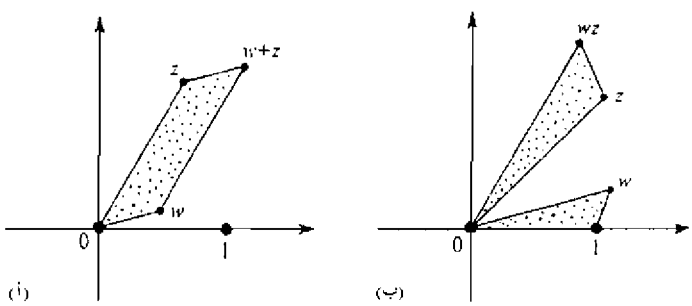
الباب الخامس

هندسة اللوغاريتمات، الأسس والجذور

٥ - ١ : هندسة المستوى المركب:

لنبين الآن بعض الجوانب الهامة وربما الغامضة فى هندسة المستوى المركب وكيف تتشابه الأشكال وهكذا. فى شكل (٥-١) نرى متوازى أضلاع ومثلثين.

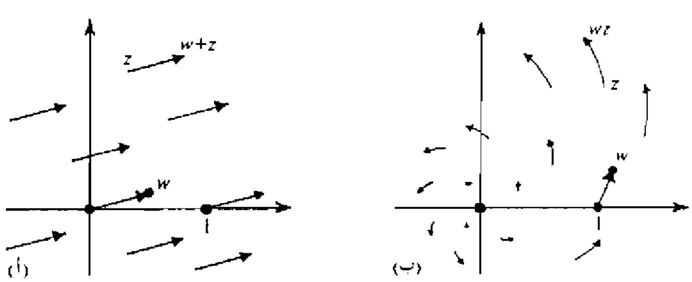


شكل (٥-١): يعطى قانون الجمع z, w + z, w, 0 متوازى الأضلاع كما هو مبين فى (أ)، فى (ب) نرى قانون الضرب وكيف يتشابه المثلثان 0 ، 1 ، w ، 0 ، z ، wz.

نرى أن الخط من (w) إلى (z+w) يوازى الخط من (0) إلى (z). ندرس بعض عمليات التحويل (transformations) مثل خريطة الجمع (addition map)، وخريطة الضرب (multiplication map) أى:

$$z \to w + z, z \to wz.$$

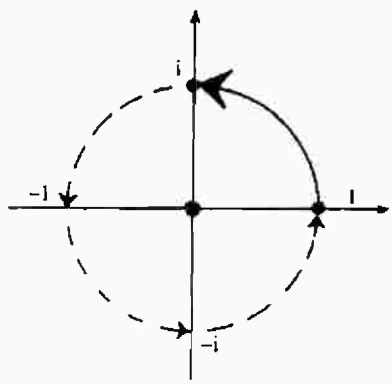
من السهل أن نرى أنه كما هو مبين فى شكل (٥-٢) أن الجمع يجعل المستوى ينزلق دون دوران أو تغير فى اتساعه (التحويل الانتقالى).



شكل (٥-٢): (أ) الانتقال يعنى انزلاق المستوى (+w) وهذا هو الجمع بحيث تنتقل النقطة (0) إلى w (ب) خريطة الضرب (xw) تسبب دورانا وتغير اتساع المستوى (تمدد أو انكماش) وتنقل النقطة (1) إلى (w).

أما بالنسبة لخريطة الضرب فإنه يدع نقطة الأصل كما هى ويحفظ الأشكال أيضاً دون تغيير ويرسل النقطة (i) إلى (w) ولكن فى الحالة العامة هو دوران مع اتساع أو انكماش للأشكال.

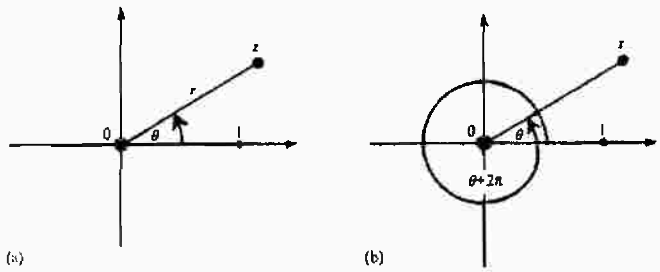
فى الحالة الخاصة عندما تكون w = i يكون الضرب هو مجرد دوران (عكس عقارب الساعة) بزاوية قدرها ($\pi/2$) أى ٩٠°. إذا أجرينا هذه العملية مرتين نحصل على دوران بزاوية قدرها (π) أى كأنه انعكاس للشكل أى أن هذا يعنى أن (i^2) يبعث بالأعداد المركبة إلى قيمها السالبة، وهكذا نرى صورة واضحة للمعادلة اللغز ($i^2 = -1$) كما هو مبين فى شكل (٥-٣).



شكل (٥-٣): عملية الضرب فى (i) تعنى دوران الشكل بمقدار $\pi/2$ وهكذا نرى بشكل واضح معنى المعادلة $i^2 = -1$.

كما نرى الآن أن السبب واضح فى أن جبر الأعداد المركبة شيء مفيد وإن لم يكن واضحاً حتى الآن كيف تستفيد الفيزياء من كل هذا. ماذا عن كل هذا فى الأبعاد الثلاثة أو أكثر ؟ سوف نعود لهذه النقطة فيما بعد.

لقد عرضنا حتى الآن سلوك الأعداد المركبة فى الإحداثيات الكارتيزية، ولكن يمكن أيضاً أن نعرض كل هذا فى الإحداثيات القطبية (polar coordinates). فى هذه الحالة يكون العدد معبراً عن المسافة من نقطة الأصل، والزاوية (θ) هى الزاوية التى يصنعها هذا الخط مع الاتجاه الموجب لمحور (x)، فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة.



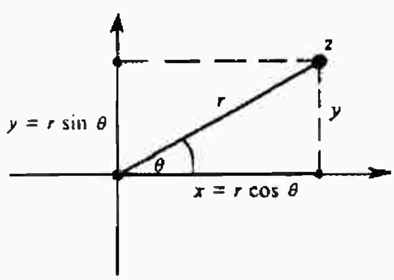
شكل (٥-٤): ننتقل من الإحداثيات الكارتزية إلى الإحداثيات القطبية (أ) يمثل العدد r المسافة بين النقطة الممثلة للمتغير z (ب) الزاوية (θ) هى الزاوية التى صنعها الخط مع الاتجاه الموجب لمحور (x) فى اتجاه عكس دوران عقارب الساعة.

تعرف القيمة r بأنها مقياس (z) وأن θ هى زاوية الطور.

من شكل (٤-٥) نرى أن:

$$x = r\cos\theta \text{ و } y = \sin\theta$$

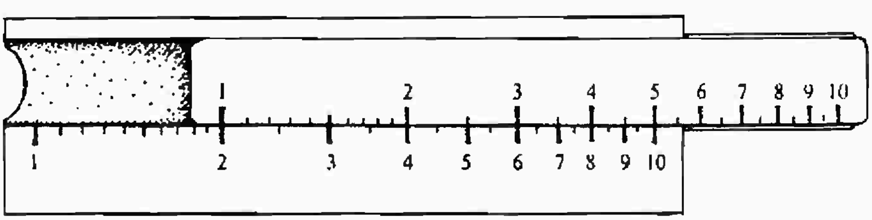
$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ و } \theta = \tan^{-1}(y/x)$$



شكل (٥-٥): يوضح الشكل العلاقات التى أوردناها وتبين المعنى الهندسى لكل منها.

٥ - ٢: اللوغاريتم المركب:

تنبنى فكرة اللوغاريتمات على تحويل عملية الضرب إلى جمع حيث إن $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$ وهى مبينة فى شكل (٥ - ٦) التى تمثل المسطرة اللوغاريتمية.



شكل (٥-٦): المسطرة اللوغاريتيمة حيث تتحول عملية الضرب إلى جمع مسافات على جزئى المسطرة.

يعود ذلك بنا إلى أعمال فيثاغورث، أو يدوكسوس ثم براهماجوبتا وكاردانو وبومبللي لكي نعرف بنفس الطريقة التي نتبعها بالنسبة للأعداد الحقيقية مع الأعداد المركبة، أي:

$$b^z = b \times b \times b \; .....$$

z – مرة

وأيضاً $b^1 = b$ ، $b^0 = 1$ ، $b^{-z} = 1/b^z$ وهكذا.

وكذلك: $b^{(1/n)}$ هي الجذر النوني للعد b. ولكن عندما تكون b عدداً سالباً ننزلق بالضرورة إلى عالم الأعداد المركبة.

ومرة أخرى نعرف $b^{(p+q)} = b^p \times b^q$

وهكذا نعرف اللوغاريتم أنه بالنسبة للعلاقة $(w=b^z)$ هي العلاقة العكسية $(\log_b w = z)$ للأساس b. وأيضاً نكتب:

$$\log_b (pxq) = \log_b p + \log_b q$$

٥ - ٣ : متعـــددات القيمـــة واللوغاريتم الطبيعي:

رغم صحة كل ما ذكرناه إلا أنه يتبع ذلك بالضرورة بعض الصعوبات حيث إن العدد b^z متعدد القيم – فمثلا إذا كانت $z = \frac{1}{2}$ يعنى ذلك وجود عدد t مربعه هو العدد b. ولكننا نعلم أن هناك جذرين دائماً لأى عدد أحدهما موجب والآخر سالب. تتعقد الأمور أكثر عندما نتعامل مع الجذر النونى – عندئذ نحصل على عدد n من الجذور – هذا هو ما نعنيه بتعبير متعددات القيمة. لننظر الآن كيف يمكن التغلب على مثل هذه المشكلة. لنبدأ بما يسمى باللوغاريتم الطبيعي للأساس e وهو عدد يعرف كالتالى:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... = 2.7182818285 \; ....$$

حيث نورد فى المقام مفكوك العدد الذى يسبق علامة التعجب.

وكذلك معنى المفكوك: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n.$

فى هذه الحالة نكتب التالى:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \; ....$$

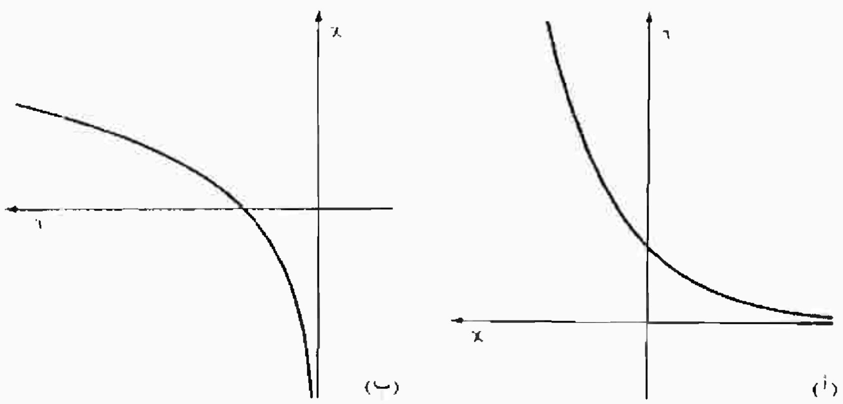
هذه المتسلسلة بالتحديد تتقارب أى أن لها دائرة تقارب لا نهائية.

من الخواص المتميزة لهذه المتسلسلة هو أنه مثلاً عندما تكون $b = e$ ، $z = \frac{1}{2}$ نحصل على الإجابة $e^{1/2}$ ولا نحصل على الجذر السالب. وهذا يحقق المعادلة:

$$c^{1/2} \; . \; e^{1/2} \;\; = e^1 = e$$

وهكذا نرى أن: $z = \log w$ إذا كانت $w = e^z$

ونصل الآن إلى قناعة أنه عدا الصفر فيمكن أن نكتب لكل عدد z بحيث $w = e^z$ يمكن أن نجد $\log w = z$ (نعنى هنا اللوغاريتم الطبيعى) ولكن ما زال هناك تعدد القيمة.



شكل (٥ – ٧): يبين الشكل (أ) منحنى الدالة $r = e^x$ ، **(ب) منحنى الدالة العكسية** $x = \log r$

ولنتذكر أن زاوية العدد المركب (θ) أى الجزء التخيلى له ما هو إلا لوغاريتم بشكل ما. ولنتذكر أيضاً أن هناك لبس فى تحديد قيمة هذه الزاوية، خاصة وأنه يمكن أن نضيف الصفر أو (2π) لهذه الزاوية وتظل قيمتها كما هى لا تتغير، وهكذا يمكننا أن نكتب أنه يوجد حل للقيمة z أو $z + 2\pi in$ وهو حل آخر ممكن حيث n- عدد صحيح.

ورغم أن هذه الصفة تبدو مقلقة وتؤدى إلى غموض ما ولكن بالعكس هذه الصفة صفة رئيسية فى فهمنا لسلوك الأعداد المركبة. نصل الآن للمعادلة السحرية:

$$e^{2\pi i} = 1$$

وأيضاً علاقة «أويلر» الشهيرة:

$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

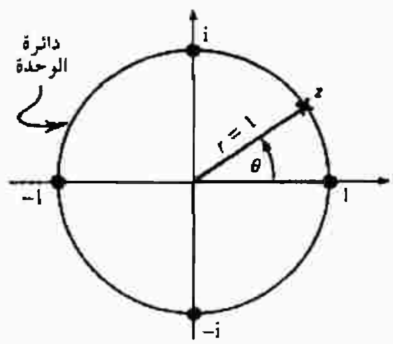
والتى تربط الأعداد السحرية $0, 1, \pi, i, e$ فى رابطة واحدة غاية فى الأهمية. وهكذا يمكن أن نكتب للعدد $z = \log r + i\theta$ الآتى:

$$w = e^z = e^{\log r + i\theta} = e^{\log r}\, e^{i\theta} = re^{i\theta}$$

وهكذا نرى أن حاصل ضرب عددين مركبين هو حاصل ضرب مقياسيهما وجمع زواياهم، أي:

$$re^{i\theta}.s.e^{i\phi} = rse^{i(\theta+\phi)}$$

الدائرة التى نصف قطرها الوحدة (r=1) تسمى بدائرة الوحدة، كما هو مبين فى شكل (٥-٨).



شكل (٥-٨): الدائرة الوحدة والتى تحقق المعادلة $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin \theta$ للقيم الحقيقية للزاوية θ .

من العلاقة : $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin \theta$

نحصل على علاقات تبدو معقدة ولكنها ضرورية ولا غنى عنها فى الكثير من التطبيقات:

$$\cos (a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$$

$$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$$

والأهم:

$$\cos (3\theta) = \cos^3\theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$\sin (3\theta) = 3 \sin \theta \cos^2 \theta - \sin^3 \theta.$$

وهنا تكمن مقدرة التعامل مع الأعداد المركبة أنه وبسهولة نحصل على علاقات معقدة بشكل شبه مباشر.

٥ - ٤ : الأس المركب :

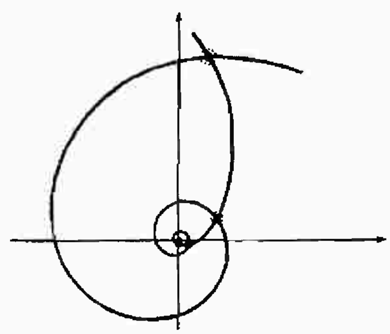
مما سبق يمكننا كتابة التالى:

$$w^z = e^{z\log w}$$

أيضاً يمكن أن نكتب: $e^{z\log w} = (e^{\log w})^z$

وكذلك: $e^{\log w} = w$

كما هو مبين فى شكل (٥-٩)



شكل (٥ – ٩): يبين أن العدد المركب $w^z = e^{z\log w}$ مضافا إليه أى عدد $e^{z2\pi i}$ يظهر كنقاط تقاطع منحنيين حلزونيين يصنعان زاوية ثابتة مع خطوط أشعة تنبع من نقطة الأصل.

من العلاقات البسيطة التى حيرت الرياضياتيين لمدة طويلة العلاقة التالية:

$$i^i = e^{i\log i} = e^{i(\pi/2)i} = e^{-\pi/2} = 0.27879576$$

بناء على العلاقة: $\log i = \frac{1}{2}\ \pi i$

من العجيب هنا أن كل قيم i^i هى قيم حقيقية.

هنا نستنتج أيضاً: $\log w^a = a \log w$

عندما تكون $w = n$ حيث n- عدد صحيح موجب تكون القضية سهلة ونحصل على عدد n من الجذور.

حالة خاصة هامة بل وشديدة الأهمية هى الحالة عندما يكون العدد $w = i$.

فى هذه الحالة نحصل على عدد n من الجذور للعدد (١) حيث إن:

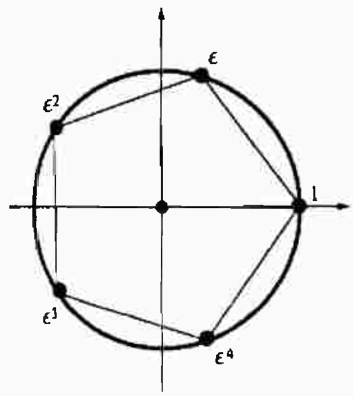
$$\log 1 = 0,\ 2\pi i,\ 4\pi i,\ 6\pi i,\ .....$$

أى أن : $1 = e^0,\ e^{2\pi i/n},\ e^{4\pi i/n}.....$

بذا يمكن أن نكتب هذه الأعداد على الشكل التالى:

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots\ldots$$

حيث $\varepsilon = e^{2\pi i/n}$



شكل (٥-١٠) الجذور النونية للعدد ١ حيث $n = 5$

هذه القيم تكون ما يسمى الزمرة المحدودة التضاعفية (finite multiplicative group) أو الزمرة الحلقية (cyclic group) (Z_n) . صفة مميزة لهذه المجموعة أنه بضرب أى اثنين منها نحصل على ثالث من نفس المجموعة، وكذا بقسمة أحدهما على آخر نحصل على ثالث من نفس المجموعة.

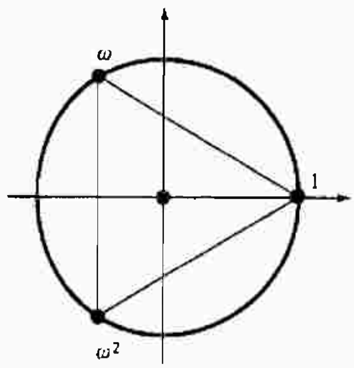
لنعط مثالاً عندما تكون $n = 3$ نحصل على الجدول التالى للقيم المتعاقبة للجذور:

فى الجدول التالى على الجانب الأيسر نرى عمليات الضرب، وفى الجزء الأيمن عمليات القسمة.

x	1	ω	ω^2
1	1	ω	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

÷	1	ω	ω^2
1	1	ω^2	ω
ω	ω	1	ω^2
ω^2	ω^2	ω	1

كما هو مبين فى شكل (٥-١١) نرى كل من ω ، ω^2، 1 كنقاط على دائرة الوحدة فى المستوى المركب.



شكل (٥-١١) : المثلث متساوى الأضلاع يتقاطع مع دائرة الوحدة عند قيم الجذور التكعيبية للعدد 1 وهى 1 ، ω ، ω^2 حيث إن الضرب فى ω يدير النقطة بمقدار °120 عكس عقارب الساعة، والضرب فى ω^2 مع عقارب الساعة.

٥-٥ بعض العلاقات مع الفيزياء الحديثة للجسيمات :

كما ذكرنا سابقاً فإن الأعداد الكمية يمكن فى بعض الأحيان لمجموعة من الجسيمات جمعها ككميات مقياسية. هناك أيضاً بعض من الأعداد الكمية تمثل بجذور العدد (١) وتسمى الأعداد الكمية التضاعفية. ونظراً لعدم انطباق هذه القواعد على كل الأعداد الكمية سوف نعتبر هذه الأعداد الكمية تقريبية.

إن الكميـة المسماة بالتمـاثل الثنائى (Parity) بالنسبة للعدد الكمى التقريبى $n = 2$ المستخدم أيضاً لصفة تماثل تسمى بالتماثل من نوع (g) (g-parity) -- تفيد فى حساب العدد الكمى الكلى لمجموعة من الجسيمات على الشكل التالى -- إذا كان التماثل هذا زوجيا تكون صورة الجسيم فى المرآة هى الجسيم نفسه. أما إذا كان التماثل فرديا فإن صورة الجسيم فى المرآة هو الجسيم المضاد (antiparticle). بالنسبة لهذه الخاصية نجد أنه إذا أخـذنا الانعكاس فى المرآة مرتين نعود لنفس الجسيم وهكذا نرى أن العدد الكمى ولنرمز له ε فى هذه الحالة لابد أن يحقق الشرط $\varepsilon^2 = 1$ أى أنه أحد الجذور النونية للعدد 1 . عندما تكون $n = 2$ (أى تكون $\varepsilon = -1$ أو $\varepsilon = +1$) تكون كل هذه الحسابات تقريبية لأن صفة انخفاض التماثل الثنائى هذه لا تنطبق على ما يسمى بالتفاعلات الضعيفة (weak interactions) – ولذلك فإن قيمة العدد الكمى لهذه الصفة الفيزيائية غير محددة لبعض الجسيمات لهذا السبب بعينه.

صفة التماثل الثنائى تنطبق على نوع من الجسيمات المسماة بالبوزونات، أما العائلة الأخرى فتسمى بالفرميونات. هذا موضوع غير بسيط ولكن يمكن القول بأنه

عند دوران البوزون بزاوية قدرها 2π نحصل على الجسيم مرة أخرى – أما الفرميونات فلابد من دورانها مرتين حتى يعود الجسيم لحالته الأولى.

ولذا يكوّن فرميونان بوزونا واحدا ولكن بوزونان يكونان بوزونا واحدا، وأما بوزون وفرميون يكونان فرميون. لذا يمكن أن نخصص للفرميون عدداً كمياً (-1)، وللبوزون عدداً كمياً (+1).

فى رأيى أنه بالنسبة للعدد الكمى 4 يمكن أن نخصص للفرميون عددين كميين (+i, -i) وأما بالنسبة للبوزون العددين (+1, -1).

بالنسبة للعدد الكمى $n = 3$، والتى أسميها بالكواركية (quarkiness) – هذه ليست تسمية معترف بها حتى الآن – فإنها بالنسبة إلى الجسيمات المسماة بالهادرونات (Hadrons) وحتى البروتونات والنيوترونات والميزونات $\pi-$) والتى يتكون كل منها من كواركات (quarks) والتى يحمل كل كوارك شحنة تعادل ثلث أو ثلثين شحنة الإلكترون، والكواركات لا تستطيع التواجد منفردة ولابد أن تتجمع على شكل جسيمات تحمل شحنة الإلكترون أو مضاعفاتها. لتكن شحنة الإلكترون q، فى هذه الحالة شحنة الإلكترون السالبة تعنى أن عددها الكمى هذا (-1). بالنسبة للكواركات فهناك كوارك يحمل شحنة $q = \frac{2}{3}$ أو $q = -\frac{1}{3}$. للكوارك المضاد تكون الشحنات $q = \frac{1}{3}$ والأخرى $q = -\frac{2}{3}$، ولذا إذا أخذنا للعدد الكمى التضاعفى قيم $e^{-2q\pi i}$ فإنه يأخذ القيم $1, \omega, \omega^2$. وبذا يستطيع الكوارك العيش منفردا إذا حمل كواركيه قدرها 1.

وهكذا وحسب ما ورد فى فقرة (٥–٤) فإن درجة الكواركية تمثل مجموعة حلقية ($\mathbb{Z}_3$). سوف نرى فيما يأتى أنه عندما نضيف الصفر كعنصر فى هذه المجموعة نحصل على ما يسمى بالحقل المحدد (finite field) ($\mathbb{F}_4$).

فى كل ما سبق عرضت لسحر الأعداد المركبة ولكن لم نصل إلى أهم هذه الجوانب السحرية ألا وهو التحليل الرياضى (calculs) باستخدام الأعداد المركبة ولكن قبل ذلك لابد أن نعرض للتحليل الرياضى للأعداد الحقيقية، انطلاقاً من حقيقة أنه لا يمكن فهم الفيزياء دون استخدام التحليل الرياضى كإطار نظرى لكل البناء الفيزيائى.