الجزء الثالث

تكوين وإدارة محافظ الأوراق المالية

الفصل التاسع : النظريـــة الحديثـــة لإدارة محفظـــة الأوراق الماليـــة والتحليل الإستثمارى

Modern Portfolio Theory and Investment Analysis

الفصل العاشر : تحديد المحفظة المثلى للأوراق المالية عند كل درجة مخاطرة **Delineating Efficient Portfolios**

الفصل الحادي عشر : الأدوات المستخدمة في تحديد المنحنى الكفء

Techniques for Calculating the Efficient Frontier

الفصل الثاني عشر : هيكل الإرتباط بين عوائد الأوراق

نموذج المؤشر الواحد

The Single Index Model

الفصل الثالث عشر : نموذج تسعير الأصل الرأسمالى

The Capital Assest Pricing Model (CAPM)

الفصل السابع
النظرية الحديثة
لإدارة محفظة الأوراق المالية والتحليل الإستثمارى
Modern Portfolio
Theory and Investment Analysis

1.9 مقدمة:

يكاد يمتلك كل فرد أياً كان مستواه محفظة ما، أى مجموعة من الأصول الخاصة ، والتى قد تتكون من منزل ، سيارة ، ثلاجة ، أو قطعة أرض ، وقد تحتوى أيضا على مجموعة من الأصول المالية كالودائع وشهادات الإستثمار وغيرها من الإستثمارات .

وسوف نركز اهتماماتنا فى هذا الفصل على الأصول المالية وبصفة خاصة الأسهم والسندات ، وذلك رغم أن التحليل الخاص بالأسهم والسندات ينطبق مع شيء من التطويع على باقى الأصول الاخرى.

ونقتضى دراسة الأسهم والسندات ضرورة تحديد العائد المتوقع، ثم تحديد المخاطر الناجمة من هذا الإستثمار، والتى تتمثل فى التقلبات المتوقعة فى هذا العائد. ويتم دراسة العائد المتوقع عن طريق حساب المتوسط المرجح، ثم دراسة درجة المخاطرة عن طريق حساب التباين حول هذا المتوسط، ثم حساب الإنحراف المعيارى كمقياس لهذه المخاطره. وقد يقوم البعض فى ضوء ذلك بإستبعاد تلك الورقة التى يوجد بديل أفضل منها ، كأن نستبعد ورقة تحقق عائد معين عند مستوى مخاطرة معينة وذلك إذا ما توصلنا إلى ورقة أخرى تحقق

عائد أعلى عند نفس مستوى المخاطرة أو تحقق نفس العائد عند مستوى مخاطرة أقل. ولا يتوقف الأمر على حساب العائد والمخاطر الخاصة بكل ورقة، وإنما يقتضى الأمر أيضاً ضرورة حساب العائد والمخاطر الخاصة بمحفظة مكونة من مجموعة من الأوراق المالية.

2.9 حساب العائد الخاص بالإستثمار فى ورقة مالية ما

إن العائد الذى تحققه الورقة المالية لايكون مؤكد الحدوث ، وانما عادة ما يتغير العائد من سنة إلى أخرى ، ولذا يتم حساب متوسط العائد فى السنوات المختلفة السابقة ثم اتخاذ هذا المتوسط كأساس لحساب العائد المتوقع نتيجة إقتناء هذه الورقة . ويتم التعبير عن هذا المتوسط كما يلى:

$$R_{ij} = \frac{D_{ij}}{Price_{ij-1}} + \frac{Price_{ij} - Price_{ij-1}}{Price_{ij-1}}$$

$$\bar{R}_i = 1/M \sum_{j=1}^{M} R_{ij} \qquad (1)$$

حيث

D_{ij} توزيعات الأرباح الخاصة بالورقة i فى السنة j .

$Price_{ij}$ سعر الورقة i فى السنة j .

R_{ij} العائد المحقق للورقة i فى السنه j ، حيث $j = 1, 2,...,M$

$\bar{R}_i$ متوسط العائد الخاص بالورقة i ،

كما قد يتوافر معلومات كافية عن العائد المتوقع من إقتناء الورقة المالية فى ظل الظروف المختلفة ، كظروف الرواج وظروف الكساد ، أو العائد المتوقع فى ظل درجات الحرارة المختلفة كما هو الحال بالنسبة للشركات الزراعيـة والتـى يتوقف العائد المحقق فيها على الظروف الجوية السائدة . ويـتم تلخـيص هـذه المعلومات أو التعبير عنها فى شكل توزيعات إحتمالية كما يلى:

Event الحدث	Probability الاحتمال	Return العائد
1	1/3	12
2	1/3	9
3	1/3	6

ويتم حساب متوسط العائد فى هذه الحالة كما يلى :-

$$\bar{R}_i = 1/3 \text{ x } 12 + 1/3 \text{ x } 9 + 1/3 \text{ x } 6 = 9$$

ويتم التعبير عن ذلك رياضيا كما يلى :

$$\bar{R}_i = \sum_{j=1}^{M} P_{ij} \quad R_{ij} \qquad (2)$$

حيث :

$\bar{R}_i$ = متوسط العائد المتوقع من إقتناء الورقة i .

R_{ij} = العائد المتوقع من الورقة i فى ظل الظروف j ، حيث $J = 1, 2, \ldots, M$.

P_{ij} = الإحتمال الخاص بحدوث الحدث j بالنسبة للورقة i.

ونلاحظ أن المعادلة (1) هى حالة خاصة من المعادلة (2) والتى تتحقق فى حالة تساوى الإحتمالات ، إذ يتم استبدال P_{ij} بـــ $1/M$، وبالتالى تأخذ المعادلـــة (2) الصورة المبسطة كما فى المعادلة (1) .

ونلاحظ هنا أن متوسط العائد المحقق من ورقة ما $\bar{R}_i$ هو نفســـه القيمـــة المتوقعة لعائد هذه الورقة والذى يرمز له بـــ $E(R_i)$ ، أى أن :

$$E(R_i) = \bar{R}_i$$

ويجدر الإشارة هنا إلى مجموعة من الملاحظات الخاصة بالقيمة المتوقعـــة نوردها فيما يلى:

- إن القيمة المتوقعة لمجموع إيرادات ورقتين تتساوى مع مجمـــوع القيمـــة المتوقعة للورقة الأولى والقيمة المتوقعة للورقة الثانية أى أن:

$$E(R_{1j} + R_{2j}) = E(R_{1j}) + E(R_{2j})$$
$$= \bar{R}_1 + \bar{R}_2 \qquad (3)$$

- أن القيمة المتوقعة لإيرادات ورقة ما مضروبة فى مقدار ثابت ، تتســـاوى مع حاصل ضرب هذا المقدار الثابت فى القيمة المتوقعة لإيراد الورقـــة ، أى أن :

$$E(C(R_{ij})) = CE(R_{ij})$$
$$= C\bar{R}_i \qquad (4)$$

ويمكن توضيح العلاقتين السابقتين بالمثال التالى:

Event	Probability	Asset(1)	Asset2)	Asset(3)
A	1/3	14	28	42
B	1/3	10	20	30
C	1/3	6	12	18
$\bar{R}_j$		10	20	30

إذ نلاحظ أن الأصل الثالث ماهو إلا مجموع الأصل الأول والثانى .

$$E(R_{1j} + R_{2j}) = 30$$
$$E(R_{1j}) = 10$$
$$E(R_{2j}) = 20$$
$$E(R_{1j} + R_{2j}) = E(R_{1j}) + E(R_{2j})$$

كما نلاحظ أن إيرادات الأصل الثانى ما هى إلا إيـرادات الأصـل الأول مضروبة فى المقدار الثابت 2 .

$$E(R_{2j}) = E(2R_{1j}) = 20$$
$$2E(R_{1j}) = 2 \times 10 = 20$$
$$E(R_{2j}) = E(2R_{1j}) = 2E(R_{1j})$$

3.9 حساب المخاطر الخاصة بالورقة المالية

يتم حساب المخاطر الخاصة بالإستثمار فى أصل ما (ورقـة ماليـة)عـن طريق محاولة قياس مدى إنحراف الإيرادات المحققة عن المتوسـط أي مـدى انحراف الإيرادات عن أو القيمة المتوقعة لهذه الإيرادات ويتم ذلك عن طريـق حساب التباين كما يلى :

$$\sigma_i^2 = 1/M \sum_{j=1}^{M} (R_{ij} - \bar{R}_i)^2 \qquad (5)$$

أو يتم التعبير بشكل أكثر شمولا كما يلى :

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{M} P_{ij} (R_{ij} - \bar{R}_i)^2 \qquad (6)$$

ويكون الانحراف المعيارى σ_i، والذى يتم حسابه بأخذ الجذر التربيعى للتباين، هو بمثابة مقياس لمخاطر هذه الورقة المالية، أى أن :

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$$

وعلى هذا الأساس يقوم المستثمر بإختيار ورقة مالية ما إذا ماحققت هذه الورقة عائدا أعلى لنفس درجة المخاطرة ، أو إذ حققت هذه الورقة مخاطر أقل لنفس العائد المتوقع ، فإذا كان العائد المتوقع والمخاطر الخاصة بالإستثمار فى مجموعة من الأوراق كما يلى:

i	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
$\bar{R}_i$	9	10	12	12	9	15
σ_i	4.4	4.3	4.9	5	4.3	5.1

فإننا نجد أن الورقة الثانية أفضل من الورقة الأولى إذ تحقق عائد أفضل ومخاطرة أقل ، كما أنها أفضل من الورقة الخامسة إذ تحقق عائد أعلى لنفس درجة المخاطرة ، كما أن الورقة (3) أفضل من الورقة (4) اذ تحقق نفس العائد بدرجة مخاطرة أقل .

وعلى هذا الأساس إذا رغب المستثمر فى شراء ورقة مالية واحدة فقط، فإنه يمكن إستبعاد كل من الورقة، (5) ، (4) ، (1) ويبقى على كل من الورقة ، (2) ، (3) ، (6) حيث يصعب تحديد أفضل هذه الأوراق إذ تحقق الورقة (3) عائد أعلى من الورقة (2) ولكن مقابل درجة أعلى من المخاطرة ، كما أن

الورقة (6) تحقق عائد أعلى ولكن مقابل درجة مخاطرة أعلى وبالتالى تفضيل ورقة على الأخرى يتوقف على متخذ القرار ومدى رغبته فى تحقيق عائد أعلى حتى ولو أدى الأمر إلى تحمل مخاطر أعلى فى نفس الوقت .

4.9 مخاطر المحفظة ليست بالضرورة هى المتوسط لمخاطر الأوراق المالية الداخلة فى تكوين المحفظة

سوف نبين فى هذه الفقرة أن حساب العائد والمخاطر الخاصة بورقة مالية يختلف عن حساب العائد والمخاطر للمحفظة إذ يعتقد البعض أن عائد ومخاطر المحفظة ما هو إلامتوسط العائد والمخاطر للأوراق المالية المكونه لهذه المحفظة، ورغم صحة ذلك بالنسبة لعائد المحفظة ، إلا أنه غير صحيح بالمرة بالنسبة لمخاطر المحفظة . ويمكن توضيح ذلك بمثال كما يلى :

نفرض أن لدينا خمسة أصول وكان العائد المتوقع من إقتناء كل من الأصل الأول والثاني والثالث والخامس يتوقف على كل حالة من حالات السوق Market Condition (جيد G ، متوسط A ، سيىء P) أما العائد المحقق من إقتناء الأصل الرابع فيتوقف على كمية الأمطار وليس على حالة السوق ويمكن بيان ذلك فيما يلى:

	Asset(1)		Asset(2)		Asset(3)		Asset(4)		Asset(5)	
	R_{1j}	M.C.	R_{2j}	M.C.	R_{3j}	M.C.	R_{4j}	R.F.	R_{5j}	M.C.
	15	G	16	G	1	G	16	G	16	G
	9	A	10	A	10	A	10	A	10	A
	3	P	4	P	19	P	4	P	4	P
$\bar{R}_j$	9		10		10		10		10	
σ_j^2	24		24		54		24		24	
σ_j	4.9		4.9		7.35		4.9		4.9	

ولقد تم حساب المتوسط والإنحراف المعيارى فى الحالات السابقة وذلك تحت إفتراض تساوى الإحتمالات الخاصة بكل حدث من الأحداث الثلاثة .

وهنا نلاحظ أن الورقة (2) أفضل من كل من الورقة (1) والورقة (3) فيتم إستبعادهما، وبالتالى يتم الإختيار من بين الأصول (2)،(4)،(5) إلا أن جميعها تحقق نفس العائد ونفس المخاطرة .

ونشير هنا إلى أن الخيارات المتاحة أمام المستثمر لاتتمثل فقط فى إختيار أحد الأصول (1) أو (2) أو (3) أو (4) أو (5) ، وإنما يمكن للمستثمر أن يوزع إستثماراته على أكثر من أصل من هذه الأصول الخمسة .

وقد يبدو منطقيا فى هذه الحالة أيضا أنه من المفضل إستبعاد كل من الأصل (1) ، (3) على أن يقتصر التنويع على الأصول الثلاثة الأخرى المتبقية.إلا أن هذا التفكير الذى يبدو منطقيا وسليما،هو تفكير خاطىء يؤدى على العكس إلى نتائج قد تكون سيئة، ويمكن توضيح ذلك من دراسة الحالات التالية :

1.4.9 إحسب العائد والمخاطرة فى حالة إستثمار 60% فى الأصل (2)، 40% فى الأصل (3)

يمكن حساب العائد لهذه المحفظة فى كل حالة من حالات السوق الثلاثة كما يلى :

$$G = 16 \times 60/100 + 1 \times 40/100 = 9.6 + 0.4 = 10$$
$$A = 10 \times 60/100 + 10 \times 40/100 = 6 + 4 = 10$$
$$P = 4 \times 60/100 + 19 \times 40/100 = 2.4 + 7.6 = 10$$

$$\bar{R}_p = \sum_{j=1}^{3} P_{pj} R_{pj}$$

$$= 1/3 \times 10 + 1/3 \times 10 + 1/3 \times 10 = 10$$

كما يمكن حساب المخاطرة الخاصة بهذه المحفظة كما يلى :

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{3} P_{pj} (R_{pj} - R_p)^2}$$

$$\sigma_p^2 = 1/3 (10 - 10)^2 + 1/3 (10 - 10)^2 + 1/3 (10 - 10)^2 = 0$$

$$\sigma_p = 0$$

ونلاحظ هنا أنه رغم تفوق الورقة (2) على الورقة (3) ، إلا أن تكوين محفظة من كل من الورقة (3) ، (2) أدى إلى تحقيق نفس العائد مع إنعدام المخاطرة تماما .

وترجع هذه النتيجة الهامه السابقة إلى الإتجاه العكسى لحركة الإيراد لكل من الورقتين، إذ نجد أنه فى حالة السوق الجيدة تتجه إيرادات الورقة الثانية إلى الزيادة وعلى العكس من ذلك تتجه إيرادات الورقة الثالثة إلى الإنخفاض ، أما فى الحالة السيئة للسوق نجد أن إيرادات الورقة الثانية تتجه إلى الإنخفاض فى الوقت الذى تزداد فيه إيرادات الورقة الثالثة ، أى أنه يمكن القول:

"إذا كانت هناك ورقتين وكانت الإيرادات الجيدة والسيئة لكل ورقة تتحقق فى الاتجاه المعاكس للورقة الأخرى ، فإنه يمكن للمستثمر فى هذه الحالة إيجاد محفظة أو توليفة من الأصلين خالية المخاطر أى تحقق دائما نفس العائد" .

2.4.9 أحسب العائد والمخاطرة فى حالة إستثمار 50 % فى كل من الأصلين (5)، (2)

يمكن حساب عائد المحفظة كما يلى :

$$G = 16 \times 50/100 + 16 \times 50/100 = 16$$
$$A = 10 \times 50/100 + 10 \times 50/100 = 10$$
$$P = 4 \times 50/100 + 4 \times 50/100 = 4$$

$$\bar{R}_p = 1/3(16) + 1/3(10) + 1/3(4) = 10$$

وتكون مخاطر المحفظة كما يلي :

$$\sigma_p^2 = 1/3(16 - 10)^2 + 1/3(10 - 10)^2 + 1/3\,(4 - 10)^2 = 24$$

$$\sigma_p = 4.9$$

أى أن تكوين محفظة من الأصلين (5) ، (2) لم يحقق أى تقليل في المخاطر التي يتحملها المستثمر . أى أنه يمكن القول :

"اذا كانت هناك ورقتين وكانت الإيرادات الخاصة بكل ورقة متطابقة تماما مع إيرادات الورقة الأخرى ، فإن قيام المستثمر بتكوين محفظة من هذين الأصلين لن يؤدى إلى تقليل المخاطر" .

3.4.9 أحسب العائد والمخاطرة في حالة إستثمار 50 % من كل من الأصل (2) ، (4)

هنا يواجه المستثمر تسع حالات مختلفة بدلا من ثلاثة حالات فقط كما هو الحال بالنسبة لكل ورقة.وفيما يلي يمكن لنا حساب كل حالة من هذه الحالات التسعة وإحتمال حدوث كل حالة والإيراد المتوقع الخاص بها كما يلي:

j	P_{pj}	R_{pj}
G,G	1/9	(16 x 0.5 + 16 x 0.5) = 16
G,A	1/9	(16 x 0.5 + 10 x 0.5) = 13
G,P	1/9	(16 x 0.5 + 4 x 0.5) = 10
A,G	1/9	(10 x 0.5 + 16 x 0.5) = 13
A,A	1/9	(10 x 0.5 + 10 x 0.5) = 10
A,P	1/9	(10 x 0.5 + 4 x 0.5) = 7
P,G	1/9	(4 x 0.5 + 16 x 0.5) = 10
P,A	1/9	(4 x 0.5 + 10 x 0.5) = 7
P,P	1/9	(4 x 0.5 + 4 x 0.5) = 4

$$\bar{R}_p = 16 \times 1/9 + 13 \times 2/9 + 10 \times 3/9 + 7 \times 2/9 + 4 \times 1/9 = 10$$

$$\sigma_p^2 = 1/9(16-10)^2 + 2/9(13 - 10)^2 + 3/9(10 - 10)^2 + 2/9(7 - 10)^2 + 1/9(4 - 10)^2 = 12$$

$$\sigma_p = 3.46$$

أى أنه يمكن بذلك تكوين محفظة تحقق نفس العائد بمخاطر أقل من أى من مخاطر الورقة الثانية أو مخاطر الورقة الرابعة ، أى تتفـوق المحفظــة علــى مكوناتها من الورقة الثانية أو الرابعة .

ويرجع تفسير ذلك إلى أن إستقلالية الظروف المؤثرة فى العائــد الخــاص بالورقة الثانية عنه بالنسبة للورقة الرابعة يؤدى إلى تقليــل الإحتمــال الخــاص بتحقق أكبر عائد وهو 16 وكذا الإحتمال الخاص بتحقق أقل عائد وهو 4 ، مــع ظهور الفرصة لتحقق عوائد قريبة من المتوسط مثل13 ، 7 الأمر الذى يــؤدى إلى تقليل درجة التشتت ومن ثم تحقيق درجة أقل من المخاطر عن تلــك التــى يمكن أن يحققها المستثمر لو إقتصر علــى شــراء أى مــن الــورقتين الثانيــة أوالرابعة. ويمكن التعبير عن هذه الحالة بأنه :

"اذا كانت هناك ورقتين وكانت إيرادات كل ورقة تخضع لظروف مســتقلة تماما عن ظروف الورقة الثانية ، فإن المحفظة المكونة من هاتين الورقتين تحقق عائد أقل تشتتا وبالتالى أقل مخاطرة من أى مــن الــورقتين المكــونتين لهــذه المحفظة".

ومن العرض السابق يمكن ملاحظة "أن عائد المحفظة هو متوسط عوائــد مكونات هذه المحفظة وذلك على عكس الحال بالنسبة لمخاطر المحفظــة التــى تختلف تماما عن متوسط المخاطر لمكونات هذه المحفظة"

أى أن :

$$\sigma_p \neq X_1 \sigma_1 + X_2 \sigma_2 \ , X_1 + X_2 = 1 \ , \ 0 \leq X_1 \ , X_2 \ \leq 1$$

ولا شك أن هذا العرض السابق يتطلب ضرورة بيان كيفية حساب العائد والمخاطرة الخاصة بمحفظة الاوراق المالية بشكل أكثر تفصيلا و أكثر دقة وذلك كما سوف نبينه فيما يلى.

5.9 حساب العائد لمحفظة أوراق مالية مكونة من أصلين فقط

إن العائد من إقتناء محفظة ما يتحدد فيضوء العائد المتوقع مــن الأوراق المالية المكونة لهذه المحفظة، وذلك كما يلى :

$$R_{pj} \ = \sum_{i=1}^{2} X_i R_{ij} \qquad (7)$$

حيث R_{pj} = هو عائد المحفظة p فى ظل الظروف j .

R_{ij} = هو عائد الورقة المالية i فى ظل نفس الظروف j .

X_i = نسبة الاموال المستثمرة فى المحفظة i علما بأن :

$$\sum_{i=1}^{2} X_i = 1 \qquad , \qquad 0 < X_i < 1 \ ,$$

وبذلك تكون القيمة المتوقعة للإيرادات الخاصة بهذه المحفظة كما يلى :

$$\bar{R}_p = E\,(R_{pj}) = \sum_{j=1}^{M} P_j \ R_{pj}$$

$$= \sum_{j=1}^{M} P_j \sum_{i=1}^{2} X_i R_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} X_i \sum_{j=1}^{M} P_j R_{ij} \ (*)$$

$$= \sum_{i=1}^{2} X_i \bar{R}_i$$

$$\bar{R}_p = E(R_p) = \sum_{i=1}^{2} X_i \bar{R}_i \qquad (8)$$

6.9 حساب المخاطر الخاصة بمحفظة أوراق مالية مكونة من أصلين

يمكن التعبير عن تباين محفظة أوراق مالية ما، كما يلي :

$$\sigma_p^2 = E(R_{pj} - \bar{R}_p)^2 \qquad (9)$$

وهنا للتعبير عن تباين المحفظة بدلالة الأوراق المالية المكونة لهذه المحفظة، يتم التعبير عن المعادلة السابقة بدلالة هذه الأوراق المكونة لها وذلك كما يلي:

$$\sigma_p^2 = E((X_1 R_{1j} + X_2 R_{2j}) - (X_1 \bar{R}_1 + X_2 \bar{R}_2))^2$$

$$= E(X_1 (R_{1j} - \bar{R}_1) + X_2 (R_{2j} - \bar{R}_2))^2$$

(*) إن تغير علامات الجمع لا يغير من نتيجة الجمع في هذه الحالة والتي تحتوي على عدد محدود من الأرقام finite، إذ أن جمع كل صف ثم جمع مجاميع الصفوف يحقق نفس النتيجة لو تم تجميع كل عمود ثم جمع مجاميع الأعمدة .

وحيث أننا نعلم أن

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

كان معنى ذلك أن :

$$\sigma_p^2 = E(X_1^2(R_{1j}-\bar{R}_1)^2 + X_2^2(R_{2j}-\bar{R}_2)^2 + 2X_1X_2(R_{1j}-\bar{R}_1)(R_{2j}-\bar{R}_2))$$

$$= X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2E(\,(R_{1j}-\bar{R}_1)(R_{2j}-\bar{R}_2)\,)$$

ويتبين مما سبق أن تباين المحفظة يتوقف على تباين الورقة الأولى مضروبا فى المقدار X_1^2 ،مضافا إليه تباين الورقة الثانية مضروبا فى المقدار X_2^2 ، مضافا إليها مقدار ثالث يسمى بالتغاير بين الورقة (1) والورقة (2) مضروبا فى المقدار $2X_1X_2$.

نلاحظ هنا أن المقدارين الأول والثانى لا يأخذان قيما سالبة دائما، إلا أن المقدار الثالث قد يأخذ قيما سالبة إذا كان الإنحراف فى الورقة الأولى فى ظل الظروف السوقية j مخالفا للإنحراف فى الورقة الثانية فى ظل نفس الظروف j.
ويتم التعبير عن التغاير بين الورقة (1) والورقة (2) بالرمز σ_{12} ، وعلى هذا الأساس يتم التعبير عن مخاطر المحفظة كما يلى :

$$\sigma_p = [\,X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\,\sigma_{12}\,]^{1/2} \qquad (10)$$

حيث

$$\sigma_{12} = E(\,(R_{1j}-\bar{R}_1)(R_{2j}-\bar{R}_2)\,)$$

$$= \sum_{j=1}^{M} P_j(\,(R_{1j}-\bar{R}_1)(R_{2j}-\bar{R}_2)\,)$$

كما أنه يمكن تنميط التغاير وذلك بإستخراج مؤشر جديد يسمى بمعامل الإرتباط بين الورقة (1) والورقة (2) ذلك كما يلى :

$$r_{ik} = \frac{\sigma_{ik}}{\sigma_i \, \sigma_k} \,, \quad -1 \le r_{ik} \le 1 \qquad (11)$$

ويكون معامل الارتباط (1-) إذا كان هناك حركة عكسية تامة لإيرادات كل من الورقتين، أى إذا كانت الإيرادات الجيدة والسيئة لكل ورقة تتحقق فى الإتجاه المعاكس للورقة الأخرى . ويكون الإرتباط (1+) إذا كانت حركة الإيرادات الخاصة بالورقة الأولى متطابقة تماما وفى نفس الإتجاه لحركة الإيرادات فى الورقة الثانية ، وفى غير هاتين الحالتين السابقتين يكون معامل الإرتباط r_{ik} ما بين (1-) ،(1+)

أى يكون $-1 \le r_{ik} \le 1$

وعلى هذا الأساس يتم التعبير عن مخاطر المحفظة σ_p كما يلى :

$$\sigma_p = [\, X_1^2\sigma_1^2 + X_2^2\sigma_2^2 + 2X_1X_2\, r_{12}\, \sigma_1\sigma_2 \,]^{1/2} \qquad (12)$$

وعلى هذا الأساس يلزم لحساب المخاطر الخاصة بمحفظة الأوراق المالية، ضرورة حساب ، التباين والمخاطر الخاصة بكل ورقة σ_1 , σ_2 , σ_1^2, σ_2^2 وكذا حساب الارتباط r_{12} بين الورقة (1) والورقة (2) حتى يمكن حساب المخاطر الخاصة بهذه المحفظة .

وبطبيعة الحال يلزم الأمر لحساب σp وفقاً للمعادلة السبقة، ضرورة توفير كافة هذه البيانات الخاصة بالتغاير أو الإرتباط بين كل ورقتين مختلفتين ، فــإذا كان عدد الورق المتاح في سوق الأوراق المالية 50 ورقة، كان معنى ذلــك أن عدد التغايرات المطلوب تكوينها كما يلي :

$$\binom{50}{2} = \frac{50!}{2! \times 48!} = \frac{50 \times 49}{2} = 1225$$

7.9 حساب العائد والمخاطر لمحفظة الأوراق المالية (الحالة العامة)

من السهل تعميم معادلة رقم (8) للحالة العامة ، حيث يمكن للمحفظــة أن تحتوى على أى عدد من الأوراق المالية وليكن N حيث تأخذ N القيم 2 أو 3 أو 4 ... الخ . ويكون بذلك العائد المتوقع للمحفظة في هذه الحالة العامة كما يلي :

$$\overline{R_p} = E(R_{pj}) = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i \qquad (13)$$

ويمكن بالمثل تعميم معادلة رقم (9) وحساب تباين المحفظة في حالة وجود N من الأوراق المالية حيث N>2 ، إلا أننا سوف نبين σ_p^2 في حالة N = 3 أولا وذلك كما يلي :

$$\sigma_p^2 = E(R_{pj} - \bar{R}_p)^2$$

$$= E((X_1 R_{1j} + X_2 R_{2j} + X_3 R_{3j}) - (X_1 \bar{R}_1 + X_2 \bar{R}_2 + X_3 \bar{R}_3))^2$$

$$= E(X_1 (R_{1j} - \bar{R}_1) + X_2 (R_{2j} - \bar{R}_2) + X_3 (R_{3j} - \bar{R}_3))^2$$

$$\sigma_p^2 = E(X_1^2(R_{1j} - \bar{R}_1)^2 + X_2^2(R_{2j} - \bar{R}_2)^2 + X_3^2(R_{3j} - \bar{R}_3)^2$$

$$+2X_1X_2(R_{1j}-\bar{R}_1)(R_{2j}-\bar{R}_2)+2X_1X_3(R_{1j}-\bar{R}_1)(R_{3j}-\bar{R}_3)$$

$$+2X_2X_3(R_{2j}-\bar{R}_2)(R_{3j}-\bar{R}_3))$$

$$= X_1^2\sigma_1^2+X_2^2\sigma_2^2+X_3^2\sigma_3^2+2X_1X_2\sigma_{12}+2X_1X_3\sigma_{13}$$

$$+2X_2X_3\sigma_{23}$$

$$\sigma_p^2= \sum_{i=1}^{3} X_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{k=1 \\ K\neq i}}^{3} X_i X_k \sigma_{ik} \qquad (14)$$

أو يمكن كتابة معادلة (14) السابقة كما يلي :

$$\sigma_p^2= \sum_{i=1}^{3} X_i^2\sigma_i^2 +2 \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=i+1}^{3} X_i X_k \sigma_{ik}$$

وبالمثل يمكن بيان المعادلة العامة لتباين محفظة الأوراق المالية المكونـــة من N ورقة مالية كما يلي :

$$\sigma_p^2= \sum_{i=1}^{N} X_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ K\neq i}}^{N} X_i X_k \sigma_{ik} \qquad (15)$$

كما يمكن كتابة معادلة (15) كما يلي :

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i^2\sigma_i^2 +2\sum_{i=1}^{N-1} \sum_{k=i+1}^{N} X_i X_k \sigma_{ik}$$

أو

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ K \neq i}}^{N} X_i X_k r_{ik} \sigma_i \sigma_k \qquad (16)$$

وبطبيعة الحال يمكن لمتخذ القرار تكوين المحفظة مــن أى عــدد مــن الأوراق وليس فقط من ورقتين كما يمكن تغيير نسب الإستثمار فى كل ورقة مــن أوراق المحفظة، وبالتالى يصبح لدينا عدد لانهائى من المحافظ التى يمكن تكوينها.

8.9 بعض النتائج الهامة

ونشير هنا إلى وجود مجموعة من النتائج الهامة التى يجدر الاشارة اليهــا كما يلى:

1.8.9 حالة استقلالية أصول المحفظة

إذ يكون التغاير بين كل ورقة والورقة الأخرى مساويا صفرا ، الأمر الذى يؤدى إلى أن تصبح المعادلة رقم (15) أو رقم (16) كما يلى :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 \qquad (17)$$

حيث $\sigma_{ik} = 0$ وبالتالى $r_{ik} = 0$ لكل قيم k ، i.

كما أنه كلما تعددت مكونات المحفظة بحيث يكون المقدار X_i^2 صغيرا جدا لجميع قيم i كلما إقتربت مخاطر المحفظة من الصفر، ويمكن توضيح ذلــك إذا ماتساوت المبالغ المستثمرة فى كل أصل من أصول المحفظة كما يلى :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} (1/N)^2 \; \sigma_i^2 = 1/N \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2/N$$

$$\sigma_p^2 = \frac{\sigma_i^2}{N}$$

$$\therefore \lim_{N \to \infty} \sigma_p^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{\bar{\sigma}_i^2}{N} = 0$$

أى تقترب مخاطر المحفظـــة من الصفر كلما تنوعــت المحفظـــة وزادت بالتالى قيمة N .

2.8.9 حالة عدم إستقلالية أصول المحفظة مع إستثمار مبالغ متساوية فى كــل أصل من أصولـها.

يمكن فى هذه الحالة التعبير عن مخاطر المحفظة كما يلى:

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} (1/N)^2 \; \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} (1/N)\,(1/N)\sigma_{ik}$$

وحيث أن عدد حدود المقدار الأول هــو N فـــان $\Sigma\sigma_i^2/N$ يكــون هــو المتوسط والذى نرمز له بالرمز $\bar{\sigma}_i^2$.

وحيث أن عدد حدود المقدار الثانى هو N(N-1) ، كان معنى ذلك أن :

$$\bar{\sigma}_{ik} = \Sigma \; \Sigma \frac{\sigma_{ik}}{N(N-1)}$$

وعلى هذا الأساس فإنه يمكن إعادة كتابة المعادلة كما يلي :

$$\sigma_p^2 = (1/N) \sum_{i=1}^{N} \sigma_i^2/N + (N-1)/N \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ K \neq i}}^{N} \sigma_{ik} / N(N-1)$$

$$\sigma_p^2 = (1/N)\, \bar{\sigma}_i^2 + ((N-1)/N)\bar{\sigma}_{ik} \qquad (18)$$

ويتبين لنا من المعادلة (18) السابقة أن σ_p^2 هي أيضـــا متوســـط مـــرجح لمتوسط التباينات ومتوسط التغايرات.

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{N}\ \bar{\sigma}_I^2 + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \bar{\sigma}_{ik} \qquad (19)$$

وهنا إذا تم تنويع المحفظة وزيادة عدد الأوراق الداخلة في تكوينها فإن المعادلـــة (18) السابقة تصبح كما يلي:

$$\therefore \lim_{N \to \infty} \quad \sigma_p^2 = \lim_{N \to \infty} \frac{\bar{\sigma}_i}{N} + \lim_{N \to \infty} \frac{N-1}{N} \bar{\sigma}_{ik} \qquad (20)$$

$$= \sigma_{ik}$$

ويظهر فى المعادلة رقم (19) السابقة أن المقدار الأول يؤول إلى الصـــفر كلما تنوعت المحفظة،وكبرت قيمة N.أى أن المساهمة الخاصة بتباين كل ورقة تؤول إلى الصفر ويتبقى تأثير المقدار الثانى والخاص بمقدار التغاير بـــين كـــل ورقة والورقة الأخرى فى المحفظة والذى يؤول إلى متوســـط التغيـــرات لكـــل ورقتين فى السوق .

أى أن التنويع يؤدى إلى تجنب المخاطر الخاصة بكل ورقة على حده، وهو ما يسمى بالمخاطر غير المنتظمة Unsystimatic risk، ولكنه لايؤدى إلى تجنيب المخاطر الناجمة من التغاير بين هذه الأوراق وهو ما يسمى بالمخاطر المنتظمة Systimatic risk.

" The individual risk of securities can be diversified away, but the contribution to the total risk caused by the covariance terms cannot be diversified away ".

ونتيجة لإختلاف متوسط التغاير بين الأوراق المالية من بلد إلى بلد آخر، فان تقليل المخاطر عن طريق التنويع يختلف أيضا من بلد إلى بلد آخر، اذ لوحظ إرتفاع قيمة متوسط التغاير فى كل من سويسرا وايطاليا، وذلك على عكس الحال فى بلاد أخرى مثل بلجيكاو هولندا ، حيث ينخفض قيمة هذا المتوسط ، وبالتالى يؤدى التنويع إلى تقليل المخاطر بدرجة كبيرة فى كل من بلجيكا وهولندا عنه فى سويسرا وايطاليا. ولاشك أننا نحتاج فى مصر إلى حساب قيمة هذا المتوسط حتى يمكن للمستثمر فهم طبيعة سوق الأوراق المالية بدرجة أكبر، مع تقليل درجة المخاطرة التى يتعرض لها من جراء تعامله فى هذا السوق.

أسئلة وتمارين الفصل التاسع

1 – إذا كانت الإيرادات المتوقعة لسهم ما تخضع للتوزيع الإحصائي التالي:

حالة السوق	الاحتمال	العائد المتوقع
ضعيف	0.1	(50%)
أقل من المتوسط	0.2	(5)
متوسط	0.4	16
فوق المتوسط	0.2	25
قوي	0.1	60

المطلوب: حساب العائد المتوقع لهذا السهم ثم حساب الانحراف المعياري ومعامل الاختلاف؟

2 – إذا قمت بشراء 500 سهم بشركة النور بسعر 37$ للسهم ولقد استلمت توزيعات مقدارها1,000$ عن هذه الأسهم وإذا كان سعر السهم الآن38$.

المطلوب: أ – ما هو معدل الربح الرأسمالي؟

ب – ما هو إجمال العائد المحقق بالدولار؟

جـ – ما هو معدل العائد المحقق؟

د – هل يلزمك بيع الأسهم حتى يتم حساب الربح الرأسمالي؟

3 – إذا كان سعر سهم ما في بداية العام 42$ وتم توزيع أرباح للسهم خلال العام قدرها 2.4$. وكان سعر السهم في نهاية السنة 31$. ما هو معدل العائد المحقق للسهم خلال هذا العام؟

4 - إذا أعطيت الإيرادات الخاصة بكل من محفظة السوق للأوراق المالية في السبع سنوات السابقة وكذا إيرادات أذون الخزانة:

Year	CS	TB
-7	32.4%	11.2
-6	4.9	14.7
-5	21.4	10.5
-4	22.5	,8.8
-3	6.3	9.9
-2	32.2	7.7
Last	18.5	6.2

فإذا كانت علاوة خطر السوق المحققة فعلاً Realized risk premium تساوي عائد الأسهم ناقصاً عائد أذون الخزانة. المطلوب:

أ – تحديد علاوة خطر السوق المحققة في كل سنة من السنوات السبع السابقة؟

ب – تحديد متوسط علاوة خطر السوق (متوسط عائد الأسهم – متوسط عائد أذون الخزانة)؟

جـ – هل من الممكن أن يكون الناتج في فقرة (ب) سالباً؟

5 – إذا كان عائد السهم F = 12% وكان الانحراف المعياري للسهم F = 9% وعائد السهم G = 18% وكان الانحراف المعياري للسهم σ 25%.

المطلوب:

أ – ما هو العائد المتوقع للمحفظة المكونة من 30% من السهم F، 70% من السهم G؟

ب – إذا كان معدل الارتباط بين السهمين 0.2 فما مقدار الانحراف المعياري لهذه المحفظة؟

6 – إذا كان العائد والانحراف المعياري للسهمين A ، B على التوالي كما يلي: 15%، 25%، 0.1 ، 0.2 فالمطلوب:

أ – احسب العائد والانحراف المعياري لمحفظة مكونة من 40% من السهم A و 60% من السهم B عندما يكون معامل الارتباط بينهما 0.5؟

ب – احسب الانحراف المعياري للمحفظة السابقة إذا كان معامل الارتباط -0.5؟

جـ– بين كيف يؤثر معامل الارتباط على قيمة الانحراف المعياري للمحفظة؟

7 – نفرض وجود N ورقة في السوق وكان العائد المتوقع على كل ورقة 10%. وكان التباين لأي ورقة مساوياً 0.0144 وكان التغاير بين أي ورقتين مساوياً 0.0064.

أ – حدد العائد المتوقع والتباين لمحفظة تتكون من الـN ورقة علماً بأن الوزن النسبي لكل ورقة كان متماثلاً ($= \frac{1}{N}$)؟

ب – بين ماذا يحدث لتباين هذه المحفظة كلما زادت قيمة N؟

جـ– ما هي الخاصية الهامة لكل ورقة والتي لها تأثير كبير على حساب تباين محفظة كاملة التنويع؟

الفصل العاشر

تحديد المحفظة المثلى للأوراق المالية

عند كل درجة مخاطرة

Delineating Efficient Portfolios

1.10 مقدمة:

بعد أن بينا كيفية تقدير العائد والمخاطر الخاصة بورقة مالية أو محفظة مكونة من عدة أوراق مالية، سوف نهتم في هذا الفصل بكيفية تحديد مجموعات المحافظ المالية التي يفضلها المستثمرون المختلفون، كل على حسب درجة المخاطر والعائد التي يرغبها، ويسمى المنحنى الممثل لهذه المجموعات بمنحنى الاستثمارات الكفء. ويتوقف شكل هذا المنحنى على ما إذا كان من الممكن للمستثمر البيع على المكشوف Short Selling أم لا، وكذا قابليته للإقراض أو الإقتراض. وسوف نبدأ في هذا المجال بتناول منحنى الاستثمارات الكفء في حالة محفظة أوراق مالية مكونة من ورقتين فقط، والتعبير عن العائد والمخاطر لهذه المحفظة بالرسم في ظل قيم مختلفة للارتباط بين هاتين الورقتين المكونتين للمحفظة وذلك بفرض عدم السماح بالبيع على المكشوف على أن نتناول الحالة العامة فيما بعد.

2.10 منحنى الاستثمار الكفء في حالة محفظة مكونة من ورقتين فقط مع عدم السماح بالبيع على المكشوف:

1.2.10 حالة وجود ارتباط موجب كامل ($r_{12} = +1$):

من المعادلة رقم (12) السابق الإشارة إليها في الفصل السابع، وبالتعويض عن $r_{12} = +1$ نجد أن:

$$\sigma_p = (X^2 \sigma_1^2 + (1-X)^2 \sigma_2^2 + 2X(1-X)\sigma_1\sigma_2)^{1/2}$$

إلا أن المقدار السابق داخل القوس على هيئة $a^2+2ab+b^2$ أي علـــى هيئة $(a+b)^2$ وحيث أن σ_p هي الجذر التربيعي الموجب لهذا المقـــدار لـــذا يمكن كتابة σ_p كما يلي:

$$\sigma_p = X\,\sigma_1 + (1 - X)\,\sigma_2 \qquad (1)$$

كما أن العائد المتوقع لهذه المحفظة

$$\bar{R}_p = X\,\bar{R}_1 + (1 - X)\,\bar{R}_2 \qquad (2)$$

أي أنه في حالة وجود ارتباط كامل (+1) كان معني ذلك أن كل مـــن العائد والمخاطر للمحفظة هو ناتج علاقة خطية للعائد والمخـــاطر الخاصـــة بالورقتين المكونتين لهذه المحفظة. أو بمعنى آخر أن عائد ومخاطر المحفظة ما هو إلا متوسط عوائد ومخاطر الـــورقتين الـــداخلتين فـــي تكـــوين هـــذه المحفظة.

فإذا كانت البيانات الخاصة بالورقتين كما يلي:

$$\bar{R}_1 = 14\% \quad , \quad \bar{R}_2 = 8\%$$

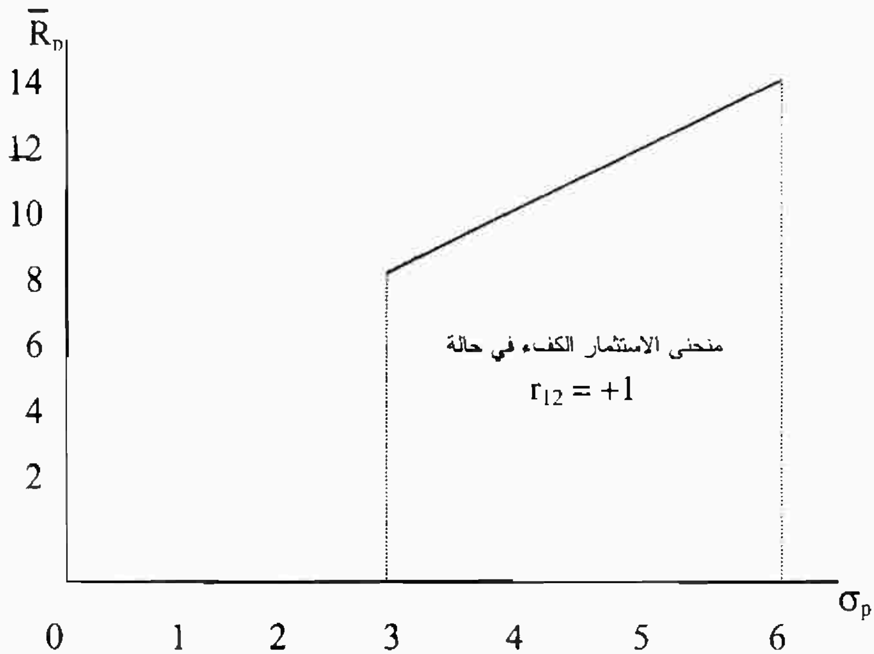
$$\sigma_1 = 6\% \quad , \quad \sigma_2 = 3\%$$

فإنه يمكن رسم العائد والمخاطر الخاصة بالمحفظة في حالـــة $r_{12}=+1$ لكل قيم X والتي تمثل نسبة الاستثمار في الورقة الأولى كما يلي:

$$R_p = 14X + 8\,(1\text{-}X) = 8 + 6X$$

$$\sigma_p = 6X + 3\,(1\text{-}X) = 3 + 3X$$

X	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
R_p	8.0	9.2	10.4	11	11.6	12.8	14.0
σ_p	3.0	3.6	4.2	4.5	4.8	5.4	6.0



شكل رقم (1/10)

ويقوم المستثمر بتحديد درجة المخاطرة التي يرغبها وبالتالي تحديد قيمة X المقابلة من معادلة σ_p رقم (1) السابق الإشارة إليها، ثم يتم بعد ذلك تحديد العائد الأمثل المقابل على خط الاستثمار الكفء كما في الشكل السابق.

ونلاحظ هنا وجود حل وحيد أي قيمة وحيدة لـ X عند كل درجة من درجات المخاطرة التي يرغب المستثمر في تحملها، أي أن جميع الحلول المتاحة هي حلول مثلى إذ لا تتعدد البدائل عند أي نقطة من نقاط الحل.

2.2.10 حالة وجود ارتباط سالب كامل ($r_{12} = -1$)

يمكن التعبير عن σ_p، وبعد التعويض عن $r_{12} = -1$ كما يلي:

$$\sigma_p = [X^2\sigma_1^2 + (1-X)^2\sigma_2^2 - 2X(1-X)\sigma_1\sigma_2]^{1/2}$$

إلا أن المقدار السابق داخل القوس يكون على هيئة $a^2 - 2ab + b^2$ أي يساوي $(a-b)^2$ أو $(b-a)^2$ وبالتالي يكون الجذر التربيعي أما a-b أو b-a.

وعلى هذا الأساس تكون قيمة σ_p هي القيمة الموجبة لأحد القيمتين التاليتين:

$$\sigma_p = X\,\sigma_1 - (1-X)\,\sigma_2 \qquad (3/1)$$

$$\sigma_p = -X\,\sigma_1 + (1-X)\,\sigma_p \qquad (3/2)$$

وبالتالي يكون عائد ومخاطر المحفظة كما يلي:

$$\bar{R}_p = 8 + 6X$$

$$\sigma_p = 6X - 3\,(1-X) = 9X - 3$$

$$\sigma_p = -6X + 3\,(1-X) = 3 - 9X$$

وبالتالي يمكن رسم العائد والمخاطر الخاصة بالمحفظة في حالة $r_{12}=-1$ لكل قيم X كما يلي:

X	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\bar{R}_p$	8.0	9.2	10.4	11.6	12.8	14.0
σ_p	3.0	1.2	0.6	2.4	4.2	6.0

ونلاحظ من الجدول السابق أن قيمة σ_p في حالة $r_{12} = -1$ تكون أقل دائماً من قيمة σ_p في حالة $r_{12} = +1$ أي أن مخاطر المحفظة في حالة وجود ارتباط كامل سالب تكون اقل دائماً من مخاطر المحفظة في حالة وجود ارتباط كامل موجب لجميع قيم $0 < X < 1$، كما أننا نلاحظ أنه يمكن تكوين محفظة خالية المخاطر $(\sigma_p = 0)$، وتتحدد قيمة X التي تحقق هذه المحفظة بالتعويض في معادلة (3/1) أو (3/2) بقيمة $(\sigma_p = 0)$ كما يلي:

$$X\sigma_1 = (1 - X)\,\sigma_2$$

$$X\sigma_1 = \sigma_2 - X\sigma_2$$

$$X(\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_2$$

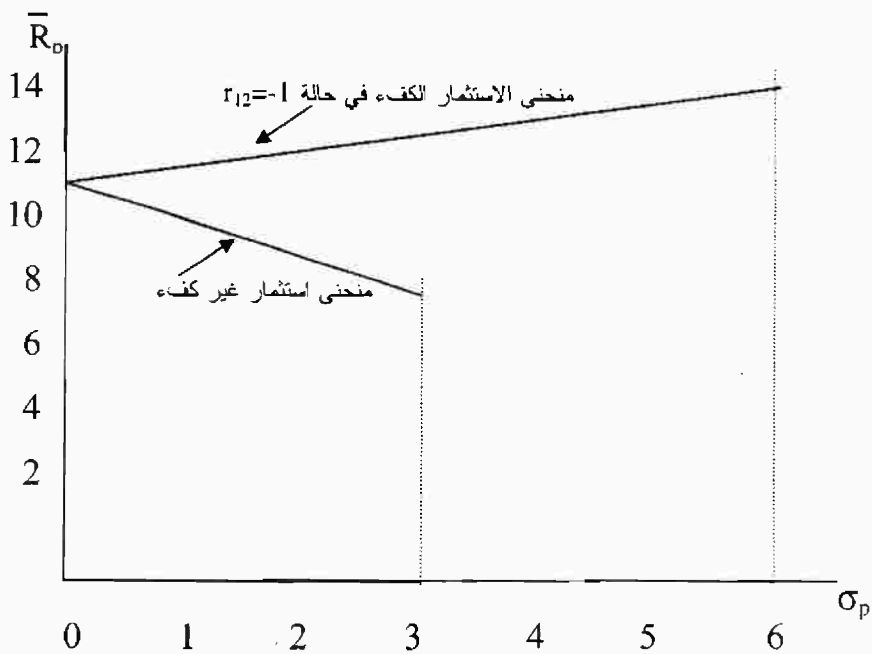
$$\therefore \quad X = \sigma_2 / (\sigma_1 + \sigma_2) \qquad (4)$$

وحيث أن $\sigma_2 > 0$, $(\sigma_1 + \sigma_2) > \sigma_2$ كان معنى ذلك $1>X>0$ وبالتالي فإن المحفظة خالية المخاطر سوف تحتوي دائماً على قدر موجب من المبالغ المستثمرة في كل من الورقتين.

وفي المثال السابق تكون:

$$X = 3/(6+3) = 1/3$$

ويمكن توضيح هذه الحالة والخاصة بوجود ارتباط سالب كامل كما يلي:



شكل رقم (2/10)

ويكون الخط العلوي في الرسم السابق هو منحنى الاستثمار الكفء لمحفظة مكونة من ورقتين $r_{12} = -1$ وقيم $X \geq 1/3$. أي أن منحنى الاستثمار الكفء في المثال السابق يتحدد لجميع قيم $1/3 \leq X \leq 1$

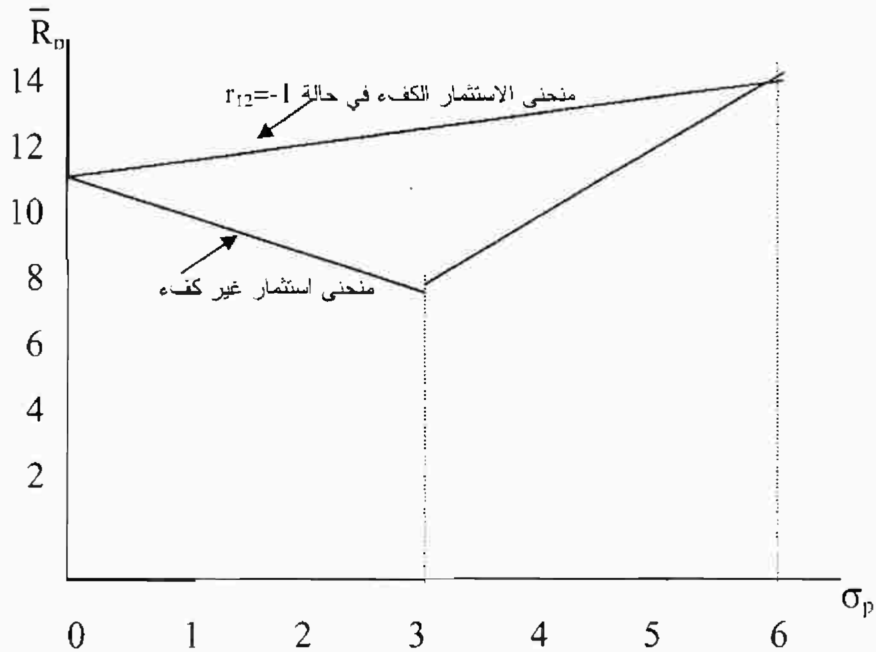
ويلاحظ أنه لدرجة مخاطر أقل من 3 يكون هناك أكثر من حل، حيث يوجد منحيين إحداهما المنحنى الكفء والآخر هو الخط الأدنى والذي لا يعبر عن المنحنى الكفء، وعلى هذا الأساس إذا رغب مستثمر ما تحقيق أعلى عائد عند درجة مخاطرة 2 مثلاً، فإنه يتم التعويض في المعادلتين (1/3) ، (2/3) لنصل إلى قيمتين لـ X، تؤدي واحدة إلى عائد منحنى الاستثمار غير الكفء الذي يتم استبعاده وتؤدي الأخرى إلى عائد على منحنى الاستثمار الكفء والتي تعبر عن الحل الأمثل، ويمكن بيان ذلك في حالة $\sigma = 2$ كما يلي:

$$2 = 6x - 3(1 - x) \quad \therefore x = 5/9 \quad , \quad 2 = -6x + 3(1-x) \quad \therefore x = -1/9$$

$$R_p = 8 + 6(5/9) = 11\frac{1}{3} \text{ , or } R_p = 8 + 6(1/9) = 8\frac{2}{3}$$

$\therefore\ x = \frac{5}{9}$ تعبر عن المزيج الأمثل الذي يحقق أعلى عائد لدرجة مخاطر = 2.

أما فيما يتعلق بقيم $3 < \sigma \leq 6$ فتكون هناك دائماً قيمة وحيدة موجبة لـ X يتحدد عندها الحل الأمثل. إذ تؤدي إحدى المعادلتين (3/1)، (3/2) إلى قيمة سالبة لـ X وبالتالي يتم رفضها لعد السماح بالبيع على المكشوف ويتبقى قيمة واحدة موجبة لـ X وهي التي تؤدي إلى الحل الأمثل. ويمثل الشكل التالي حالة كل من $r_{12} = +1$ ، $r_{12} = -1$



شكل رقم (3/10)

ويتضح لنا من الشكل السابق أنه لأي قيمة $0 < X < 1$ وعند مقدار عائد ما تنخفض مخاطر المحفظة كلما انخفضت قيمة الارتباط حتى يصل إلى (-1) وعلى العكس تتحقق أعلى قيمة لمخاطر المحفظة عندما يصل الارتباط إلى (+1).

ولذا يحدد الشكل السابق الحدود التي تقع في داخلها جميع المحافظ المكونة من هاتين الورقتين وفقاً لقيم الارتباط المختلفة $-1 < r_{12} < 1$.

ويمكن أن نوضح هذه النتيجة المنطقية عن طريق الرسم في حالة $r_{12}=0$ ، $r_{12}=0.5$ كما يلي:

3.2.10 حالة الاستقلالية ($r_{12} = 0$)

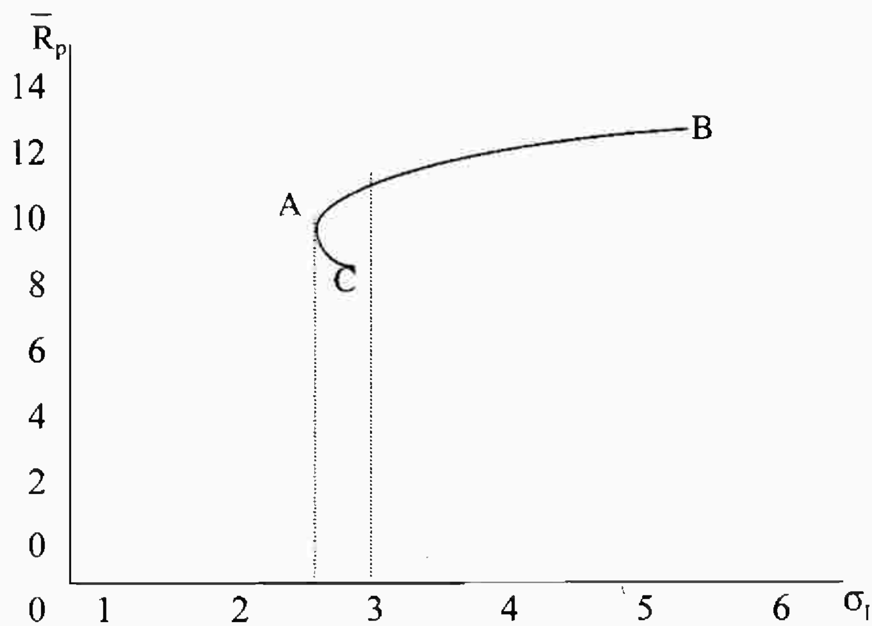
يمكن التعبير عن معادلة رقم (12) الواردة في الفصل التاسع كما يلي:

$$\sigma_p = [X^2 \sigma_1^2 + (1-X)^2 \sigma_2^2]^{1/2}$$

$$= [\ (6)^2 X^2 + (3)^2 (1-X)^2\ ]^{1/2}$$

وتكون القيم المختلفة لـــ R_p, σ_p في المثال السابق كما يلي:

X	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
R_p	8.0	9.2	10.4	11.6	12.8	14.0
σ_p	3.0	2.68	3.0	3.79	4.84	6.0



شكل رقم (4/10)

ويكون المنحنى B A هو منحنى الاستثمار الكفء في حالة $r_{12}=0$ أما المنحنى C A فلا يعبر عن منحنى كفء للاستثمار. وهنا يلزم تحديد قيمـــة X الخاصة بالمحفظة A وهي التي يكون عندها الميل مساوياً صفر، أي هي نقطة تفاضل المخاطر بالنسبة لـــX عند مساواة التفاضل بالصفر.

4.2.10 حالة وجود درجة متوسطة من الارتباط $(r_{12} = 0.5)$

وهنا يمكن وبالتعويض في معادلة رقـــم (12) فـــي الفصـــل الســـابع والخاصة بتحديد σ_p أن نجد أن:

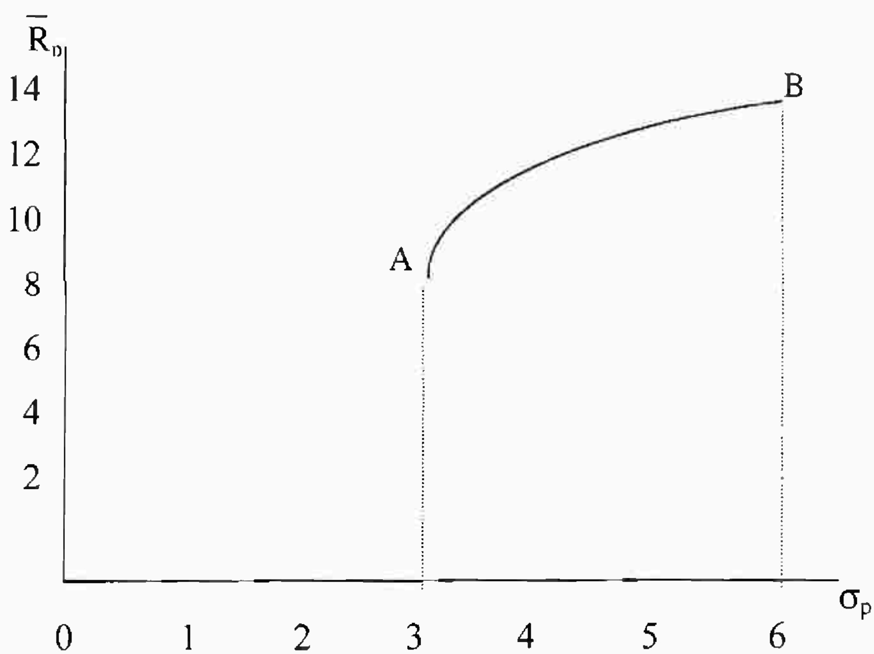
$$\sigma_p = [X^2 \sigma_1{}^2 + (1-X)^2 \sigma_2{}^2 + 2X (1-X) \sigma_1 \sigma_2 r_{12}]^{1/2}$$

$$\sigma_p = [(6)^2 X^2 + (3)^2 (1-X)^2 + 2X (1-X) (1/2) (3) (6)]^{1/2}$$

$$= (27X^2 + 9)^{1/2}$$

وتكون القيم المختلفة لـــ$\bar{R}_p$ ، σ_p في المثال السابق كما يلي:

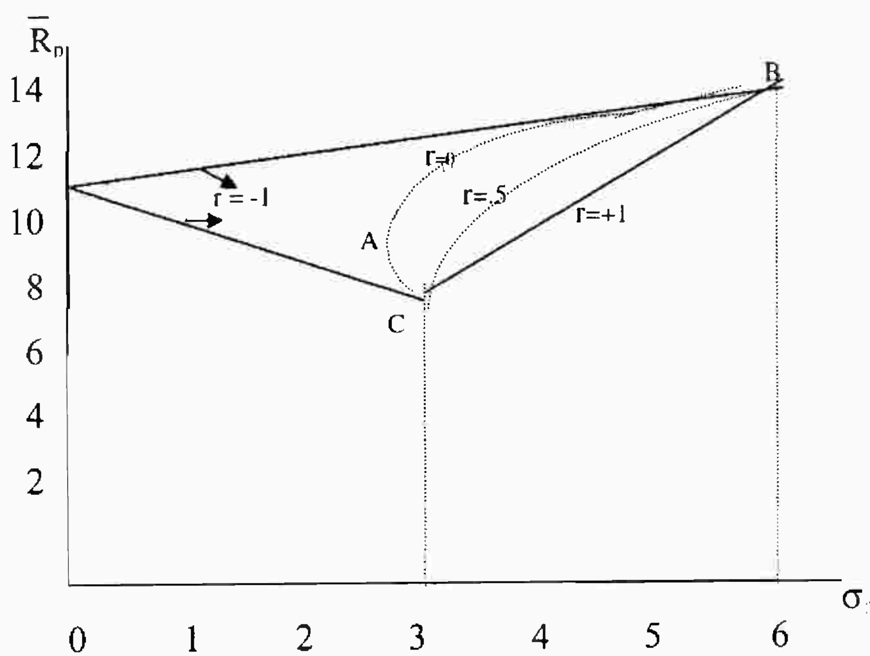
X	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
$\bar{R}_p$	8.0	9.2	10.4	11.6	12.8	14.0
σ_p	3.0	3.17	3.65	4.33	5.13	6.0



شكل رقم (5/10)

ويلاحظ في هذه الحالة عدم وجود جزء من المنحنى أسفل النقطة A، أي أن المنحنى AB يمثل كل منحنى الاستثمار الكفء في هذه الحالة، إذ كلما زادت قيم σ زادت قيم العائد، أي أنه لا يوجد مزيج من الورقتين يؤدي إلى مخاطر أقل من مخاطر الورقة صاحبة أقل مخاطر σ_1، وبالتالي فإن مخاطر المحفظة أياً كان نسب مكوناتها لن تقل عن 3 في هذه الحالة.

ويمكن التعبير عن الحالات الأربع السابقة في شكل واحد كما يلي:



شكل رقم (6/10)

ويكون السؤال الهام، هو "كيفية تحديد قيمة X التي تقلل مخاطر المحفظة إلى أقل حد ممكن؟" أي تحديد X الخاصة بالمحفظة A والتي تعد نقطة البداية للمنحنى الكفء إذ أنه قد تم تحديد قيمة X هذه في الحالة (r_{12}=-1) ولم يتم تحديدها بصفة عامة لجميع قيم r_{12}، ويمكن الإجابة على

هذا السؤال عن طريق تفاضل المعادلة الخاصة بــσ_p بالنسبة لــX ثم نحدد قيمة X التي تؤدي إلى مساواة التفاضل بالصفر، ويكون ذلك صحيحاً لجميع قيم $+1 > r_{12} > -1$ حيث تأخذ المخاطر شكل منحنى وبالتالي تتحد النقطــة الدنيا لهذا المنحنى عن طريق التفاضل ومساواة التفاضل بالصفر.

$$\sigma_p = [X^2 \sigma_1^2 + (1-X)^2 \sigma_2^2 + 2X(1-X)\sigma_1\sigma_2 r_{12}]^{1/2}$$

$$\frac{\partial \sigma_p}{\partial X} = (1/2)\frac{[2X\sigma_1^2 - 2\sigma_2^2 + 2X\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 r_{12} - 4X\sigma_1\sigma_2 r_{12}]}{[X^2 \sigma_1^2 + (1-X)^2 \sigma_2^2 + 2X(1-X)\sigma_1\sigma_2 r_{12}]^{1/2}}$$

وبمساواة التفاضل بالصفر وإيجاد قيمة X نجد أن:

$$X = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 r_{12}}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2 - 2\sigma_1\sigma_2 r_{12}} \qquad (5)$$

وتكون قيمة X التي تقلل المخاطر في حالة $(r_{12}=0)$ كما يلي

$$X = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_2^2 + \sigma_1^2} \qquad (6)$$

ويتحقق ذلك في المثال السابق عند $X = 0.2$ أي تكون σ_p أقــل مــا يمكن في حالة $(r_{12} = 0)$ عند $(X = 0.2)$.

وفي حالة $r_{12} = 0.5$ نجد أن قيمة X التي تقلل المخاطر إلى أقل حــد ممكن كما يلي:

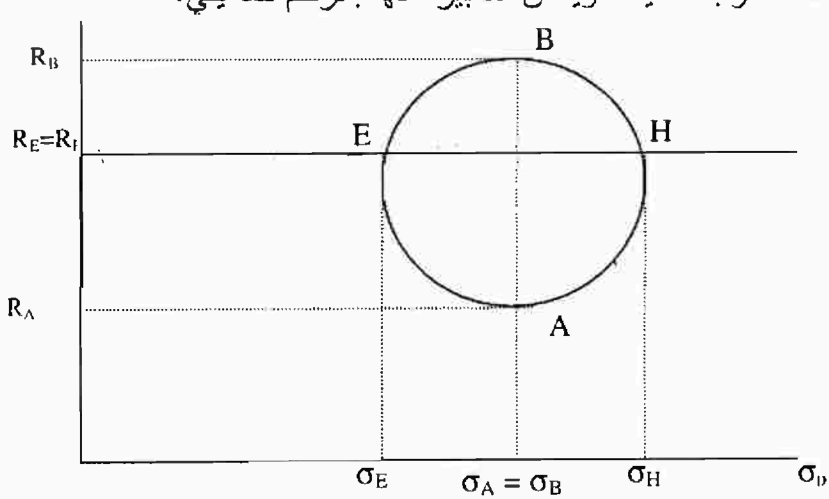
$$X = \frac{9 - 18\,(0.5)}{9 + 36 - 2\,(18)\,(0.5)} = 0$$

أي في حالة $r_{12} = 0.5$ لا يوجد أي محفظة من الأصلين (1) أو (2) تحقق مخاطر أقل من الأصل صاحب أقل مخاطر. إذ يلتزم لتقليل المخاطر إلى أبعد حد قصر الاستثمار على الورقة الثانية فقط، إلا أ، مخاطر المحفظة لجميع قيم X في حالة $r_{12} = 0.5$ تكون أفضل منها في حالة $(r_{12} = +1)$ كما هو واضح في الرسم السابق.

5.2.10 الشكل العام لمنحنى الاستثمار الكفء:

1.5.2.10 حالة عدم السماح بالبيع على المكشوف:

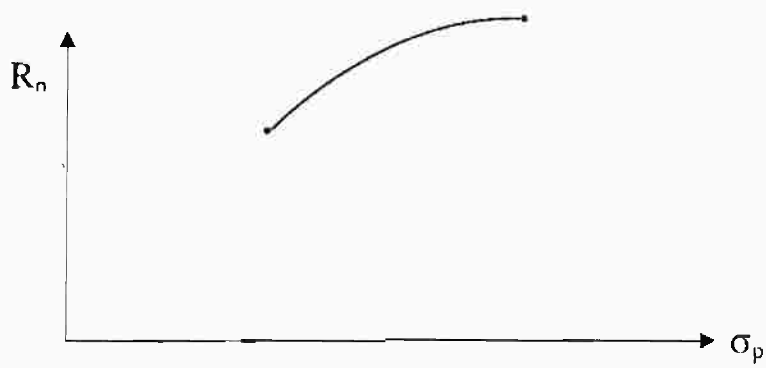
يمكن التعبير عن عائد ومخاطر أي محفظة بنقطة في الفراغ الثاني حيث يمثل المحور الأفقي σ_p والمحور الرأسي R_p ويكون لدينا بذلك عدداً لا نهائياً من النقاط بسبب تعدد المحافظ الممكن تكوينها. إلا أن المستثمر الرشيد يقصر اهتمامه على تلك المحافظ التي تحقق أعلى عائد ممكن عند كل درجة مخاطرة أو تلك المحافظ التي لها اقل درجة ممكنة من المخاطرة عند كل عائد مطلوب تحقيقه. ويمكن التعبير عنها بالرسم كما يلي:



شكل رقم (7/10)

يلاحظ أن المحفظة E أفضل من H إذ تحقق نفس العائد بمخاطر أقل، كما أن المحفظة B أفضل من A إذ تحقق عائد أعلى لنفس درجة المخاطرة.

وبالتالي فإن المجموعة الكفئه من الاستثمارات تتكون من تلك المحافظ التي تقع على المنحنى الخارجي ما بين المحفظة ذات أقل تباين والمحفظة التي تحقق الحد الأقصى من العائد، ويطلق على هذه المجموعة من المحافظ منحنى الاستثمار الكفء وهو منحنى يأخذ شكل دالة مقعرة في فراغ العائد المتوقع والانحراف المعياري. وبالتالي يمكن التعبير عن منحنى الاستثمار الكفء كما يلي:



شكل رقم (8/10)

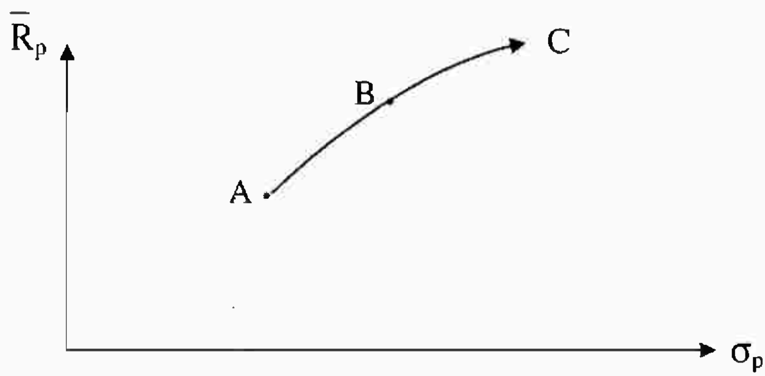
2.5.2.10 حالة السماح بالبيع على المكشوف:

إذ يمكن للمستثمر في سوق الأوراق المالية في كثير من الدول أن يقوم ببيع اسهم لا يمتلكها، أي يمكن للمستثمر أن يأخذ موقف سلبي بالنسبة للسهم ما وهو ما يسمى بالبيع القصير Short Selling ويحدث هذا البيع القصير إذا توقع المستثمر عائد سلبي من الاحتفاظ بالأسهم، وحتى في حالة تحقيق السهم لعائد موجب يظل هناك فرصة للبيع القصير إذا كان العائد الممكن تحقيقه من بيع سهم ما واستخدام حصيلة البيع في شراء سهم آخر أكبر بكثير من العائد في حالة الاحتفاظ بالسهم دون بيعه. ففي المثال التوضيحي السابق والخاص بمحفظة مكونة من ورقتين حيث:

$\bar{R}_1 = 14\%$, $\bar{R}_2 = 8\%$

$\sigma_1 = 6\%$, $\sigma_2 = 3\%$

فإنه يمكن للمستثمر تحقيق أقصى عائد إذا ما تم توجيه جميع الأموال المستثمرة إلى الورقة الأولى ليحقق عائد 14% عند درجة مخاطرة 6%، أما في حالة السماح بالبيع على المكشوف فيمكن للمستثمر الذي يمتلك 100$ أن يقوم ببيع ما قيمته 1,000$ من السهم الثاني وشراء ما قيمته 1,100$ من السهم الأول ليحقق عائد قدره 154$ مع تحمل تكلفة قدرها 80$ نتيجة بيع ما قيمته 1,000$ من السهم الثاني والذي له عائد 8% وبالتالي يكون صافي العائد 74$ أو 74% على الأموال التي يمتلكها المستثمر وقدرها 100$. وبذا يرتفع العائد نتيجة لما سبق وفي مقابل ذلك تزيد المخاطر من 6% إلى 57.2% ويكون منحنى الاستثمار الكفء في هذه الحالة كما يلي:



شكل رقم (9/10)

ويبدأ منحنى الاستثمار الكفء من المحفظة A صاحبة أقل مخاطر كما هو الحال في حالة عدم السماح بالبيع على المكشوف إلا أنه يمتد إلى ما لانهاية وذلك على عكس الحال في حالة عدم البيع على المكشوف، إذ يمتد المنحنى في هذه الحالة الأخيرة إلى نقطة أعلى عائد التي يمكن أن يحققها سهم ما في السوق.

3.10 شكل المنحنى الكفء (الحالة العامة) في حالة إمكانية الإقراض أو الاقتراض لأصل خالي المخاطر

The Efficient Frontier With Riskless Lending & Borrowing

سوف نتناول في هذه الفقرة إمكانية الإقراض والاقتراض في بعض الأصول خالية المخاطر، كأن يقوم مستثمر بشراء أذون خزانة قصيرة الأجل (الإقراض) أو بيع هذه الأذون على المكشوف (الاقتراض)، إذ يؤدي ذلك إلى تسهيل كبير في التحليل وذلك كما يلي:

نفرض أن العائد من اقتناء هذا الأصل الخالي من المخاطر هو R_F، وحيث أن هذا العائد مؤكد الحدوث لذا يمكن اعتبار أنه لا توجد مخاطر من جراء الاستثمار (الانحراف المعياري) في هذا الأصل، أي أن $\sigma_p = 0$، فإذا قرر أحد المستثمرين توزيع الأموال التي يرغب في استثمارها ما بين المحفظة والأصل خالي المخاطر، وأن يتم تخصيص النسبة X للمحفظة A، وبالتالي النسبة (1-X) للأصل خالي المخاطر كان معنى ذلك:

$$\bar{R}_c = (1-X)\, R_F + X R_A \qquad (7)$$

علماً بأنه لا يشترط أن تكون $0 \le X \le 1$، إذ قد تأخذ النسبة X قيمة أكبر من واحد صحيح بسبب إمكانية الاقتراض، وبالتالي إمكانية استثمار مبالغ في المحفظة A اكبر من المبالغ المملوكة للمستثمر.

وتكون مخاطر المحفظة C المكونة لهذه التوليفة كما يلي:

$$\sigma_c = [(1-X)^2 \sigma_F^2 + X^2 \sigma_A^2 + 2X(1-X)\, \sigma_A \sigma_F\, r_{FA}]^{1/2}$$

وحيث أن $\sigma_F = 0$ إذا:

$$\sigma_c = (X^2 \sigma_A^2)^{1/2}$$

$$\sigma_c = X\, \sigma_A \qquad (8)$$

$$X = \sigma_c / \sigma_A \qquad (9)$$

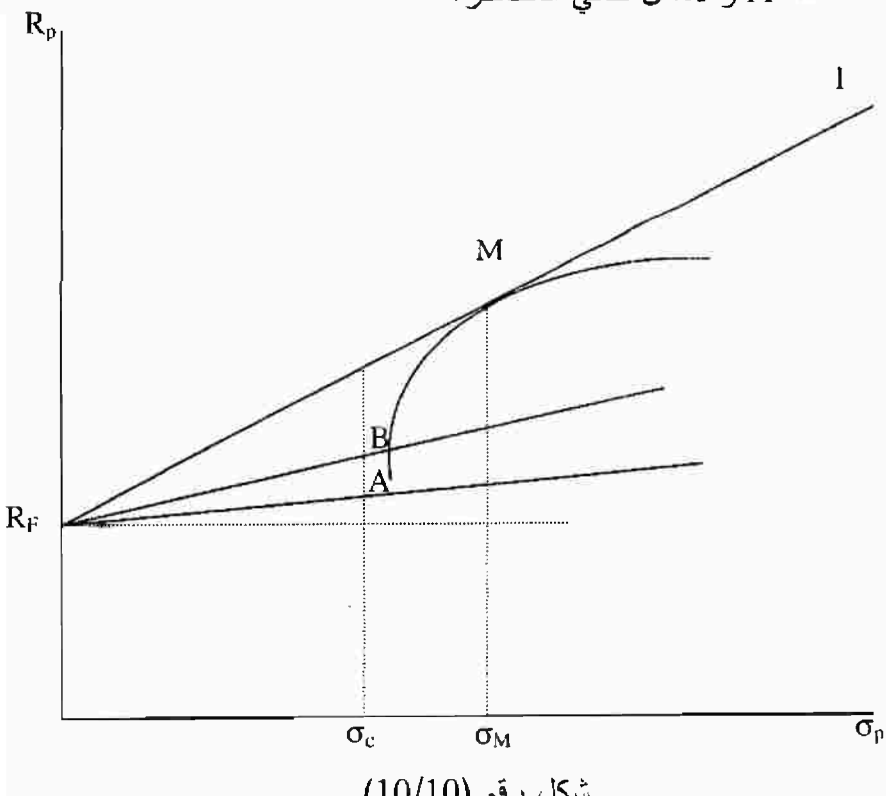
وفي ضوء قيمة σ_c المرغوب في تحقيقها يتم تحديد النسبة X، وبالتالي يمكن إعادة التعبير عن R_c لتصبح كما يلي:

$$\bar{R}_c = \left(1 - \frac{\sigma_c}{\sigma_A}\right) R_F + \left(\frac{\sigma_c}{\sigma_A}\right) \bar{R}_A$$

$$\bar{R}_c = R_F + \frac{(\bar{R}_A - R_F)}{\sigma_A}\, \sigma_c \qquad (10)$$

ومن (10) نجد أن العائد $\bar{R}_C$ يأخذ شكل خط مستقيم كدالة في σ_c يتقاطع عند R_F وله ميل $\frac{(\bar{R}_A - R_F)}{\sigma_A}$ كما يمر هذا الخط بالنقطة $(\sigma_A , \bar{R}_A)$، أي أن هذا الخط يصل ما بين النقطتي $(0, R_F)$، $(\bar{\sigma}_A, R_A)$ وذلك كما في شكل رقم (10/10) التالي:

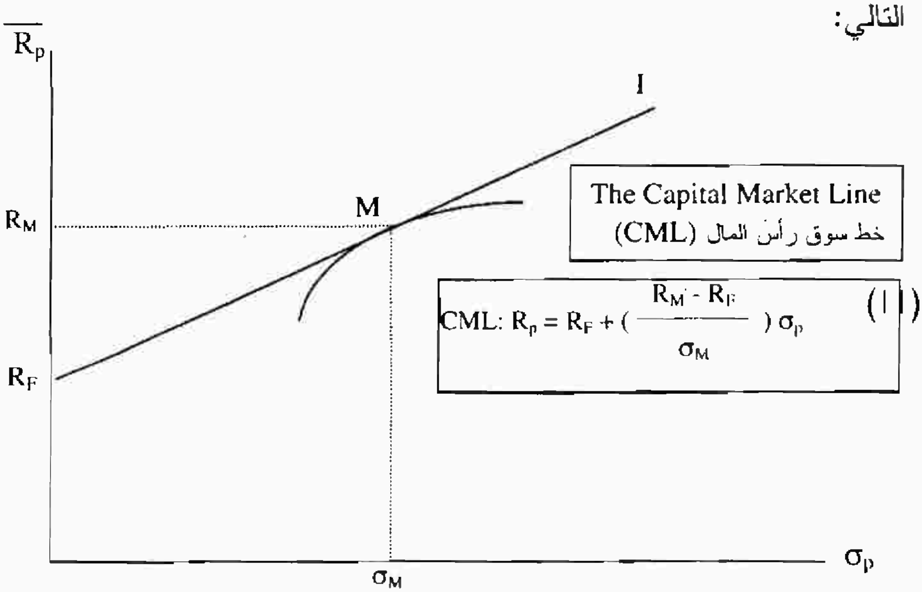
ويمكن للمستثمر تحقيق نتائج مشابهة لما سبق إذا قام بتكوين توليفة من المحفظة B والأصل خالي المخاطر، إلا أننا نجد أن هذه التوليفة تحقق لنفس درجة المخاطرة عائداً أعلى من ذلك الذي يتحقق في حالة المحفظة المكونة من A والأصل خالي المخاطر، إذ كلما انتقلنا إلى أعلى على المنحنى الكفء كلما أمكن تحقيق نتائج أفضل، فالخط الواصل ما بين R_F، B يعطي عائد أعلى لأي درجة مخاطرة يرغبها المستثمر عما لو تم اختيار توليفة مكونة من المحفظة A والأصل خالي المخاطر.



شكل رقم (10/10)

ونستمر هكذا حتى نصل إلى أفضل النتائج والخاصة بالخط الواصل ما بين R_F ، M حيث المحفظة M تمثل نقطة تماس الخط الواصل من R_F إلى المنحنى الكفء وبالتالي تكون المحفظة M هي أفضل محفظة على المنحنى الكفء في حالة الرغبة في تكوين محفظة تحتوي على الأصل خالي المخاطر بمعدل فائدة R_F.

وتتوقف التوليفة من المحفظة M والأصل خالي المخاطر التي يختارها كل مستثمر على درجة المخاطر التي يرغب في تحملها، فقد يقتصر على الاستثمار في الأصل خالي المخاطر أو قد يقوم باستثمار كل أو جانب من أمواله في المحفظة M، بل قد يلجأ إلى الاقتراض بسعر فائدة للأصل خالي المخاطر وشراء كميات أكبر من المحفظة M ليمتد العائد المحقق على الخط $M-I$. أي يكون منحنى الاستثمار الكفء $R_F - M - I$ كما في الشكل التالي:



شكل رقم (11/10)

ولذا تنحصر المشكلة في ظل وجود الأصل خالي المخاطر في تحديد المحفظة M وذلك بغض النظر عن المستثمر محل الاعتبار وهو ما يطلق عليه بالنظرية الانفصال Separation theory.

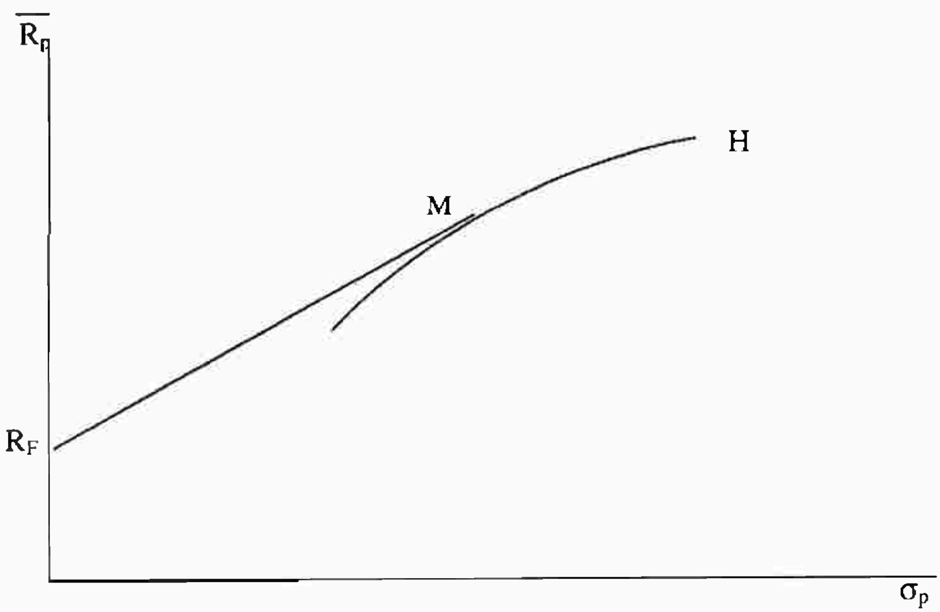
وتمثل معادلة خط سوق رأس المال العائد المتوقع R_p والخطر σ_p لأية حقيبة استثمارية كفأة P عندما يكون سوق رأس المال في حالة توازن حيث يكون العائد المتوقع هو نفسه العائد المطلوب تحقيقه.

ويعبر المقدار $\left(\frac{R_M - R_F}{\sigma_M}\right)$ عن ميل خط سوق رأس المال والذي يعبر عن علاوة خطر السوق، كما يمكن تنميط قيم σ_p بقسمتها على σ_M أي يتم قياس σ_p بوحدات من σ_M فيصبح خط سوق رأس المال كما يلي:

$$R_p = R_F + (R_M - R_F)\frac{\sigma_P}{\sigma_M} \qquad (12)$$

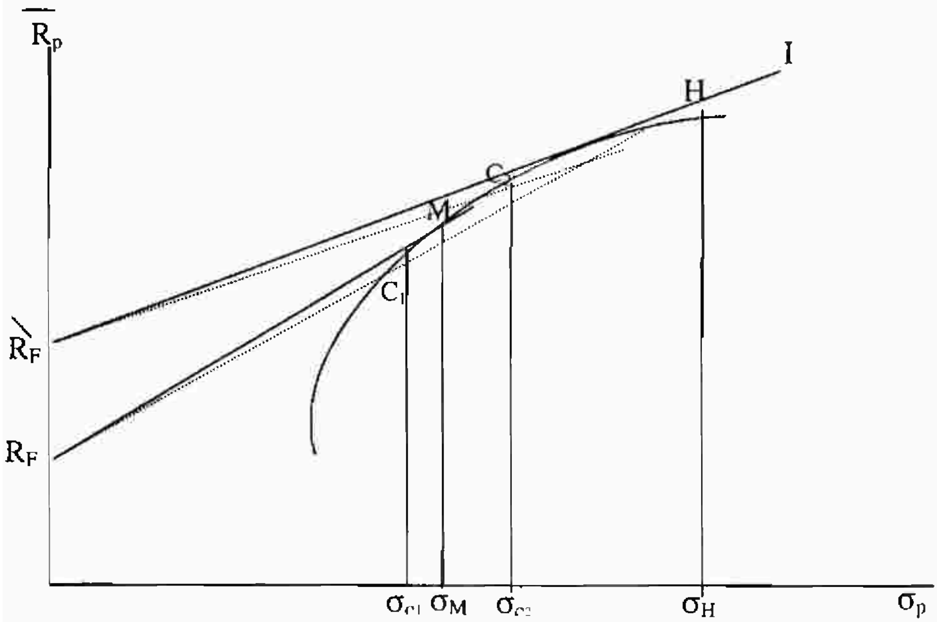
ويعبر المقدار $(R_M - R_F)$ في هذه الحالة عن ميل الخط والذي يمثل علاوة خطر السوق.

ونلاحظ أنه إذا أتيح للمستثمر الاستثمار في هذا الأصل خالي المخاطر دون أن يكون له حق الاقتراض كان معنى ذلك أن منحنى الاستثمار الكفء هو الخط $R_F - M$ ثم يستكمل بالمنحنى $M - I$ أي يكون $R_F - M - I$ كما في الرسم التالي:



شكل رقم (12/10)

أما إذا كان من حق المستثمر أن يستثمر جانب من أمواله في الأصل خالي المخاطر ويحقق عائد R_F، بينما يتحمل تكلفة $\grave{R}_F$ في حالة الاقتراض، كان معنى ذلك أن منحنى الاستثمار الكفء يكون $R_F - M - H - I$ وذلك كما في الشكل التالي:



شكل رقم (13/10)

ويلاحظ أن أي توليفة من الأصل خالي المخاطر مع المحفظة C_1 خلاف المحفظة M وبحيث $0 \leq \sigma_{c1} \leq \sigma_M$ تؤدي إلى الخط الواصل بين R_F- R_{C1} وهو أقل من الخط $R_F - M$، وبالتالي لا يمثل حلاً أمثلاً، ولذلك إذا رغبنا في استثمار جانب من الأموال في الأصل خالي المخاطر واستثمار الباقي في محفظة على المنحنى فإن المحفظة المثلى هي المحفظة M، وليست أي محفظة أخرى تقع على منحنى الاستثمار الكفء قبل المحفظة M. وإذا قررنا الاقتراض كان معنى ذلك استثمار المبلغ الإضافي في المحفظة المثلى

وهي المحفظة H في هذه الحالة، وليس من المربح استثمار هذا المبلغ الإضافي المقترض في الأصل خالي المخاطر حيث أن $R_F < R_F$، كما أنه ليس من المربح استثمار هذا المبلغ المقترض في محفظة C_2 والتي تختلف عن المحفظة H سواء كان $\sigma_C < \sigma_H$ أو حتى $\sigma_C > \sigma_H$ إذ يؤدي ذلك إلى تحقيق عائد على امتداد الخط المستقيم $R_F - C_2$ وهو أدنى من العائد المحقق على منحنى الاستثمار الكفء $R_F - M - H - I$ الأمر الذي يعني أنه لا يمثل حلاً امثلاً.

ولذا فإنه في حالة رغبة المستثمر تحمل مخاطر σ_{c2} حيث $\sigma_M < \sigma_{c2} < \sigma_H$ فإنه يفضل عدم الاقتراض والاقتصار على استثمار أمواله في المحفظة C_2 الواقعة على المنحنى الكفء فيما بين المحفظة M والمحفظة H. أما في حالة الرغبة في الاقتراض فيجب أن يستثمر المبلغ المقترض في المحفظة H إذ يلزم أن يكون الخط المستقيم الذي يمثل عائد المحفظة أعلى ما يمكن وهو ما يتحقق عند ابتداء خط التماس من النقطة $\grave{R}_F$ إلى المحفظة H كما سبق أن بينا.

ونلاحظ هنا أن المحفظة M (الحالة عدم الاقتراض تكون شاملة لكل الأسهم المتداولة في السوق، إذ في حالة عدم تضمنها لسهم ما، كان معنى ذلك انعدام قيمة هذا السهم رغم ما يحققه من عائد، الأمر الذي يجعل هذا السهم اكثر إغراءاً من باقي أسهم المحفظة M وهو ما يؤدي إلى ضرورة تعديل المحفظة M لتشتمل على هذا السهم المستبعد سابقاً، وهكذا تستمر عمليات الإضافة والتعديل إلى أن تشتمل المحفظة M على كل أسهم السوق ولذا نطلق عليها بمحفظة السوق Market Portfolio.

أما في حالة الاقتراض بسعر $\grave{R}_F$ فتكون المحفظة المعنية والشاملة لجميع أسهم السوق هي المحفظة H، إلا أن النسب المكونة للمحفظة H سوف تكون مختلفة عن تلك النسب المكونة للمحفظة M. وبذا تنحصر المشكلة في ظل وجود قيم معينة لكل من $\grave{R}_F$, R_F في محفظتي السوق M,H حيث تحتوي كل منهما على جميع أسهم السوق مع اختلاف النسب الخاصة بكل سهم داخل في المحفظة M عنه في المحفظة H.

أسئلة وتمارين الفصل العاشر

1 – إذا كان عائد محفظة السوق R_M = 10% والعائد الخالي من المخاطر R_F = 5% وكانت σ_M = 6. المطلوب تحديد:

أ – أعلى عائد ممكن تحقيقه في حالة الرغبة في تحمل مخاطر قدرها 4 ؟

ب– أعلى عائد ممكن في حالة الرغبة في تحمل مخاطر قدرها 8 (علماً بأن سعر الاقتراض هو أيضاً 5%) ؟

2 – قام أحمد باستثمار كل مدخراته وقدرها 100,000$ في محفظة كاملة التنويع ذات مخاطر قليلة. وفيما يلي مقارنة للبيانات الخاصة بمحفظة أحمد والمحفظة الخاصة بالسوق:

	محفظة أحمد	محفظة السوق
العائد المتوقع	%12	%15
الانحراف المعياري	%20	%25
معامل الارتباط مع محفظة السوق	0.5	1.0

وقد علم أحمد أنه يمكنه الإقراض أو الاقتراض بسعر فائدة قدره10%.

المطلوب:

أ – هل يمكن لأحمد الوصول إلى محفظة أفضل من محفظته لنفس درجة المخاطرة؟ وإذا كانت الإجابة بنعم بين هذه المحفظة وعائدها ومخاطرها؟

ب – ما هو العائد المتوقع والانحراف المعياري لمحفظة أحمد في حالة قيامه باقتراض 50,000$ واستثمار هذا المبلغ في محفظته ؟

جـ– ما هو أقصى عائد ممكن تحقيقه لنفس درجة المخاطرة في حالة اقتراض المبلغ السابق وهو 50,000$؟

3 – إذا كانت $\sigma_M = 8$ ، $R_M = 14\%$ ، $R_F = 6\%$. فالمطلوب تحديد المحفظة المثلى لشخص يرغب في تحمل مخاطر $\sigma = 5$؟ وتحديد العائد الخاص بهذه المحفظة ؟

4 – إذ رغب شخص في المثال السابق في تكوين محفظة مثلى علماً بأن درجة المخاطر التي يرغب في تحملها $\sigma = 10$.

المطلوب تحديد المحفظة المثلى وما هو العائد المتوقع في هذه الحالة ؟

5 – إذا افترضنا تجانس التدفقات في سوق الأوراق المالية (كل فرد يوافق على العائد المتوقع والانحراف المعياري لكل سهم)، وإذا كان العائد المتوقع لمحفظة السوق $R_M = 12\%$ ، $\sigma_M = 10\%$ وكان العائد الخالي من المخاطر المتوقع $R_F = 5\%$.

المطلوب:

أ – ما هو العائد المتوقع لمحفظة انحرافها المعياري 7% ؟

ب – ما هو الانحراف المعياري لمحفظة لها عائد متوقع 20% ؟

6 – نفرض وجود سهمين وكان معدل التغاير بينهما 0.001 وكانت خصائص السهمين كما يلي

	E (R)	σ
A	0.05	0.1
B	0.10	0.2

المطلوب تحديد:

أ – العائد المتوقع للمحفظة ذات اقل مخاطر ؟

ب – إذا كان التغاير بين عائد السهمين = ‎-0.02. فالمطلوب تحديد الأوزان الخاصة بتوليفة المحفظة صاحبة أقل مخاطر.

ج – ما هو الانحراف المعياري للمحفظة إذا كان التغاير بين عائد الورقتين = ‎-0.02 ؟

الفصل الحادي عشر

الأدوات المستخدمة فى تحديد المنحنى الكفء

Techniques For Calculating the Efficient Frontier

1.11 حالة السماح بالبيع على المكشوف Short Sales Allowed

1.1.11 تعريف البيع على المكشوف

سبق أن بينا أنه يمكن للمستثمر فى كثير من الأسواق بما فيها سوق الأوراق المالية أن يقوم ببيع أصل لايمتلكه حاليا على أن يقوم برد هذا الأصل إلى صاحبه بعد فترة معينة يمكنه خلالها شراء نفس الأصل بسعر أقل من سعر البيع، وبالتالي تحقيق أرباح نتيجة الفرق بين سعرى البيع والشراء، ويحدث هذا بطبيعة الحال إذا كان لدى المستثمر إحساس شديد بإتجاه أسعار هذا الأصل إلى الانخفاض، ويسمي هذا البيع بالبيع على المكشوف.

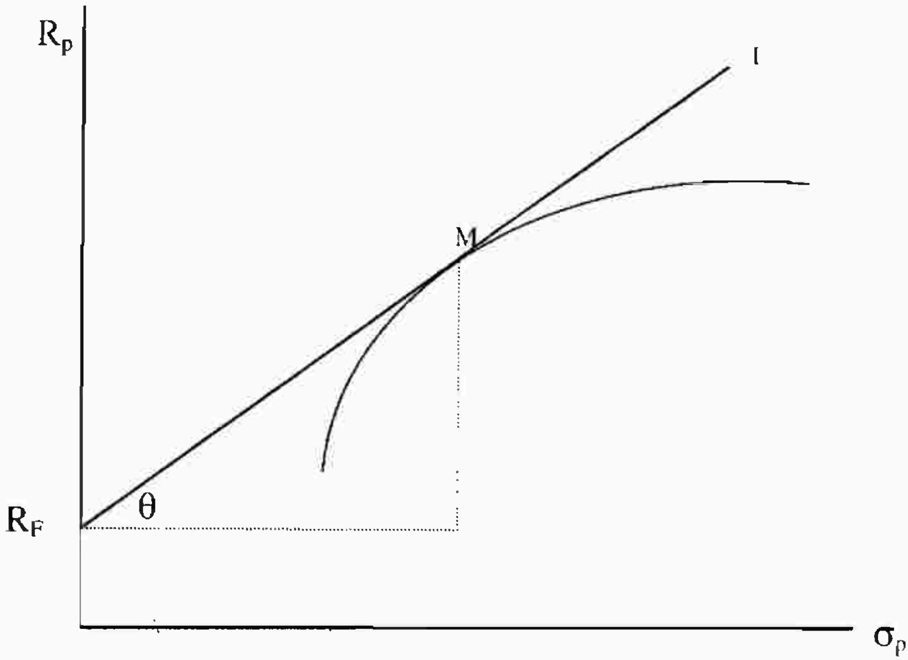
وسوف نهتم فى هذا الجزء ببيان الأساليب الرياضية المستخدمة فى تحديد المنحنى الكفء فى حالة السماح بالبيع على المكشوف وذلك فى ظل:

- إمكانية الإقراض والإقتراض بنفس السعر.
- عدم امكانية الإقراض والإقتراض.

2.1.11 حالة إمكانية الإقراض والإقتراض بنفس السعر:

Riskless Lending and Borrowing

إذ يلزم فى هذه الحالة تحديد المحفظة M ليكون المنحنى الكفء هو الخط RF-M-I وذلك كما فى الرسم :



شكل رقم (1/11)

ويتحدد هذا الخط R_F-M-I ، باعتباره الخط صاحب أكبر ميل . وحيث أنه يمكن حساب الميل لأى خط واصل من الأصل خالى المخاطر إلى أى محفظة P عن طريق ظل الزاوية θ والتى تحسب بقسمة المقابل على المجاور وذلك كما يلى :

$$\theta = (\bar{R}_p - R_F) / \sigma_p$$

كان معنى ذلك أن يكون الهدف هو محاولة إيجاد المحفظة التى تعظم قيمة θ ، مع إفتراض أن مجموع نسب الإستثمار فى الأصول المختلفة المكونة لهذه المحفظة هو واحد صحيح، فإذا كان هناك بعض النسب السالبة بسبب البيع على المكشوف كان معنى ذلك أن نسب الشراء تكون أكبر من واحد صحيح لتعويض هذه النسب السالبه، وعلى هذا الأساس يتم التعبير عن المشكلة فى شكل نموذج رياضى كما يلى :

$$\max \quad \theta = (\bar{R}_p - R_F) / \sigma_p$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{N} X_i = 1 \qquad (1)$$

ولاشك أن تعظيم قيمة θ يتم عن طريق إختيار نسب الإستثمار (X`s) ولايشترط فى هذا النموذج أن تكون $X_i \geq 0$ ، إذ أننا كما سبق نسمح بتملك قيمة سالبة من أى أصل ، ويمكن الإستغناء عـن القيـد السـابق رقـم (1) والتعبير عنه ضمنيا فى دالة الهدف ، ليصبح النموذج الجديد على شكل دالة هدف بدون قيود ، وبالتالى إمكانية تحديد قيمتها العظمى عن طريق التفاضل ومساواة التفاضل بالصفر . وفيما يلى نبين كيفية تحقيق ذلك :

$$R_F = 1.R_F = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \right) R_F = \sum_{i=1}^{N} X_i R_F$$

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i \qquad (2)$$

وبالتالى يتم الغاء القيد والتعبير عنه ضمنيا فى دالة الهدف كما يتم التعبيـر عن σ_p بدلالة الـ (X`s) فتصبح θ كما يلى :

$$\theta = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i (\bar{R}_i - R_F)}{\left(\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} X_i X_k \sigma_{ik} \right)^{1/2}} \qquad (3)$$

وبمفاضلة θ بالنسبة لكل قيمة من قيم X_i ، $i = 1,2,....,N$ وبمساواة التفاضل بالصفر، نصل إلى مجموعة المعادلات التالية:

$$\frac{d\theta}{dx_i} = -(\lambda x_1 \sigma_{1i} + \lambda x_2 \sigma_{2i} + \cdots + \lambda x_N \sigma_{Ni}) + \bar{R}_i - R_F = 0$$

$$\forall\, i = 1, 2, \ldots\ldots, N \qquad (4)$$

حيث λ مقدار ثابت قيمته كما يلي:

$$\lambda = (R_p - R_F) / \sigma_M^2$$

فإذا تم تعريف متغير جديد $Z_k = \lambda x_k$ فإنه يمكن التعبير عن هذه المعادلات السابقة وعددها N معادلة مستقلة كما يلي:

$$\begin{aligned}
\bar{R}_1 - R_F &= Z_1 \sigma_1^2 + Z_2 \sigma_{12} + Z_3 \sigma_{13} + \ldots + Z_N \sigma_{1N} \\
\bar{R}_2 - R_F &= Z_1 \sigma_{12} + Z_2 \sigma_2^2 + Z_3 \sigma_{23} + \ldots + Z_N \sigma_{2N} \\
\bar{R}_3 - R_F &= Z_1 \sigma_{13} + Z_2 \sigma_{23} + Z_3 \sigma_3^2 + \ldots + Z_N \sigma_{3N} \qquad (5) \\
\ldots\ldots\ldots &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \\
\bar{R}_N - R_F &= Z_1 \sigma_{1N} + Z_2 \sigma_{2N} + Z_3 \sigma_{3N} + \ldots + Z_N \sigma_N^2
\end{aligned}$$

علما بأن :

$$\sum_{i=1}^{N} Z_i = \sum_{i=1}^{N} \lambda x_i = \lambda \sum_{i=1}^{N} x_i = \lambda \quad , \quad \because\ Z_k = \lambda x_k$$

$$\therefore \quad X_k = \frac{Z_k}{\lambda} = \frac{Z_k}{\sum_{i=1}^{N} Z_i} \qquad (6)$$

أى نصل بذلك إلى تحديد النسب الخاصة بمكونات المحفظة المثلى (M)، ويمكن تطبيق ما سبق على المثال التالي:

مثال(1) :

إذا توافرت البيانات الخاصة بثلاثة أوراق متاحة في سوق ما ، وكانت هذه البيانات كما يلي:

	(1)	(2)	(3)
$\bar{R}_i$	14	8	20
σ_i^2	36	9	225
σ_i	6	3	15

$r_{12}= 0.5$, $r_{13}= 0.2$, $r_{23}= 0.4$

فإذا كانت $R_F = \%\ 5$ فالمطلوب هو:

1- تحديد نسب الإستثمار فى كل ورقة واللازمة لتحديد المحفظة M .

2- عائد المحفظة M.

3- مخاطر المحفظة M.

1- تحديد نسب الإستثمار فى كل ورقة

$$14 - 5 = 36\,Z_1 + (0.5)(6)(3)\,Z_2 + (0.2)(6)(15)\,Z_3$$
$$8 - 5 = (0.5)(6)(3)Z_1 + 9\,Z_2 + (0.4)(3)(15)\,Z_3$$
$$20 - 5 = (0.2)(6)(15)Z_1 + (0.4)(3)(15)\,Z_2 + 225\,Z_3$$

➔

$$1 = 4\,Z_1 + Z_2 + 2\,Z_3$$
$$1 = 3\,Z_1 + 3\,Z_2 + 6\,Z_3$$
$$5 = 6\,Z_1 + 6\,Z_2 + 75\,Z_3$$

$Z_1 = 14/63$, $Z_2 = 1/63$, $Z_3 = 3/63$

$$\sum_{i=1}^{3} Z_i = 18/63$$

$X_1 = Z_1 / Z_i = 14/18$, $X_2 = 1/18$, $X_3 = 3/18$

2- العائد المتوقع للمحفظة

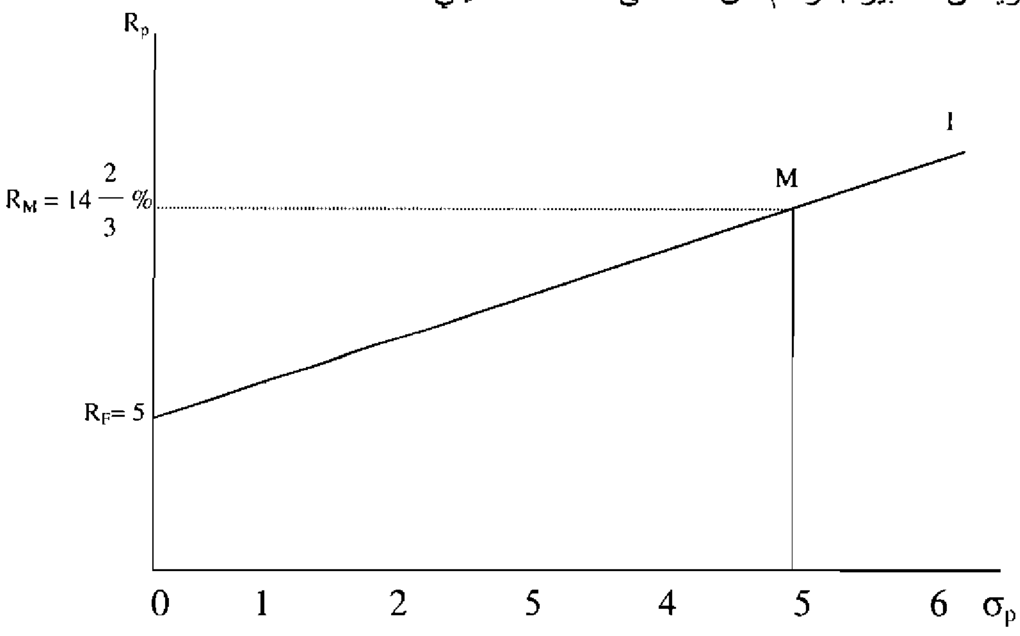
$$\bar{R}_p = 14/18\,(14) + 1/18\,(8) + 3/18\,(20) = 14\ 2/3\ \%$$

3- المخاطرالمتوقعة للمحفظة

$$\sigma_M^2 = (14/18)^2(36) + (1/18)^2(9) + (3/18)^2(225)$$
$$+ 2(14/18)(1/18)(6)(3)(0.5)$$
$$+ 2(14/18)(3/18)(6)(15)(0.2)$$
$$+ 2(1/18)(3/18)(3)(15)(0.4)$$
$$= 203/6 = 33\ 5/6$$

$$\therefore \sigma_M = \sqrt{33\ 5/6} = 5.24$$

ويمكن التعبير بالرسم عن المنحنى الكفء كما يلي:



شكل رقم (2/11)

3.1.11 حالة عدم امكانية الإقراض أو الإقتراض

No Riskless Lending or Borrowing

فى هذه الحالة لايتطلب الأمر فقط تحديد المحفظة M ليكون المنحنـــى الكفء هو R_F-M ، وإنما يقتضى الأمر فى غيبة R_F تحديد جميع المحافظ الأخرى على هذا المنحنى الكفء .

ويتم تحقيق ذلك عن طريق تكرار نفس الأسلوب السابق إتباعه عند تحديد المحفظة M ، حيث يتم تعظيم قيمة θ لقيم مختلفة لـ R_F وبالتالى نصل إلى المحفظة المثلى المقابلة لكل قيمة من قيم R_F وبتكرار ذلك عدد كاف من المرات نصل إلى تحديد شكل هذا المنحنى الكفء. ونلاحظ هنا عدم جواز افتراض أن R_F أكبر من $\bar{R}_i$ للسهم i والذي له مخاطر σ_i، إذ يتنافى هذا مع شرط كفاءة السوق إذ لا يمكن تصور وجود ورقة تحقق عائد أقل من العائد الخالي من المخاطر خلال مجموعة من السنوات السابقة المتخذة كأساس لحساب متوسط العائد للأوراق الموجودة في السوق.

1.3.1.11 حل مجموعة المعادلات اللازمة لتحديد نسب الإستثمار (المعادلات رقم 5) كدالة فى R_F

حتى نتفادى تعظيم θ لقيم R_F المختلفة ، وما يتطلبه ذلك من حل مجموعة المعادلات رقم(5) لكل قيمة من قيم R_F ، فانه يمكن الوصول إلى صيغة عامة نحدد فى ضوئها قيمة Z_K ، وبالتالى تحديد قيمة X_K لكل ورقة K والتى تعظم θ لأى قيمة من قيم R_F .

فبالرجوع إلى معادلات رقم (5) والتعويض فيها بقيم σ_{ik}، σ_i^2 فإنه يمكن إيجاد قيم Z_K كدالة فى R_F لتصبح كما يلى :

$$Z_K = C_{0K} + C_{1K}(R_F) \qquad (7)$$

وبالتالى فى ضوء معادلة (7) ومعرفة C_{0K} ، C_{1K} يمكن تحديد Z_K وبالتالى X_K وبالتالى تحديد المحفظة M المثلى المقابلة لكل قيمة من قيم R_F الممكنة .

ويمكن توضيح ذلك على المثال رقم(1) السابق كما يلى :

$$14 - R_F = 36 Z_1 + 9 Z_2 + 18 Z_3$$
$$8 - R_F = 9 Z_1 + 9 Z_2 + 18 Z_3$$
$$20 - R_F = 18 Z_1 + 18 Z_2 + 225 Z_3$$

وبحل المعادلات الثلاثة لايجاد قيم Z_1 كدالة فى R_F ، نصل إلى :

$$Z_1 = 42 / 189 \quad + oR_F$$
$$Z_2 = 118 / 189 - 23 / 189\ R_F$$
$$Z_3 = 4 / 189 + 1 / 189\ R_F$$

فاذا عوضنا عن $R_F = 5$ نصل إلى :

$$Z_1 = 14/63 \quad , \quad Z_2 = 1/63 \quad , \quad Z_3 = 3/63$$

وهى نفس القيم السابق الحصول عليها فى مثال (1) السابق .

وبطبيعة الحال يمكن الوصول الى قيم X_K المقابلة لقيم Z_K السابقة. وبالمثل فى حالة تغيير قيم R_F نصل إلى القيم المقابلة لـ Z_K وبالتالى قيم X_K ، ففى حالة $R_F = 2$ نجد أن :

$$Z_1 = 14/63 \quad , \quad Z_2 = 24/63 \quad , \quad Z_3 = 2/63$$

وهكذا نصل إلى قيم Z_K ومنها X_K لكل قيمة من قيم R_F .

وقد يجد البعض صعوبة فى حل مجموعة المعادلات رقم (5) وايجاد قيم Z_K كدالة فى قيم R_F . وبالتالى يصعب عليه الوصول إلى المعادلة العامة رقم (7) السابقة . ففى هذه الحالة يمكن الوصول إلى معادلة (7) بطريقة أخرى بسيطة وذلك عن طريق حل مجموعة المعادلات رقم (5) لقيمة معينة من قيم R_F وبالتالى استخراج Z_K مباشرة لهذه القيمة من قيم R_F ، ثم اعادة حل نفس مجموعة المعادلات رقم (5) لقيمة أخرى من قيم R_F والوصول إلى قيم Z_K المقابلة. وبالتالى يمكن من مجموعة القيم الأولى ومجموعة القيم الثانية لـ Z_K نصل إلى الصيغة العامة السابقة . ويمكن توضيح ذلك على المثال السابق كما يلى :

بحل مجموعة معادلات (5) عند $R_F = 5$ ، نصل إلى :

$$Z_1 = 14/63 \quad , \quad Z_2 = 1/63 \quad , \quad Z_3 = 3/63$$

ثم اعادة حل معادلات (5) عند $R_F = 2$ ، نصل إلى :

$$Z_1 = 14/63 \quad , \quad Z_2 = 24/63 \quad , \quad Z_3 = 1/63$$

وهنا يمكن تحديد قيم C_{0K} ، C_{1K} لجميع قيم k فى المعادلة (7) التالية كما يلى:

$Z_K = C_{0K} + C_{1K}R_F$

<u>K = 1 :</u>

$14/63 = C_{01} + C_{11}\ (5)$

$14/63 = C_{01} + C_{11}\ (2)$

➔

$0 = 3\ C_{11} \quad \therefore C_{11} = 0 \quad , \quad C_{01} = 14/63$

أى أن $Z_1 = 14/63 + oR_F$

<u>K = 2 :</u>

$1/63 = C_{02} + C_{12}(5)$

$24/63 = C_{02} + C_{12}\ (2)$

➔

$-23/63 = 3C_{12}$

$C_{12} = -23/189$

وبالتعويض فى المعادلة الأولى :

$\therefore 1/63 = C_{02} - 23/189\ (5)$

$\therefore C_{02} = 1/63 + 115/189 = 118/189$

أى أن $Z_2 = 118/189 - 23/189\ R_F$

<u>K = 3 :</u>

$3/63 = C_{03} + C_{13}(5)$

$2/63 = C_{03} + C_{13}\ (2)$

➔

$1/63 = 0 + 3\ C_{13} \quad \therefore C_{13} = 1/189$

وبالتعويض فى المعادلة الثانية نجد أن :

$2/63 = C_{03} + 1/189\ (2)$

$C_{03} = 6/189 - 2/189 = 4/189$

أى أن $Z_3 = 4/189 + 1/189\ R_F$

وبالتالى يمكن تحديد جميع قيم Z_k المقابلة لقيم R_F ، أى تحديد القيمة العامة لـ Z_k كدالة فى R_F

2.3.1.11 كيفية تكوين محفظة مكونة من محفظتين مثليتين كأساس لتكوين منحنى الإستثمار الكفء (محفظة مثلى عند R_{F1} و R_{F2})

اذا نظرنا لكل محفظة من المحفظتين على أنهما أصل أو ورقة مالية، فإنه يمكن تكوين منحنى الإستثمار الكفء كما سبق أن بينا في الفصل العاشر بإعتبار أن كل محفظة هى ورقة مالية، ولتحقيق ذلك يقتضى الأمر ليس فقط معرفة العائد والمخاطر الخاصة بكل محفظة وانما يقتضى الأمر أيضا معرفة درجة الإرتباط أو درجة التغاير بين المحفظتين، حيث أن:

$$\sigma_p^2 = X_1^2\sigma_{p_1}^2 + X_2^2\sigma_{p_2}^2 + 2X_1X_2\,\sigma_{p_1p_2} \qquad (8)$$

ولتحديد التغاير بين محفظتين فإننا نقوم بحساب $\sigma_{p_1}^2$ للمحفظة الأولى ثم $\sigma_{p_2}^2$ للمحفظة الثانية ، ثم نقوم بتكوين محفظة مكونة من هاتين المحفظتين ونحسب التباين الخاص بهذه المحفظة الجديدة وذلك بالرجوع إلى البيانات الأصلية للورق المكون لهذه المحفظة .

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} \grave{X}_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} \grave{X}_i\,\grave{X}_k\,\sigma_{ik} \;{}^* \qquad (9)$$

* يلاحظ أن الـ $\grave{X}$s فى هذه المعادلة لاتمثل النسب الخاصة بأى من المحفظتين الأولى والثانية، وإنما تمثل النسب الخاصة بالأسهم الداخلة في توليفة المحفظتين معا (المحفظة الجديدة). ويتم تحديدها عن طريق أخذ متوسط نسبة الاستثمار في السهم فى المحفظتين فبفرض أن المحفظة الجديدة تتكون من نصف المحفظة الأولى ونصف المحفظة الثانية كان معنى ذلك أن

$\grave{X}_k = 0.5X_{1k} + 0.5X_{2k}$, $\forall$ $K = 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots, N.$

وبالتعويض فى المعادلة رقم (8) السابقة يكون المجهول الوحيد هو التغاير بين المحفظة (1) والمحفظة (2) وبذا نصل إلى قيمة $\sigma_{p_1p_2}$.

وبمعرفة العائد والمخاطر لكل محفظة من المحفظتين ثم معرفة التغاير بين المحفظتين، فانه يمكن تكوين منحنى الإستثمار الكفء بتغير نسبة مساهمة كلاً من المحفظتين (X) , (X-1) أي ننظر إلى كل محفظة من المحفظتين كما لو كانت ورقة مالية واحدة، وبالتالي يتم تحديد منحنى الإستثمار الكفء بتغيير النسبة، X كما فى الفصل العاشر والخاص بتكوين المحفظة المثلى لورقتين، وفيما يلى نوضح ذلك على المثال السابق كمايلى :

عند $R_F=5\%$ وجدنا أن قيم Z_K كانت كما يلى :

$$Z_{11} = 14/63 \quad , \quad Z_{12} = 1/63 \quad , \quad Z_{13} = 3/63$$

ومنها توصلنا إلى أن :

$$X_{11} = 14/18 \quad , \quad X_{12} = 1/18 \quad , \quad X_{13} = 3/18$$

$$\bar{R}_{p_1} = 14/18\ (14) + 1/18\ (8) + 3/18(20) = 14\ 2/3\ \%$$

$$\begin{aligned}\sigma^2_{p_1} &= (14/18)^2(36)+(1/18)^2(9)+(3/18)^2(225)\\ &+2(14/18)(1/18)(2)(3)(0.5)\\ &+2(14/18)(3/18)(6)(15)(0.2)\\ &+2(1/18)(3/18)(3)(15)(0.4)\\ &=203/6 = 33\ 5/6\end{aligned}$$

وعند $R_F=2\%$ وجد أن :

$$Z_{21} = 42/189, \quad Z_{22} = 72/189, \quad Z_{23}= 6/189$$

ومنها توصلنا إلى أن :

$X_{21} = 7/20 \quad , \quad X_{22} = 12/20 \quad , \quad X_{23} = 1/20$

$\bar{R}p_2 = (7/20)(14) + (12/20)(8) + (1/20)\,20 = 10\ 7/10$

$$\sigma^2 p_2 = (7/20)^2(36) + (12/20)^2(9) + (1/20)^2(225)$$
$$+ (7/20)(12/20)(9) + 2(7/20)(1/20)(18)$$
$$+ 2(12/20)(1/20)(118) = 5481/400$$

ويكون السؤال المتبقى، هو كيف يمكن لنا تحديد التغاير بين المحفظة الأولى والمحفظة الثانية ؟ للإجابة على هذا السؤال نفرض أننا كونا محفظة جديدة تتكون من ½ المحفظة الأولى و ½ المحفظة الثانية ، كان معنى ذلك أن تكون نسبة الاستثمار فى كل ورقة من الأوراق الثلاثة الممثلة للسوق فى هذا المثال كما يلى:

$X`_k = (1/2)\,X_{1k} + (1/2)\,(X_{2k}) \quad \& \quad k = 1,2,3$

$X`_1 = (1/2)(7/20) + (1/2)(14/18) = 203/360$

$X`_2 = (1/2)(12/20) + (1/2)(1/18) = 118/360$

$X`_3 = (1/2)(1/20) + (1/2)(3/18) = 39/360$

وبالتالي يمكن حساب التباين الخاص بهذه المحفظة بالرجوع إلى البيانات الأصلية الخاصة بالأوراق الثلاثة الداخلة في هذه المحفظة والمتمثلة في تباين الورقة الأولى (36) وتباين الورقة الثانية (9) وتباين الورقة الثالثة (225) ثم التغاير بين كل ورقة والورقة الأخرى المتمثلة في:

$\sigma_{12}=9,\ \sigma_{13}=18,\ \sigma_{23}=18$

$$\sigma^2 p = (225)^2(360/39) + (9)^2(360/118) + (36)^2(360/203) =$$
$$+ 2(203/360)(118/360)(9) + 2(203/360)(39/360)(18)$$
$$+ 2(118/360)(39/360)(18) = 21.859$$

حيث أن هذه المحفظة الجديدة هي نتاج المحفظتين السابقتين، فإنه يمكن التعبير عن σ^2_{P1} ، σ^2_{P2} كما سبق أن بينا ذلك كما يلي:

$$\sigma^2_{P`} = X^2{}_1\sigma^2{}_{P_1} + X^2{}_2\sigma^2{}_{P_2} + 2X_1X_2\sigma_{P_1P_2}$$

$$21.859 = (1/2)^2\,(203/6) + (1/2)^2\,(5481/400)$$

$$+\,2\,(1/2)\,(1/2)\,\sigma_{P_1P_2}$$

ومنها نصل إلى أن $\sigma_{P_1P_2} = 19.95$

وبمعرفة العائد والمخاطر لكل محفظة والتغاير بين المحفظتين، وهو ما يمكن ترجمته إلى الإرتباط بين المحفظتين فإنه يمكن تحديد منحنى الإستثمار لهاتين المحفظتين عن طريق تغيير نسبة المساهمة (X) الخاصة بالمحفظة الأولى، على أن يلى ذلك تحديد المحفظة A الخاصة بنقطة أقل مخاطر وبالتالى يمكن التوصل إلى الجزء من المنحنى الذى يمثل منحنى الإستثمار الكفء كما سبق أن بينا فى حالة وجود ورقتين ماليتين فى الفصل العاشر، إذ ننظر إلى كل محفظة على أنها ورقة مالية لها عائد ودرجة مخاطرة محدده.

4.1.11 الموقف الذى يمكن أن يتخذه المستثمر حيال الأوراق المكونة للمحفظة فى ضوء سعر الفائدة السائد:

يتم تحديد الموقف الذى سوف يأخذه المستثمر من كل ورقة وذلك فى ضوء قيم Z_k الخاصة بالمحفظة M المثلى والتى منها تتحدد قيم X_k (نسب الإستثمار فى كل ورقة). إذ يحجم المستثمر عن الإستثمار فى ورقة ما عند قيمة معينة لـ R_F وذلك عندما تأخذ Z_k القيمة صفر أى عندما نجد أن

$$C_{0k} + C_{1k}\,R_F = 0$$

على أن يأخذ المستثمر موقف دائم Long Position فى حالة مـــا إذا كانت R_F بالشكل الذى يجعل $Z_k > 0$ وعلى العكس يأخذ موقف مكشــوف Short Position إذا كانت R_F بالشكل الذى يجعــل $Z_k < 0$. ويمكــن توضيح ذلك على مثال (1) السابق كما يلى :

$$Z_1 = 42/189$$
$$Z_2 = 118/189 - 23/189 R_F$$
$$Z_3 = 4/189 + 1/189 R_F$$

كان معنى ذلك أن المستثمر يأخذ موقف دائم بالإستثمار فـــى الورقـــة الأولى لجميع قيم R_F ، اذ أن $Z_1=42/189$ أياً كانت قيمة R_F ، أما بالنسبة للورقة الثانية ، فان المستثمر يأخذ منها موقف إستثمار دائم ، أى يلجأ إلـــى اقتنائها والاحتفاظ بها طالما أن $Z_2 > 0$ أى طالما أن :

$$118/189 - 23/189 R_F > 0$$
$$\text{i.e.} \quad 118/189 > 23/189 R_F$$
$$\text{i.e.} \quad 118/23 > R_F$$

أى يحتفظ المستثمر بالورقة (2) لكل قي $118/23 > R_F$ وعلى العكس يلجأ إلى التخلص منها لجميع قيم $R_F \geq 118/23$.

أما بالنسبة للورقة الثالثة ، فان المستثمر يلجأ إلى اقتنائها والاحتفاظ بها لكل قيم R_F التى تؤدى إلى أن تكـــون $Z_3 > 0$ أى لجميـــع قـــيم $-4 < R_F > -4$ حيث أن:

$$4/189 + 1/189 R_F > 0$$
$$\text{i.e.} \quad R_F > -4$$

وعلى العكس يلجأ المستثمر إلى التخلص من الورقة الثالثة لجميع قيم $R_F \leq -4$

وبطبيعة الحال لنجاح المستثمر فى التخلص من الأوراق الســيئة مـــن وجهة نظره يقتضى الأمر أن يوجد مستثمر آخر له وجهـــة نظـــر أخـــرى بالنسبة لما يعتبر ورقة جيدة أو ورقة رديئة.

2.11 حالة عدم السماح بالبيع على المكشوف

Short Sales Not Allowed

1.2.11 حالة إمكانية الإقراض والإقتراض

تتشابه هذه الحالة مع الحالة السابقة والتى يسمح فيها بالبيع على المكشوف مع إمكانية الإقراض والإقتراض وذلك من حيث وجود محفظة ما مثلى لكل قيمة من قيم R_F ، وتتحدد هذه المحفظة أيضا عن طريق تعظيم الميل الخاص بالخط الواصل مابين العائد الخالي من المخاطر وأى محفظة أخرى تقع على منحنى الإستثمار الكفء .

إلا أننا نضيف إلى القيود الخاصة بهذه الحالة قيد جديد يسمى شرط عدم السلبية ، إذ لا يسمح للمستثمر فى هذه الحالة الخاصة بعدم السماح بالبيع على المكشوف أن يمتلك كمية سالبة من أصل ما . وعلى هذا الأساس يمكن التعبير عن النموذج الرياضى الذى يعبر عن هذه الحالة كما يلى :

$$\max \quad \theta = (\bar{R}_p - R_F) / \sigma_p$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$X_i \geq 0 \qquad \forall i$$

وتعتبر هذه المشكلة بمثابة مشكلة برمجة رياضية ، وقد يظن البعض بأنها مشكلة برمجة خطية حيث أن القيود الخاصة بالمشكلة قيود خطية ، إلا أن دالة هدف تعد دالة غير خطية حيث أن σ_p تحتوى على X_i^2 ، X_iX_k أى أن دالة الهدف هى بمثابة معادله تربيعية quadratic equation ، وتسمى المشكلة السابقة بمشكلة برمجة تربيعية quadratic programming problem إذ تطلق هذه التسمية على هذا النوع من النماذج حيث تكون القيود الخاصة بها قيود خطية علما بأن دالة الهدف دالة تربيعية .

ويوجد الكثير من البرامج أو الحزم الجاهزة التى تمكننا من الوصول إلى حل هذه المشكلة بإستخدام الحاسبات الآلية .

2.2.11 حالة عدم امكانية الإقراض أو الإقتراض

No Riskless Lending or Borrowing

تتحدد أى محفظة على المنحنى الكفء عن طريق تقليل المخاطر الخاصة بهذه المحفظة الى أقل حد ممكن وذلك عند مستوى العائد المحدد. فإذا تم تحديد مستوى عائد معين ثم تم التوصل إلى المحفظة التى تحقق أقل قدر ممكن من المخاطر، كانت هذه المحفظة واقعة على المنحنى الكفء.

ويمكن التعبير عن هذه المشكلة فى شكل مشكلة برمجة تربيعية تهدف الى تقليل مخاطر المحفظة تحت القيود الخاصة بأن مجموع الأموال المستثمرة تكون واحد صحيح، وأن العائد من أوراق المحفظة محدد بمستوى معين $\bar{R}_p$ مع عدم السماح بالبيع على المكشوف أي شرط عدم السلبية، وذلك كما يلي:

$$\min Z = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} X_i X_k \sigma_{ik}$$

s.t

$$\sum_{i=1}^{N} X_i = 1$$

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i = \bar{R}_p$$

$$X_i \geq 0 \ , \ i = 1, 2, ..., N$$

ثم بتغيير قيم $\bar{R}_p$ لتتراوح ما بين العائد الخاص بالمحفظة صاحبة أقل مخاطر والعائد الخاص بالمحفظة صاحبة أعلى المخاطر نصل إلى تحديد منحنى الاستثمار الكفء .

ونشير هنا أيضا بأن هناك مجموعة من الحزم الجاهزة التى تمكّنا من التوصل إلى الحل باستخدام الحاسب.

أسئلة وتمارين الفصل الحادي عشر

1 – إذا توافرت البيانات التالية عن الأسهم الثلاث التي يتم تداولها في أحد أسواق الأوراق المالية:

السهم	متوسط العائد	الانحراف المعياري	التغاير مع أ	ب	ج
أ	10	4		20	40
ب	12	10			70
ج	18	14			

وإذا كان مسموحاً بالبيع على المكشوف:

المطلوب تحديد المحفظة المثلى M إذا كان سعر الإقراض أو الإقتراض هو 5% ؟

2 – إذا كان البيع على المكشوف غير مسموح به فباستخدام بيانات التمرين السابق المطلوب وضع النموذج الرياضي اللازم لحل مشكلة تحديد المحفظة المثلي ؟.

3 – إذا أعطيت البيانات التالية:

الأسهم	$\bar{R}_i$	σ_i
1	10	5
2	8	6
3	12	4
4	14	7
5	6	2
6	9	3
7	5	1
8	8	4
9	10	4
10	12	2

وكانت قيم $r_{ij} = 0.5 \quad \forall \; ij$ ،

$R_F = 4\%$

المطلوب: تحديد شكل المنحنى الكفء (عن طريق تحديد عدة نقاط على المنحنى) ؟

4 - إذا توافرت البيانات الخاصة بمحفظتين مثليتين B , A وكانت بياناتهما كما يلي:

المحفظة	$\bar{R}_i$	σ_i
A	10	6
B	8	4

وكان التغاير $\sigma_{ij} = 20$.

المطلوب: تحديد شكل منحنى الاستثمار الكفء (حدد عدة نقاط على المنحنى)

الفصل الثاني عشر
هيكل الإرتباط بين عوائد الأوراق المالية

1.12 نموذج المؤشر الواحد The Single Index Model

لقد بينا في الفصول الثلاث السابقة أساسيات النظرية الحديثة لمحافظ الأوراق المالية، والتي ظهرت عام 1956 على يدى ماركوتز Markowitz الذي نشر بحثه الرائد في هذا المجال ثم أتبع ذلك كتابة مرجعه في نفس الموضوع. ولقد اهتمت الأبحاث بعد ذلك ببيان كيفية إيجاد وسيلة لتطبيق هذه النظرية وهو ما سنهتم به في هذا الفصل والفصل التالي. إذ اهتم كثير من كتاب التمويل ببيان مجالين لكيفية تبسيط التطبيق الخاص بنظرية محفظة الأوراق المالية:

الأول : تبسيط نوع وكمية البيانات اللازمة كمدخلات للتحليل .

الثانى : تبسيط العمليات الحسابية اللازمة للوصول إلى المحفظة المثلى .

وسوف نقتصر فى هذا الفصل على معالجة المجال الأول، أى نهتم ببيان التبسيطات التي تمت على مدخلات البيانات اللازمة لاجراء التحليلات المطلوبة على أن نتناول تبسيط العمليات الحسابية اللازمة للوصول إلى المحفظة المثلى فى كتابات أخرى مستقبلة.

ونشير أنه سبق أن بينا أنه يلزم لتحديد المنحنى الكفء ، ضرورة حساب العائد والمخاطر الخاصة بأى محفظة والتى سبق التعبير عنها كما يلى:

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i \qquad (1)$$

$$\sigma_p = \left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} X_i X_k \sigma_i \sigma_k r_{ik}\right]^{1/2} \qquad (2)$$

إذ يتبين لنا من معادلة (1)،(2) أننا نحتاج كمدخلات إلى حساب العائد وكذا التباين الخاص بكل ورقة ، هذا بالإضافة إلى حساب الإرتباط بين كل ورقتين متاحتين فى السوق محل الإهتمام ، وعلى هذا الأساس اذا كان عدد الأوراق المتاحة فى السوق يتراوح بين 150 و250 ورقة كان معنى ذلك أنه يلزم تقدير من150 إلى250 عائد وكذا من150 إلى250 تباين لكل ورقة من هذه الأوراق هذا بالإضافة إلى الحاجة إلى تقدير معاملات إرتباط قدرها :

$$\binom{N}{2} = \frac{N\,!}{(N-2)\,!\,2\,!} = \frac{N(N-1)}{2}$$

أى يلزم تقدير من 11175 إلى 31125 معامل إرتباط ، ولقد أدى ماسبق إلى قيام الباحثين بمحاولة ايجاد وسائل أخرى تمكنا من الوصول إلى نفس الهدف بقدر أقل من البيانات المطلوبة.

وقد سبق أن بينا فى الفصل التاسع فقرة 2.8.9 معادلة (18) أن

$$\sigma_p^{\,2} = \frac{1}{N}\ \bar{\sigma}_i^{\,2} + (1 - \frac{1}{N})\,\bar{\sigma}_{ij}$$

وأنه كلما زادت N الممثلة لعدد الأوراق الداخله فى المحفظة كلما إختفى الأثر الخاص بتباين كل ورقة، ويتبقى تأثير المقدار الثانى والخاص بمقدار التغاير بين كل ورقة والورقة الأخرى فى المحفظة.

أى أن التنويع يؤدى إلى تجنب المخاطر الخاصة بكل ورقة على حده، وهو ما يسمى بالمخاطر غير المنتظمة Unsystimatic risk ولكنه لايؤدى إلى تجنيب المخاطر الناجمة من التغاير بين هذه الأوراق وهو مايسمى بالمخاطر المنتظمة Systimatic Risk.

وبالتالى فإن المستثمر الذى يمتلك ورقة مالية واحدة يستخدم متوسط عائد الورقة والانحراف المعياري لهذا العائد كمقياسين للعائد والمخاطرة

الخاصة بالورقة، بينما المستثمر الذى يمكنه أن يمتلك مجموعة من الأوراق المالية فإنه يجب أن يهتم بمدى مساهمة الورقة فى عائد ومخاطر المحفظة.

ويعد نموذج المؤشر الواحد هو أكثر هذه النماذج شيوعاً. ويفترض هذا النموذج أن عوائد الأوراق المالية ترتبط بشكل ما مع الحركة لمؤشر السوق Single Index وبالتالي لا يوجد حاجة إلى حساب درجة الارتباط بين عائد كل ورقة وعائد الأوراق المالية الأخرى وإنما نكتفي فقط بمعرفة درجة ارتباط عائد الورقة والعائد الخاص بهذا المؤشر الواحد.

فالمشاهدة العملية لمعظم أسواق الأوراق المالية ، قد بينت أن الإتجاه التصاعدى للأسعار معبرا عنه برقم أو مؤشر عام للسوق عادة مايصحبه إتجاه تصاعدى لأسعار الأنواع المختلفة من الأوراق، وبالعكس إذا إتجه الرقم العام للأسعار إلى الإنخفاض فعادة مايصحبه إتجاه أسعار الأنواع المختلفة من الأوراق المالية إلى الإنخفاض أيضاً .

ولاشك أن هذا يجعلنا نقرر أن هناك إرتباط بين عوائد الأنواع المختلفة من الأوراق والمؤشر العام فى السوق، ويمكن إيجاد خط الإتجاه العام الذى يربط بين عائد الورقة وعائد السوق وذلك كما يلى :

$$R_j = a_j + \beta_j R_M \qquad (3)$$

حيث :

R_M متغير عشوائى يمثل مؤشر السوق .

R_j معدل العائد على الورقة i .

a_j تمثل الجزء من معدل عائد الورقة i المستقل عن مؤشر السوق أى ذلك الجزء من العائد الخاص بالورقة والذى لايتوقف على ظروف السوق .

β_j تمثل ميل الخط والذى يحدد درجة التغير فى R_j نتيجة حدوث تغيير فى R_M مقداره وحدة واحدة، أى ذلك الجزء من العائد الخاص بالورقة والذى يتوقف على ظروف السوق.

ومما سبق نجد أنه إذا كانت $\beta_i = 2$ كان هذا معناه أن عائد الورقة يزيد أوينقص بمعدل 2% مقابل زيادة أونقص مؤشر السوق بمقدار 1% .

ويمكن التعبير عن a_i كما يلى :

$$a_i = \alpha_i + e_i$$

حيث α_i تمثل القيمة المتوقعة لـ a_i ، e_i تمثل الجزء غير المؤكد لقيمة a_i (القيمة المتوسطة للأخطاء فى تحديد قيمة a_i) أىأن:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i \qquad (4)$$

حيث أن R_M ، e_i تعد بمثابة متغيرات عشوائية ، أما β_i ، α_i فهى مقادير ثابتة تختلف من ورقة إلى ورقة أخرى .

2.12 الافتراضات الخاصة بصحة النموذج

1- أن القيمة المتوقعة (المتوسطة) للأخطاء تساوى صفراً ، أى أن

$$E(e_i) = 0 \qquad , i = 1,2,........,N \qquad (5)$$

2- أن التغير فى الجزء العشوائى فى قيمة e_i مستقل عن التغير العشوائى فى قيمة R_M أى أن :

$$Cov (e_i , R_M) = E [(e_i - 0) (R_M - \bar{R}_M)] = 0$$

i . e.

$$E [e_i(R_M - \bar{R}_M)] = 0 \qquad (6)$$

أى أن الجزء العشوائى لـ a_i (الأخطاء الخاصة بالورقة) مستقلة عن التغيرات العشوائية الخاصة بالسوق .

3- كل ورقة مستقلة عن الورقة الأخرى، أي أن $E(e_i , e_k) = 0$ ، وبالتالى فان السبب الوحيد لتغير قيم الورق معا لايرجع إلى الجزء المستقل الخاص بكل ورقة وإرتباطه بالجزء المستقل الخاص بالورقة الأخرى، وانما يكون السبب الوحيد لتغير قيم الورق معا هو الحركة العامة للقيم فى السوق .

4- نفترض أن الأخطاء e_i لها توزيع معتدل متوسطه صفر وتباينه σ^2_{ei} وذلك لأغراض إجراء إختبارات الفروض وتحديد فترات الثقة الخاصة بها.

أى أن

$$e_i \sim (0 , \sigma^2_{ei})$$

وإذا رمزنا إلى تباين R_M بـــ σ^2_M فإنه يمكن بيان كل من $\bar{R}_i$ ، σ^2_i ، σ_{ik} ، كما يلى:

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i$$
$$E(R_i) = E(\alpha_i + \beta_i R_M + e_i)$$
$$E(R_i) = E(\alpha_i) + E(\beta_i R_M) + E(e_i)$$

ونظرا لأن α_i , β_i ثوابت والقيمة المتوقعة لــ e_i تساوى الصفر

$$\therefore \mathbf{\bar{R}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{R}_M} \qquad \mathbf{(7)}$$

من المعروف أن تباين العائد الخاص بأى ورقة هو :

$$\sigma^2_i = E(R_i - \bar{R}_i)^2$$

وبالتعويض عن كل من R_i و $\bar{R}_i$ نجد أن :

$$\sigma^2_i = E[(\alpha_i + \beta_i R_M + e_i) - (\alpha_i + \beta_i \bar{R}_M)]^2$$
$$= E[\beta_i(R_M - \bar{R}_M) + e_i]^2$$
$$= \beta_i^2 E(R_M - \bar{R}_M)^2 + 2\beta_i E[e_i(R_M - \bar{R}_M)] + E(e_i)^2$$

وحيث أن الإفتراض (2) من إفتراضات نموذج المؤشر الواحد أن :

$$E[e_i(R_M - \bar{R}_M)] = 0$$

$$\therefore \sigma^2_i = \beta_i^2 E(R_M - \bar{R}_M)^2 + E(e_i)^2$$

$$\boldsymbol{\sigma^2_i = \beta_i^2 \sigma^2_M + \sigma^2_{ei}} \qquad \textbf{(8)}$$ [1]

من المعروف أن التغاير بين أى ورقتين هو

$$\sigma_{ik} = E[(R_i - \bar{R}_i)(R_k - \bar{R}_k)]$$

بالتعويض فى المعادلة السابقة عن كل من R_i , $\bar{R}_i$, R_k , $\bar{R}_k$

$$\sigma_{ik} = E\{[(\alpha_i + \beta_i R_M + e_i) - (\alpha_i + \beta_i \bar{R}_M)][(\alpha_k + \beta_k R_M + e_k) - (\alpha_k + \beta_k \bar{R}_M)]\}$$

وبإعادة ترتيب المعادلة السابقة نصل إلى الآتى :

$$\sigma_{ik} = E[(\beta_i (R_M - \bar{R}_M) + e_i)(\beta_k (R_M - \bar{R}_M) + e_k)]$$

وبإتمام عملية الضرب فى المعادلة نصل إلى الآتى :

$$\sigma_{ik} = \beta_i \beta_k E(R_M - \bar{R}_M)^2 + \beta_k E[e_i(R_M - \bar{R}_M)] + \beta_i E[e_k(R_M - \bar{R}_M)] + E(e_i e_k)$$

---

(1) From Eqution (1) $\beta_i = \sigma_{iM} / \sigma_M^2 = r_{iM}\sigma_i / \sigma_M \therefore \beta_i^2 = r_{iM}^2 \sigma_i^2 / \sigma_M^2$

$\therefore$ (8) Can be rewritten as follows $\sigma_i^2 = r_{iM}^2 \sigma_i^2 + \sigma_{ei}^2$

وبالرجوع إلى إفتراضات نموذج المؤشر الواحد نجـد أن الحـدود الثلاثـة الأخيرة فى المعادلة السابقة تساوى الصفر

$$\sigma_{ik} = \beta_i \beta_k \sigma_M^2 \tag{9}$$

ونلاحظ مما سبق أن :

1- من المعادلة رقم (7) السابقة أن العائد المتوقع ينقسـم إلـى قسـمين ، الأول خاص بالورقة نفسها والذى لايتوقف على ظروف السوق وهـو مايعبر عنه بـ α_i والقسم الثانى خاص بالجزء من العائـد والمـرتبط بظروف السوق وهو مايعبر عنه $\beta_i \ \bar{R}_M$.

2- من المعادلـة رقـم (8) السابقـة أن تبايـن الورقـة ينقسـم إلى قسمين أيضا القسم الأول خاص بالورقة نفسها والذى لايتوقف على ظروف السوق $\sigma^2{}_{ei}$ ، والذى يعرف بالمخاطر غير المنتظمة والقسـم الثانى خاص بالجزء المرتبط بظروف بالسوق $\beta_i^2 \ \sigma^2{}_M$ والذى يعرف بالمخاط المنتظمة.

3- أما فيما يتعلق بالتغاير σ_{ik} (معادلة رقم9) فهو يعتمد فقط على مخاطر السوق،وتتحقق هذه النتيجة بسبب الافتراض الخاص بأن$E(e_i,e_k)= 0$، $E\,[e_i(R_M - \bar{R}_M)\,] = 0$ أى أن التغير فى قيم الورق معا يرجـع فقط إلى وجود حركة عامة للقيم فى السوق .

ويمكننا الآن بيان العائد والمخاطر الخاصة بالمحفظة وذلك فى ضـوء المعادلات السابقةرقم(7)،(8) ،(9) الخاصة بتحديد العائد والتباين لكل ورقة وكذا التغاير بين الورقة i ، والورقة k وذلك فى ظل نموذج المؤشر الواحد. وذلك كما يلى:

3.12 عائد المحفظة فى ظل نموذج المؤشر الواحد

بما أن :

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i$$

$$\therefore \bar{R}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i (\alpha_i + \beta_i \bar{R}_M)$$

$$\therefore \bar{\mathbf{R}}_\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X_i} \alpha_\mathbf{i} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{X_i} \beta_\mathbf{i} \bar{\mathbf{R}}_M \qquad \mathbf{(10)}$$

4.12 مخاطر المحفظة فى ظل نموذج المؤشر الواحد

بما أن :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} X_i X_k \sigma_{ik}$$

$$\therefore \sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 (\beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{ei}^2) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} X_i X_k (\beta_i \beta_k \sigma_M^2)$$

$$\therefore \boldsymbol{\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} X_i X_k \beta_i \beta_k \sigma_M^2 + \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_{ei}^2} \qquad \mathbf{(11)}$$

ويتبين لنا من معادلة (10)،(11) أنه يلزم لتحديد عائد ومخاطر المحفظة أن تحدد:

1- α_i ، β_i ، σ_{ei}^2 لكل ورقة i

2- $\bar{R}_M$ ، σ_M^2 للسوق

وبالتالى نحتاج إلى عدد من التقديرات قدرها 2 + 3N ، أى أنه لسوق مكون من أوراق عددها يتراوح مابين 150 إلى 250 ورقة ، فإن نموذج المؤشر الواحد يحتاج من 452 إلى 752 تقدير بدلا من 11475 إلى 31625 تقدير فى حالة عدم استخدام نموذج المؤشر الواحد .

ونحصل بذلك على كل البيانات الخاصة بالورقة والتى تلزم لحساب العائد والمخاطر الخاصة بالمحفظة التى تدخل هذه الورقة فى تكوينها .

وبما أن عائد المحفظة كما فى معادلة (10) السابقة كان كما يلى:

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \alpha_i + \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i \bar{R}_M$$

وحيث أن :

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i = 1 \text{ if } X_i \text{ is s.t. } \frac{M_{Vi}}{M_{Vp}}$$

وبفرض أن:

$$\alpha_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \alpha_i$$

إذاً يمكن إعاده التعبير عن معادلة (10) السابقة لتصبح كما يلى :

$$\bar{R}_p = \alpha_p + \beta_p \bar{R}_M \qquad (12)^*$$

وبالمثل يمكن إعادة التعبير عن المعادلة رقم (11) الخاصة بمخـــاطر المحفظة.

$$\sigma^2_p = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \beta_i \sigma^2_M + \sum_{i=1}^{N} X^2_i \sigma^2_{ei} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{N} X_i X_k \beta_i \beta_k \sigma^2_M$$

وحيث أنه فى حالة $k=i$ يصبح الجزء الثالث والأخير والخاص بعملية الجمع المزدوج فى هذه المعادلة يكون هو نفسه الجزء الأول مـــن المعادلـــة حيث أن:

$$X_i X_k \beta_i \beta_k \sigma^2_M = X_i^2 \beta^2_i \sigma^2_M$$

* يلاحظ أنه إذا كانت المحفظة P هى ذاتها محفظة السوق ، أى تتطابق R_p مع R_M كان معنـــى ذلك أنه لاتكون فقط $\beta_p=1$ كما سبق أن بينا بل تكون $\alpha_p = 0$ وذلك أيضاً كما يلى :

$$R_{M1} = \alpha_p + \beta_p R_{M1}$$
$$R_{M2} = \alpha_p + \beta_p R_{M2}$$
$$R_{M1} - R_{M2} = \alpha_p + \beta_p R_{M1} - \alpha_p - \beta_p R_{M2}$$
$$R_{M1} - R_{M2} = \beta_p (R_{M1} - R_{M2}) \qquad \therefore \beta_p = 1$$

وبالتعويض فى أى من المعادلتين السابقتين ينتج أن :

$$R_{M1} = \alpha_p + R_{M1}$$
$$\therefore \quad \alpha_p = 0$$

وبالتالى فإنه يمكن إعادة كتابة مخاطر المحفظة لتصبح كما يلى :

$$\sigma^2{}_p = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} X_i X_k \beta_i \beta_k \sigma^2{}_M + \sum_{i=1}^{N} X^2{}_i \sigma^2{}_{ei}$$

$$\sigma^2{}_p = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i\right) \left(\sum_{k=1}^{N} X_k \beta_k\right) \sigma^2{}_M + \sum_{i=1}^{N} X^2{}_i \sigma^2{}_{ei}$$

$$\sigma^2{}_p = \beta^2{}_p \sigma^2{}_M + \sum_{i=1}^{N} X^2{}_i \sigma^2{}_{ei} \qquad (13)$$

وإذا فرضنا أن المستثمر يوزع إستثماراته بالتساوى على الأوراق الداخلة فى تكوين المحفظة كان معنى ذلك أن :

$$\sigma^2{}_p = \beta^2{}_p \sigma^2{}_M + 1/N \sum_{i=1}^{N} 1/N \ \sigma^2{}_{ei}$$

$$= \beta^2{}_p \sigma^2{}_M + \bar{\sigma}^2{}_{ei} / N$$

وبالتالى كلما زاد عدد الأوراق الداخله فى المحفظة كلما قل التأثير الخاص بمخاطر كل ورقة وتصبح مخاطر المحفظة دالة فقط فى β_p التى هى دالة فى β_i للورق i الداخل فى المحفظة وذلك كما يلى:

$$\therefore \quad \lim_{N \to \infty} \sigma^2{}_p = \beta^2{}_p \sigma^2{}_M$$

and $\sigma_p = \beta_p \sigma_M \rightarrow$ as $N \rightarrow \infty$

ولذا فإن المخاطر الخاصة بمجموع الأوراق الخاصة بمحفظة ما تتحدد وفقا لقيمة β_p الخاصة بها ، فإذا كانت $\beta_p>1$ كان معنى ذلك أنها أكثر مخاطرة من محفظة السوق، وعلى العكس إذا كانت $\beta_p<1$ كان معنى ذلك أنها أقل مخاطرة من محفظة السوق. كما أن

$$\sigma_p = \beta_p \sigma_M$$

$$\sigma_p = \sigma_M [\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i]$$

لذا بالرجوع إلى معادلة (8) السابقة $\sigma^2{}_i = \beta_i{}^2 \sigma^2{}_M + \sigma^2{}_{ei}$ نجد أنه يطلق على $\sigma^2{}_{ei}$ بالمخاطر الممكن تجنبها بالتنويع Diversifiable Risk . أو كما تسمى بالمخاطر غير المنتظمة Unsystematic Risk. أما $\beta_i{}^2\sigma^2{}_M$ فيطلق عليها بالمخاطر الغير ممكن تجنبها بالتنويع Nondiversifiable Risk. أو كما تسمى بالمخاطر المنتظمة Systematic Risk

ولذا يتم قياس مخاطر الورقة عن طريق β_i ، لتصبح هي المقياس الواقعي لقياس مخاطر الورقة في حالة إمتلاك المستثمر لأكثر من ورقة مالية واحدة، (ونوضح هنا أن $\beta\ i$ نفسها ليست المخاطر المنتظمة وإنما هي مقياس لهذه المخاطر.

5.12 إستبدال البيانات المطلوبة الخاصة بكل ورقة

يمكن إستبدال البيانات $\sigma^2{}_{ei}$ ، β_i ، α_i الخاصة بكل ورقة بثلاث بيانات أخرى هي R_i متوسط العائد الخاص بالورقة ، $\sigma^2{}_i$ تباين العائد الخاص بالورقة، وأخيرا β_i التى تقيس درجة المخاطر الخاصة بالورقة .

ورغم أن هذا الإستبدال السابق للبيانات المطلوبة لايـوفر فـى عـدد المدخلات المطلوبة ، إلا أنه عادة ما يكون أكثر قبولا للقائم بالتحليل، والذى يهمه معرفة العائد والمخاطر الخاصة بكل ورقة ، وكذا معرفة β_j التى تمثل ميل الخط R_j والتى تحدد درجة التغير فى R_j نتيجة حدوث تغير فـى R_M مقداره وحدة واحدة، أى يهمه معرفة R_i ، σ^2_i ، β_i ، إذ تكفى هذه البيانات ليس فقط لتقييم الورقة i وإنما تكفى أيضاً لتحديد العائد والمخاطر الخاصـة بالمحفظة التى تحتوى على هذه الورقة i.

ففى ضوء قيم R_i يتم تحديد قيم R_p كما فى المعادلة رقم (1) والمعـاد كتابتهـا فيما يلى، وذلك دون حاجة إلى الرجوع إلى معادلة رقم (10) عند حساب R_p.

$$\bar{R}_p = \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i \qquad (14)$$

كما أنه يمكن من معادلة رقم (8) استبدال σ^2_{ei} عـن طريـق تحديـد قيمتها بدلالة σ^2_i للورقة حيث:

$$\sigma^2_i - \beta^2_i \sigma^2_M = \sigma^2_{ei}$$

وبالتالى يمكن من معادلة رقم (11) استبدال σ^2_{ei} لتصبح مخاطر المحفظة كما يلي:

$$\sigma^2_p = \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \beta_i^2 \sigma^2_M + \sum_{i=i}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq I}}^{N} X_i X_k \beta_i \beta_k \sigma^2_M +$$

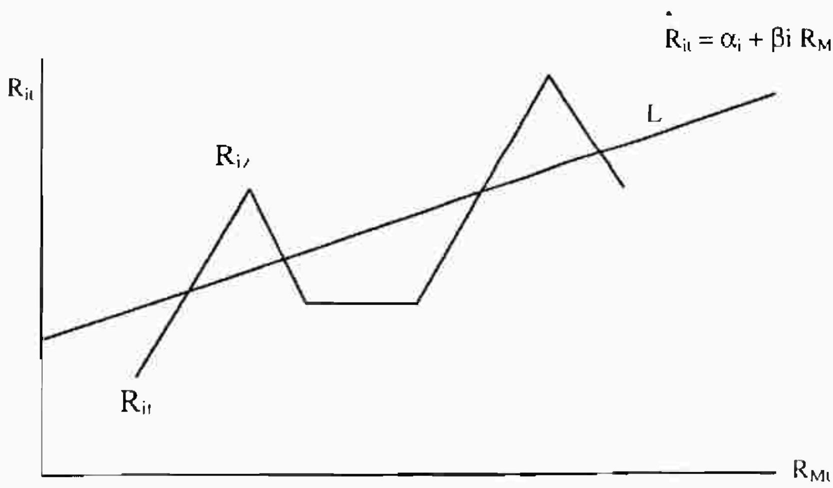
$$\sum_{i=1}^{N} X^2_i \left(\sigma^2_i - \beta_i^2 \sigma^2_M\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i^2 \, \sigma^2_i + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 1}}^{N} X_i \, X_k \, \beta_i \, \beta_k \, \sigma^2_M \qquad (15)$$

وحيث أن $\bar{R}_i$ ، σ^2_i متوافرة عن كل ورقة وسبق أن بينا كيفية حسابها يكون السؤال المتبقى هو كيفية تحد β_i الخاصة بكل ورقة i وهـــو ماســـوف نبينه بإستخدام طريقة المربعات الصغرى كما فى الفقرة التالية.

6.12 طريقة المربعات الصغرى وتقدير β_i.

β_i مـــا هى إلا الميل الخاص بالعلاقـــة الخطيـــة $R_i = \alpha_i + \beta_1 R_M$ وبالتالى يمكن التعبير عن العلاقة بين المتغير المستقل R_{Mt} والمتغير التـــابع R_{it} خلال المدد الزمنية السابقة t ، $t = 1,2,...T$ كما يلى :



شكل الإنتشار (1/12)

حيث يمثل المحور الأفقى مؤشر السوق فـــى الفتـــرات الســـابقة = t 1,2,..T ويمثل المحور الرأسى عائد الورقة i فى هذه الفتــرات، ويســـمى الشكل السابق بشكل الإنتشار Scatter Diagram . وهنا يمكن تمهيد خـــط مستقيم يتوسط هذه النقط الفعلية خلال المدد السابقة والذى يأخذ الشكل التالى:

$$\dot{R}_{it} = \alpha_i + \beta_i R_{Mt} \qquad (16)$$

حيث:

α_i = طول الجزء المقطوع من المحور الرأسى .

β_i = ميل الخط المستقيم .

وهنا نقوم بتمهيد الخط المستقيم الذى يتوسط النقط الفعلية خلال المـــدد السابقة بالشكل الذى يقلل مجموع مربعات الإنحرافات إلى أقل حد ممكـــن ، ويعنى ما سبق أننا نختار α_i ، β_i بحيث نجعل :

$$\sum_{t=1}^{T} e_{it}^2 = \sum_{t=1}^{T} (R_{it} - \dot{R}_{it})^2 = \sum_{t=1}^{T} (R_{it} - \alpha_i - \beta_i R_{Mt})^2 \qquad (17)$$

أصغر ما يمكن.

وبإجراء التفاضل الجزئى للعلاقة السابقة بالنسبة إلى α_i ، β_i ومساواة التفاضل بالصفر ، فإننا نحصل على المعادلتين الآتيتين :

$$\sum_{t=1}^{T} R_{it} = T\alpha_i + \beta_i \sum_{t=1}^{T} R_{Mt} \qquad (18)$$

$$\sum_{t=1}^{T} R_{it} R_{Mt} = \alpha_i \sum_{t=1}^{T} R_{Mt} + \beta_i \sum_{t=1}^{T} R^2_{Mt} \qquad (19)$$

ومن المعادلتين السابقتين يمكن الحصول علـــى التقـــدرين $\hat{\beta}_i$ ، $\hat{\alpha}_i$، للمعلمتين β_i ، α_i كما يلى :

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} R_{Mt} R_{it} - (\sum_{t=1}^{T} R_{Mt})(\sum_{t=1}^{T} R_{it}) / T}{\sum_{t=1}^{T} R^2_{Mt} - (\sum_{t=1}^{T} R_{Mt})^2 / T} \qquad (20)$$

$$\hat{\alpha}_i = \bar{R}_i - \beta_i \bar{R}_M \qquad (21)$$

حيث :

$$\bar{R}_i = 1/T \sum_{t=1}^{T} R_{it} \qquad , \qquad \bar{R}_M = 1/T \sum_{t=1}^{T} R_{Mt}$$

وبالنظر إلى معادلة (20) السابقة نجد أنه يمكن إعـــادة كتابـــة بســـط المعادلة (20) ليكون هو $T\sigma_{iM}$ ، أما مقام المعادله (20) فهـــو يســـاوى $T\sigma^2_M$ ، وعلى هذا الأساس يمكن إعادة كتابة المعادلة (20) لتصبح :

$$\hat{\beta}_i = \frac{\sum_{t=1}^{T} [(R_{Mt} - \bar{R}_M)(R_{it} - \bar{R}_i)]}{\sum_{t=1}^{T} (R_{Mt} - \bar{R}_M)^2} = \frac{\sigma_{iM}}{\bar{\sigma}^2_M} \quad (22)$$

وتعتبر القيم السابقة $\hat{\beta}_i$،$\hat{\alpha}_i$ تقدير للقيم الحقيقية لـــ β_i،α_i الخاصـــة بالورقة المالية ، وتكون هذه التقديرات عرضة للخطأ بطبيعة الحـــال ، كمـــا أن $\hat{\beta}_i$،$\hat{\alpha}_i$ ليست ذات قيم ثابتـــة Stationary خـــلال الفتـــرات الزمنيـــة المختلفة.

ورغم إحتمالات الخطأ فى قياس القيمة الحقيقية لـــــ β_i مـــع وجـــود إحتمال لتغير قيمة $\hat{\beta}_i$ عبر الزمن ، إلا أن تقدير β_i من خلال المعادلة السابقة تظل هى أسهل وأبسط الطرق لتقدير قيمتهاالمستقبلية .

مثال تطبيقى:

الشهر	مؤشر السوق R_{Mt}	عائد الورقة R_{it}
1	2	4
2	3	7
3	1	3
4	5	9
5	9	17

جدول رقم (1/12)

(1) R_{Mt}	(2) R_{it}	(3) $R_{Mt}R_{it}$	(4) R^2_{Mt}	(5) R^2_{it}	(6) $\hat{R}_{it}$	(7) $\hat{e}_{it}=R_{it}-\hat{R}_{it}$
2	4	8	4	16	4.5	-0.5
3	7	21	9	49	6.25	0.75
1	3	3	1	9	2.75	0.25
5	9	45	25	81	9.75	-0.75
9	17	153	81	289	16.75	0.25
20	40	230	120	444	40.00	

1- $\bar{R}_i = 40/5 = 8$

2 - $\sigma_i^2 = 1/N\left(\sum_{i=1}^{N} R^2_{it} - \left(\sum_{i=1}^{N} R_{it}\right)^2 / N\right)$

$= 1/5\ (444 - (40)^2 / 5)$

$= 1/5\ (444 - 320)$

$= 24.8$

3 - $\sigma_M^2 = 1/N\left(\sum_{i=1}^{N} R^2_{Mt} - \left(\sum_{i=1}^{N} R_{Mt}\right)^2 / N\right)$

$\therefore \sigma_M^2 = 1/5\ (120 - (20)2 /5) = 1/5\ (120 - 80)$

وبالتعويض في المعادلتين (20) (21) نحصل على:

$$\hat{\alpha}_i = 1 \qquad \hat{\beta}_i = 1.75$$

وبذلك يكون خط الإنحدار R_{it} على R_{Mt} هو:

$$R_{it} = 1 + 1.75\ R_{Mt}$$

أو

$$R_{it} = 1 + 1.75\ R_{Mt} + \hat{e}_{it}$$

وبالتعويض عن قيم R_{Mt} في علاقة الإنحدار المقررة نحصل على القيم الاتجاهية R_{it} والأخطاء المقدرة $\hat{e}_{it}$ كما وردت في العمودين (6) ، (7) من الجدول السابق، وهنا نلاحظ النتائج التالية:

(أ) مجموع القيم الفعلية للمتغير التابع $\sum R_{it}$ يساوي مجموع القيم الاتجاهية $\sum R_{it}$.

(ب) مجموع قيم الأخطاء المقدرة يساوي صفر، أي أن

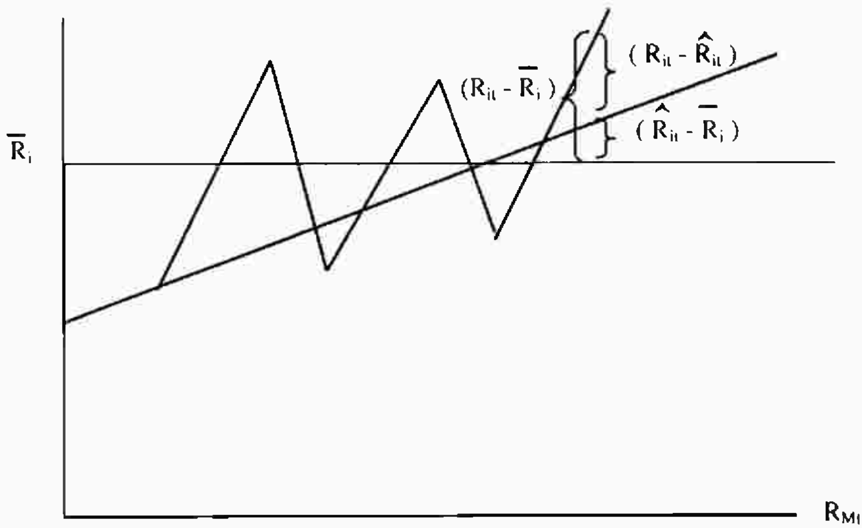
$$\sum_{t=1}^{T} e_{it} = 0$$

7.12 الحكم على مدى الدقة فى التقدير بإستخدام معامل التحديد

Coefficient of Determination:

يتسائل الباحث عادة عن مدى دقة العلاقة رقم (16) السابق الإشارة إليها $R_{it} = \hat{\alpha}_i + \beta_i R_{Mt}$. أى تحديد إلى أى مدى تكون التغيرات فى المتغير التفسيرى R_{Mt} (المتغير المستقل) مسئولة عن التغيرات التى تحدث فى المتغير التابع $\hat{R}_{it}$ وفقا لهذه العلاقة (16) السابقة .

وللإجابة على ذلك يتم التعبير عن هذه العلاقة بالرسم كما يلى :



شكل (2/12)

إذ أن القيمـــة R_{it} ترجع إلى [متوســـط عـــام $\bar{R}_i$ + تـــأثير معامـــل الإنحدار $(\hat{R}_{it}-\bar{R}_i)$ + خطأ عشوائى $(R_{it}-\hat{R}_{it})$]

فالأصل أن كل القيم تساوى $\bar{R}_i$ إلا أنها تنحرف بسبب تـــأثير معامـــل الإنحدار + خطأ عشوائى .

وللتعرف على مدى دقة تقديرات معادلة الإنحدار فإنه يجـــب دراســـة مكونات مجموع المربعات وتجزئته إلى مكوناته الرئيسية وذلك على النحـــو التالى:

$$\sum_{t=1}^{T}(R_{it} - \bar{R}_i)^2 = \sum_{t=1}^{T}[(R_{it} - \hat{R}_{it}) + (\hat{R}_{it} - \bar{R}_i)]^2$$

$$= \sum_{t=1}^{T} (R_{it} - \hat{R}_{it})^2 + 2 \sum_{t=1}^{T} (R_{it} - \hat{R}_{it})(\hat{R}_{it} - \bar{R}_i)$$

$$+ \sum_{t=1}^{T} (\hat{R}_{it} - \bar{R}_i)^2$$

ويلاحظ أنه يمكن إثبات أن المقدار الأوسط يساوى صفر

$$\sum_{t=1}^{T} (R_{it} - \hat{R}_{it}) (\hat{R}_{it} - \bar{R}_i) = 0$$

وبناء على ما سبق يكون :

$$\sum_{t=1}^{T} (R_{it} - \bar{R}_i)^2 = \sum_{t=1}^{T} (R_{it} - \hat{R}_{it})^2 + \sum_{t=1}^{T} (\hat{R}_{it} - \bar{R}_i)^2$$

ويمكن التعبير عن المعادلة السابقة بالرموز كما يلى :

TSS	=	ESS	+	RSS
↓		↓		↓
مجموع المربعات الكلى		مجموع مربعات الخطأ العشوائى		مجموع مربعات الإنحدار

ويتضح مما سبق أن التغير فى قيم $(\hat{R}_{it})$ حول الوسط الحسابى يرجع بعضه إلى تأثير معامل الإنحدار ، ويرجع البعض الآخر إلى عدم وقوع جميع النقاط على خط الإنحدار وهو ما يطلق عليه بالخطأ العشوائى ويسمى مجموع مربعات الخطأ العشوائى بمجموع مربعات الخطأ.

ويشير معامل التحديد Coefficient of Determination إلى النسبة بين مجموع مربعات الإنحدار (التغيرات المفسرة) ومجموع المربعات الكلى ويرمز إلى معامل التحديد بالرمز r^2 . وهو بذلك يساوى

$$r^2 = \frac{RSS}{TSS} = \frac{\sum_{t=1}^{T}(\hat{R}_{it} - \bar{R}_i)^2}{\sum_{t=1}^{T}(\bar{R_{it}} - R_i)^2}$$

$$= \frac{\beta_i^2 \sum_{t=1}^{T}(\bar{R}_{Mt} - R_M)^2}{\sum_{t=1}^{T}(\bar{R}_{it} - R_i)^2}$$

أى أن معامل التحديد يبين لنا نسبة التغير فى عائد الورقة(R_{it}) والتى يمكن إرجاعها إلى التغير في مؤشر السوق (R_{Mt})، وبالتالى كلما زادت هذه النسبة دل ذلك على أن خط الإتجاه العام يعد مفسرا دقيقا لسلوك المتغير التابع (R_{it}).

ويمكن حساب معامل التحديد فى المثال السابق كما يلى :

$RSS = (1.75)^2\,(40) \qquad , \qquad TSS = 124$

$\therefore r^2 = 122.5/124 = 0.988$

وتعنى النتيجة السابقة أن 98.8% من التغيرات فى المتغير التابع R_{it} ترجع إلى التغيرات فى المتغير المستقل R_{Mt} .

أسئلة تمارين الفصل الثاني عشر

1 - إذا كانت البيانات الخاصة بالعائد الشهري لثلاث أنواع من الأسهم وكذا الخاصة العائد المؤشر S&P 500 كما يلي:

Month	A	B	C	S&P 500
1	12.05	25.20	31.76	12.28
2	15.27	2.86	15.82	5.99
3	-4.12	5.45	10.58	2.41
4	1.57	4.56	-14.43	4.48
5	3.16	3.72	31.98	4.41
6	-2.79	10.79	-0.72	4.43
7	-8.97	5.38	-19.64	-6.77
8	-1.18	-2.97	-10.00	-2.11
9	1.07	1.52	-11.51	3.46
10	12.75	10.75	5.63	6.16
11	7.48	3.79	-4.67	2.47
12	-0.94	1.32	7.94	-1.15

المطلوب حساب:

أ - قيمة ∝ الخاصة بكل سهم.

ب- قيمة β لكل سهم.

ج - الانحراف المعياري للأخطاء (البواقي residuals) الخاص بكل انحدار.

د - معامل الارتباط بين عائد كل سهم وعائد السوق.

هـ- متوسط العائد للسوق.

و - التباين الخاص بعائد السوق.

2 - أحسب في المسألة رقم (1) السابقة باستخدام نموذج المؤشـر الواحـد والبيانات التاريخية:

أ - العائد والتباين الخاص بكل سهم.

ب- التغاير بين كل زوج من الأسهم.

ج - العائد والانحراف المعياري للمحفظة المكونة من الثلاث أسهم، علمـاً بتساوي نسب الاستثمار في كل من الأسهم الثلاثة ؟

د - بين لماذا تكون النتائج في (أ) واحدة سواء تم استخدام نموذج المؤشـر الواحد أو البيانات التاريخية، بينما تختلف النتائج الخاصـة بـ ب) ، جـ)؟

الفصل الثالث عشر

نموذج تسعير الأصل الرأسمالي

The Capital Asset Pricing Model (CAPM)

1.13 : مقدمة:

يتم قياس المخاطر الكلية لأصل ما بمعرفة تباين عائدات الأصل σ_i^2 أو بشكل أكثر دقة عن طريق معرفة الانحراف المعياري σ_i لإيرادات هذا الأصل. وتتمثل الإيرادات الكلية لأي أصل من جزئين الجزء الأول يعبر عن العائد المتوقع the expected return والجزء الثاني العائد غير المتوقع unexpected return ويرجع هذا الجزء الأخير إلى الأحداث غير المتوقعة unanticipated events، وتظهر مخاطر الاستثمار في الأصل نتيجة لهذه الأحداث غير المتوقعة.

ويمكن تقسيم مخاطر الورقة المالية كما سبق أن بينا إلى قسمين:

1.1.13 المخاطر الخاصة بالشركة المصدرة للورقة Company - Specific Risk

والتى تتمثل فى ذلك الجزء من مخاطر الورقة الذى يرجع إلى الأحداث العشوائية والتى يمكن التخلص منها عن طريق التنويع .وتسمى هذه المخاطر أيضا المخاطر القابلة للتنويع diversifiable risk أو المخاطر غير المنتظمة unsystematic risk .

وتنشأ هذه المخاطر من مجموعة أحداث تعتبر خاصة unique بالشركة محل الدراسة مثل برامج الشركة المالية والتسويقية ، إضرابات العمال ،... ونظرا لأن هذه الأحداث تعتبر عشوائية فإن تأثيرها على المحفظة يمكن التخلص منه عن طريق التنويع حيث أن الأحداث السيئة فى شركة ما قد تتعادل مع الأحداث الجيدة فى شركة أخرى.

2.1.13 المخاطر الخاصة بالسوق Market Risk

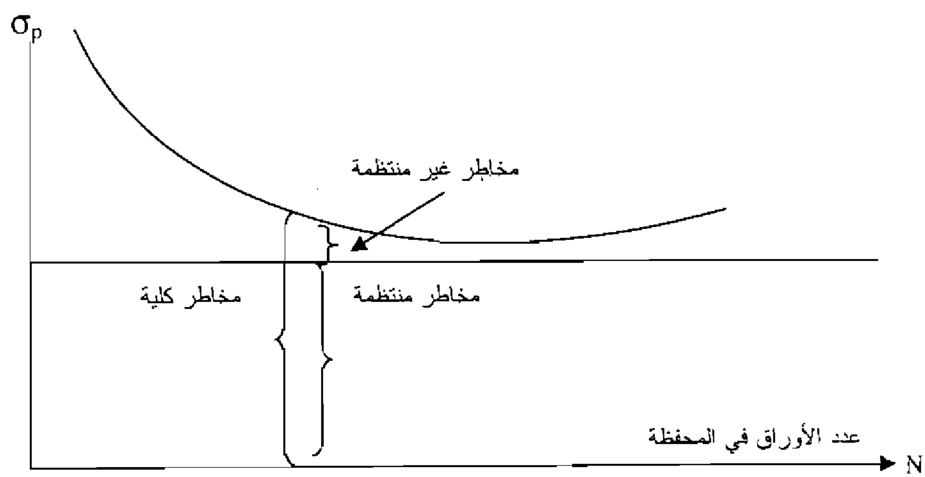
والتى تتمثل فى ذلك الجزء من مخاطر الورقة الذى يرجع إلى السوق والذى لايمكن التخلص منه عن طريق التنويع، ولذلك فإنه يسمى nondiversifiable risk، أو المخاطر المنتظمة systematic risk . كما

يسمى أيضاً بمخاطر β Beta-risk أو المخاطر محل الإهتمام Relevant Risk .

وتنشأ هذه المخاطر من مجموعة عوامل عامة مثل الحروب، التضخم، الكساد، ارتفاع معدلات الفائدة والتى تؤثر على معظم الشركات. ونظرا لأن جميع الأسهم تتأثر سلبا أو إيجاباً بهذه العوامل فإن المخاطر المنتظمة لا يمكن القضاء عليها بالتنويع، ومن ثم يكون من حق المستثمر أن يطلب عنها تعويضا premium .

وقد استخدم نموذج تسعير الأصل الرأسمالى هذه الحقيقة السابقة فى تحليل العلاقة بين مخاطر الورقة والعائد المطلوب تحقيقه، إذ أن العبرة فى هذه الحالة ليست بالمخاطر غير المنتظمة والتى يمكن القضاء عليها بالتنويع وإنما يجب أن يهتم المستثمر أساساً بالمخاطر المنتظمة للورقة ومدى تأثيرها على عائد ومخاطر المحفظة التى تتضمن هذه الورقة، فإذا كان من الممكن للمستثمر أن يمتلك محفظة من الأوراق المالية فسوف تتجه إهتماماته إلى عائد ومخاطر المحفظة ككل وليس إلى عائد ومخاطر كل ورقة من الأوراق المكونة لهذه المحفظة.

ويوضح الشكل التالى الفكرة السابقة.



شكل رقم (1/13)

ويتضح من الشكل السابق إتجاه المخاطر الخاصة بالورقة(المخـــاطر غير المنتظمة) إلى الإنخفاض كلما زاد عدد الأوراق N الداخلة فى تكـــوين المحفظة حتى نصل إلى حد معين من المخاطرة يظل ثابتا ولايمكن التخلص منه بالتنويع وهو مايعرف بالمخاطر المنتظمة.

وبالتالي يجب على المستثمر - سـواء كــان فـردا أو منظمــة - ألا تقتصر استثماراته على ورقة معينه وإنما يفضل أن يستثمر في محفظة مــن الأوراق المالية، إذ يمكنه بذلك أن يقلل من مخاطر الإستثمار المنفــرد فــى ورقة ما stand-alone risk إذا ما قام هذا المستثمر بإقتناء هــذه الورقــة ضمن محفظة للأوراق المالية، إذ يمكن عن طريق تكــوين محفظـــة جيـدة التنويع القضاء على ذلك الجزء من المخاطر والذى يرجــع إلـــى الطبيعــة الخاصة بالورقة (المخاطر غير المنتظمة) بينما يتبقى فقط الجزء الذى يرجع إلى ظروف السوق (المخاطر المنتظمة) والذى لايمكن التخلص منــه عــن طريق التنويع.

ولقد بينا فى الفصل التاسع كيف يمكن قياس ذلك الجزء من المخـــاطر الذى لايمكن القضاء عليه بالتنويع والذي يساهم بناء على ذلك فـــى تحديـد درجة المخاطرة لهذه المحفظة جيدة التنويع، وبالتالى يســتحق المســتثمر أن يحصل على عائد مقابل تحمله هذا الجزء من المخاطر. أي يتوقـف العائـد الواجب الحصول عليه مقابل الاستثمار في أصل ما على درجــة المخـــاطر المنتظمة الخاصة بهذا الأصل وهو ما يعــرف بمبــدأ المخـــاطر المنتظمــة systematic risk principle.

كما أننا بينا أننا نتوقع أن يقتني أي مستثمر نفــس التوليفــة الخاصـــة بمحفظة السوق M في حالة عدم الاقتراض أو محفظة السوق H في حالـــة الاقتراض وذلك بفرض تجانس توقعات المستثمرين وهو ما يمكن افتــراض تحققه في ظل توافر كافة المعلومات الخاصة بالإيرادات المتوقعة لكل ورقـــة وتبايناتها وكذلك تغايرات كل ورقة مع باقي ورق السوق. ولذا فـــإن قيـــاس المخاطر الخاصة بشراء أي ورقة مالية يجب أن يتم عن طريق قياس مـــدى

تأثير اقتناء هذه الورقة على التباين والانحراف المعياري لمحفظة السوق، أي يجب أن يحصل المستثمر على عائد مقابل هذا الجزء الذي يتحمله بسبب اقتناء هذه الورقة ضمن محفظة الأوراق المالية الخاصة به ويسمى هذا الجزء من المخاطر بالمخاطر ذات الصلة relevant risk وتتحدد قيمتها بـ $\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}$ أو $\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ ونرمز لهذه الأخيرة β ويمكن إثبات ذلك رياضياً كما يلي:

2.13 : $\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}$ تمثل مخاطر الورقة ذات الصلة في حالة توازن السوق:

في ضوء المعادلة رقم (2) في الفصل الثاني عشر نجد أن :

$$\sigma_M = [\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} X_i X_k \ \sigma_i \sigma_k r_{ik}]^{1/2}$$

علماً بأن الوزن الخاص بكل ورقة x_i هو حاصل قسمة القيمة السوقية للورقة على القيمة السوقية لمحفظة السوق، أي أن x_i هي نسبة القيمة السوقية للورقة إلى القيمة السوقية الكلية للورق في السوق market proportions .

وحيث أن جميع المستثمرين في سوق الأوراق المالية يحتفظون بمحفظة السوق كان معنى ذلك أن المخاطر ذات الصلة الخاصة بالورقة يجب أن تتمثل في مدى التغير في مخاطر محفظة السوق نتيجة التغير الذي يحدث في نسبة مساهمة هذه الورقة في محفظة السوق، وهو ما يمكن تحديده عن طريق حساب تفاضل مخاطر محفظة السوق بالنسبة لـ x_i (نسبة مساهمة الورقة i في محفظة السوق)، ثم مساواة التفاضل بالصفر وذلك كما يلي:

$$\frac{d_M}{d\,x_i} = \frac{d\,[\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{N} X_i X_k \ \sigma_i \sigma_k r_{ik}]^{1/2}}{d\,x_i}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\left[2x_i \sigma_i^2 + 2\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} x_k \sigma_{ik}\right]}{\left[\sum_{i=1}^{N} X_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} X_i X_k \ \sigma_i \sigma_k r_{ik}\right]^{1/2}}$$

$$= \frac{\left[x_i \sigma_i^2 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{N} x_k \sigma_{ik}\right]}{\sigma_M} = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}$$

حيث أن:

$$x_i \sigma_i^2 + \sum_{\substack{k=1\\k\neq 1}}^{N} x_k \sigma_{ik}$$

$$= x_i E[(R_i - \bar{R}_i)(R_1 - \bar{R}_1)] + x_2 E[(R_i - \bar{R}_i)(R_2 - \bar{R}_2)] + \ldots..$$

$$+ x_i E[(R_i - \bar{R}_i)(R_i - \bar{R}_i)] + \ldots. + x_N E[(R_i - \bar{R}_i)(R_N - \bar{R}_N)]$$

$$= E[(R_i - \bar{R}_i)(\sum_{k=1}^{N} x_k (R_k - \bar{R}_k)]$$

$$= E[(R_i - \bar{R}_i)(\sum_{k=1}^{N} x_k R_k - \sum_{k=1}^{N} x_k \bar{R}_k)]$$

$$= E[(R_i - \bar{R}_i)(R_M - \bar{R}_M)$$

$$= \sigma_{iM}$$

أي أن المخاطر ذات الصلة للسهم تتمثل في $\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}$

وهو المطلوب إثباته. Q. E. D.

ويفضل معظم الكتاب التعبير عن المخاطر ذات الصلة في شكل عدد من وحدات σ_M أي يقوم كثير من الكتاب بقسمة المخاطر ذات الصلة على σ_M لينتج لنا $\beta_I = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$

أي أن β_i تعبر عن المخاطر ذات الصلة المقاسة بوحدات من σ_M أي كنسبة من المخاطر المنتظمة المتوسطة بعد تنميطها والقسمة على σ_M.

ويرجع السبب في ذلك أن β_i والتي تعبر عن المخاطر المنتظمة كنسبة من المخاطر المتوسطة لها العديد من الخصائص والتي نبينها في الفقرة التالية:

3.13: خصائص β_i

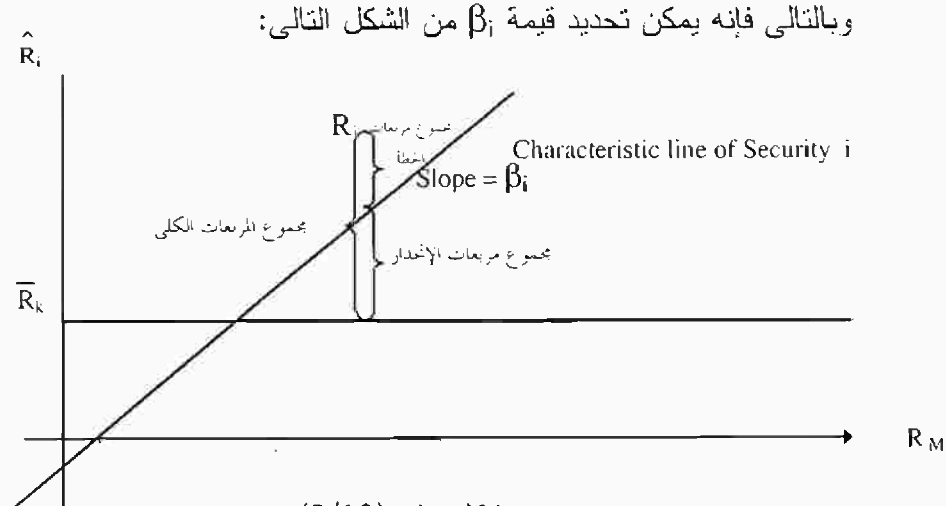
1.3.13: $\hat{\beta}_i$ ماهى إلا تقدير للميل الخاص بالعلاقة الخطية

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + e_i \qquad (1)$$

والذى يلزم لتقليل مجموع مربعات الخطأ الخاصة بالخطأ العشوائى e_i، أى أن $\hat{\beta}_i$ هى أحسن تقدير للمعلمه β_i وتكون قيمتها(*) $\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$

Least square estimator of the regression parameter β_i

وبالتالى فإنه يمكن تحديد قيمة $\hat{\beta}_i$ من الشكل التالى:



شكل رقم (2/13)

(*) تؤدي طريقة المربعات الصغرى إلى حل معادلتين في مجهولين حيث ينتج عن ذلك أن
$\alpha_i = R_i - \beta_i R_M$, $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$

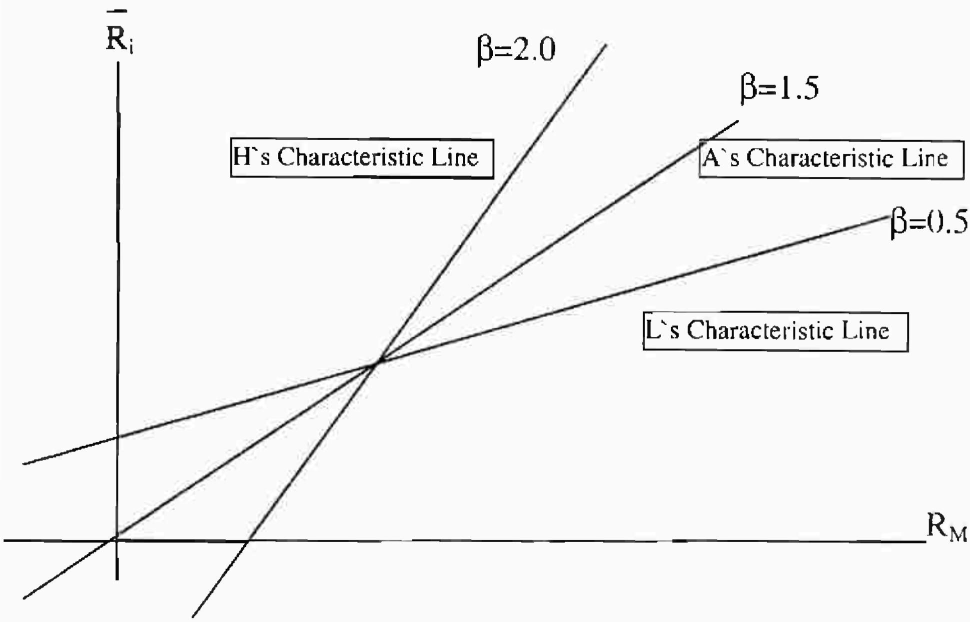
أي أن β_i تعبر عن مدى التغير فى عائد الورقة المالية R_i نتيجة التغير فى عائد السوق R_M والذى يقاس بواسطة أحد المؤشرات السائدة مثل مؤشر داوجونز. ويسمى الشكل السابق بشكل الانتشار scatter diagram أو خط خصائص الورقة characteristic line

وإذا كانت $\beta_i = 1$ كان معنى ذلك أن درجة التقلب فى عائد الورقة المالية تعادل نفس درجة التقلب فى عائد السوق، أما إذا كانت $\beta_i = 0.5$ كان معنى ذلك أن درجة التقلب فى عائد الورقة المالية تعادل نصف درجة التقلب فى عائد السوق ، وإذا كانت $\beta_i = 2$ كان معنى ذلك أن درجة التقلب فى عائد الورقة المالية تعادل ضعف درجة التقلب فى عائد السوق . فإذا كان التذبذب النسبى لثلاثة أسهم بالإضافة إلى عائد السوق كما يلى:

السنوات	R_H	R_A	R_L	R_M
الأولى	%10	%10	%10	%10
الثانية	%30	%20	%15	%20
الثالثة	(%30)	(%10)	%0	(%10)

يتضح من الأرقام السابقة أن عوائد الأسهم الثلاث (L, A. H) تتحرك في نفس اتجاه عائد السوق (R_M) إلا أن السهم (H) يعتبر أكثر تقلباً، أما السهم (A) فيأخذ نفس درجة التقلب في عائد السوق، بينما يعتبر السهم (L) اقل الأسهم الثلاث تقلباً.

ويوضح الشكل التالي العلاقة بين عائد السوق (R_M) وعوائد الأسهم الثلاث (L, A, H) حيث يعكس ميل كل خط من الخطوط الثلاث الموضحة في هذا الشكل معامل بيتا β لكل سهم.



شكل (3/13)

2.3.13: المتوسط المرجح لجميع قيم β_i الخاصة بكل الورق المتاح في السوق = 1 صحيح:

أن المتوسط المرجح لجميع قيم β_i الخاصة بكل الورق المتاح في السوق يساوى واحد صحيح، وذلك بشرط أن يكون الوزن الخاص بكل ورقة x_i هو حاصل قسمة القيمة السوقية للورقة على القيمة السوقية لمحفظة السوق، أى أن الوزن النسبى لكل ورقة يتمثل فى نسبة القيمة السوقية للورقة إلى القيمة السوقية الكلية للورق فى السوق.

$$X_i = \frac{M_{Vi}}{M_{Vp}}$$

حيث:

X_i : الوزن الخاص بالورقة i فى محفظة السوق.

Security`s Market Value i القيمة السوقية للورقة : M_{Vi}

Market Portfolio Value القيمة السوقية لمحفظة السوق : M_{Vp}

وبالتالى تنص الحقيقة السابقة على:

$$\sum_{i=1}^{N} X_i \beta_i = \sum_{i=1}^{N} X_i \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = 1 \qquad (2)$$

ويكفى لإثبات (2) أن نبين أن:

$$\sigma_M^2 = \sum_{i=1}^{N} X_i \sigma_{iM}$$

وذلك كما يلى:

$$R.H.S = \sum_{i=1}^{N} X_i \sum_{j=1}^{J} P_j (R_{ij} - \bar{R}_i) (R_{Mj} - \bar{R}_M)$$

$$= \sum_{j=1}^{J} P_j (R_{Mj} \sum_{i=1}^{N} X_i R_{ij} - \bar{R}_M \sum_{i=1}^{N} X_i R_{ij} - R_{Mj} \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i$$

$$+ \bar{R}_M \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i)$$

$$= \sum_{j=1}^{J} P_j (R^2_{Mj} - \bar{R}_M R_{Mj} - R_{Mj} \bar{R}_M + \bar{R}^2_M)$$

$$= \sum_{j=1}^{J} P_j (R^2_{Mj} - 2R_{Mj} \bar{R}_M + \bar{R}^2_M)$$

$$= \sum_{j=1}^{J} P_j (R_{Mj} - \bar{R}_M)^2 = \sigma_M^2$$

$\therefore$ R.H.S = L.H.S Q. E. D.

3.3.13: β_p للمحفظة ما هي إلا متوسط مرجح لقيم β_i الخاصة بأوراق هذه المحفظة:

وبالتالي فإن المحفظة التي يضاف إليها ورقة ذات قيمة منخفضة لـــ β من شأنه أن يقلل مخاطر المحفظة، وعلى العكس من ذلك في حالة إضافة ورقة ذات قيمة مرتفعة لـــ β من شأنه أن يزيد من مخاطر المحفظة، وهو ما يبين أن β تعبر بذلك عن المخاطر ذات الصلة، ويمكن إثبات هذه الحقيقة كما يلي:

$$\beta_p = X_1\,\beta_1 + X_2\,\beta_2 + \dots\dots\dots\dots + X_N\beta_N \quad \text{ie}$$

$$\beta_p = \sum_{i=1}^{N} X_i\,\beta_i \qquad (3)$$

الإثبات Proof:

$$\sigma_{PM} = (1/M)\sum_{j=1}^{M} (R_{Pj} - \bar{R}_P)(R_{Mj} - \bar{R}_M)$$

$$= (1/M)\left(\sum_{j=1}^{M}\left(\sum_{i=1}^{N} X_i R_{ij} - \sum_{i=1}^{N} X_i \bar{R}_i\right)(R_{Mj} - \bar{R}_M)\right.$$

$$= (1/M)\left(\sum_{i=1}^{N} X_i \sum_{j=1}^{M} (R_{ij} - \bar{R}_i)(R_{Mj} - \bar{R}_M)\right.$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i \,.\, (1/M)\sum_{j=1}^{M} (R_{ij} - \bar{R}_i)(R_{Mj} - \bar{R}_M)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} X_i\ \sigma_{iM}$$

$$\therefore \beta_p = (\sigma_{pM}/\sigma^2_M) = (1/\sigma^2_M)\sum_{i=1}^{N} X_i\,\sigma_{iM} = \sum_{i=1}^{N} X_i\,(\sigma_{iM}/\sigma^2_M)$$

$$=\sum_{i=1}^{N} X_i\ \beta_i$$

وهو المطلوب إثباته .Q.E.D

فإذا كان هناك مستثمر يمتلك محفظة قيمتها 1,000,000 دولار موزعة بالتساوى بين ثلاث أسهم ، وكان معامل بيتا للسهم $\beta_i = 0.7$ فإن معامل بيتا للمحفظة يكون كما يلى :

$$\beta_P = 0.3333(0.7) + 0.3333(0.7) + 0.3333(0.7) = 0.7$$

ويلاحظ أن هذه المحفظة تكون أقل مخاطرة من مخاطر السوق، أى أن التقلبات النسبية فى عائد هذه المحفظة تكون أقل من تقلبات السوق. فإذا تم بيع أحد الأسهم الموجودة وإضافة سهم آخر بدلا منه ، وكان معامل بيتا للسهم الجديد هو $\beta_i = 2$ فإن ذلك يؤدى إلى زيادة مخاطر المحفظة من 0.7 إلى 1.13 كما يلى :

$$\beta_P = 0.3333(0.7) + 0.3333(0.7) + 0.3333(2.0) = 1.13$$

وبالعكس إذا تم إضافة سهم له قيمة أقل لمعامل β وليكن($\beta_i = 0.2$) ففى هذه الحالة تنخفض مخاطر المحفظة من 0.7 إلى 0.53 .

وبالتالى يتضح مما سبق كيف أن β_i هى العنصر الأساسى الذى يحدد مدى مساهمة الورقة فى مخاطر المحفظة وأن معدل العائد المطلوب على الورقة المالية يتوقف على معامل بيتا β_i ولا يتوقف على قيمة σ_i إذ لا يجب أن يكون هناك مقابل لأى مخاطر يمكن التخلص منها.

وهنا يثار سؤال بأن الشركة التى تقوم بتنويع أنشطتها تكون أكثر جاذبية للمستثمر الفرد من الشركة التى لاتقوم بتنويع أنشطتها، وبالتالى يجب أن تهدف كل شركة إلى تحقيق التنويع الكافى فى أنشطتها لأكثر من مجال بدلاً من الإقتصار على مجال واحد فقط، فتقوم شركة إنتاج السيارات بالعمل

على إنتاج سلع أخرى كلعب الأطفال والملابس الجاهزة وغيرها من السلع التى لاترتبط بالمره بسوق السيارات. على أساس أن قيمة المشروع سوف تزيد عن حاصل جمع قيمة كل نشاط على حده

The value of the diversified package would be greater than the sum of the parts

إلا أن النتيجة السابقة لاتكون صحيحة طالما يمكن للمستثمر وبطريقة أسهل تنويع إستثماراته فى الأوراق المالية المختلفة. وبالتالي لا يؤدي تنويع أنشطة المشروع إلى زيادة القيمة الكلية للمشروع أي أن القيمة الكلية للمشروع ماهى إلا حاصل جمع القيمة الخاصة بكل نشاط دون ان يكون هناك زيادة فى هذه القيمة الكلية للمشروع، فالقيمة الحالية للمشروع والذى يحتوى على النشاطين B,A ماهو إلا حاصل جمع القيمة الحالية للنشاط A مضافاً إليه القيمة الحالية للنشاط B، أى أن:

$$PV\,(AB) = PV\,(A) + PV\,(B)$$

أى أنه رغم التسليم بأهمية التنويع للمستثمر إلا أن هذا التنويع لايؤدى بالضرورة إلى نتائج أفضل بالنسبة للمشروع. فالقيمة الحالية للمشروع ماهى إلا حاصل جمع القيمة الحالية لكل نشاط من أنشطة المشروع ويتم عند تحديد القيمة الحالية خصم كل نشاط بالسعر الذى يعكس درجة المخاطرة الخاصة بهذا النشاط.

4.3.13: أن المخاطر ذات الصلة الخاصة بالورقة i = $r_{iM}\,\sigma_i$

$$\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M} = \frac{r_{iM}\;\sigma_i\;\sigma_M}{\sigma_M} = r_{iM}\;\sigma_i$$

Q. E. D.

وبذا تكون β_i كما يلي:

$$\beta_i = \frac{r_{iM}\;\sigma_i}{\sigma_M}$$

4.13 العلاقة بين العائد والمخاطرة

رأينا فى الفقرة السابقة 2.13 أن بيتا $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ هى المقياس المناسب لمخاطر السوق ، والآن يجب أن نحدد العلاقة بين هذه المخاطرة والعائد ويكون السؤال هنا:

ما هو العائد الذى يطلبه المستثمر مقابل اقتنائه لورقة مالية ذات معامل بيتا β_i ؟

للإجابة على هذا السؤال لابد فى البداية من التذكير بالمصطلحات الآتية:

$\bar{R}_i$ معدل العائد المتوقع على السهم (i) وهو الذي يتحدد في حالة شراء السهم بالسعر P_0 حيث $R_i = \frac{d_i}{P_0} + g$

R_i معدل العائد المطلوب على السهم (i) .ويلاحظ أنه إذا كان $\bar{R}i$ العائد المتوقع أقل من R_i العائد المطلوب تحقيقه لن يقبل المستثمر على شراء هذا السهم أو قد يقوم ببيع هذا السهم إذا كان يمتلكه. أما إذا كان $\bar{R}_i$ العائد المتوقع أكبر من R_i العائد المطلوب تحقيقه فإن المستثمر يقبل على شراء هذا السهم، ويكون الأمر سواء بالنسبة للمستثمر فى حالة $R_i=\bar{R}_i$.

R_F معدل العائد على أصل خالى المخاطر ، ويمكن أن يقاس هذا المعدل بالعائد على أذونات الخزانة فى الأجل القصير .

β_i معامل بيتا للسهم (i) ، ومعامل بيتا للسهم متوسط المخاطر يساوى الواحد الصحيح، أى أن $\beta_A = 1$

R_M معدل العائد المطلوب على محفظة مكونة من كل الأسهم والتى تمثل محفظة السوق M، وهو أيضا معدل العائد المطلوب على السهم متوسط المخاطرة $(\beta_i = 1)$.

$\frac{R_M - R_F}{\sigma_M}$ ميل خط سوق رأس المال معادلة (11) الفصل العاشر والذي يمثل علاوة خطر السوق وهو عبارة عن العائد الإضافي

المطلوب تحقيقه فوق العائد الخالي من المخاطر لتعويض المستثمر مقابل اقتناءه محفظة كاملة التنويع مخاطرها σ_p.

$R_M - R_F$ ميل خط سوق رأس المال بعد تنميط مخاطر المحافظ المالية σ_p والتعبير عنها كوحدات من σ_M أي بعد قسمة σ_p على σ_M.

وبالتالي فهي عبارة عن العائد الإضافي المطلوب تحقيقه فوق العائد الخالي من المخاطر لتعويض المستثمر مقابل اقتناءه محفظة كاملة التنويع تقاس مخاطرها σ_p كوحدات من الخطر المتوسط σ_M أي محفظة كاملة التنويع مخاطرها $\frac{\sigma_p}{\sigma_M}$.

وسوف نبين فيما يلي وبشكل مبسط أن خط سوق الورقة المالية security market line (SML) والذي يتم التعبير عنه كما يلي:

$$R_i = R_F + \left(\frac{R_M - R_F}{\sigma_M}\right)\left(\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}\right) \qquad (4)$$

المخاطر ذات الصلة للورقة i	ميل خط سوق رأس المال (علاوة خطر السوق)	العائد الخالي من المخاطر

هو الأساس في تحديد العائد الممكن تحقيقه مقابل المخاطر ذات الصلة للورقة i، كما أنه يمكن إعادة كتابة معادلة (4) لتصبح:

$$R_i = R_F + (R_M - R_F)\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

أي أن

$$R_i = R_F + (R_M - R_F)\,\beta_i \qquad (5)$$

وتكون $(R_M - R_F)\,\beta_i$ هي علاوة الخطر الخاصة بالسهم.

وتختلف قيمة هذه العلاوة عن علاوة خطر السوق $(R_M - R_F)$ وذلك على حسب معامل بيتا للسهم وما إذا كان أكبر من أو أقل من واحد صحيح،فإذا كانت $\beta_i = \beta_A$ كان معنى ذلك $(R_M - R_F) = (R_M - R_F)\beta_i$

وعلى سبيل المثال إذا كانت علاوة خطر السوق هى 4% ومعامل بيتا للسهم i هو 0.5 فإن علاوة خطر السهم i تكون كما يلى:

$$(R_M - R_F)\beta_i = (4\%)\ (0.5) = 2\%$$

وإذا كانت β_i =2 لسهم آخر(j) فإن علاوة خطر السهم (j) تكون كما يلى :

$$= (4\%)\ (2) = 8\%$$

أما إذا كان هناك سهم (A)وكان معامل بيتا لهذا السهم $\beta_A = 1$ فإن علاوة خطر هذا السهم تكون هى نفس علاوة خطر السوق:

$$= (4\%)\ (1) = 4\%$$

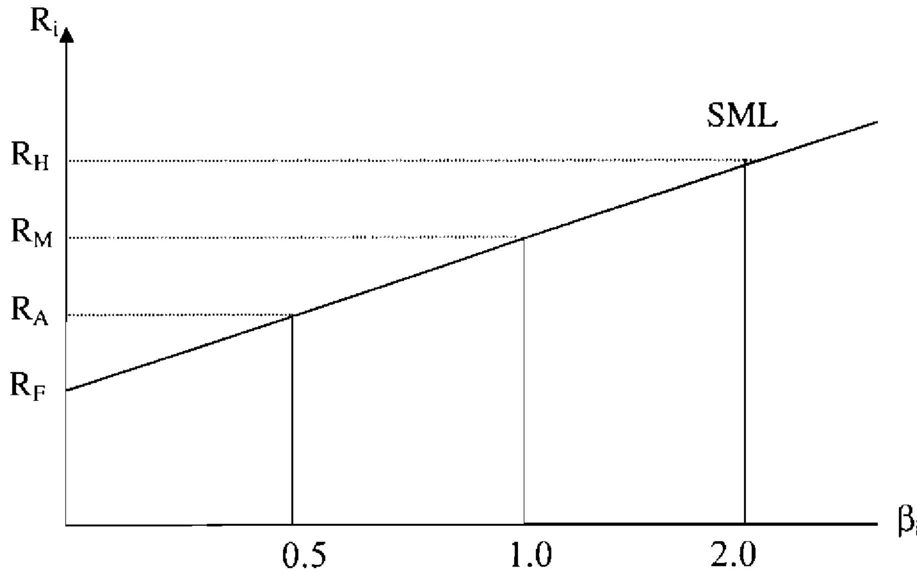
ويمكن كتابة العائد المتوقع من ورقة مالية كما يلى :

العائد المتوقع من ورقة مالية = **العائد الخالى من المخاطر** + **علاوة الخطر الخاصة بالسهم التى تتبقى بعد التنويع**

Required Return = Risk-Free Return + Risk Premium for the stock that remains after diversification

وتسمى هذه المعادلة بمعادلة خط السوق للورقة المالية Security Market Line(SML) وهي تعبر عن ذلك الخط الذى يبين العائد المطلوب تحقيقه R_i عند كل قيمه من قيم مقياس المخاطرة β_i.

وعادة ما يتم التعبير عن معادلة خط السوق للورقة المالية (SML) فى شكل بيانى كما هو موضح فى الشكل رقم (4/13) والذى يبين خط السوق للورقة المالية عند $R_F = 9\%$، $R_M = 13\%$.



شكل رقم (4/13)

وحيث أن $\sigma_{iM} = \sigma_i \sigma_M$ فإن:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma^2_M} = \frac{r_{iM}\,\sigma_i\,\sigma_M}{\sigma^2_M} = r_{iM}\frac{\sigma_i}{\sigma_M}$$

فإنه يمكن التعبير عن معادلة الـــ SML رقم (4) ، (5) كما يلى:

$$R_i = R_F + \left(\frac{\bar{R}_M - R_F}{\sigma_M}\right)(r_{iM}\;\sigma_i) \qquad (6)$$

حيث تمثل σ_i المخاطر الكلية للورقة i، ويمثل معامل الإرتباط r_{iM} ذلك الجزء من المخاطر المنتظمة والموجود ضمن المخـــاطر الكليـــة للورقـــة، وبالتالى فإن المخاطر المنتظمة للورقة هى (σ_i r_{iM})، بينما المخاطر التـــى يتم تنويعها هى σ_i (r_{iM} - 1). ويكون الجزء $(R_M - R_F)/.\sigma_M$ هو ميل خـــط

سوق رأس المال فى شكل رقم (11/10) من الفصل العاشر، والـــذى يبـــين سعر السوق في حالة التوازن لوحدة من المخاطر المنتظمة.

ونشير هنا أنه بالنسبة لخط سوق رأس المال يتم ضرب $\frac{R_M - R_F}{\sigma_M}$ فى σ_p وذلك على عكس الحال بالنسبة للورقة إذ يتم ضرب هذا المقدار فى $r_{iM}\ \sigma_i$، ويرجع ذلك أنه فى خط سوق رأس المال تعبــر σ_p عــن مخـــاطر محافظ كاملة التنويع فهى لاتحتوى على أية مخاطر غير منتظمة، أمـــا فـــى حالة الــ SML والخاص بالورقة المالية فإن σ_i تعبر عن المخاطر الكليــة للورقة، ولذا يجب أن نهتم فقط بذلك الجزء من مخاطر الورقـــة والخـــاص بالمخاطر المنتظمة $r_{iM}\ \sigma_i$.

وبدراسة وفحص الشكل رقم (4/13) يلاحظ الآتى :

1- يظهر معدل العائد المطلوب تحقيقه(R_i) على المحور الرأسى بينما تقع المخاطرة والتى تم قياسها بمعامل بيتا(β_i) على المحور الأفقى.
وهذا الشكل يختلف تماما عن الشكل رقـــم (3/13) characteristic Line والذى يبين عوائد الأسهم الفردية على المحـــور الرأســـى (R_i) كدالة في عائد السوق (R_M) كمتغير مستقل علـــى المحـــور الأفقـــى، وبالتالى فإن معاملات بيتا فى الشكل رقم (3/13) هى عبارة عن ميل الخطوط الثلاث (L,A,H)، أما فى الشكل رقم (4/13) فإن معـــاملات بيتا للأسهم (β_i) تظهر كمتغير مستقل على المحـــور الأفقـــى ويعبـــر المحور الرأسى عن العائد المطلوب تحقيقه R_i.

2- يكون معامل بيتا (β_i) للأصل الخالى من المخـــاطر مســـاوياً صـــفر وبالتالى فإن عائد هذا الأصل يمثل الجـــزء المقطـــوع مـــن المحـــور الرأسي وهو مايسمى بـــ R_F.

3- تتمثل درجة تجنب المخاطرة فى المجتمع أو بمعنى آخر علاوة خطـــر السوق في ميل المعادلة ($R_M - R_F$) الخاصة بخط الســـوق للورقـــة

المالية (SML)، فكلما زادت درجة تجنب المخاطرة من جانب المستثمر فى المجتمع، كلما زادت درجة إنحدار خط السوق للورقة المالية مما يؤدى إلى زيادة علاوة الخطر بالنسبة لأى سهم وبالتالى زيادة العائد المطلوب تحقيقه على هذا السهم.

ويلاحظ أن خط السوق للورقة المالية (SML) لايظل ثابتاً وإنما يتغير مع مرور الوقت بناء على التغير فى علاوة خطر السوق $(R_M - R_F)$ أو تغير سعر الفائدة الخالى من المخاطر R_F أو تغير β_i الخاصة بالورقة.

5.13 الإفتراضات الخاصة بنظرية تسعير الأصول الرأسمالية:

1 - يركز جميع المستثمرون على فترة واحدة وأنهم يهدفون إلى تحقيق أقصى منفعه خلال هذه الفترة، عن طريق إختيار أفضل محفظة وذلك فى ضوء العائد والمخاطر الخاصة بالمحافظ البديلة المتاحة.

2 - يمكن لجميع المستثمرون الإقتراض أو الإقراض وبمعدل سعر الفائدة الخالى من المخاطر R_F لأية كمية من الأموال، كما لايوجد أية قيود على البيع على المكشوف.

3 - تجانس توقعات المستثمرين، وهو مايمكن إفتراض إمكانية تحققه فى ظل توافر كافة المعلومات الخاصة بالإيرادات المتوقعة لكل ورقة، وتبايناتها، وكذلك تغايرات إيرادات هذه الأوراق مع إيرادات السوق.

4 - أنه يمكن تقسيم الأصول إلى قيم متناهية الصغر (أى أن قيمة كل سهم فى متناول الجميع) بحيث يمكن بيع أو شراء السهم بسهولة تامة ووفقاً للسعر الجارى فى السوق.

5 - إنعدام تكاليف البيع والشراء، مع إفتراض عدم وجود ضرائب.

6 - لاتؤثر قرارات أى مستثمر على سعر السوق فجميعهم يتعاملون مع السعر على أنه من معطيات السوق دون إمكانية التأثير فيه price takers.

7 - يتمتع السوق بالكفاءة أى توافر كافة المعلومات، هذا بالإضافة إلى وجود السوق الكامل الذى يتوافر فيه قدر كبير من المتعاملين، وأن المتعاملين الحديين وهم الذين يحددون أسعار السوق عددهم كبير جداً ولديهم محافظ كاملة التنويع.

6.13 β وعلاوة الخطر Beta and the risk premium

بفرض أن لدينا الأصل A وكانت $\beta_A = 1.6$ ، $R_A = 20\%$ وبفرض أن $R_F = 8\%$ (أي لايوجد مخاطر منتظمة أو غير منتظمة للأصل $\sigma_F = 0$ خالي المخاطر)، فإذا قمنا بتكوين عدة محافظ مكونة من الأصل A والأصل خالي المخاطر وذلك عن طريق تغيير نسب الاستثمار في الأصل A من محفظة إلى أخرى، فإذا تم استثمار 25% في الأصل A كان معني ذلك

$$E(R_A) = .25 \times E(R_A) + (1 - .25) R_F$$
$$= .25 \times 20\% + .75 \times 8\% \qquad = 11\%$$
$$\beta_A = .25 \times \beta_A + (1 - .25) \times 0 \qquad = .4$$

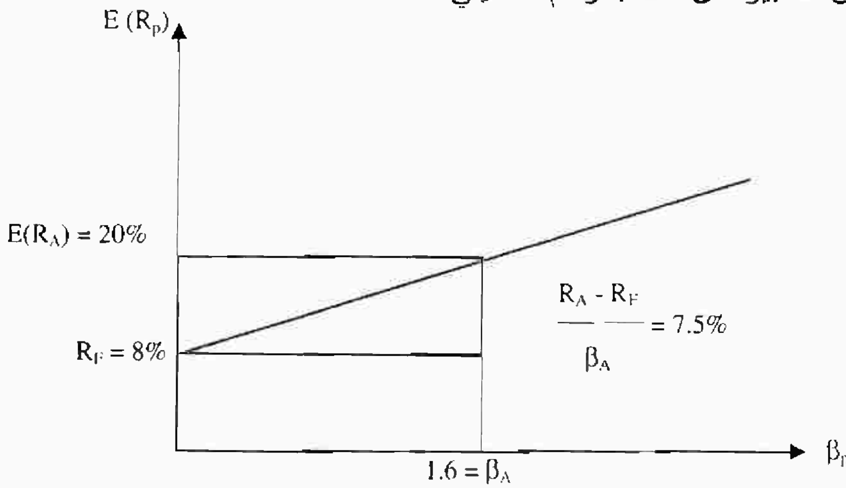
وإذا قام المستثمر باقتراض 50% من أمواله بتكلفة $R_F = 8\%$ واستثمار هذا المبلغ المقترض في الأصل A نجد أن:

$$E(R_A) = 1.50 \times E(R_A) + (1 - 1.50) R_F$$
$$= 1.50 \times 20\% - .5 \times 8\% \qquad = 26\%$$
$$\beta_P = 1.50 \times \beta_A + (1 - 1.50) \times 0$$
$$= 1.5 \times 1.6 \qquad = 2.4$$

ويمكن حساب مجموعة أخرى من المحافظ كما يلي:

نسبة المستثمر في الأصل A X_A	العائد المتوقع للمحفظة $E(R_A) = R_A$	بيتا للمحفظة β_A
0%	8%	.0
25	11	.4
50	14	.8
75	17	1.2
100	20	1.6
125	23	2.0
150	26	2.4

ويمكن التعبير عن ذلك بالرسم كما يلي:



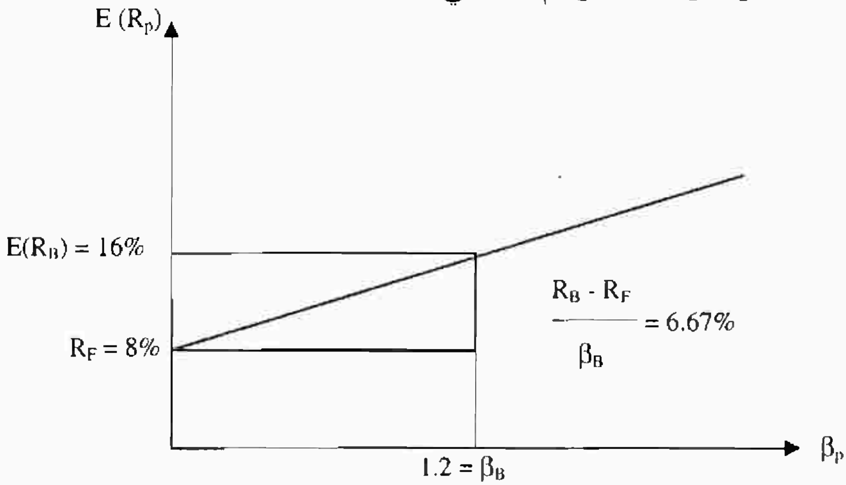
شكل (5/13)

ويقع العائد المتوقع لهذه المحافظ على خط مستقيم واحد ميلـــه 7.5%، أي أن الأصل A يعطي عائد قدره 7.5% مقابل كل وحـــدة مـــن الخطـــر المنتظم.

وإذا نظرنا إلى أصل آخر B والذي له β_B = 1.2 والعائد المتوقع لـــه 16% يكون السؤال المطروح هنا ما هو الأفضل للمستثمر أن يستثمر أمواله في الأصل A أم الأصل B ؟ ولاشك أن الإجابة تتحدد عند معرفـــة العائـــد المتوقع من الاستثمار في الأصل A أو الأصل B على كل درجة مخـــاطرة يرغب المستثمر في تحملها. ولتحديد ذلك نكون عدة محافظ من الأصـــل B والأصل خالي المخاطر لنحصل على النتائج التالية:

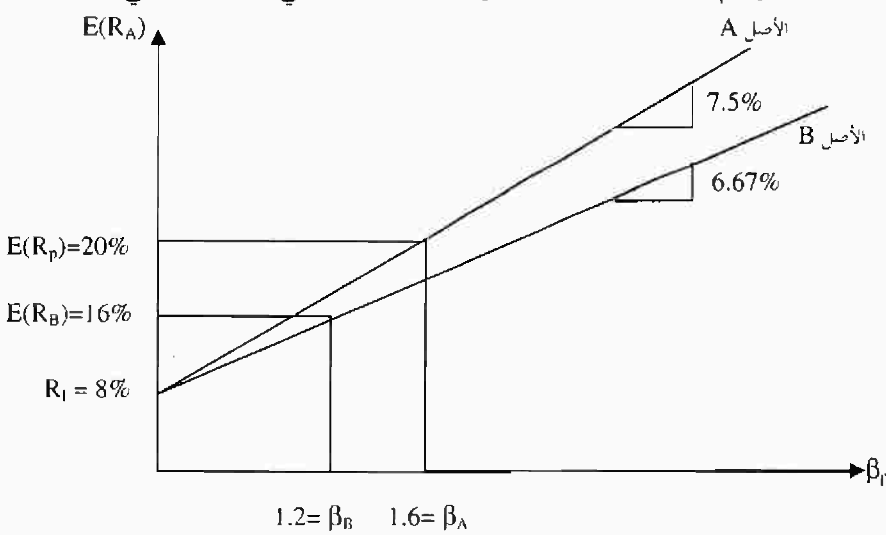
X_A	$E(R_A) = R_A$	β_A
0%	8%	.0
25	10	.3
50	12	.6
75	14	.9
100	16	1.3
125	18	1.5
150	20	1.8

ويمكن التعبير عن ذلك بالرسم كما يلي:



شكل (6/13)

ويمكن رسم المحافظ المكونة من كلا الأصلين في الشكل التالي:



شكل (7/13)

ونلاحظ من شكل (7/13) السابق أن الخط الخاص بالأصل A أعلى من الخط الخاص بالأصل B. أي أنه لأي قيمة من قيم المخاطر المنتظمة (المقاسة بواسطة β) نجد أن توليفة الأصل A مع الأصل خالي المخاطر تعطي دائماً نتائج أفضل من توليفة الأصل B مع الأصل خالي المخاطر، الأمر الذي يعني أن الأصل A أفضل من الأصل B.

ويمكن الوصول إلى هذه النتيجة بمقارنة ميل الخط A وقدره 7.5% لنجده أعلى من ميل الخط B وقدره 6.67%. وفي سوق كفء يحقق الافتراضات السابق ذكرها في فقرة 5.13، يمكن القول باستحالة استمرار هذا التفاوت ولمدة طويلة، إذ يقبل المستثمرين على اقتناء الأصل A والبعد عن الأصل B الأمر الذي يؤدي إلى ارتفاع سعر الأصل A وانخفاض سعر الأصل B مما يؤدي إلى انخفاض العائد الخاص بالأصل A وارتفاع العائد الخاص بالأصل B ويستمر ذلك حتى ينطبق الأصلين تماماً على خط واحد ونصل إلى المعادلة التالية:

$$\frac{R_A - R_F}{\beta_A} = \frac{R_B - R_F}{\beta_B} \qquad (7)$$

إذ بدون هذا التساوي يمكن تحقيق أرباح دون تحمل أية خسائر وهو ما يعرف في التمويل arbitrage situation. إذ يمكن للمستثمر في هذه الحالة افتراض الأصل B وبيعه واستخدام الأموال المحصلة في شراء الأصل A وتحقيق عائد يكفي لسداد عائد الأصل B المقترض وتحقيق ربح إضافي دون تحمل أية مخاطر والاستمرار في ذلك بشكل مستمر طالما أن سعر الأصل A لن يرتفع وأن سعر الأصل B لن ينخفض وهو ما يصعب استمراره في سوق كفء. وتمثل المعادلة رقم (7) هذه العلاقة الأساسية بين العائد والمخاطرة، إذ يجب أن تكون نسبة العائد إلى المخاطرة واحدة لكل الأصول في السوق.

The reward-to-risk ratio must be the same for all assets in the market.

وتتحقق العلاقة (7) لجميع الأصول في الأسواق الكفأه، وهو ما يتحقق عملاً في كثير من أسواق الأوراق المالية بصفة خاصة الأسواق الرائدة مثل سوق NYSE.

7.13 خط سوق الورقة المالية The Security Market Line:

يطلق على الخط الذي يعبر عن العائد المتوقع للسهم كدالة في المخاطر المنتظمة β بخط سوق الورقة المالية (SML) ويعد مفهوم خط سوق الورقة المالية أهم مفاهيم الإدارة المالية بعد مفهوم صافي القيمة الحالية NPV. وسوف نبين مفهوم هذا الخط بطريقة مبسطة في هذه الفقرة على أنه يلي ذلك بيان كيفية تحديده بطريقة رياضية سليمة.

1.7.13 طريقة مبسطة للتعبير عن SML:

للتعبير عن خط سوق الورقة المالية SML نفترض أن M هي محفظة السوق وأن العائد المتوقع لمحفظة السوق هو R_M، وحيث أن محفظة السوق تمثل جميع أصول السوق وأن الوزن النسبي لكل أصل يتمثل في نسبة القيمة السوقية للأصل إلى القيمة السوقية الكلية لجميع أصول السوق كان معنى ذلك أن المخاطر المنتظمة لهذه المحفظة تكون مخاطر متوسطة أو بمعنى آخر $\beta_M=1$، ولذا يمكن التعبير عن ميل خط سوق الورقة المالية كما يلي:

$$\text{SML Slope} = \frac{R_M - R_F}{\beta_M} = \frac{R_M - R_F}{1} = R_M - R_F \qquad (8)$$

ويسمى المقدار R_M-R_F كما سبق أن ذكرنا بعلاوة خطر السوق، وإذا كان العائد المتوقع للأصل i في السوق هو $\overline{R}_i = E(R_i)$ وكانت المخاطر المنتظمة للأصل هي β_i ، وحيث أن عائد الأصل لكل قيم β_i يجب أن يقع على خط السوق، كان معنى ذلك

$$\frac{\overline{R}_i - R_F}{\beta_i} = R_M - R_F \qquad \Rightarrow$$

$$\overline{R}_i = R_F + (R_M - R_F)\,\beta_i \qquad (9)$$

وتعبر معادلة (9) عن معادلة نموذج تسعير للأصول الرأسمالية الشهيرة capital asset pricing model (CAPM)، ومنها يتبين أن العائد المتوقع على أصل ما يتوقف على ثلاث عناصر:

1 – المقابل لقيمة الوقت بالنسبة للنقود the pure time value of money R_F، والذي يعبر عن المقابل الذي يعطي للمستثمر نتيجة تأجيله للإنفاق دون تحمل أية مخاطر.

2 – المقابل لتحمل درجة متوسطة من المخاطر المنتظمة والذي يقاس بعلاوة خطر السوق $R_M - R_F$.

3 – قيمة المخاطر المنتظمة الخاصة بالأصل β_i كنسبة من المخاطر المتوسطة الخاصة بالسوق.

ويلاحظ أن معادلة (9) الخاصة بخط سوق الورقة المالية تنطبق على أي أصل في السوق الكفء سواء كان هذا الأصل ورقة مالية إو محفظة من الأوراق المالية.

كما يمكن استبدال $\overline{R}_i$ بالعائد المطلوب تحقيقه R_i في معادلة (9) إذ $R_i=\overline{R}_i$ في حالة التوازن ويمكن تلخيص أهم النقاط التي تم التوصل إليها فيما يلي:

1 – يستخدم الانحراف المعياري σ_i لقياس المخاطر الكلية للأصل i.

2 – ينقسم العائد الكلي للأصل إلى عائد متوقع وعائد غير متوقع نتيجة للأحداث غير المتوقعة، وتنشأ مخاطر الأصل من هذا العائد غير المتوقع.

3 – تتمثل المخاطر المنتظمة في الأحداث الغير متوقعة والتي لها تأثير عام على السوق ككل ولكن بدرجات مختلفة من أصل إلى آخر، ولذا تسمى بمخاطر السوق، أما المخاطر غير المنتظمة فهي تتمثل في الأحداث غير المتوقعة والتي لها تأثير على أصل معين او مجموعة صغيرة من الأصول.

4 – يؤدي التنويع إلى إزالة المخاطر غير المنتظمة للأصول الداخلة في المحفظة بينما لا يؤدي التنويع إلى القضاء على المخاطر المنتظمة.

5 – حيث أنه يمكن القضاء على المخاطر غير المنتظمة بالتنويع، فإن مبدأ المخاطر المنتظمة ينص على أن تتوقف قيمة العائد على المخاطر المنتظمة فقط. وتقاس المخاطر المنتظمة $\frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M}$ لأصل ما كنسبة من المخاطر المتوسط σ_M أي تقاس بـ $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$.

6 – تقاس نسبة العائد إلى المخاطر لأصل ما reward –to- risk ratio بـ $\frac{R_i - R_F}{\beta_i}$ والتي يجب أن تتساوي في حالة السوق الكفء مع علاوة خطر السوق.

$$\frac{R_i - R_F}{\beta_i} = (R_M - R_F) \qquad \therefore\ R_i = R_F + (R_M - R_F)\,\beta_i$$

أي تكون نسبة العائد إلى المخاطر واحدة لجميع الأصول في السوق، ولذا إذا تم رسم العائد المتوقع لكل قيم β_i فإن هذا العائد يقع دائماً في حالة التوازن على خط سوق الورقة المالية SML لجميع أصول السوق.

7 – يمكن التعبير عن خط سوق الورقة المالية SML

$$R_i = R_F + (R_M - R_F)\,\beta_i$$

8 – كلما زادت قيمة β_i كلما زاد العائد المتوقع للأصل i، إلا أن ذلك لا يعني تحقق ذلك دائماً في جميع الفترات الزمنية، إذ لو تحقق ذلك دائماً لكان ارتفاع β_i يدل على وجود عائد أعلى ومؤكد وهو ما يعني انخفاض المخاطر لا زيادتها، ولذا فإن زيادة β_i يعني زيادة العائد في المتوسط في الأجل الطويل دون ضمان تحقق ذلك في فترات قصيرة محددة.

2.7.13 إثبات أكثر دقة لنموذج تسعير الأصول الرأسمالية

The CAPM: A More Rigorous Approach

قام كل من العالم Mossin, Lintner, Sharpe وبطريقة مستقلة بوضع صيغة رسمية دقيقة لعائدات الأصول في حالة التوازن والتي عادة ما يطلق عليه بصيغة شارب – لينتنر – موسين الخاصة بتسعير الأصول الرأسمالية.

Sharpe- Lintner- Mossin form of the Capital asset pricing model (CAPM)

فقد سبق أن بينا أنه في حالة تجانس توقعات المستثمرين وتحقيق التوازن بأسواق رأس المال فإن الخط I - $R_M - M$ يعبر عن منحنى الاستثمار الكفء وذلك في حالة إمكانية الاقراض والاقتراض بالسعر R_F شكل (11/10) الفصل العاشر، والسماح بالبيع على المكشوف ونطلق على هذا الخط بخط سوق رأس المال CML.

ويعبر خط سوق رأس المال عن العائد الخاص بالمحافظ الكفأة efficient portfolio، إلا أنه لا يعبر عن العائد الخاص بالمحافظ غير الكفأة أو عن العائد الخاص بسهم ما. ولذا سوف نهتم فيما يلي ببيان كيفية التعبير عن مثل هذه العلاقات.

فقد بينا في الفصل الحادي عشر أنه لتحديد خط سوق رأس المال $R_F - M - I$ ثم تعظيم θ معادلة رقم (3) من الفصل العاشر وذلك عن طريق تفاضل θ لكل قيمة من قيم x_i.

وتوصلنا إلى مجموعة المعادلات التالية (رقم (4) الفصل الحادي عشر)

$$\lambda \bullet (x_1 \sigma_{1i} + x_2 \sigma_{2i} + \ldots\ldots + x_N \sigma_{Ni}) = \overline{R}_i - R_F \quad (10)$$

وتتحقق هذه المعادلة لكل سهم $i = 1, 2, \ldots\ldots N$ ، i.

وهنا في حالة تجانس التوقعات وتحقيق التوازن في السوق وقيام جميع المستثمرين باختيار نفس المحفظة M فإن هذه المحفظة M سوف تحتوي على جميع أسهم السوق وتكون نسبة كل سهم في المحفظة هي نفس نسبة قيمة السهم إلى القيمة الكلية لأسهم السوق.

وللإنتقال من هذه المعادلة السابقة رقم (10) إلى معادلة الـ CAPM نلاحظ أن الطرف الأيسر من المعادلة ما هو إلا λ مضروباً في التغاير بين عائد الورقة I وعائد السوق، أي أن الطرف الأيسر ما هو إلا $\lambda\sigma_{iM}$، إذ أنه يمكن كتابة الطرف الأيسر كما يلي:

$$L.H.S. = \lambda\ (x_i\ \sigma_i^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} x_j\ \sigma_{ij})$$

وبالرجوع إلى فقرة 2.13

$$\therefore\ L.H.S\ = \lambda\ \sigma_{iM}$$

وبالتعويض في معادلة رقم (10)

$$\therefore\ \lambda\ \sigma_{iM}\ = \bar{R}_i\ -\ \bar{R}_F$$

$$\forall\ \ i\ = 1, 2, \ldots\ldots\ldots N$$

وحيث أن معادلة (10) صحيحة لكل قيم i فإنها بالضرورة صحيحة لجميع محافظ الأوراق المالية، وأحد هذه المحافظ هي محفظة السوق.

وبكتابة معادلة رقم (10) لمحفظة السوق نجد أن:

$$\lambda\ \sigma_{MM}\ =\ \bar{R}_M\ -\ R_F$$

أي أن:

$$\lambda\ \sigma_M^2\ =\ \bar{R}_M\ -\ R_F$$

$$\therefore\ \lambda\ =\ \frac{\bar{R}_M - R_F}{\sigma_M^2}$$

وبالتعويض عن قيمة λ في معادلة (10)

$$\therefore\ \left(\frac{\bar{R}_M - R_F}{\sigma_M^2}\right)\ \sigma_{iM} = \bar{R}_i\ - R_F$$

$$\therefore\ \bar{R}_i = R_F\ +\ (\bar{R}_M\ - R_F)\ \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

$$\bar{R}_i\ =\ R_F\ +\ (R_M\ - R_F)\ \beta_i$$

وهو المطلوب إثباته Q.E.D.

ويتميز هذا الإثبات إننا لم نستخدم الحقيقة الخاصة بأن $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ تعبر عن المخاطر ذات الصلة، وإنما تم استنتاج أن β_i تعبر عن المخاطر

المنتظمة للأصل k كنسبة من المخاطر المتوسطة σ_M، أي تـم اسـتنتاج أن $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$.

8.13 خط سوق الورقة المالية وتكلفة رأس المال

The SML and Cost of Capital

بعد أن بينا العائد وعلاقته بالمخاطر يمكننا الآن أن نبين كيفية تحديـد معدل الخصم للتدفقات النقدية المستقبلة (والذي سبق استخدامه في الفصـول (5)، (6)، (7) للمشروعات المختلفة، وهو ما سوف نتناوله أيضاً بشئ مـن التفصيل في فصول الجزء الرابع من هذا الكتاب.

فقد بين خط سوق الورقة المالية SML العائد الممكن تحقيقه في سوق الأوراق المالية نتيجة تحمل مخاطر منتظمة معينة خاصة بالأصل، ولذا فعند اتخاذ قرار بواسطة أية منظمة للاستثمار في مشروع ما له درجـة مخـاطر منتظمة معينة، كان من الضروري التحقق من أن هذا المشروع سوف يحقق عائد يتعادل على الأقل لذلك العائد الذي يمكن تحقيقـه فـي سـوق الأوراق المالية لهذه الدرجة من المخاطر المنتظمة، ومن هنا ترجع الأهمية القصوى لخط سوق الورقة المالية SML إذا بناء عليه يتم تحديد معـدلات الخصـم اللازم لتحديد صافي القيمة الحالية NPV للمشروعات الاقتصادية.

ويسمى هذا العائد الذي يتحدد بواسطة SML بتكلفة رأس المال cost of capital أو تكلفة الفرصة البديلة opportunity cost.

أسئلة وتمارين الفصل الثالث عشر

1 – كان العائد المتوقع لكل من السهم X والمؤشر NYSE كما يلي

Year	NYSE	Stock x
1	(26.5%)	(14.0%)
2	37.2	23.0
3	23.8	17.5
4	(7.2)	2.0
5	6.6	8.1
6	20.5	19.4
7	30.6	18.2

أ – استخدام الحاسب المالي لتحديد β الخاصة بالسهم x؟

ب– احسب المتوسط الحسابي للعائد الخاص بكل من السهم x ، ومؤشر NYSE، ثم احسب الانحراف المعياري لكل منهما؟

جـ– إذا كان من المتوقع استمرار التوقعات السابقة للسنوات القادمة وإذا كان هناك حالة من التوازن بالنسبة لعائد السهم x. المطلوب تحديد معدل العائد الخالي من المخاطر R_F؟

د – ارسم الـ SML للسهم x.

هـ– إذا كنت تمتلك محفظة كاملة التنويع وترغب في إضافة إما السهم x أو السهم y والذي له نفس β الخاصة بالسهم x ولكن $\sigma_y > \sigma_x$ وكان العائد الخاص بالسهمين x، y متساويين ومقداره 10.6%.

المطلوب: تحديد السهم الذي يفضل اختياره x أم y؟

2 – إذا أعطيت البيانات التالية لثلاث أسهم A، B، C.

β	E(R)	السهم
0.7	%10	A
1.2	14	B
1.8	20	C

المطلوب: أ – العائد المتوقع لمحفظة مكونة من الثلاث أسهم وكان الوزن النسبي لكل سهم متماثلاً ؟

ب– احسب β الخاصة بهذه المحفظة ؟

جـ– هل هناك حالة من التوازن لكل سهم من هذه الأسهم الثلاثة ؟

3 – نفرض توافر البيانات التالية:

حالة السوق	الاحتمال	عائد السهم A	عائد السهم B
كساد	0.25	(0.10)	(0.30)
عادي	0.50	0.10	0.05
رواج	0.25	0.20	0.40

المطلوب: أ – حساب العائد المتوقع لكل سهم.

ب – بفرض صحة CAMP وكانت β للسهم A أكبر من β للسهم B بمقدار 0.25 فما هو مقدار علاوة خطر السوق؟

4 – إذا كانت $\beta_i = 1.2$ وكانت علاوة خطر السوق 8.5% ومعدل العائد الخالي من المخاطر 6%، فما هو العائد المطلوب تحقيقه للسهم i ؟

5 – إذا كان العائد الخالي من المخاطر 8% وكانت $\beta_i = 1.5$ وكان العائد المتوقع للسوق 15%. المطلوب تحديد العائد المطلوب تحقيقه للسهم i ؟

6 – نفرض أن $R_F = 6\%$ وكانت $R_M = 13\%$. المطلوب تحديد R_i إذا كانت $\beta_i = 0.7$ ؟

7 – نفرض أن $R_F = 5\%$، $R_M = 10\%$، $R_A = 12\%$. المطلوب:

أ – احسب β_A ؟

ب – إذا كانت $\beta_A = 2$ فالمطلوب تحديد العائد المطلوب تحقيقه للسهم A في هذه الحالة ؟

8 – افرض أن $R_F = 5\%$ وكانت علاوة خطر السوق 6%. المطلوب تحديد متوسط عائد السوق R_M؟ وكذا تحديد R_i إذا كانت $\beta_i = 1.2$؟

9 – نفرض أن $R_F = 9\%$، $R_M = 14\%$، $\beta_i = 1.3$.

أ – المطلوب تحديد العائد المطلوب تحقيقه R_i ؟

ب – نفرض أن العائد الخالي من المخاطر R_F زاد إلى 10% أو نقص إلى 8% وذلك مع بقاء ميل خط السوق للسهم SML دون تغيير. المطلوب تحديد أثر ذلك على قيمة كل من R_M، R_i ؟

جـ – نفرض أن R_F ظلت ثابتة عند 9% إلا أن R_M زادت إلى 16% أو نقصت إلى 13%، وبالتالي تغير الميل الخاص بخط السوق للسهم SML. فما هو أثر ذلك على R_i ؟

10 – إذا كانت $\beta_i = 0.45$ ، $\sigma_i = 30\%$ ، $\sigma_M = 20\%$. المطلوب تحديد معامل الارتباط بين عائد الورقة i وعائد السوق r_{iM}؟

11 –عبر عن $\beta_i = \dfrac{r_{iM}\sigma_i}{\sigma_M}$ في معادلة خط السوق للورقة SML ثم قارن النتائج التي حصل عليها بمعادلة خط السوق الرأسمالي CML ؟

12- نفرض توافر البيانات التالية:

السهم	Beta	E (R)
A	1.8	%22.00
B	1.6	%20.44

إذا كان R_F = %7

المطلوب:

أ – تحديد ما إذا كان أسعار هذين السهمين تعد أسعاراً عادلة أم لا ؟

ب – ما القيمة التي يجب أن تكون عليها R_F لكي نعتبر أن أسعار هذين السهمين تعد أسعاراً عادلة ؟

13- ما هي الأوزان الخاصة لمكونات محفظة تحتوي على 50 سهم من النوع الأول وسعر السهم 35$ و 30سهم من النوع الثاني وسعر السهم 25$؟

14- تمتلك محفظة ما وكان 30% من هذه المحفظة يتمثل في المستثمر في السهم A، 20% يتمثل في المستثمر في السهم B، 10% في السهم C، 40% في السهم E. وكانت β للأسهم الأربعة على التوالي 1.4، 0.6، 1.5، 1.8.

المطلوب: تحديد β_p لهذه المحفظة ؟

15- إذا كنت ترغب في تكوين محفظة لها نفس درجة مخاطر السوق، وكنت تمتلك 500,000$ وإذا أعطيت البيانات التالية:

السهم	المبلغ المستثمر	β
A	140,000	0.90
B	140,000	1.20
C	----	----
الأصل الخالي من المخاطر	----	----

المطلوب: استكمال بيانات الجدول السابق ؟.

16- إذا توافرت لديك البيانات التالية:

السهم	β	العائد المتوقع
A	1.35	.22
B	0.90	.16

فإذا اعتبرنا أن أسعار السهمين أسعاراً عادلة.

فالمطلوب: في ضوء الـــ CAPM تحديد قيمة كل من R_M ، R_F ؟

17 – إذا كان العائد المطلوب تحقيقه لشركتين على التـــوالي 19%، 14% وإذا كانت β_1 = 1.7، β_2 = 1.2، المطلوب تحديد العائد المتوقع لمحفظـــة السوق R_M وكذا العائد الخالي من المخاطر R_F ؟

18- يستثمر أحمد $35,000 في سهم له β = 0.8 كما يستثمر أيضاً مبلـــغ $40,000 في سهم له β = 1.4، المطلوب تحديد β_P للمحفظة المكونة من هاتين الورقتين؟

19 –نفرض أنك تمتلك محفظة من عشرون ورقة وتستثمر مبلـــغ $7,500 في كل ورقة وكانت β_P للمحفظة 1.12، وإذا قررت بيع أحد هذه الأســـهم والذي له β = 1.0 مع استخدام حصيلة البيع وقـــدرها $7,500 فـــي شراء سهم آخر له β= 1.75، المطلوب تحديد β_P الجديدة للمحفظة ؟

20- إذا كنت مديراً لإحدى المحافظ التي يســـتثمر فيهـــا 4 مليـــون دولار وتتكون المحفظة من 4 أسهم وكانت بيانات هذه الأسهم كما يلي:

Stock	Investment	β
A	$400,000	1.5
B	600,000	(0.50)
C	1,000,000	1.25
D	2,000,000	0.75،

فإذا كان عائد السوق الواجب تحقيقـــه 14%، R_F = 6%. فـــالمطلوب تحديد العائد المطلوب تحقيقه للمحفظة R_P؟

21- إذا كنت تمتلك محفظة قيمتها 2 مليون],bv مكونـــة مـــن 20 ورقـــة والمبلغ المستثمر في كل ورقة $100,000. فإذا قررت بيع ورقة قيمة المستثمر فيها $100,000 ولها β = 1.4 واستبدالها بورقة أخرى لهـــا β = 0.9 وإذا كانت β_P قبل التعديل =1.1، **المطلوب** تحديد قيمـــة β_P الجديدة بعد إجراء التعديل السابق ؟

22- محفظة تتكون من عدد 120 من سهم A والذي يباع بـــ 50$ وكــذا عدد 150 من سهم B والذي يباع بـــ 20$. المطلوب تحديد الــوزن النسبي لكل سهم في المحفظة ؟

23- إذا كنت تمتلك 100,000$ وترغب في استثمارها بالكامل في محفظة مكونة من الأسهم X , Y والأصل الخالي من المخـــاطر. وإذا كنــت ترغب في تحقيق عائد من المحفظة قــدره 11.5% علـــى أن تكــون مخاطر المحفظة 70% من مخاطر السوق. فإذا كان العائد المتوقع من السهم X 30% وكانت $\beta_x = 1.6$، وكان العائــد المتوقــع للســهم Y 20% وكانت $\beta_y = 1.52$ وكانت $R_F = 6\%$.

المطلوب: تحديد الكمية الواجب استثمارها في الســهم X ؟ وكيــف تفســر إجابتك؟

24- إذا توافرت لديك البيانات التالية:

حالة السوق	الاحتمال	العائد المتوقع للسهم أ	العائد المتوقع للسهم ب
كساد	.20	.08	-.25
سوق طبيعي	.55	.47	.16
رواج	.25	.23	.58

فإذا كانت علاوة خطر السوق 12%، $R_F = 4\%$.

فالمطلوب:

أ - تحديد السهم صاحب أكبر مخاطر منتظمة ؟

ب - ما هو السهم صاحب أكبر مخاطر غير منتظمة ؟

ج - ما هو السهم الأكثر مخاطره ؟ أشرح ؟