الباب الثالث

أنواع الأعداد فى العالم الفيزيائى

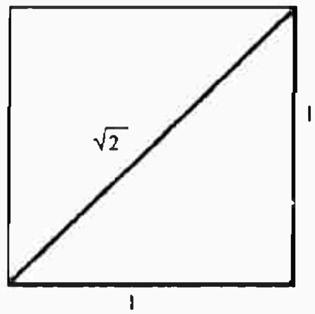
٣ - ١ : الكارثة الأفلاطونية:

دعنا نعود مرة أخرى لطريقة الإثبات العكسية والتى اتبعها ساتشيرى فى محاولته لبرهنة المسلمة الخامسة لإقليدس.

لنبدأ بالسؤال البسيط: هل يمكن أن يوجد عدد نسبى (rational) بحيث أنه عندما أخذ مربعه نحصل على العدد (2)، بكلمات أخرى هل يوجد جذر العدد (2) على شكل كسر مكون من عددين صحيحين فى كل من المقام والبسط. لقد تولدت المشكلة عن نظرية فيثاغورث نفسها حيث أنه برسم مثلث ضلعه الوحدة نحصل على شكل (٣-١):

$$1^2 + 1^2 = 2$$

فى هذه الحالة ما هو طول الوتر؟ إنه يساوى جذر العدد (2). لقد حاول الأفلاطونيون التوصل إلى قيمة هذا الجذر على شكل كسر بسطه ومقامه عددان صحيحان - ولكنهم فشلوا وهذه نتيجة طبيعية.



شكل (٣-١): عندما يكون طول ضلع المثلث قائم الزاوية ومتساوى الساقين يكون طول الوتر هو $\sqrt{2}$.

يمكن التعبير عن ذلك على صورة المعادلة التالية:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

ليس لها حل إذا كان a ، b عددين صحيحين موجبين. سوف نثبت ذلك بالعكس، أى بغرض أنه لا يوجد حل لهذه المعادلة أى يوجد العددان a ، b اللذان يحققان هذه المعادلة. يمكن إعادة كتابة هذه العلاقة على الشكل التالى:

$$a^2 = 2b^2$$

وهذا يعنى أن: $a^2 > b^2 > 0$

العدد $2b^2$ لابد وأن يكون زوجيا لذا نأخذ $a = 2c$، بالتالى نحصل على:

$$b^2 = 2c^2$$

من هذا نخلص إلى $b^2 > c^2 > 0$ وهكذا إذا أخذنا أعدادا أخرى مثل d ، e ... نكتب التالى:

$$a^2 > b^2 > c^2 > d^2 > e^2 > ...,$$

وحيث أن هذه المتوالية العددية غير منتهية لذا فإنه لا يمكن أن يكون جذر العدد (2) عدداً نسبياً (rational).

لقد اضطر اليونانيون القدماء نتيجة هذه الحقيقة أن يبحثوا عن نوع جديد من الأعداد غير الصحيحة والنسبية. لقد وجدوا نوعاً نسميه الآن «بالعدد الحقيقى» (real number). وإن كان جذر العدد (2) ليس عدداً حقيقياً لكن سوف نشرح ذلك فى الجزء القادم، ولكن يمكن أن نقول إن السبب هو أن المتوالية المتناقصة من الأعداد الحقيقية بالنسبة لجذر (2) غير منتهية.

٣ - ٢ : منظـــومة الأعـــداد الحقيقية:

الآن ونحن قد تعودنا على مفهوم الأعداد الحقيقية نقبل بأن الأعداد المثالية (الأفلاطونية) يمكن فكها إلى ما لا نهاية. فمثلاً:

$$\frac{1}{3} = 0.333333333...$$

$$\frac{29}{12} = 2.416666666...,$$

$$\frac{9}{7} = 1.285714281714285...$$

$$\frac{237}{148} = 1.60135135135....$$

كما هو واضح فإنه بالنسبة لكسر ما، عند تحليله عشريا لابد وأن يكون دوريا – أى هناك وحـــدة تتكرر. فى الأمثلة السابقة نـــرى تكرارية الأعداد 285714,6,3 و 135 . لم يكن التحليل العشرى معروفا لليونانين القدماء لذا توصلوا إلى ما يسمى بالكسور المستمرة على الشكل التالى:

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + ...}}}$$

يمكن كتابة أى عدد نسبى أكبر من الوحدة على هذه الصورة؛ كذلك إذا اشترطنا أن يكون العدد الأول أكبر من الوحدة نحصل مثلاً على:

$$\frac{52}{9} = 5 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \frac{1}{2}}}$$

وتكون القسمة منتهية.

بذا أمكن التعبير عن أى عدد غير نسبى على الصورة التالية:

$$\sqrt{2} = 1 + (2 + (2 + (2 + (2 + ...)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}$$

$$7 - \sqrt{3} = 5 + (3 + (1 + (2 + (1 + (2 + (1 + (2 + ...)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}$$

$$\pi = 3 + (7 + (15 + (1 + (292 + (1 + (1 + (1 + (2 + ..)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}.$$

نلاحظ أنه فى المثالين الأولين ظهور متواليتين متكررتين بالتحديد ,1, 2, 2, 2 ....2 وفى المثال الثانى ...,5, 3, 1, 2, 1, 2, 1, 2 وهنا لابـــد أن نذكر أن الأعداد النسبية فقط هى التى تحوى مثل هذه المتواليات المتكـــــررة. لقـــد أثبت ذلك الرياضياتى الفذ جوزيف لاجرانج «Joseph Lagrange». مثل هـــــــذه الأعداد التى يمكن كتابتها على شكل كسور مستمرة تســـمى بالأعداد «غير النسبية التربيعية» (quadratic irrationals) مثل هذه الأعداد تكتب على الشكل التالى:

$$(a + \sqrt{b}),$$

حيث a، b كسران ويكون العدد b ليس مربعًا تامًا. لنورد أمثلة أخرى على الأعداد غير النسبية التربيعية مثل:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \sqrt{10}, \sqrt{11}, ...$$

لطريقة تمثيل مثل هذه الأعداد على شكل كسر مستمر سحر خاص حيث إنها تبدأ برقم A مثلاً، تتبعه متوالية بالندرومية (Palindromic) أى تقرأ من اليمين واليسار مثل:

3, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6, 1, 2, 1, 6,....

هنا A = 3 ثم تأتى المتوالية 1, 2, 1 وتتكرر...

ربما كان اليونانيون القدماء على علم بكل هـــذا وحتى نظـــرية لاجرانج، ولكن كان ينقصهم البرهان، وعلى ما يبدو فإن العالم «ثياتيتوس» Theaetetos المعاصر لأفلاطون كان على علم بكل ذلك، حيث توجد شواهـد على ورود ذلك فى جدليات أفلاطـــون. لقـــد أورد إقليدس فى كتابه العاشر الأعـــداد على

الشكل $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ (حيث a ، b أعداد نسبية وموجبة) – هذه عموماً ليست أعداداً نسبية تربيعية ولكنها تفرض نفسها فى تقنية المسطرة – والفرجار لرسم الأشكال الهندسية المختلفة. وهكذا أمكن لليونانيين القدماء بالتعامل مع مثل هذه الأعداد صياغة هندسة إقليدس بشكل جيد.

هذه الأعداد فى الصياغة الحديثة تسمى بالأعداد الحقيقية، ولم يتبلور تعريف هذه الأعداد إلا على يد كل من ديديكايند (Dedikind) وكانتور (Cantor) وغيرهم فى القرن التاسع عشر. ولكن هنا يلزم ذكر دور العالم اليونانى القديم أويدوكسوس (Eudoxos) وهو من تلامذة أفلاطون – والذى توصل إلى أن هندسة إقليدس يفضل التعبير عنها عن طريق النسب بين هذه الأطوال وليس الأطوال نفسها. لهذا المدخل ميزتان: الأولى أنه فى هذه الحالة نستغنى عن اختيار وحدة طول كالمتر أو الياردة، الثانية أنه يمكن ضرب أى عدد من هذه النسب، أى أنه يمكن الانتقال وبشكل طبيعى من بُعد واحد أو اثنين إلى ثلاثة أبعاد وأكثر كشكل من أشكال تعميم هندسة إقليدس. توصل أويدوكسوس إلى أنه للحكم على أن نسبة ما a : b أكبر من نسبة أخرى c : d يوجد عددان M و N موجبان بحيث إذا أُضيف العدد a بنفسه M مرة أكبر من b مضافاً إلى نفسه N مرة – بينما يضاف العدد d إلى نفسه N مرة يفوق العدد C مضافا إلى نفسه M مرة. كذلك أضاف أويدوكسوس أنه عندما لا تكون النسبة a : b أكبر أو أصغر من c : d يكونان متساويين. هكذا أدخل أويدوكسوس مفهوم العدد الحقيقى عن طريقة النسبة بين الأعداد.

الفارق الجوهرى بين معالجة اليونانيين القدماء لمفهوم العدد الحقيقى والمعالجة الحديثة هو أن اليونانيين القدماء كانوا يعتبرون أن الأطوال معطاة لنا من الفراغ الفيزيائى – أما فى المعالجة الحديثة فهذه الأعداد هى شيء قائم بذاته غير مرتبط بالفراغ الفيزيائى – أى أشكال أفلاطون المثالية. فى الواقع هذا هو ما قام به أويدوكسوس أى الفصل بين الهندسة وعالم الأعداد. هذا موقف مهم خاصة وأنه ظهرت هندسات أخرى غير هندسة إقليدس تعتبر بذاتها عالماً متفرداً – ليس مرتبطاً بالعالم الفيزيائى بشكل جذرى.

وهكذا قام دوديكايند وكانتور بتعريف عالم الأعداد الحقيقية بعيداً عن هندسة العالم الفيزيائى. لقد عرف دوديكايند أن العدد الحقيقى هو مجموعة (set) لانهائية من الأعداد النسبية. وهكذا نتصور أن هذه الأعداد النسبية تترتب تصاعديا إلى اليمين، والسالبة إلى اليسار والصفر فى المنتصف. عندما نقطع هذا الترتيب بسكين ويقع السكين بين أى عددين نسبيين – يقع على عدد غير نسبى. عندما نضيف

مجموعة الأعداد غير النسبية إلى الأعداد النسبية نحصل على عائلة الأعداد الحقيقية. تفضى طريقة دوديكانيد بشكل تلقائى إلى قواعد الجمع والطرح والضرب والقسمة.

أفضى هذا إلى مفهوم النهاية (limit) بدءاً من المثال الآتى عن الكسر المستمر اللانهائى:

$$1 + (2 + (2 + (2 + (2 + \ldots)^{-1})^{-1})^{-1})^{-1}$$

أو:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} \quad \ldots.$$

والتى يمكــن اعتبارهــا أعداداً حقيقية، المثال الأول يعطينا ($\sqrt{2}$) ، والثانى ($\pi/4$) . إن مفهوم النهاية كان مطلوبا وبشدة عند حساب المساحات وكذلك لتعريف العدد الحقيقى.

٣-٣: الأعداد الحقيقية والعالم الفيزيائى:

إن الإطار العام للرياضيات يتطور فى حد ذاته، ولكن بالضرورة يمسى عالمنا الفيزيائى، فمثلاً حساب قطر المربع مشكلة فى حد ذاته، ولكنه مهم أيضاً للقياسات الفعلية فى عالمنا الفيزيائى. هنا يمكن القول بأن الطبيعة تسلك سلوكاً أنيقاً متوافقاً كما هو الحال فى الفكر الرياضياتى. لقد قام مفهوم الأعداد الحقيقية وقدم خدمة جليلة للعالم الفيزيائى الذى يمتد من (10^{12}) متر وحتى (10^{26})م إلى (10^{-17})م، ويظل المفهوم الرياضى ساريا دون تغيير على المسافات الشاسعة وحتى المسافات الضئيلة كما رأينا. فقط عندما نصل إلى $١٠^{-٣٥}$م (مقياس بلانك) عندئذ عند معالجة مسائل الجاذبية الكمية سوف نعيد الرؤية وربما نحتاج إلى نظرة رياضياتية مختلفة.

يمتد مفهوم العدد الحقيقى إلى المساحات والحجوم، وهكذا نرى أننا نتعامل مع أعداد فى حدود $(10^{17})^3$ أى 10^{51} فى أيام إقليدس، الآن نتعامل وحسب النظريات الحديثة مع مقادير فى حدود $(10^{129}) = (10^{43})^3$. من المهم أن نذكر أنه بالنسبة للوقت وحسب النظرية النسبية الخاصة نتعامل مع فراغ رباعى يمثل الزمن أحد أبعاده، وفى حدود $(10^{43}) = (10^{172})$.

من الأهمية بمكان أن نذكر أن النظريات الفيزيائية بدءاً بأرشميدس وجاليليو ونيوتن وحتى ماكسويل أينشتين وشرويدنجر وديراك وغيره – كانت تحتاج لإطار التحليل الرياضى (Calculus) لصياغة هذه النظريات. تكمن كذلك مفاهيم التحليل الرياضى فى تعريف كل من السرعة، العجلة، كمية الحركة والطاقة.

مع كل هذا النجاح ساد الإحساس فى بداية القرن العشرين أننا لابد وأن نتخلى عن هذه النظرية التى تفرض امتلاءً تاماً للفراغ حتى الكميات متناهية الصغر، ولابد

أن نرى العالم الميكروى مختلفا حيث يسود مفهوم الكمات والفراغ المتفتت (discrete) حيث تكتسب كل من الطاقة والدفع والفرم المنزلى مقادير محددة منفصلة تساوى مضاعفات مقدار أساسى.

لقد تنبه لهذه النقطة كل من شرويدنجر وأينشتين وأفصحا عن ذلك يقول كل منهما إننا نحتاج إلى رياضيات جديدة تصف مثل هذا العالم المتفتت.

لقد أسهمت فى هذا الموضوع بوضع نمـوذج شبكات العزم المغزلى (spin networks) والتى تطورت إلى ما يسمى «بنظرية الفتل» (Twist theory) – ومع هذا وحتى الآن تظل نظرية الأعداد الحقيقية كما هى منذ أربعة وعشرين قرنا أساساً لفهمنا لعالمنا الفيزيائى.

٣ - ٤ هـل تحـتاج الأعـداد الحقيقية للعالم الفيزيائى

فى مدخل ديديكايند اعتبرنا أن الأعداد النسبية مفهومة. فى الواقع الانتقال من الأعداد الصحيحة إلى الأعداد النسبية ليس صعبا حيث إن الأعداد النسبية ما هى إلا أعداد صحيحة على شكل كسور. ولكن ماذا عن الأعداد الصحيحة نفسها؟ إن ما قيل عن النظم الفيزيائية فى الصفحات السابقة يجعلنا مؤهلين للحديث عن الأعداد الطبيعية، أى الأعداد المستخدمة فى العدد وامتداداتها بإدخال الأعداد السالبة. إن الأعداد الطبيعية هى الأعداد 0, 1, 2, 3, ... أى أنها الأعداد الصحيحة الموجبة. يضاف الصفر إلى هذه الأعداد بناء على النظرة الحديثة، أما اليونانيون القدماء لم يعتبروا الصفر عدداً. كان لابد أن ينتظر هذا الاعتبار العلماء الهنود مثل «براهماجوبتا (Brahmagupta)، تبعه ماهاڤيرا (Mahavira) وبهاسكارا (Bhaskara) فى القرنين التاسع والاثنا عشر على التوالى، إن الأعداد الطبيعية هى وسيلة العد بصرف النظر عن الفيزياء والهندسة خاصة لأنها تجرى عليها عمليات الجمع والطرح والضرب وبسهولـــة والتى تؤدى إلـــى تولد أعداد طبيعية جديدة .. وهكذا (مثل $37 + 79 = 116$) وهكذا .. هذه العمليات الرياضية لا علاقة لها بطبيعة هندسة العالم الذى نعيش فيه.

إذا كان العالم يحوى عدداً محدوداً من الأشياء، فهل تؤول الأعداد الطبيعية إلى نهاية ما؟ يمكن أن نتصور عالما مكونا من مادة لابلورية لاسمات لها. فى هذه الحالة لم يكن للأعداد الطبيعية ضرورة ولا معنى، ولوجد سكان مثل هذا العالم صعوبة بالغة فى فهم معنى الأعداد الطبيعية. ومع هذا من الصعب تصور عدم وجود وأهمية مثل هذه الكيانات القائمة بذاتها. عند هذه النقطة نرى أن كيان الأعداد الطبيعية قائم بذاته منفصلاً عن عالمنا الفيزيائى ويمكن إدخاله إلى عالم الرياضيات من خلال مفهوم المجموعة (set) والتى طورها جورج كانتور من أفكار جوزيو پيانو (Giuseppe Peano) وأضـــاف إليها عالم الرياضيات الكبير فون نيمان (Von

Neumann) – وربط بذلك بما يسمى بالأعداد الترتيبية (ordinal numbers) أبسط مجموعة هى المجموعة الصفرية كالتالى:

$$\varnothing = \{\quad\}$$

حيث ترمز الأقواس المجعدة إلى مفهوم المجموعة، هذه مجموعة فارغة حيث إنها لا تحوى أى عنصر.

أما المجموعة $\{\varnothing\}$فهى مجموعة تحوى عنصراً واحداً ويمكن أن نربطها بالعدد (1)، والمجموعة $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ بالعدد (2)، والمجموعة $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ بالعدد (3).. وهكذا. بهذه الطريقة أمكننا (بناءً على تصور ذهنى بحت) بناء كيان الأعداد الطبيعية ينتمى إلى الكيانات الرياضية الأفلاطونية ودون أدنى علاقة بالعالم الفيزيائى. وبنفس الطريقة كما أشار ديديكايند يمكن بناء كيان الأعداد الحقيقية ومرة أخرى دون الربط بينها وبين العالم الفيزيائى.

٣ - ٥: الأعداد المتفتتة فى العالم الفيزيائى

يأتى دور الأعداد المتفتتة وهل لها دور فى عالمنا الفيزيائى؟ كما رأينا فإن الأعداد الصحيحة والسالبة والصفر تكوّن مجموعة الأعداد الصحيحة والسالبة والصفر أى مجموعة الأعداد الطبيعية – وتُكوّن منها الأعداد النسبية –ولكن هل للأعداد الصحيحة دور فاعل فى عالمنا الفيزيائى ؟ بالطبع عندما نتحدث عن الشحنة الكهربائية مثلاً فإننا نقول إن الشحنة الأساسية هى شحنة البروتون (أو شحنة الإلكترون) حيث شحنة البروتون موجبة، وعندما يشحن جسم فإنه يكتسب شحنة لابد وأن تكون حاصل ضرب عدد صحيح فى شحنة البروتون، وعندما تكون سالبة ننسبها لشحنة الإلكترون (وهى نفس نسبة شحنة البروتون). وعندما يكون الجسم متعادلا نقول إنه لا يحمل شحنة أى نضوب شحنة البروتون فى الصفر. ولكن الأعداد السالبة وجدت تطبيقا أهم إذا دار الحديث عن الأجسام المضادة (antiparticles) حيث إن العزم المغزلى مثلا لمضاد البروتون له نفس القيمة العددية ولكنها سالبة الإشارة ويُظهر ذلك عند حساب العزم المغزلى لمجموعة من البروتونات ومضاداتها حيث تجمع هذه العزوم جمعا جبريا، وهكذا بالنسبة للخواص الفيزيائية الأخرى عدا الكتلة. ولكن توجد أيضاً ما يسمى بالأجسام الافتراضية – حيث يمكن أن تكون الطاقة سالبة والكتلة سالبة وهكذا.

حسب الرؤية الحديثة فإن البروتون وغيره من الجسيمات التى نعتبرها أولية مكونة من جسيمات أولية أصغر تسمى بالكواركات (quarks) وتربط بينها جسيمات عديمة الشحنة تسمى بالجلويونات (gluons) .

هل للأعداد النسبية انعكاس فى العالم الفيزيائى؟ نعم إذا نظرنا إلى الاحتمالات التى تصاحب الحالات الكمومية وخاصة أنها دائماً كسرية بطبيعة تعريفها.

الآن ننتقل إلى نوع آخر من الأعداد وهى الأعداد المركبة؛ هذه الأعداد السحرية التى فرضت نفسها ووجدت تطبيقات عديدة فى أفرع الفيزياء المختلفة، وأصبحت أداة أساسية فى وصف الظواهر الفيزيائية المختلفة.