الباب السادس

التحليـــل الرياضـــى (Calculus) للأعداد الحقيقية

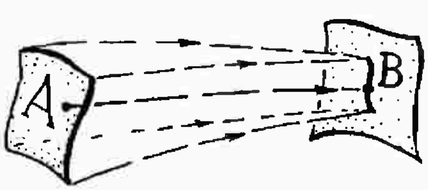
٦ - ١ : الدالة الصادقة:

ينبنى علم التحليل الرياضى على التفاضل والتكامل. يمثل التفاضل معدلات التغير لكمية ما فى نطاق ضيق محلى حول نقطة، أما التكامل والمعنى بالمساحات والحجوم.. وغيرها – فهو يختص بعموميات أشمل. النظرية الأساسية فى علم التحليل الرياضى هو أن التكامل هو معكوس التفاضل.

لقد بدأ علم التحليل الرياضى فى القرن السابع عشر على يد علماء مثل فيرما، نيوتن وليبتبز بناء على أفكار أرشميديس والتى تنتهى إلى علاقات محددة يمكن استخدامها لحساب الكثير من المسائل التطبيقية المطلوبة حتى مع انعدام التفكر العميق فى معنى هذه العلاقات.

ليست هذه المقولة صادقة فى كل الأحوال حيث إنه فى بعض الحالات يكون التكامل أسهل من التفاضل والعكس صحيح، خاصة عندما تعطى الدالة على شكل جدول به المعطيات وغيرها، بل وأحياناً يستحيل إجراء التفاضل لبعض النقاط الخاصة للدوال.

ولكن ما هى الدالة؟ بالنسبة للرياضياتيين أمثال أويلر كانت الدالة تعنى علاقة سهلة وبسيطة مثل x^2 ، sinx أو ($\log 3 - x + e^x$) مثلا. الآن ننظر إلى الدالة كطريقة للإسقاط البيانى (Mapping) لعنصر (A) فى نطاق الدالة (domain) بعنصر آخر فى مدى الدالة (B).... وهكذا. ويسمى المدى بالمستهدف كما هو مبين فى شكل (٦-١) ولكن بهذه الطريقة تبدو الدالة وكأنها جدول لأرقام بعيداً عن سلوكها كمنحنى وخلافه من خواص الدوال الأخرى.



شكل (٦-١) يبين الدالة كنوع من الإسقاط البيانى من المجال (A) على المدى (B) (المستهدف) عنصراً بعنصر.

فى شكل (٦-٢) نرى ثلاث دوال هى $y = x^2, y = |x|, y = \theta(x)$ فى كل الحالات الثلاث يكون كل من المجال والمدى هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$. الدالة $y = x^2$ تعطى مربع العدد الحقيقى، الدالة $y = |x|$ تعطى قيما موجبة دائماً للمدى حتى بالنسبة للقيم السالبة فى المجال. الدالة $y = \theta(x)$ صفرية لكل المجال السالب وتساوى الوحدة لكل القيم الموجبة للمتغير (x)، ولابد أن نعين قيمتها عندما تكون $x = 0$ تكون $\theta(0) = \frac{1}{2}$. هذه الدالة تسمى دالة الخطوة (step function) لهيڤيسايد (Heaviside) والذى اشتهر بشىء آخر لاكتشافه طبقة فى الغلاف الجوى مهمة جداً للبث الإذاعى وتسمى بطبقة هيڤيسايد، ولكن أويلر كان سيعانى من مشكلة إذا توقفنا عند التعريف السابق للدالة كمجرد إسقاط بيانى بين مجموعتين إذا قبلنا الدالة $y = (x)$ فيمكن كتابة الدالة $y = \theta(x)$ على الشكل التالى:

$$\theta(x) = \frac{|x| + x}{2x}$$

ولكن هذه الصورة سوف تعانى من مشكلة أنه عندما تكون $x = 0$ سوف نحصل على كسر على شكل ($\frac{0}{0}$).

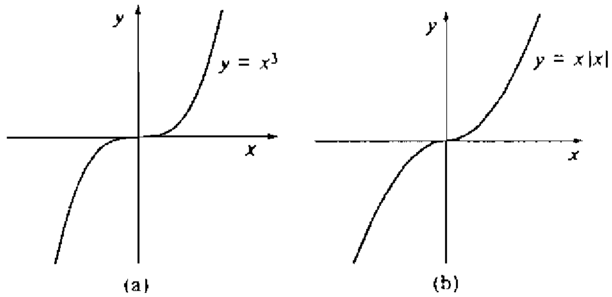
كذلك بالنسبة للدالة $y = |x|$ ليست ملساء (smooth) لأنها عند النقطة $x = 0$ ليس لها ميل محدد.

لنضع ضوابط لهذه العملية فى الفقرة القادمة.

٦ - ٢ : ميل الدالة:

من أهم مهام التفاضل هو إيجاد ميل الدالة. لنفس هذا السبب بالتحديد نقول إن الدالة $y = |x|$ غير تفاضلية لأنها تفتقد وجود ميل محدد عند نقطة الأصل. الدالة $y = \theta(x)$ أسوأ من هذه الناحية حيث أنها تعانى قفزة عند نقطة الأصل ولذا فهى ليست استمرارية. لذا تعتبر نقطة الضعف فى الدالة $y = |x|$ ليس فى أنها غير استمرارية وإنما فى أنها غير قابلة للتفاضل عند نقطة الأصل.

مثل هذه الصفات لم تكن لتسعد أويلر وحتى يمكن ألا نعتبر هاتين الدالتين دوال سليمة (proper). لننظر الآن فى الدالتين $y = x^3$ ، $y = x|x|$ المبينتين فى شكل (٦ - ٣).



شكل (٦-٣): يبين منحنيات الدالتين $y = x^3$ ، $y = x\,|x|$

شيء ما غير مريح فى الدالة $y = x|x|$ عند النقطة $x = 0$ حيث إن انحناءها غير محدد. يتعلق هذا بالمشتقة الثانية، أى عندما نفاضل هذه الدالة مرتين عند هذه النقطة. لكى نتفهم هذه النقطة لنشرح كيف يتم إجراء التفاضل. هذا مبين فى شكل (٦ – ٤) حيث نوضح كيف يتم رسم المماس.

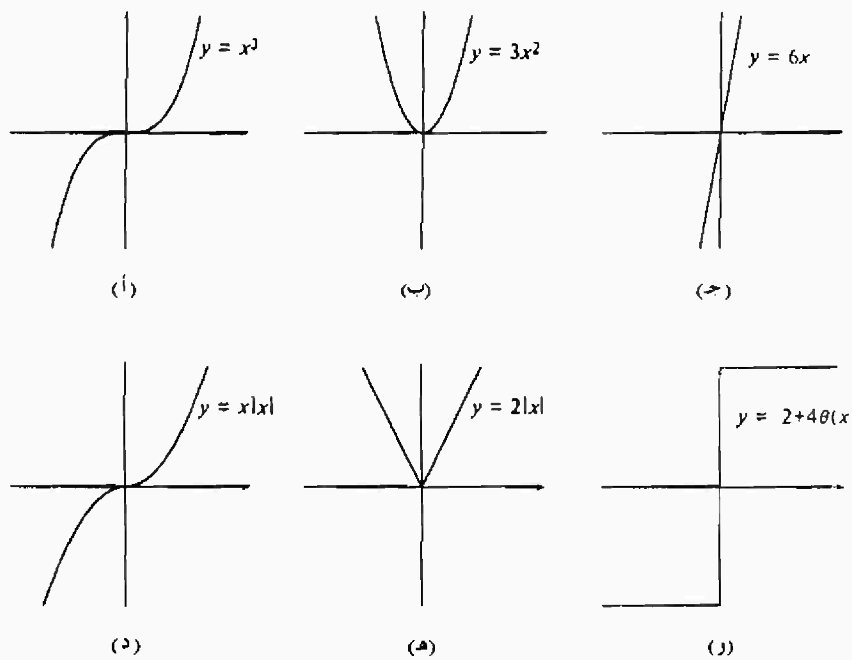
شكل (٦-٤): (أ) الدالة $y = f(x)$ ، (ب) المشتقة الأولى $u = f'(x) = (dy/dx)$، (جـ) المشتقة الثانية $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ لاحظ وجود مماس أفقي للدالة عندما تكون المشتقة صفرا، ولها نقطة انقلاب عندما تقطع $f''(x)$ محور x .

فى شكل (٦-٤) مبينة الدالة $f(x)$ ومشتقاتها الأولى والثانية والمماس عند نقطة p ومعنى المشتقة أننا نأخذ إزاحة ضئيلة فى x أى dx ، ثم نأخذ إزاحة ضئيلة مقابلة فى y أى dy، ثم نقسم الثانية على الأولى. سوف نناقش فيما يلى المشتقات الأعلى.

٦ - ٣: المشتقات العليا - C^∞ الدوال الملساء

عند أخـــذ المشتقة الثانية فســـوف نفاضل المنحنى $f'(x)$ المبين فى شكل (٦ - ٤ب) ونبين فى الشكل (٦-٤ جـ) شكل المشتقة الثانية.

فـــى شكـــل (٦-٥) نبين المشتقتـــين الأولى والثانيـــة للـــدالتين $y = x^3$ ، و $y = x|x|$.



شكل (٦-٥) يبين الدالتين $y = x^3$ ، $y = x|x|$ ، ومشتقاتهن الأولى والثانية.

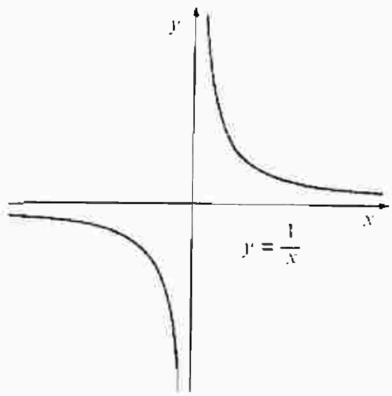
وواضح من شكل (٦-٥) كيف تظهر «عيوب» هذه الدوال عندما ندرس سلوك المشتقات العليا.

ربما اعترض البعض كيف نكتب المشتقة الأولى للدالة $y = x\,|x|$ وهى غير قابلة للاشتقاق أصلاً ولكن هذا بغرض إيضاح المشاكل التى تحدث عندما نتجرأ ونشتق هذه الدالة ومثيلاتها.

يمكننا بناء دوال بحيث لا تظهر هذه المشاكل إلا عندما نجرى الاشتقاق مرات عديدة - وفى هذه الحالة نستخدم التعبير عن ذلك على شكل أن الدالة ملساء C^n إذا أمكن اشتقاقها n مرة وتكون استمرارية ولكن هذه الدالة ليست ملساء C^{n+1} عند نقطة الأصل.

أما بالنسبة للدالة الملساء C^∞ فيمكن اشتقاقها أى عدد من المرات كما هو واضح من الرمز نفسه لأنها ستظل دائماً وأبداً ملساءً واستمرارية.

فى شكل (٦-٦) نواجه مشكلة من نوع جديد - حيث إن الدالة $y = 1/x$ تؤول إلى ما لا نهاية من الطرفين عندما تكون $x = 0$.

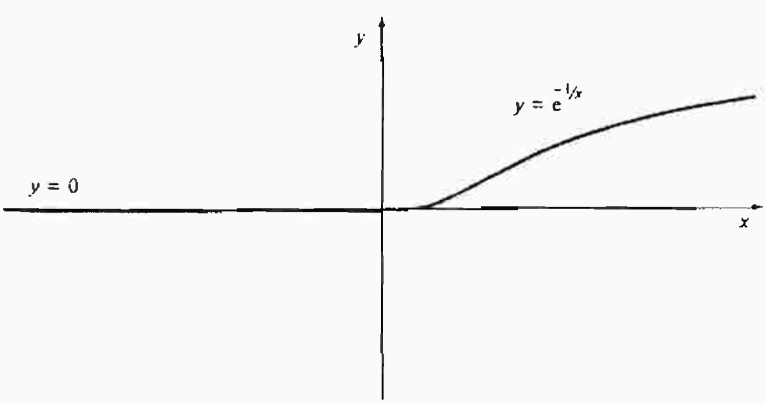


شكل (٦-٦): يبين الشكل مشكلة تنامى الدالة $y = \frac{1}{x}$ إلى ما لا نهاية عند النقطة $x = 0$.

كل هذا لم يكن ليزعج أويلر ولكن لنأخذ دالة أخرى مثل:

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{if } x > 0. \end{cases}$$

والمبينة فى شكل (٦-٧) هذه الدالة كما نرى ملساء جداً وهى ملساء C^{∞} على كل مجال الأعداد الحقيقية.



شكل (٦-٧) : رسم الدالة $y = 0 \text{ for } x \leq 0,\ e^{-1/x} \text{ for } x > 0$

من الواضح رغم أن هذه الدالة ملساء واستمرارية إلا أنها فى الواقع دالتان تم لصقهما سويا.

هذا عكس الدالة $y = 1/x$ وهى دالة واحدة ولكنها انقسمت إلى قطعتين عند نقطة $x = 0$ المزعجة، يمكن القول بأن الدالة $\theta(x)$ لم يلتصقا جيداً وذهبت كل قطعة فى منحنى مختلف.

٦ - ٤ : مفهوم أويلر عن الدالة:

واضح من الأمثلة التى أوردناها أن شرط الملسائية C^{∞}- ليس كافيا سواء كانت الدالة قطعة واحدة أو مكونة من عدة قطع.

شيء سحرى هنا فى الدوال ذات المتغير المركب وهو أنه يكفى أن تكون الدالة $f(z)$ قابلة للاشتقاق مرة واحدة أى ملساء C'- لتكون قابلة للاشتقاق لأى عدد من المرات بعد ذلك. هذه هى الخاصية السحرية لدوال المتغير المركب.

لنعد إلى موضوع المتسلسلات الأسية ونرى جانباً آخر سحريا للدوال ذات المتغير المركب.

بداية لنأخذ المتسلسلة الأسية على الشكل التالى:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

لكى يكون هذا التعبير الرياضى صحيحاً لابد وأن تكون الدالة $f(x)$ ملساء C^{∞}- أى يوجد لها ..... $f'(x), f''(x),$ أى المشتقات الأولى والثانية والثالثة ... وهكذا ولو عند النقطة $x = 0$، ولابد من شرط أن تكون ملساء C^{∞}-.

الناتج يسمى بمتسلسلة ماكلورين (McLourin) أى على شكل:

$$a_0 = f(0),\ a_1 = \frac{f'(0)}{1!}\ ,\ a_2 = \frac{f''(0)}{2!}\ \ ......$$

ولكن ماذا عن السؤال العكسى؟ أى أنه إذا كتبت هذه المعاملات بهذه الطريقة - هل الناتج هو دالة ملساء C^{∞}-؟

لنعد إلى الدالة $h(x)$ لنرى أن هناك خللا ما عند النقطة $x = 0$. الهدف هو معرفة ما إذا كان ممكنا فك هذه الدالة على شكل متسلسلة أسية. لنأخذ $f(x) = h(x)$ ونعالج المعاملات .... a_0, a_1, a_2 مع ملاحظة أنهم جميعاً لابد وأن يساووا الصفر عندما تكون x على يسار نقطة الأصل. فى الواقع جميعهم يساوون الصفر أيضاً بالنسبة للدالة $e^{-(1/x)}$ وهذا هو السبب الأساسى فى كون الدالة $h(x)$ هى دالة ملساء C^{∞}- عند نقطة الأصل وكل مشتقاتها متوافقة من الناحيتين اليمنى واليسرى عند نقطة الأصل. ولكن كل هذا يعنى أنه من المحال أن المتسلسلة الأسية فعالة لأن كل الحدود صفرية، ولذا مجموعهم لا يساوى $e^{-1/x}$. لذا فهناك خلل ما

عند النقطة $x = 0$ ، أى أن الدالة $h(x)$ لا يمكن فكها فى متسلسلة أسية. فى هذه الحالة نسمى الدالة $h(x)$ غير تحليلية (non-analytic).

لقد كنت فى كل ما سبق أستند إلى ما يسمى فك الدالة عند نقطة الأصل. ولكن ماذا عن النقاط الأخرى؟ يمكن إزاحة نقطة الأصل بمقدار p ثم نكتب الدالة على شكل متسلسلة أسية على الصورة التالية:

$$f(x) = a_0 + a_1 (x - p) + a_2 (x - p)^2 + a_3 (x - p)^3 + ...$$

حيث:

$$a_0 = f(p),\ a_1 = \frac{f'(p)}{1!}\ ,\ a_2 = \frac{f''(p)}{2!}\ ,\ a_3 = \frac{f'''(p)}{3!}$$

يسمى هذا بالفك فى متسلسلة أسية حول النقطة p. وتسمى الدالة تحليلية إذا أمكن فكها فى متسلسلة أسية عند النقطة $x = p$ وفى مجال ما حولها. إذا كانت الدالة تحليلية عند كل نقاط المجال الخاص بها تسمى دالة تحليلية، أو بشكل كما تعودناه دالة ملساء -C^∞. الدوال التحليلية أكثر ملسائية (smoothness) حتى عن الدوال الملساء -C^∞ . ثمة خاصية هامة للدوال التحليلية وهى عدم إمكانية رتق دالتين مختلفتين كما فعلنا مع الدوال $\theta(x), |x|, x|x|, x^n|x|$. هذه الدوال التحليلية هى حقيقة دوال صادقة (honest).

ليس الحكم على جودة الدالة من خلال المتسلسلات الأسية كل شيء، حيث إن الدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ ليست تحليلية عند النقطة $x = 0$، ولكنها دالة واحدة. استخدام التحليل الرياضى المركب اقتصادى جداً عند دراسة هذه الأمور حيث إن التحليل الحقيقى لا يخبرنا بهذا مباشرة. من وجهة نظر التحليل المركب الدالة ($\frac{1}{x}$) دالة واحدة.

٦-٥ قواعد التفاضل :

لقد أصبح الاشتقاق لأى دالة يتم بشكل آلي حسب بعض القواعد، ويمكن عرض ملخص لهذه القواعد كالتالى :

الدالة الأسية: $d(x^n) = nx^{(n-1)}\, dx$

مجموع دالتين: $d[f(x) + g(x)] = d\, [f(x) + y(x)]$

دالة مضروبة فى ثابت: $d[a\, f(x)] = a\, d\, f(x)$

مشتقة ثابت: $da = 0$

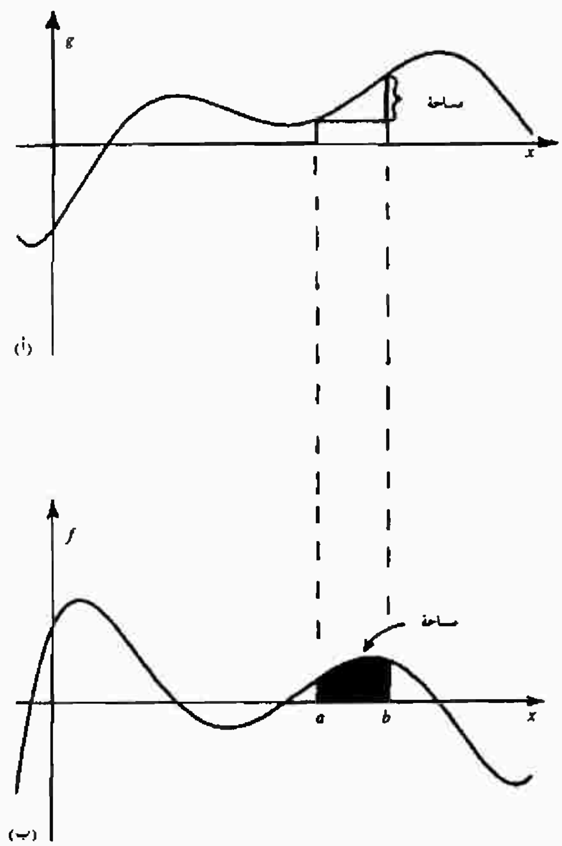
حاصل ضرب دالتين: $d[f(x)\, g(x)] = g(x)\, df(x) + f(x)\, dg(x)$

خارج قسمة دالتين: $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x).\, df(x) - f(x)\, dg(x)}{g(x)^2}$

مع معرفة هذه القواعد يمكن إجراء اشتقاق أى دالة أو مجموعة دوال ولكن بشكل آلى دون النظر لعمق هذه العملية وكيف تم التوصل إليها.

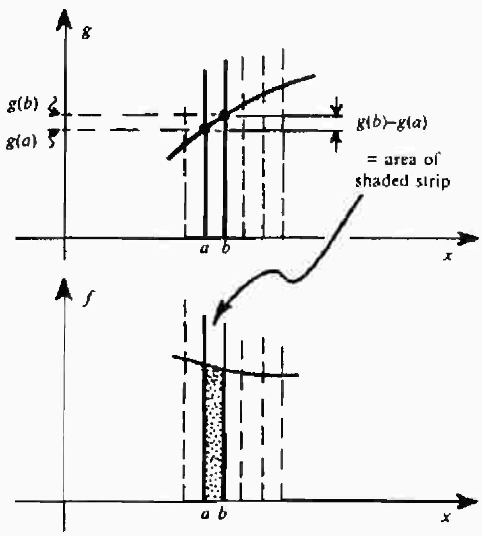
لا ينطبق هذا على عملية التكامل كما سنرى.

٦ - ٦ التكامل : التكامل وهو عكس التفاضل أى البحث عن الدالة f(x) والتى تعرف مشتقتها f'(x) من أهم الأمور هنا هو النظرية الأساسية فى التكامل وهى تختص بحساب مساحات الأشكال المحصورة بين المنحنى الممثل للمشتقة ومحور x .



شكل (٦-٨) : يبين الشكل النظرية الأساسية فى التكامل المنحنى العلوى هو مساحة الشكل تحت المنحنى المبين فى الشكل السفلى بين النقطتين a ، b كما هو مبين.

طبعاً فى مثل هذه الحالات لابد وأن نكون حذرين من ناحية الإشارة. فى شكل (٦-٩) نبين هذا بشكل أوضح حيث تكون قيمة الدالة عند نقطة مساوية لمساحة شريحة .



شكل (٦-٩) يبين أن قيمة الدالة g(a) هي مساحة الشريحة f(x) (b-a) حيث b قريبة جداً من a.
تؤخذ الشريحة العريضة كمجموع الشرائح الصغيرة.

هنا نقطة أساسية لابد من التوقف عندها وهو تعدد القيمة بالنسبة للدالة g(x) لأنه حقيقة كان اهتمامنا منصبا على الفروق بين ارتفاعات نقاط الدالة g(x)، أى أن انزلاق المنحنى إلى أعلى أو إلى أسفل لا يعنى شيئاً لما قمنا به أثناء عملية التكامل. هذا يعنى أنه بإضافة «ثابت» إلى الدالة بعد إجراء التكامل تظل النتيجة صحيحة أى:

$$d[g(x) + c] = dg(x) + dc = f(x)\,dx + 0 = f(x)\,dx.$$

هذا ما يسمى التكامل غير المحدد (Indefinite Integral) أى:

$$\int_a^b f(x)\,dx = g(b) - g(a)$$

كما نرى تبدو الأمور سهلة ولكن لنعد إلى الدالة الأسية x^n. مما سبق نرى أن تكامل مثل هذه الدالة يعطى $x^{n+1}/(n+1)$ – وتسير الأمور على ما يرام إلى أن نصل إلى الحالة عندما تكون $n = -1$.

من حسن الحظ أنه يوجد تكامل مثل هذه الدالة بحيث:

$$d\,(\log x) = x^{-1}dx$$

فى هذه الحالة كنا محظوظين حيث إننا نعرف الكثير عن الدالة اللوغاريتمية ولكن فى بعض الحالات تتعثر الأمور ولا يوجد تكامل لبعض الدوال ويحتاج الأمر

إلى تعريف خاص بهذه الدوال، بل إنه من الغريب أنه أحياناً لا توجد مشتقة لبعض الدوال، أى أن المشكلة ليست قاصرة على التكامل بل على التفاضل أيضاً.

تكمن مشكلة التفاضل فى أنه يعتمد اعتماداً كبيراً على شكل وسلوك الدالة بحيث إذا أعطيت الدالة على شكل جدول يحوى أرقاما تبين العلاقة بين المتغير والدالة تصبح عملية التفاضل عملية شاقة. ولذا من ناحية المبدأ وحيث إن التكامل يهتم بالصورة العامة للدالة فقط فإنه يصبح القول بأن كل دالة استمرارية (دالة -C^0) ويكون مجالها مغلقاً $a \le x \le b$ يمكن تكاملها، وتكون النتيجة (دالة -C^1) أى (ملساء -C^1). هذه الدالة بدورها يمكن تكاملها ونحصل على دالة -C^2 وهلم جرا. لا ينطبق كل هذا على التفاضل حيث يتوقف عند نقطة ما وتكون الدالة التى حصلنا عليها عند هذه النقطة غير قابلة للاشتقاق.

هنا عدة مداخل لعلاج مثل هذه المشكلة - مثلاً عندما سمحنا لأنفسنا بأن نشتق الدالة $y(x) = |x|$ وحصلنا على الدالة $\theta(x)$ - وإن كانت $|x|$ غير قابلة للاشتقاق . يمكننا محاولة اشتقاق الدالة $\theta(x)$ رغم أن المماس لها رأسى أى أن ميلها عند هذه النقطة $(x = 0)$ لا نهائى. أحد هذه المداخل ما يسمى بدالة ديراك (Dirac) وهى دالة غاية فى الأهمية لميكانيكا الكم - رغم أنها ليست دالة على الإطلاق، فهى دالة قيمتها لا نهائية عند نقطة الأصل وصفر فى كل النقاط الأخرى، فى الواقع دالة ديراك تمثل نوعاً من «التوزيع» (Distribution) وهذه التوزيعات هامة فى كل أفرع الفيزياء.

يلزم لذلك أن نوسع قصدنا بالدوال -C^n لتشمل الحالات التى تكون فيها n عدداً سالباً. فى هذه الحالة الدالة $\theta(x)$ هى -C^{-1} ودالة ديراك (دالة دلتا) هى دالة -C^{-2} ، وفى كل مرة نجرى الاشتقاق لابد وأن نضيق حيز الاشتقاق بمقدار الوحدة (أى يزداد حيز الاشتقاق بمقدار وحدة سالبة). يبدو بهذا أننا نبعد أكثر وأكثر عن مفهوم أويلر عن الدالة الدمثة (decent) ولكن وهنا بالتحديد يأتى التحليل المركب بجوانب سحرية، ولكن لابد أن ننتظر قليلاً حتى نعبد الطريق لعرض هذه الجوانب السحرية للتحليل المركب.