريتم الطبيعي لـ y (المرموز لها بـ $\ln y$) إذا كانت $e^x = y$ ، حيث $e = 2.71828$.

وللحصول على النتائج الكاملة راجع : R. Porter, "The Impact of Government Policy on the U. S. Cigarette Industry," in P. Ippolito D. Scheffman, eds., *Empirical Approaches to Consumer Protection Economics* (Washington, D. C.: Federal Trade Commission, 1984).

مرونة الطلب السعرية (والمشار إليها في الفصل الثالث بالرمز b_1) ، كما أن معامل لوغاريتم I هو مرونة الطلب الدخلية (والمشار إليها في الفصل الثالث بالرمز b_2) . وبناءاً على المعادلة (5.16) ، فإن مرونة الطلب السعرية المقدرة للسجائر تساوي 0.29 ، كما أن مرونة الطلب الدخلية للسجائر تساوي 0.09 . وبنفس المقياس ، نجد أن مرونة الطلب المضادة بين السجائر والسيجار تساوي 0.14 ، كما أن مرونة الطلب الإعلانية للسجائر تساوي 0.08 .

وتحظى دالة الطلب المقدرة على السجائر بأهمية بالغة لدى القائمين على هذه الصناعة . فكما أكدنا في الفصل السابق يجب إن يهتم المديرون بشكل كبير بالمرونة السعرية ، والدخلية ، والإعلانية ، والمضادة للطلب على السلعة التي يقومون بإنتاجها . كما يهتم المسئولون الحكوميون بدالة الطلب على السجائر . وفي سنة 1994 تبنت إدارة الرئيس Clinton مشروع يطالب بزيادة معدل الضرائب الفيدرالية على السجائر ، بدعوة إمكانية الاستفادة من عائد هذه الزيادة للإنفاق على عمليات تطوير التأمين الصحي . وللوقوف على النتيجة التي قد تحققها هذه الزيادة الضريبية في الإيرادات كانت هناك حاجة ملحة لتقدير مرونة الطلب السعرية على السجائر . وبناءاً على عدد من التقديرات قريبة الصلة بما ورد في المعادلة (5.16) ، فقد وجد أن زيادة الضرائب على السجائر بمعدل 1 دولار لكل علبة سجائر سوف تؤدي إلى زيادة الإيرادات الدخلية بما قيمته 10 بليون دولار سنوياً .[21]

وكذلك فإن النتائج الموضحة في المعادلة (5.16) تمدنا بتقديرات على قدر من الأهمية لتأثر حجم استهلاك السجائر بظهور دلائل تشير إلى ارتباط التدخين بمرض السرطان . وبما أن معامل الانحدار لـ C هو معامل سالب ، لذا فقد كان من الطبيعي أن ينخفض استهلاك السجائر بشكل ملحوظ عند إعلان الجمعية الأمريكية للسرطان بوجود هذه الدلائل كما كان عليه الحال قبل صدور هذا الإعلان (وذلك مع افتراض ثبات باقي المتغيرات المستقلة الأخرى على حالها) . كما ينبغي ملاحظة الأهمية الكبيرة في كون معامل انحدار D سالباً . ومعنى ذلك أنه في حالة ثبات باقي المتغيرات المستقلة ، فإنه ينتظر هبوط حجم استهلاك السجائر بشكل ملحوظ خلال الفترة التي أصرت فيها مفوضية الاتصالات الفيدرالية على إذاعة الإعلانات المناهضة للتدخين بشكل أكبر مما هو الحال في غير ذلك من الأوقات . وتعد هذه النتيجة ذات نفع كبير للمديرين التنفيذيين العاملين في مجال صناعة السجائر ، حيث أنها توضح مدى ضعف مبيعاتهم في مواجهة الإعلانات المناهضة للتدخين .

وأخيراً ، وكما أكدنا مراراً وتكراراً في هذا الفصل ، فإن التنبؤ هو أحد الأسباب الرئيسية لاستخدام دوال الطلب المعلومة القيمة . لنفرض أنه قد توفرت لديك فكرة جيدة عن قيم العام القادم لـ P و A و I و P_c و C و D . وللتنبؤ بحجم استهلاك السجائر خلال العام القادم يتعين علينا وضع هذه القيم في معادلة الانحدار الموضحة من قبل .[22] وبالطبع فإن هذا لا يعني أن التنبؤ عملية سهلة ، أو أن هذا هو الأسلوب الوحيد للخروج بمثل هذه التنبؤات ، فعلى العكس من ذلك فإن التنبؤ عملية صعبة ودقيقة للغاية وهناك العديد من تقنيات التنبؤ شائعة الاستخدام ، وسوف نقوم بمناقشة بعض منها في الفصل التالي .

---

[21] *Business Week*, April 11, 1994.

[22] كما أشرنا في الملاحظة 20 ، تم اختصار المعادلة (5.16) لأغراض تعليمية بحتة . وللحصول على تنبؤات دقيقة ، ينبغي استخدام المعادلة الكاملة من النوع المشار إليه في نفس الملاحظة .

موجز بما ورد في الفصل الخامس

1- قد تنشأ إحدى مشكلات التحديد (أو التمييز) إذا ما تم وضع السعر في فترات مختلفة في مقابل الكمية المطلوبة بحيث تستخدم العلاقة الناتجة عن ذلك لتقدير منحنى الطلب . ولما كانت المتغيرات اللاسعرية لا تبقى ثابتة ، لذا فمن الممكن أن يحدث انحراف لمنحنى الطلب مع مرور الزمن . وعلى الرغم من ذلك ، يمكن الاستعانة بأساليب الاقتصاد القياسي المتطورة لتقدير دالة الطلب ، كما تساهم التجارب التسويقية والمقابلات مع المستهلكين في هذا الصدد ، ومن أمثلة ذلك قيام الشركات بتغيير أسعارها أحياناً من مدينة إلى أخرى ، أو من إقليم إلى آخر للوقوف على أثر ذلك على حجم الكمية المطلوبة . ومن الأمثلة الفعلية لذلك هذا النوع من التقييم للبدائل الأربعة التي أجراها مديرو L'eggs .

2- يلعب تحليل الانحدار دوراً هاماً في تقدير دوال الطلب وغيرها من العلاقات الاقتصادية . ويوضح خط الانحدار متوسط العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل . وتعد طريقة المربعات الصغرى هي التقنية المعيارية المستخدمة لإيجاد ملائمة بين خط الانحدار ومجموعة البيانات المتوفرة . فإذا كان خط الانحدار هو $\hat{Y} = A + bX$ ، وإذا كان من الممكن حساب A و B بطريقة المربعات الصغرى لذا فإنه :

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$

$$a = \overline{Y} - b\overline{X}$$

هذا وعادة ما يشار إلى قيمة B بمعامل الانحدار المقدر b .

3- بينما يقتصر الانحدار البسيط على متغير مستقل واحد ، يتسع الانحدار المتعدد بحيث يشمل أكثر من متغير مستقل واحد . ومن بين الأمور التي يتميز بها الانحدار المتعدد عن الانحدار البسيط تلك الميزة التي يقدمها لنا بحيث نصبح قادرين على التنبؤ بالمتغير التابع بشكل أكثر دقة إذا كان هناك أكثر من متغير مستقل واحد . وكذلك فإذا كان المتغير التابع يتأثر بأكثر من متغير مستقل واحد ، فمن الممكن أن يؤدي الانحدار البسيط للمتغير التابع على متغير مستقل واحد إلى الوصول إلى تقدير غير دقيق .

4- للحصول على تحليل انحدار متعدد نبدأ بتحديد المتغيرات المستقلة ، ثم نقوم باختيار الشكل الرياضي المناسب للمعادلة التي ستقوم بربط متوسط قيمة المتغير التابع من ناحية بالمتغيرات المستقلة من ناحية أخرى . فإذا كانت Y هي المتغير التابع وتم تحديد X و P على أنها المتغيرات المستقلة فمن الممكن القول بأن :

$$Y_i = A + B_1 X_i + B_2 P_i + e_i$$

حيث e_i هي حد الخطأ . ولتقدير كل من B_1 و B_2 (والمعروفة بمعامل الانحدار الحقيقي X و P) ، وكذا لتقدير A (القاطع لمعادلة الانحدار الحقيقي) ، نقوم باستخدام القيم التي تحد من تربيع مجموع الانحرافات لـ Y_i من $\hat{Y}_i$ وهي قيمة المتغير التابع التي تنبأت بها معادلة الانحدار المقدرة .

5- عند القيام بإجراء إحدى عمليات الانحدار البسيط ، نقوم باستخدام معامل تحديد الجودة لقياس مدى ملائمة خط الانحدار للبيانات . ويلعب معامل تحديد الجودة المتعدد R^2 نفس الدور في عمليات الانحدار البسيط . وكلما اقتربت R^2 من الصفر كلما قلة الملائمة ، وكلما اقتربت R^2 من 1 كلما زادت الملائمة .

6- يمكن استخدام توزيع F الإحصائي لاختبار احتمال تأثر المتغير التابع بأي من المتغيرات المستقلة . كما يمكن أن يساعد حد الخطأ المعياري في التقدير للإشارة إلى مدى قدرة أحد نماذج الانحدار على التنبؤ بالمتغير التابع . وكذلك يمكن استخدام توزيع T الإحصائي لمعامل الانحدار الخاص بكل من المتغيرات المستقلة للوقوف على إمكانية تأثر المتغير التابع بهذا المتغير المستقل . وتوضح مطبوعات الكمبيوتر الإحصائية وجود احتمال أن يكون توزيع T الإحصائي بنفس الحجم المرصود له بشرط إلا يكون المتغير التابع غير متأثر بالمتغير المستقل .

7- من المشكلات التي قد تنشأ عن عمليات الانحدار المتعدد تلك المشكلة المعروفة بتعدد العلاقات الخطية. وهي الحالة التي يرتبط فيها متغيران مستقلان أو أكثر ارتباطاً وثيقاً ببعضهما. وفي حالة حدوث هذه المشكلة قد يكون من المستحيل إيجاد تقدير دقيق لأثر أحد المتغيرات المستقلة على المتغير التابع. ومن المشكلات أيضاً التي كثيراً ما تحدث في عمليات الانحدار وجود ارتباط ذاتي شديد بين حدود الخطأ ويمكننا الاستعانة باختبار

Durbin-Watson للتثبت من وجود هذه المشكلة . كما قد تساعد الرسوم البيانية للفروق على اكتشاف الحالات التي تشهد عدم الثبات في حدود الخطأ أو التي تنطوي على علاقات غير خطية .

8- على الرغم من جميع الصعوبات والمشاكل الواردة أعلاه ، لا يزال ، تحليل الانحدار ذا فائدة كبيرة في تقدير دوال الطلب . وللإيضاح ، فقد ورد تفصيل لعملية القيام بتقدير دالة الطلب على السجائر في نهاية هذا الفصل .

تمارين

(1) قام قسم التسويق بشركة Klein بالاستعانة بتحليل الانحدار بغية تقدير دالة الطلب على منتج الشركة . وقد جاءت النتائج على النحو التالي :

$$Q = -104 - 2.1\,P + 3.2\,I + 1.5\,A + 1.6\,Z$$

حيث Q هي الكمية المطلوبة من السلعة التي تنتجها الشركة (بالطن) ، و P هي سعر السلعة (بالدولار) للطن ، و I هي دخل الفرد (بالدولار) ، و A هي تكلفة الدعاية التي تتحملها الشركة (بآلاف الدولارات) ، و Z هي سعر إحدى السلع المنافسة (بالدولار) . هذا ويقوم هذا الانحدار على 200 ملاحظة متنوعة .

(أ) طبقاً لمطبوعات الكمبيوتر ، يوجد احتمال قدره 0.005 أن يحتفظ توزيع T الإحصائي لمعامل الانحدار بنفس حجمه . إذا لم يكن لـ A تأثير فعلي على Q . فسر هذه النتيجة .

(ب) ما هو منحنى الطلب لمؤسسة Klein إذا كانت $I = 5{,}000$ ، و $A = 20$ ، و $Z = 1{,}000$ ؟

(ج) قم بتقدير الكمية المطلوبة من السلع التي تنتجها مؤسسة Klein إذا كانت $P = 500$ [مع ثبات الشروط الواردة في الفقرة (ب) من السؤال .]

(د) ما مدى الملائمة بين معادلة الانحدار والبيانات المتوفرة ؟

(2) لما كانت التكاليف التي تنفقها شركة Hawkins (بخلاف الدعاية) هي تكاليف ثابتة ، لذا فإن الشركة ترغب في معظمة إجمالي إيراداتها (بعد استبعاد تكاليف الدعاية) . وطبقاً لتحليل الانحدار القائم على 124 ملاحظة متنوعة ، وهو التحليل الذي أجراه أحد الاستشاريين التابعين للشركة ، فإن :

$$Q = -23 - 4.1\,P + 4.2\,I + 3.1\,A$$

حيث Q هي الكمية المطلوبة من السلعة التي تنتجها الشركة (بالدستة) ، و P هي سعر السلعة (بالدولار للدستة) ، و I هي دخل الفرد (بالدولار) و A هي تكاليف الدعاية (بالدولار) .

(أ) إذا كان سعر السلعة هو 10 دولار للدستة ، فهل يتعين على الشركة زيادة تكاليف الدعاية ؟

(ب) إذا بقيت ميزانية الدعاية عند 10,000 دولار علماً بأن دخل الفرد يساوي 8,000 آلاف دولار ، فما هو منحنى الإيرادات الحدية للشركة ؟

(ج) إذا بقيت ميزانية الدعاية عند 10,000 دولار علماً بأن دخل الفرد يساوي 8,000 آلاف دولار ، فما هو السعر الذي ينبغي على الشركة أن تتقاضاه ؟

(3) جاءت مبيعات وأرباح 7 من الشركات المنتجة للحديد والصلب في عام 1980 على النحو التالي :

الشركة	المبيعات (بملايين الدولارات)	الأرباح (بملايين الدولارات)
Armco	5.7	0.27
Bethlehem	6.7	0.12
Bundy	0.2	0.00
Carpenter	0.6	0.04
Republic	3.8	0.05
U. S. Steel (now USX)	12.5	0.46
Western	0.5	0.00

(أ) قم بحساب خط الانحدار البسيط بحيث تكون الأرباح هي المتغير التابع والمبيعات هي المتغير المستقل ؟

(ب) قم بتقدير متوسط الأرباح لعام 1980 لأحد الشركات المنتجة للحديد والصلب علماً بأن حجم المبيعات لهذه الشركة في تلك الفترة بلغ 2 بليون دولار ؟

(ج) هل يمكن الاستعانة بخط الانحدار للتنبؤ بأرباح إحدى هذه الشركات لعام 1998 ؟ فسر .

(4) يقوم كبير مهندسي شركة Cherry Manufacturing باختبار عينة عشوائية من عشر مواضع لحام للصلب ، وفي كل مرة يتم فيها اختبار اللحام من حيث درجة مقاومة القص ومحيط منطقة اللحام . هذا وقد جاءت النتائج على النحو التالي :

قوة القطع (بالأرطال)	قطر اللحام (بالاف البوصات)
680	190
800	200
780	209
885	215
975	215
1,025	215
1,100	230
1,030	250
1,175	265
1,300	250

(أ) هل تبدو العلاقة بين هذين المتغيرين طردية أم عكسية ؟ وهل هذا يتمشى مع المنطق ؟ نعم أم لا ولماذا ؟ هل يبدو أن العلاقة خطية أم لا ؟

(ب) قم بحساب معادلة الانحدار لمقاومة القص على محيط اللحام .

(ج) قم برسم خط الانحدار مع استخدامه للتنبؤ بدرجة مقاومة قص اللحام بحيث يبلغ محيطه خمس بوصة ، وبحيث يبلغ قطره ربع بوصة .

(5) يقوم مدير التسويق بشركة Kramer بتحليل انحدار بحيث تكون فيه الكمية المطلوبة من السلعة التي تنتجها الشركة (والمشار إليها بـ C1) هي المتغير التابع ، وبحيث يكون سعر السلعة (المشار إليها برمز C2) والدخل الفعلي للمستهلك (المشار إليه بـ C3) هما المتغيران المستقلان . هذا ويظهر الكمبيوتر مطبوعة Minitab التالية .

```
MTB > regress c1 on 2 predictors in c2 and c3
The regression equation is
C1 = 40.8 - 1.02 C2 + 0.00667 C3

Predictor        Coef        Stdev     t-ratio        p
Constant       40.833        1.112       36.74    0.000
C2          -1.02500      0.06807      -15.06    0.000
C3          0.006667     0.005558        1.20    0.244

s = 1.361          R-sq = 91.6%          R-sq (adj) = 90.8%
Analysis of Variance

SOURCE          DF         SS          MS          F        p
Regression       2     422.92      211.46     114.11    0.000
Error           21      38.92        1.85
Total           23     461.83

SOURCE          DF     SEQ SS
C2               1     420.25
C3               1       2.67
```

(أ) ما هو قيمة القاطع لهذا الانحدار ؟

(ب) ما هو معامل الانحدار المقدر لسعر السلعة ؟

(ج) ما هو معامل الانحدار المقدر للدخل الممكن إنفاقه ؟

(د) ما هو معامل تحديد الجودة المتعدد R^2 ؟

(هـ) ما هو الخطأ المعياري المقدر ؟

(و) ما هو حجم الاحتمال بأن تكون القيمة المرصودة لتوزيع F الإحصائي قد نشأت بمحض الصدفة ، علماً بأن المتغير التابع لم يتأثر مطلقاً بأي من المتغيرات المستقلة ؟

(ز) ما هو حجم الاحتمال بأن يكون توزيع T الإحصائي بنفس المقدار المرصود له ، إذا كانت القيمة الحقيقية لمعامل الانحدار للسعر هي صفر ؟

(ح) ما هو حجم الاحتمال بأن يكون توزيع T الإحصائي بنفس المقدار المرصود له ، إذا كانت القيمة الحقيقية لمعامل الانحدار لدخل الفرد هي صفر ؟

(ط) اشرح باختصار ما يعنيه هذا الانحدار .

(6) يتعين على المديرين التنفيذيين العاملين في مجال السكك الحديدية معرفة أمر هام ، ألا وهو وجود علاقة بين التكاليف التي تتحملها إحدى ساحات الشحن من ناحية ، وإنتاج هذه الساحة من ناحية أخرى . ولعل مهمتي التحويل والتسليم هما الخدمتان الرئيسيتان اللتان تقدمهما الساحة . ويبدو من المعقول استخدام عدد القطع المحولة وعدد العربات التي سيتم تسليمها في فترة محددة كمقياس للإنتاج . (القطعة هي مجموعة من العربات تسير معاً كوحدة واحدة في نفس التصنيف ، وعادة ما يتم استخدامها كوحدة لتحويل الإنتاج) . وتفترض إحدى الدراسات الخاصة بأحد أكبر الخطوط الحديدية في الولايات المتحدة أن : [23]

$$C_i = A + B_1 S_i + B_2 D_i + e_i$$

حيث C_i هي تكاليف ساحة الشحن في i^{th} يوم ، و S_i هي عدد القطع المحولة للساحة في ith يوم ، و D_i هي عدد العربات التي يتم تسليمها للساحة في i^{th} يوم ، و e_i هي حد الخطأ . وقد تم الحصول على البيانات الخاصة بـ C_i و S_i و D_i بواقع 61 يوم . وبناءاً على الخطوات الوارد تفصيلها في هذا الفصل فقد تم استخدام هذه البيانات للحصول على تقديرات كل من A و B_1 و B_2 ، وقد جاءت معادلة الانحدار على النحو التالي :

$$\hat{C}_i = 4{,}914 + 0.42S_i + 2.44D_i$$

حيث $\hat{C}_i$ هي التكلفة التي تنبأت بها معادلة الانحدار لليوم i^{th} (بالدولار) .

(أ) إذا طلب منك تقييم هذه الدراسة فما هي الخطوات التي قد تتبعها لمعرفة ما إذا كانت الافتراضات الجوهرية التي ينطوي عليها تحليل الانحدار قد تحققت ؟

(ب) إذا ثبت لك ذلك ، فما هي الفائدة التي يمكن أن تعود على خطوط السكك الحديدية من معادلة الانحدار الواردة أعلاه ؟ كن محدداً في أجابتك .

(ج) قبيل القيام باستخدام معادلة الانحدار الواردة أعلاه ، ما هي الطرق الإحصائية الإضافية التي قد ترغب في استخدامها ؟ ولماذا ؟

(د) إذا بلغ Durbin-Watson الإحصائي 2.11 ، فهل هناك دليل على وجود ارتباط ذاتي .

(7) استعانت شركة Kingston بأحد الاستشاريين لتقدير دالة الطلب على السلع التي تنتجها ، وباستخدام تحليل الانحدار قدّر الاستشاري دالة الطلب على النحو التالي :

$$\log Q = 2.01 - 0.14 \log P + 0.258 \log Z$$

حيث Q هي الكمية المطلوبة من السلع بالطن و P هي سعر السلعة (بالدولار للطن) و Z هي سعر إحدى السلع المنافسة (بالدولار للطن).

(أ) قم بحساب مرونة الطلب السعرية للسلع التي تنتجها الشركة ؟

(ب) قم بحساب مرونة الطلب المضادة بين السلع التي تنتجها شركة Kingston والسلع المنافسة ؟

(ج) طبقاً لتقرير الاستشاري فإن $\overline{R^2} = 0.98$. كما أن الخطأ المعياري المقدر يساوي 0.001 . فإذا كان عدد الملاحظات هو 94 فما هو مدى ملائمة تحليل الانحدار هذا ؟

---

[23] لمزيد من الدراسة أنظر : E. Mansfield and H. Wein, "A Managerial Application of a Cost Function by a Railroad," a case in the study guide accompanying this textbook.

(8) ترغب السيدة Mary Palmquist من بورصة Wall Street ، معرفة العلاقة بين الناتج القومي الإجمالي للولايات المتحدة وأرباح شركة General Motors (بعد استبعاد الضرائب) . وقد حصلت على البيانات التالية الخاصة بكل متغير ، وهي على النحو الموضح في الجدول التالي :

السنة	الناتج القومي الإجمالي (بلايين الدولارات)	أرباح مؤسسة General Motors (بلايين الدولارات)
1965	688	355
1966	753	339
1967	796	361
1968	868	357
1969	936	278
1970	982	363
1971	1,063	510
1972	1,171	573
1973	1,306	661
1974	1,407	705
1975	1,529	688
1976	1,706	931

(أ) ما هي قيمة القاطع وميل خط الانحدار الحقيقي عندما تكون أرباح شركة General Motors هي المغير التابع (والناتج القومي الإجمالي هو المتغير المستقل) ؟

(ب) ما هو متوسط تأثير زيادة الناتج القومي الإجمالي بمقدار دولار على أرباح الشركة ؟

(ج) إذا شعرت السيدة Mary أن الناتج القومي الإجمالي للعام القادم سيكون 2 تريليون دولار ، فما هو توقعها لأرباح شركة General Motors بناءاً على قواعد تحليل الانحدار ؟

(د) ما هو معامل تحديد الجودة بين الناتج القومي الإجمالي وأرباح الشركة ؟

(هـ) هل تثبت النتائج التي تم التوصل إليها في الأجزاء السابق من هذه المسألة أن التغيرات في الناتج القومي الإجمالي تؤدي إلى تغيرات في أرباح الشركة ؟ وهل يمكن أن نتأكد من أن أرباح الشركة هي دالة خطية لإجمالي الإنتاج الكلي ؟ ما هي الأشكال الأخرى من الدوال التي قد تحقق نفس النتيجة أو نتيجة أفضل ؟

(و) إذا كنت تعمل محللاً مالياً فهل تشعر بأن خط الانحدار هو نموذج كاف للتنبؤ بأرباح شركة General Motors ؟ نعم أم لا ؟ ولماذا ؟

(9) خلال الستينيات قامت شركة Boston and Maine للسكك الحديدية بإجراء إحدى التجارب حيث خفضت رسومها بنسبة 28% تقريباً لمدة عام كامل وذلك بغرض تقدير مرونة الطلب السعرية . ولكن هذا التخفيض في الرسوم لم يؤدي إلى حدوث أي تغيرات جوهرية في إيرادات السكك الحديدية ؟

(أ) ما هي المشاكل التي تنشأ عند تنفيذ هذا النوع من التجارب ؟

(ب) بمعرفة القيمة الاسمية ، ما هي مرونة الطلب السعرية التي يمكن تقديرها لأول وهلة ؟

(10) في عالم صناعة المنسوجات ينبغي أن تبقى الخيوط متماسكة خلال فترة النسج . وعلى الرغم من وجود أحد المقاييس المباشرة لميل الخيوط إلى الإنفكاك إلا أنه مقياس شاق ومكلف في تنفيذه . كما توجد مقاييس غير مباشرة تقوم على الاختبارات المعملية . وقد ترغب شركة Brockway للمنسوجات في التعرف على مدى الارتباط القائم على المقاييس المباشرة وغير المباشرة . فإذا كان الارتباط كبيراً ، فإن الشركة تؤمن بقدرتها على استخدام المقياس غير المباشر بدلاً من المقياس المباشر . وقد تم أجراء تجربة لقياس مدى الميل إلى الإنفكاك وذلك على عينة مكونة من 18 كمية من مختلف اللفائف حيث تم الاستعانة بالمقاييس المباشرة وغير المباشرة على السواء . وقد جاءت النتائج على النحو التالي :

مسلسل الكميات	المقياس	
	مباشر	غير مباشر
1	31	6.2
2	31	6.2
3	21	10.1
4	21	8.4
5	57	2.9
6	80	2.9
7	35	7.4
8	10	7.3
9	0	11.1
10	0	10.7
11	35	4.1
12	63	3.5
13	10	5.0
14	51	4.5
15	24	9.5
16	15	8.5
17	80	2.6
18	90	2.9

(أ) ما هو معامل تحديد الجودة بين المقياسين ؟

(ب) ما هو خط الانحدار الذي قد تقوم باستخدامه للتنبؤ بقيمة المقياس المباشر بناءاً على معرفتك بقيمة المقياس غير المباشر ؟

(ج) اكتب تقرير مختصر عن النتائج التي توصلت إليها توضح فيه العوامل التي يجب مراعاتها عند اتخاذ القرار بشأن ما إذا كان من الضروري استبدال المقياس المباشر وغير المباشر ؟

(11) نظراً لحدوث تغير في أذواق المستهلك ، لذا فقد شهد منحنى طلب السوق على النبيذ الأحمر الممتاز انحرافاً مضطرداً جهة اليمين وذلك بالنسبة للأسواق الأمريكية . فإذا ما بقي منحنى العرض ثابتاً (ومتجهاً اتجاهاً علوياً جهة اليمين) ، كانت النتيجة حدوث زيادة بمرور الوقت في كل من سعر هذا النوع من النبيذ والكمية المباعة منه .

(أ) إذا كان لنا أن نرسم السعر مقابل الكمية المباعة ، فهل ستقترب العلاقة الناتجة من منحنى الطلب في السوق ؟

(ب) إذا لم تكن كذلك فإلى أي شيء سوف تقترب هذه العلاقة ؟

(12) تستخدم شركة Brennan تحليل الانحدار للحصول على التقديرات التالية لدالة الطلب على منتجاتها :

$$\log Q = 2 - 1.2 \log P + 1.5 \log I$$

حيث Q هي الكمية المطلوبة ، و P هي السعر ، و I هي دخل المستهلك الممكن إنفاقه .

(أ) يفكر رئيس الشركة في تخفيض السعر بنسبة 5% وهو يزعم أن النتائج التي تم الحصول عليها في المعادلة تشير إلى أن التخفيض سيؤدي إلى حدوث زيادة قدرها 6% في عدد الوحدات المباعة . فهل توافقه في هذا الرأي ؟ نعم أم لا ولماذا ؟

(ب) أشار مسئول الخزانة بالشركة إلى أنه طبقاً لمطبوعات الكمبيوتر فإن احتمال أن يكون توزيع T الإحصائي للوغاريتم P بنفس قيمته مع معرفة أن لوغاريتم P ليس له تأثير فعلي على اللوغاريتم Q حوالي 0.5 . فهو يزعم أنه لا يمكن الاعتماد على مرونة السعر . فهل تشاركه في هذا الرأي ؟ نعم أم لا ؟ ولماذا ؟

(ج) كيف يمكن للشركة أن تحصل على تقدير أكثر دقة لمرونة الطلب السعرية ؟

ملحق

معامل الارتباط ومفهوم التغيير المفسر

سنقوم في هذا الملحق بطرح تفسير أكمل لمعامل الارتباط وكيفية إيضاحه . وبادئ ذي بدء يتعين علينا أن نقوم بمناقشة مفهوم التغير ، والذي يشير إلى مربع مجموعة من الانحرافات . فنحن نجد على سبيل المثال أن إجمالي التغيير في المتغير التابع :

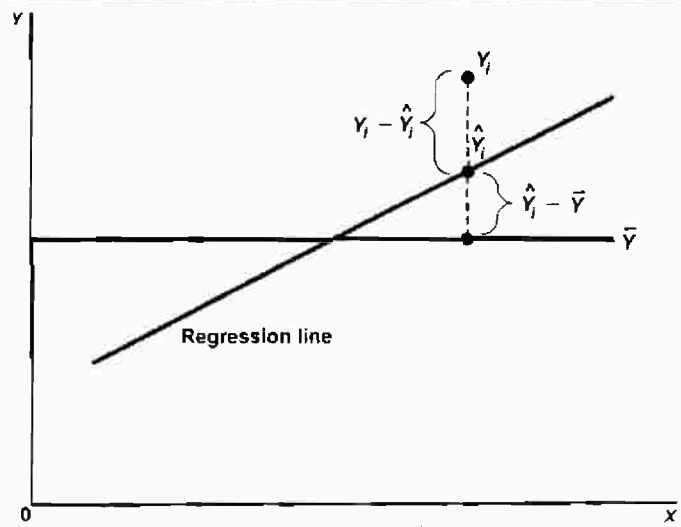
$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2 \qquad (5.17)$$

أي أن إجمالي التغير يساوي مجموع مربع الانحرافات لمتوسط Y .

وإذا أردنا قياس مدى ملائمة خط الانحدار للبيانات المتوفرة ، فلابد وأن نقوم بتقسيم إجمالي التغيير في العنصر أو المتغير التابع إلى قسمين : التغيير الممكن تفسيره بواسطة خط الانحدار ، والتغيير الذي لا يمكن تفسيره بواسطته . وعند قيامنا بهذا الإجراء لابد وأن نلاحظ ما يلي : أنه في حالة المشاهدة i^{th} ، يكون

$$(Y_i-\bar{Y})=(Y_i-\hat{Y}_i)+(\hat{Y}_i-\bar{Y}) \qquad (5.18)$$

حيث $\hat{Y}_i$ هي قيمة Y_i الممكن التنبؤ بها بناءً على خط الانحدار . وبعبارة أخرى ، وكما هو موضح في الشكل (5.13) ، فإن الفرق بين Y_i ومتوسط قيمة Y هو فرق يمكن تجزئته إلى قسمين : الفرق بين Y_i والنقطة الواقعة على خط الانحدار أسفل (أو أعلى) Y_i مباشرةً . والفرق بين النقطة الواقعة على خط الانحدار أسفل (أو أعلى) Y_i مباشرةً و $\bar{Y}$.



شكل (5.13) تجزئة $(Y_i - \bar{Y})$ إلى قسمين : $(Y_i - \hat{Y}_i)$ و $(\hat{Y}_i - \bar{Y})$ وتتم هذه التجزئة لقياس مدى ملائمة الانحدار للبيانات المتوفرة .

هذا ويمكن إثبات أن [24] :

[24] للحصول على هذه النتيجة ، نقوم بتربيع طرفي المعادلة (5.18) ونجمع النتيجة على كافة قيم i ، فنجد أن :

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}[(Y_i-\hat{Y}_i)+(\hat{Y}_i-\bar{Y})]^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2+2\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)(\hat{Y}_i-\bar{Y})$$

الحد الأخير من الطرف الأيمن من المعادلة يساوي صفر ، وهو ما يثبت صحة المعادلة الواردة بعد المعادلة (5.18) .

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2=\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(\hat{Y}_i-\bar{Y})^2$$

ويوضح الحد الذي يظهر في الجانب الأيسر من المعادلة إجمالي التغير في المتغير التابع . أما الحد الأول في الجانب الأيمن من المعادلة ، فانه يقيس التغير في المتغير التابع الذي لا يفسره الانحدار . ويعد هذا شرحاً معقولاً لذلك الحد ، حيث أنه يعبر عن إجمالي مربع الانحرافات للمشاهدات الفعلية المأخوذة من خط الانحدار . ومن الواضح أنه كلما ارتفعت قيمة هذا الحد ، كلما قلت ملائمة معادلة الانحدار للبيانات المتوفرة . أما الحد الثاني في الجانب الأيمن من المعادلة ، فانه يقيس التغير في المتغير التابع الممكن تفسيره بواسطة الانحدار . ويعد هذا شرحاً معقولاً لذلك الحد ، حيث أنه يوضح مقدار التغير الممكن توقعه في المتغير التابع بناءً على الانحدار وحده .

ولقياس دقة ملائمة خط الانحدار البسيط ، يمكننا استخدام معامل الارتباط ، الذي يساوي :

$$1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2} \qquad (5.19)$$

أي أن معامل الارتباط يساوي :

$$1-\frac{\text{التغير غير الممكن تفسيره بواسطة الانحدار}}{\text{إجمالي التغير}}$$

$$=\frac{\text{التغير الممكن تفسيره بواسطة الانحدار}}{\text{إجمالي التغير}} \qquad (5.20)$$

ومن الواضح أن معامل التغير يعد قياساً معقولاً لمدى ملائمة خط الانحدار ، حيث أنه يساوي نسبة إجمالي التغير في المتغير التابع الممكن تفسيره بواسطة خط الانحدار . وكلما اقترب معامل الارتباط من 1 كلما زادت الملائمة ، وكلما اقترب معامل الارتباط من صفر كلما قلت الملائمة .

وعند قيامنا بحساب أحد نماذج الانحدار المتعدد ، فإننا نقوم باستخدام معامل الارتباط المتعدد لقياس دقة ملائمة الانحدار . ويمكن تعريف معامل الارتباط المتعدد بأنه :

$$R^2=1-\frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\hat{Y}_i)^2}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2} \qquad (4.21)$$

حيث $\hat{Y}_i$ هي قيمة المتغير التابع التي يمكن توقعها من معادلة الانحدار . وعليه – كما هو الحال في نموذج معامل الارتباط البسيط الموضح – فإن :

$$R^2=\frac{\text{التغير الممكن تفسيره بواسطة الانحدار}}{\text{إجمالي التغير}} \qquad (5.22)$$

وهو ما يعني أن R^2 تقيس نسبة إجمالي التغير في المتغير التابع الممكن تفسيره بواسطة معادلة الانحدار .