أ

# ملحق ( أ ) المجموعات

## Sets

### ١ – مقدمة

مفهوم المجموعة يستخدم كثيرا فى الرياضيات، فالطلاب يدرسون نظرية المجموعات بشكل أو بآخر فى جميع المستويات فى الرياضيات بدءا من المدرسة الابتدائية وصولا إلى الجامعة، حتى أنه يمكننا القول بأن نظرية المجموعات تمثل فكرة موحدة تربط كل فروع الرياضيات بل واكثر من ذلك فهى تعتبر وسيلة ناجحة جدا لتوحيد لغة الرياضيات. وفى المفهوم الرياضى فإن كلمة مجموعة Set تطلق فقط على التجمعات من الأشياء المتمايزة والمعرفة تعريفا جيدا، وهذه الأشياء تسمى عناصر المجموعة elements وهى محددة تحديدا دقيقا لا يقبل الغموض، بمعنى أنه لأى عنصر فإننا نستطيع الحكم على ما إذا كان العنصر موجود ضمن عناصر المجموعة أم غير موجود. ومن أمثلة المجموعات:

- مجموعة كتب الرياضيات فى مكتبة كلية التربية بجامعة عين شمس.
- مجموعة أسماء الطلاب بالفصل.
- مجموعة شهور السنة الميلادية .
- مجموعة الأعداد الصحيحة من العدد 1 إلى العدد 100 .

بينما "أسماء الطلاب طوال القامة بالفصل" لا تمثل مجموعة لأنها غير معرفة تعريفا جيدا. ويرمز للمجموعة بأحد الحروف الكبيرة ... , A , B , C بينما يرمز لعناصر المجموعة بالحروف الصغيرة ... , a , b , c وإذا كان العنصر a ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر

a ينتمى إلى المجموعة A ويكتب $a \in A$ حيث الرمز $\in$ يمثل الانتماء أما إذا كان العنصر a ليس من ضمن عناصر المجموعة A فإننا نقول أن العنصر a لا ينتمى إلى المجموعة A ويكتب $a \notin A$ حيث الرمز $\notin$ يمثل عدم الانتماء. ويمكن وصف المجموعة بكتابة عناصرها بين قوسين من النوع $\{ \}$ ، على أن توضع فواصل بين العناصر، وترتيب العناصر داخل المجموعة ليس له أهمية وكذلك تكرار عنصر فى المجموعة لا يغير من المجموعة لان العبرة بالعناصر المختلفة داخل المجموعة وتسمى هذه الطريقة لوصف المجموعة بطريقة السرد أو القائمة roster form ، فمثلا المجموعة $\{a , e , i , o , u \}$ هى نفسها المجموعة $\{a , e , a , o , u , i , o , u \}$ وإذا كانت المجموعة تحتوى على عناصر كثيرة فإننا نستخدم ثلاث نقاط، ... ، لوصف أن المجموعة تحتوى على عناصر أخرى ومن السهل على القارئ تقديرها ومعرفتها بسهولة، فمثلا إذا كانت A هى مجموعة الأعداد الصحيحة من العدد 1 إلى العدد 100 فإنه يمكن كتابة A بالصورة $A = \{ 1 , 2 , 3 , \ldots , 100 \}$ ، ولأى مجموعة S فإن عدد عناصرها يرمز له بالرمز $n(S)$ وعندما يكون $n(S) < \infty$ فإن المجموعة S تسمى مجموعة منتهية Finite Set وخلاف ذلك فإن المجموعة S تسمى مجموعة غير منتهية Infinite Set، فمثلا المجموعة $A = \{ 1 , 2 , 3 , \ldots , 100 \}$ مجموعة منتهية وعدد عناصرها $n(A) = 100$ بينما المجموعة $B = \{ 2 , 4 , 6 , \ldots \}$ مجموعة غير منتهية ويرمز لذلك $n(B) = \infty$ . وإذا كانت المجموعة لا تحتوى على أى عنصر فإنها تسمى بالمجموعة الخالية Empty Set ويرمز لها بالرمز $\Phi$ أو بالرمز $\{ \}$ فمثلا إذا كانت S هى مجموعة الأعداد الصحيحة الأكبر من 5 واصغر من 3 فإن S تكون هى المجموعة الخالية. وتوجد طريقة ثانية لوصف المجموعات تسمى بطريقة الصفة المميزة Set – builder notation حيث يتم كتابة أحد عناصر المجموعة مع ذكر الصفة المميزة للمجموعة ويعبر عنها بالصورة $\{ x \mid p(x) \}$ وتقرأ مجموعة العناصر x التى تحقق الخاصية $p(x)$ ، والمتغير x يمثل عنصر اختيارى من عناصر المجموعة، والخط الرأسى" $\mid$ " يعنى حيث أن ، فمثلا

- مجموعة شهور السنة الميلادية يعبر عنها بالصورة $\{\, x$ | x اسم شهر من شهور السنة الميلادية $\}$
- مجموعة الأعداد الزوجية يعبر عنها بالصورة $\{\, x$ | x عدد زوجى $\}$
- مجموعة حل المعادلة $x^2 - 9 = 0$ يعبر عنها بالصورة $\{\, x \mid x^2 - 9 = 0 \,\}$ .
- المجموعة التى عناصرها أرقام العدد 151985 يعبر عنها بالصورة $\{\, x$ | x رقم من أرقام العدد 151985 $\}$
- مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة الأقل من 10 يعبر عنها بالصورة $\{\, x$ | x عدد صحيح موجب أقل من عشرة $\}$

وإذا كانت B , A مجموعتان غير خاليتان فإن حاصل الضرب الديكارتى للمجموعة A فى المجموعة B يكون مجموعة يرمز لها A x B وتعرف بالصورة

$$A \times B = \{\, (x, y) \mid x \in A \wedge y \in B \,\}$$

فمثلا إذا كانت $A = \{1, 2\}$ , $B = \{a, b\}$ فإن

$$A \times B = \{\, (1, a), (1, b), (2, a), (2, b) \,\}$$

## ٢ - المجموعات الجزئية Subsets

إذا كانت A , B مجموعتان بحيث أن كل عنصر فى المجموعة A موجود أيضاء فى المجموعة B، أى إن المجموعة A محتواه بالكامل فى المجموعة B، فى هذه الحالة يقال أن المجموعة A مجموعة جزئية Subset من المجموعة B ويرمز لذلك $A \subseteq B$ ( أو $B \supseteq A$ ). وإذا كانت $A \subseteq B$ ولكن يوجد عنصر واحد على الأقل فى المجموعة B وغير موجود فى المجموعة A، فى هذه الحالة يقال أن A مجموعة جزئية فعلية Proper Subset من المجموعة B ويرمز لذلك $A \subset B$ ( أو $B \supset A$ ). وحيث إن المجموعة الخالية $\Phi$ لا تحتوى على أى عنصر، أذن لا يمكن إيجاد عنصر فى المجموعة الخالية $\Phi$ وغير موجود فى أى مجموعة A وبالتالى فإن المجموعة الخالية $\Phi$ تكون مجموعة جزئية من أى مجموعة A ( $\Phi \subseteq A$ ) كما أن أى

مجموعة تكون مجموعة جزئية من نفسها( $A \subseteq A$ ) . وبفرض المجموعة $A=\{a,b\}$ فإن كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة $A$ تكون $\{b\},\{a\},A,\Phi$ وعددها يساوى $2^2$ وبالمثل للمجموعة $B=\{a,b,c\}$ فإن كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة $B$ تكون $\{b,c\},\{a,c\},\{a,b\},\{c\},\{b\},\{a\},\Phi, B$ وعددها يساوى $2^3$ ، وبوجه عام، إذا كانت المجموعة $A$ تحتوى على $n$ من العناصر ( $n(A)=n$ ) فإن عدد المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة $A$ يساوى $2^n$ . ومجموعة كل المجموعات الجزئية الممكنة من المجموعة $A$ تسمى مجموعة القوة Power Set للمجموعة $A$ ويرمز لها بالرمز $p(A)$ .

مثال ١ : نفرض المجموعتان $A=\{a,b\}$ , $B=\{a,b,c\}$
أذن $p(A)=\{\Phi, A,\{a\},\{b\}\}$ ومجموعة القوة للمجموعة $B$ تكون

$$p(B)=\{\Phi, B,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$$

ويقال أن المجموعتين $A , B$ متساويتين ويرمز لذلك $A=B$ إذا وفقط إذا احتويتا على نفس العناصر، بمعنى أن كل عنصر فى المجموعة $A$ موجود فى المجموعة $B$ ( $A \subseteq B$ ) وكل عنصر فى المجموعة $B$ موجود فى المجموعة $A$ ( $B \subseteq A$ ) . وفى أى مناقشة خاصة بالمجموعات فإنه يتحتم علينا تعيين مجموعة ثابتة بحيث أن جميع المجموعات التى نتعامل معها فى المناقشة تكون مجموعات جزئية منها وفى هذه الحالة نسمى تلك المجموعة الثابتة بالمجموعة الشاملة Universal Set ويرمز لها بالرمز $U$ ، وبالتالى فإنه لأى مجموعة $A$ فإن $\Phi \subseteq A \subseteq U$ .

## ٣ – العمليات على المجموعات Set Operations

إذا كانت $B$ , $A$ مجموعتان فإن تقاطعهما هو المجموعة التى تتكون من جميع العناصر المشتركة التى تنتمى إلى كل من $B$ , $A$ معا ويرمز لذلك $A \bigcap B$ ، أى إن

$A \cap B = \{ x \mid x \in A \wedge x \in B \}$ ، واتحادهما هو المجموعة التى تحتوى على جميع العناصر الموجودة فى $A$ أو الموجودة فى $B$ ويرمز لذلك $A \cup B$، أى إن $A \cup B = \{ x \mid x \in A \vee x \in B \}$ وبوجه عام إذا كانت $A_1, A_2, ..., A_n$ مجموعات فإن تقاطعها يعرف بالصورة

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid \forall \quad 1 \le i \le n \quad , \quad x \in A_i \}$$

واتحادها يعرف بالصورة

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{ x \mid \exists \quad 1 \le i \le n \quad : \quad x \in A_i \}.$$

ويقال للمجموعتين $B$ , $A$ إنهما منفصلتين إذا وفقط إذا كان $A \cap B = \Phi$ . ومكملة المجموعة $A$ فى المجموعة الشاملة $U$ يرمز لها $A'$ وتعرف بأنها مجموعة كل العناصر الموجودة فى المجموعة الشاملة $U$ والغير موجودة فى المجموعة $A$، أى إن $A' = \{ x \mid x \in U \wedge x \notin A \}$ ، ونلاحظ أن مكملة المجموعة الشاملة $U$ تكون المجموعة الخالية $\Phi$ ( $U' = \Phi$ ) ومكملة المجموعة الخالية $\Phi$ تكون المجموعة الشاملة ( $\Phi' = U$ ) ولأى مجموعة $A$ فإن $A'' = A$ . والفرق بين المجموعتان $B$ , $A$ يرمز له $A - B$ ويعرف كالآتى:

$$A - B = \{ x \mid x \in A \wedge x \notin B \} = A \cap B'$$

والفرق المتماثل بين المجموعتان $B$ , $A$ يرمز له $A \Delta B$ (ويقرأ $A$ دلتا $B$ ) ويعرف كالآتى:

$$A \Delta B = ( A - B ) \cup ( B - A )$$

مثال ٢ : نفرض المجموعة الشاملة $U = \{ a , b , c , d , e , f , g , h \}$ ونفرض المجموعتان

$$A = \{ a , c , d , h \} \quad , \quad B = \{ b , c , d \}$$

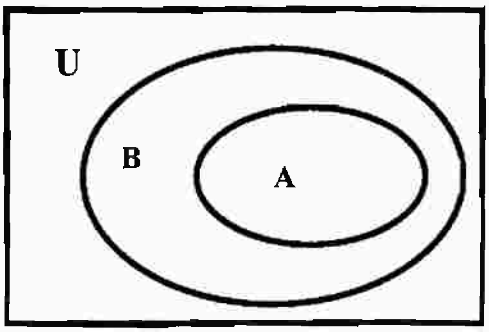
فى الجدول الآتى نضع بعض العمليات على المجموعتان $B$ , $A$

| | |
|---|---|
| $A \cap B = \{c, d\}$ | $A'' = \{b, e, f, g\}' = A$ |
| $A \cup B = \{a, b, c, d, h\}$ | $B' = \{a, e, f, g, h\}$ |
| $A - B = \{a, h\}$ | $A' \cup B' = \{a, b, e, f, g, h\}$ |
| $B - A = \{b\}$ | $(A \cap B)' = \{a, b, e, f, g, h\}$ |
| $A \Delta B = \{a, b, h\}$ | $A' \cap B' = \{e, f, g\}$ |
| $A' = \{b, e, f, g\}$ | $(A \cup B)' = \{e, f, g\}$ |

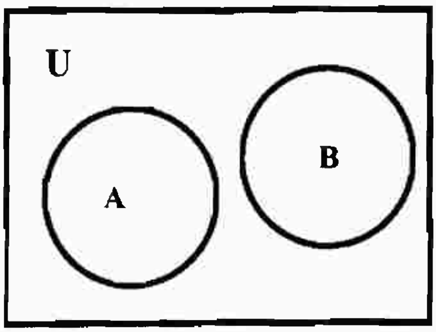
## ٤ – أشكال فن Venn Diagrams

جون فن عالم رياضى إنجليزى ( ١٨٣٤– ١٩٢٣). وهو أول من استخدم الأشكال لتمثيل المجموعات. وأشكال فن ما هى إلا وسيلة تعليمية بسيطة لتوضيح العلاقة بين المجموعات، وهى تساهم فى تصور وأدراك وحل الكثير من الصعوبات المتعلقة بالمنطق ونظرية المجموعات، وفى أشكال فن كثيرا ما نستخدم الشكل المستطيل ليمثل المجموعة الشاملة U بينما توضع المجموعات الجزئية على هيئة أشكال بيضاوية أو دائرية داخل هذا المستطيل. وفى الأمثلة الآتية نبين كيفية استخدام أشكال فن فى توضيح العلاقة بين المجموعات.

مثال ٣ : نفرض المجموعتين $A, B$ . العلاقات $A \subset B$ , $A \cap B = \Phi$ موضحة فى أشكال فن الآتية:

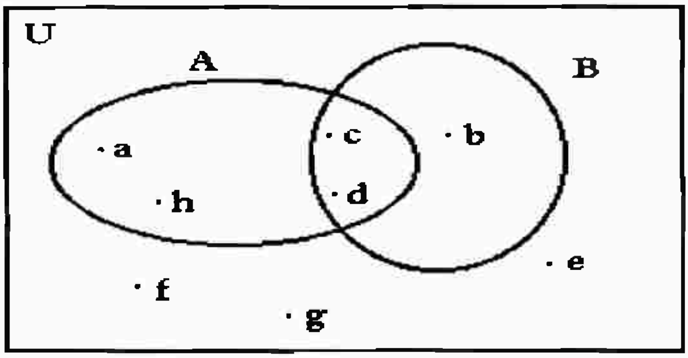



شكل فن يوضح $A \subset B$ حيث نلاحظ أن المجموعة $A$ واقعة داخل المجموعة $B$

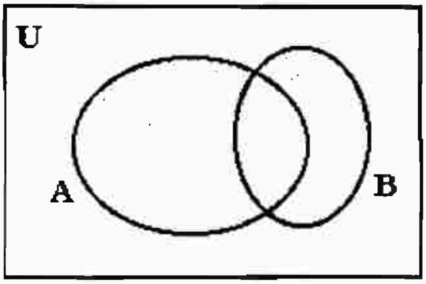



شكل فن يوضح $A \cap B = \Phi$ حيث نلاحظ أن المجموعتين $A, B$ منفصلتين .

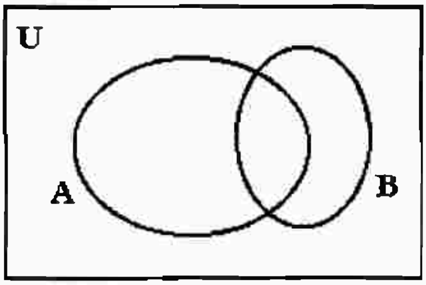
مثال ٤ : نفرض المجموعة الشاملة $U = \{ a , b , c , d , e , f , g , h \}$ ونفرض المجموعتان $A = \{ a , c , d , h \} , B = \{ b , c , d \}$ . العلاقة بين المجموعات $U , A , B$ موضحة بشكل فن الآتى :



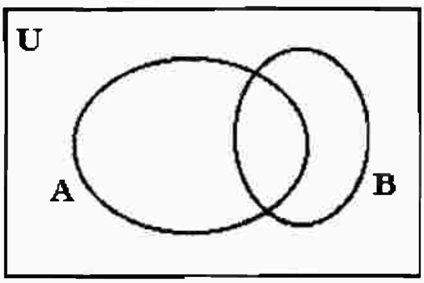

نفرض المجموعتان الغير خاليتان $B$ , $A$ من مجموعة شاملة $U$. العمليات على المجموعات (التقاطع – الاتحاد – المكملة – الفرق – الفرق المتماثل) موضحة فى أشكال فن الآتية:



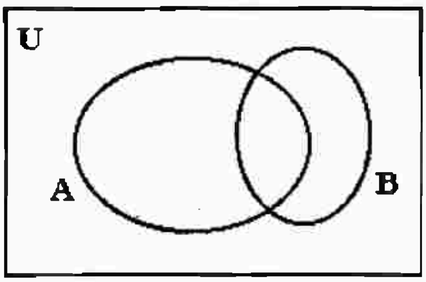

الجزء المظلل يمثل $A \cup B$



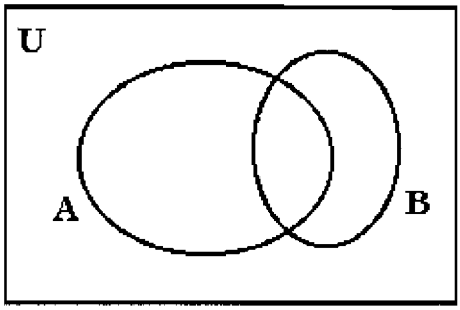

الجزء المظلل يمثل $A \cap B$



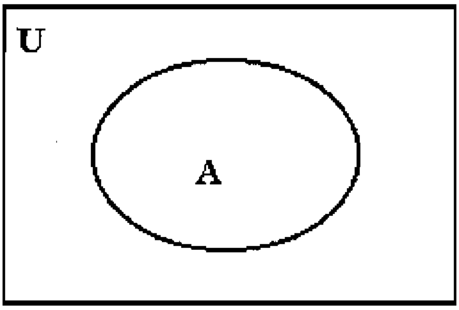

الجزء المظلل يمثل $B - A = B \cap A'$




الجزء المظلل يمثل $A - B = A \cap B'$

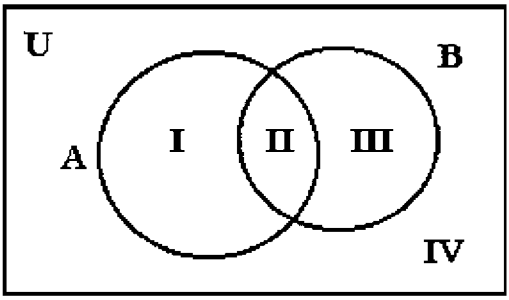



الجزء المظلل يمثل $A \Delta B$




الجزء المظلل يمثل $A'$

وعند التعامل مع مجموعتين A , B من مجموعة شاملةU ، ولكى نتمكن من توضيح جميع العلاقات بينهما فإنه يفضل استخدام شكل فن الآتى:




ونقوم بإعطاء رقم لكل منطقة فى الشكل وهذا يمكننا من مناقشة المناطق المختلفة بالشكل، فمثلا

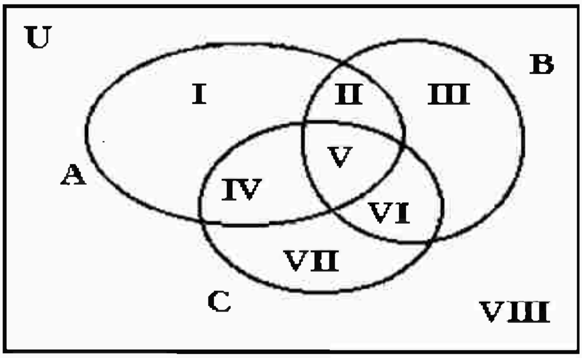
$A \cap B$ يمثلها المنطقة II

$A \cup B$ يمثلها المناطق I , II , III

$A - B$ يمثلها المنطقة I

$(A \cup B)'$ يمثلها المنطقة IV

وعند التعامل مع ثلاث مجموعات A , B , C من مجموعة شاملة U ولكى نتمكن من توضيح جميع العلاقات بينهما فإنه يفضل استخدام شكل فن الآتى :

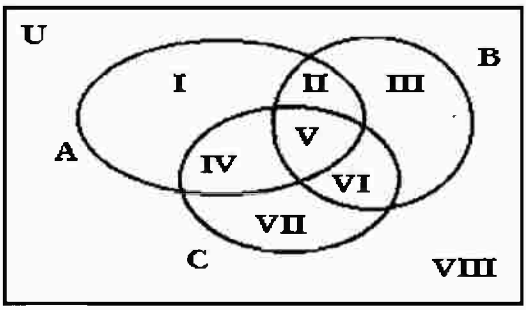



ونقوم بإعطاء رقم لكل منطقة في الشكل وهذا يمكننا من مناقشة المناطق المختلفة بالشكل، فمثلا

| | | |
|---|---|---|
| $A \cap B \cap C$ | يمثلها المنطقة | V |
| $A \cup ( B \cap C )$ | يمثلها المناطق | I , II , IV , V , VI |
| $( A \cup B ) \cap C$ | يمثلها المناطق | IV , V , VI |
| $( A \cup B )'$ | يمثلها المناطق | VII , VIII |

مثال ٦ : نفرض ثلاث مجموعات A , B , C من مجموعة شاملة U. استخدم أشكال فن في توضيح المجموعة $( A \cap B ) \cup ( C - A )$ .

الحل : في شكل فن نقوم بتظليل $A \cap B$ ويمثلها المناطق V , II



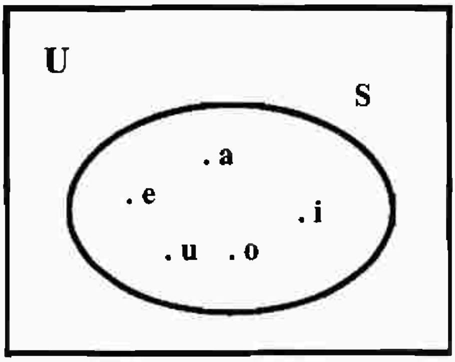

ثم نقوم بتظليل $C - A$ ويمثلها المناطق VI, VII وبالتالى فإن $( A \cap B ) \cup ( C - A )$ يمثلها المناطق VII , VI , V , II المظللة بالشكل.

وفائدة أشكال فن لا تقتصر فقط على توضيح العلاقة بين المجموعات وإنما يمكن استخدامها فى التعرف على عدد العناصر فى المجموعات المختلفة، فإذا كانت المجموعة S تحتوى على n من العناصر المختلفة، أى إن $n(S) = n$ فإنه يمكن توضيح العناصر على شكل فن بطريقتين:

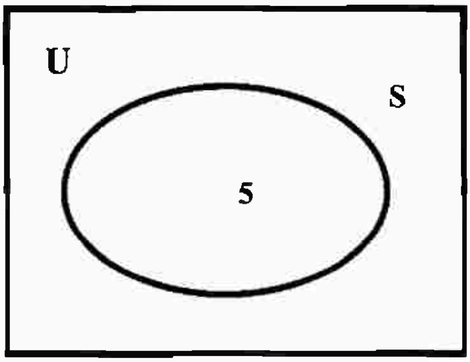
الطريقة الأولى : يتم فيها كتابة العناصر داخل الدائرة الممثلة للمجموعة S وهذه الطريقة تكون صعبة فى حالة إذا كانت المجموعة S تحتوى على عدد كبير من العناصر.

الطريقة الثانية : يتم فيها كتابة العدد الممثل لعدد العناصر داخل الدائرة الممثلة للمجموعة S.

مثال ٧ : للمجموعة $S = \{a, e, i, o, u\}$ فإنه يمكن توضيح العناصر على شكل فن كالآتى :

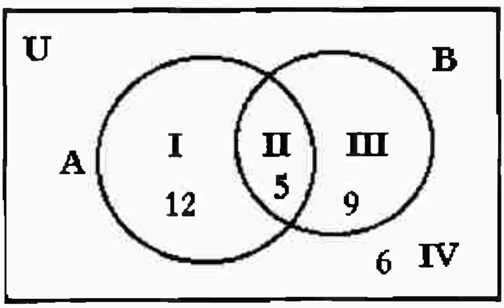



$S = \{a, e, i, o, u\}$




$n(S) = 5$

مثال ٨ : فى شكل فن الآتى



الأعداد 6 , 9 , 5 , 12 تمثل أعداد العناصر فى المناطق I , II , III , IV على الترتيب ومن الشكل يمكن استنتاج كل مما يأتى :

$n(A) = 12 + 5 = 17$ , $n(A') = 9 + 6 = 15$

$n(B) = 5 + 9 = 14$ , $n(A \cup B) = 12 + 5 + 9 = 26$

$n(A \cap B) = 5$ , $n(A \triangle B) = 12 + 9 = 21$

نظرية ١ : إذا كانت A , B مجموعتين منتهيتين فإن

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

وكنتيجة لهذه النظرية فإنه إذا كانت A , B مجموعتين منتهيتين ومنفصلتين فإن

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

وكذلك إذا كانت A , B , C ثلاث مجموعات منتهية فإن

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

وأشكال فن يمكن استخدامها فى حل المسائل التى تحتوى على مجموعات متشابكة من البيانات كما نوضح فى الأمثلة الآتية :

مثال ٩: فى مجموعة معينة تتكون من 75 طالب بكلية التربية وجد أن 16 طالب يدرسون الرياضيات والفيزياء واللغة الإنجليزية، 24 طالب يدرسون الرياضيات والفيزياء، 30 طالب يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية، 22 طالب يدرسون الفيزياء واللغة الإنجليزية، 7 طلاب يدرسون الرياضيات فقط، 10 طلاب يدرسون الفيزياء فقط، 5 طلاب يدرسون اللغة الإنجليزية فقط. أوجد ما يأتى:

( ١ ) عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات.

( ٢ ) عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ولا يدرسون الفيزياء.

( ٣ ) عدد الطلاب الذين لا يدرسون أيا من المقررات الثلاث.

الحل : هذه المثال يحتوى على مجموعات متشابكة من البيانات لذلك يمكن تمثيلها باستخدام أشكال فن. ونلاحظ بالمثال انه يوجد ثلاث مقررات دراسية وبالتالى يكون لدينا ثلاث دوائر فى شكل فن، نفرض المجموعة A تمثل مجموعة الطلاب الدارسين لمادة الرياضيات، المجموعة B تمثل مجموعة الطلاب الدارسين لمادة الفيزياء والمجموعة C تمثل مجموعة الطلاب الدارسين لمادة اللغة الإنجليزية. ومن المفضل أن نبدأ مع البيانات الأكثر وضوحا والتى يمكن وضعها مباشرة داخل شكل فن لتمثل الأساس الذى ننطلق منه لإكمال باقى البيانات داخل الشكل وفى هذا المثال نلاحظ أن البيانات الأكثر وضوحا هى الطلاب الذين يدرسون المقررات الثلاث وعددهم 16 وهذا يعنى أن المنطقة V الممثلة لتقاطع المجموعات الثلاث $C \cap B \cap A$ تحتوى على 16 عنصر لذلك نضع العدد 16 فى المنطقة V. وإذا أخذنا الطلاب الذين يدرسون الرياضيات والفيزياء ويمثلهم $B \cap A$ فى المنطقتين V , II وعددهم 24 ، وحيث أن المنطقة V وضع بها العدد 16 من قبل، أذن يتبقى 8 طلاب وبالتالى نضع العدد 8 فى المنطقة II، وحيث أن 30 طالب يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ويمثلهم $C \cap A$ فى المنطقتين V , IV وحيث أن المنطقة V وضع بها العدد 16 من قبل، أذن نضع العدد 14 فى المنطقة IV وبالمثل نضع العدد 6 فى المنطقة VI لأن 22 طالب يدرسون فيزياء ولغة إنجليزية، وحيث أن 7 طلاب يدرسون الرياضيات فقط فالهم ينتمون إلى المنطقة I وبالمثل نضع 10 طلاب فى المنطقة III التى تمثل الطلاب الذين يدرسون الفيزياء فقط وكذلك نضع 5 طلاب فى المنطقة VII التى تمثل الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية فقط، ومجموع الأعداد الموجودة فى شكل فن 66 وحيث أن عدد الطلاب فى المجموعة يساوى 75 أذن يتبقى 9 طلاب فى المنطقة VIII وبالتالى نحصل على شكل فن الموضح. والآن يمكننا الإجابة عن الأسئلة المطلوبة وغيرها، وذلك بمجرد النظر إلى شكل فن الموضح.

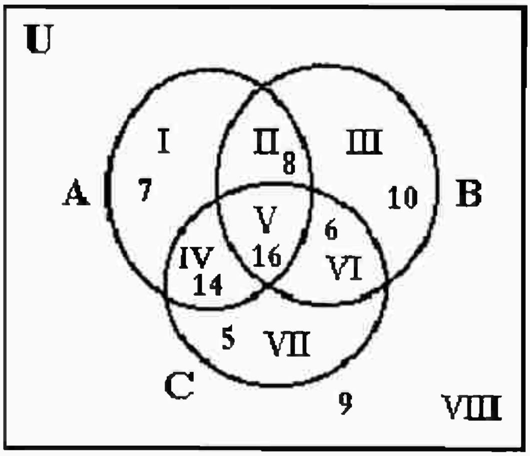
أذن

( ١ ) عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات = $16 + 14 + 8 + 7 = 45$

( ٢ ) عدد الطلاب الذين يدرسون الرياضيات واللغة الإنجليزية ولا يدرسون الفيزياء

= $5 + 14 + 7 = 26$

( ٣ ) عدد الطلاب الذين لا يدرسون أيا من المقررات الثلاث = 9 .




مثال ١٠ : فى مجموعة معينة تتكون من 120 طالب بكلية التربية وجد أن 100 طالب يدرسون على الأقل واحدة من اللغات الإنجليزية ، الفرنسية، الألمانية. ووجد أن 65 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية، 45 طالب يدرسون اللغة الفرنسية، 42 طالب يدرسون اللغة الألمانية، 20 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والفرنسية، 25 طالب يدرسون اللغة الإنجليزية والألمانية، 15 طالب يدرسون اللغة الفرنسية والألمانية. أوجد عدد الطلاب الذين يدرسون اللغات الثلاث ووضح عدد الطلاب فى كل من المناطق الثمانية بشكل فن.

الحل : نفرض A , B , C ترمز إلى مجموعات الطلاب الذين يدرسون اللغة الإنجليزية، الفرنسية، الألمانية. وحيث أن 100 طالب يدرسون على الأقل واحدة من اللغات الثلاث، أذن

$$n(A \cup B \cup C) = 100$$

وبالتعويض فى القانون

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

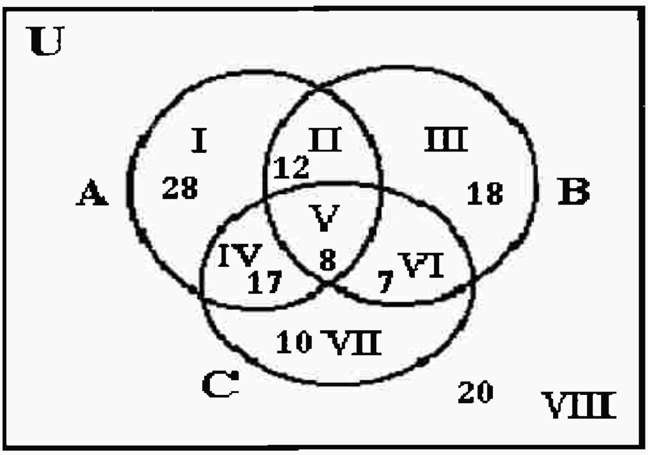
أذن

$$100 = 65 + 45 + 42 - 20 - 25 - 15 + n(A \cap B \cap C)$$

وبالتالى

$$n(A \cap B \cap C) = 8$$

أى أن 8 طلاب يدرسون اللغات الثلاث . والآن نستخدم هذه النتيجة لملء شكل فن كما وضحنا بالمثال السابق، وبالتالى عدد الطلاب فى كل من المناطق الثمانية بشكل فن يكون كما موضح بالشكل الآتى:



## ٥ – جداول الانتماء Membership Tables

يمكن تعريف جداول الانتماء بطريقة مماثلة للطريقة التى عرفنا بها جداول الحقيقة فى المنطـــق، فإذا كانت $A \neq \Phi$ وكان $x$ عنصرا ما، فإنه إما أن يكون $x \in A$ أو $x \notin A$ ، وإذا كانت $B$ , $A$ مجموعتين غير خاليتين وكان $x$ عنصرا مـــا، فـــإن الجـــدول الآتـــى يصـــف الاحتمالات الممكنة لانتماء العنصر $x$ أو عدم انتمائه فى المجموعتين $B$ , $A$

| A | B |
|---|---|
| $\in$ | $\in$ |
| $\in$ | $\notin$ |
| $\notin$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\notin$ |

وجداول الانتماء للعمليات على المجموعات موضحة كالآتى :

| A | A′ |
|---|---|
| $\in$ | $\notin$ |
| $\notin$ | $\in$ |

جدول الانتماء للمكملة

$A'$

| A | B | A ∪ B |
|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\in$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |

جدول الانتماء للاتحاد

$A \cup B$

| $A$ | $B$ | $A \Delta B$ |
|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\notin$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |

جدول الانتماء للفرق المتماثل

$A \Delta B$

| $A$ | $B$ | $A \cap B$ |
|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\in$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\notin$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\notin$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |

جدول الانتماء للتقاطع

$A \cap B$

| $A$ | $B$ | $B - A$ |
|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\notin$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\notin$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |

جدول الانتماء للفرق

$B - A$

| $A$ | $B$ | $A - B$ |
|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\notin$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\notin$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |

جدول الانتماء للفرق

$A - B$

ونلاحظ من جدول الانتماء للاتحاد $A \cup B$ أن

$$x \notin A \cup B \quad \Rightarrow \quad x \notin A \quad \wedge \quad x \notin B$$

كما نلاحظ من جدول الانتماء للتقاطع $A \cap B$ أن

$$x \notin A \cap B \quad \Rightarrow \quad x \notin A \quad \vee \quad x \notin B$$

ولإثبات أن $B \subseteq A$ نفرض $x \in A$ ونحاول إثبات أن $x \in B$ . وتعتبر جداول الانتماء وسيلة ناجحة وسهلة جدا لبرهنة الكثير من الخواص والنظريات المتعلقة بالمجموعات.

مثال ١٠ : باستخدام جداول الانتماء أثبت أن $A - B = A \cap B'$

الحل : بتكوين جدول الانتماء

| $A$ | $B$ | $B'$ | $A - B$ | $A \cap B'$ |
|---|---|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ |

↑ ↑

العمودين الرابع والخامس منطبقان كما يظهر بالجدول وبالتالى يتحقق أن $A - B = A \cap B'$

مثال ١١ : باستخدام جداول الانتماء أثبت أن $(A \cap B)' = A' \cup B'$

الحل : بتكوين جدول الانتماء

| $A$ | $B$ | $A \cap B$ | $A'$ | $B'$ | $(A \cap B)'$ | $A' \cup B'$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\in$ | $\in$ | $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ |
| $\in$ | $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ |
| $\notin$ | $\notin$ | $\notin$ | $\in$ | $\in$ | $\in$ | $\in$ |

↑ ↑

العمودين السادس والسابع منطبقان كما يظهر بالجدول وبالتالى يتحقق أن
$(A \cap B)' = A' \cup B'$

## ٦ – بعض الخواص فى جبر المجموعات

نفرض أن A , B , C مجموعات جزئية من مجموعة شاملة U. فى الجدول الآتى نعرض قائمة من القوانيـــن ، تسمى جبر المجموعات، ويمكن التحقق من صحتها باستخدام جداول الانتماء.

| اسم القانون | جبر المجموعات |
|---|---|
| قوانين اللانمو<br>**Idempotent Laws** | $A \cup A = A$<br>$A \cap A = A$ |
| قوانين الإبدال<br>**Commutative Laws** | $A \cup B = B \cup A$<br>$A \cap B = B \cap A$ |
| قوانين الدمج<br>**Associative Laws** | $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$<br>$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| قوانين التوزيع<br>**Distributive Laws** | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$<br>$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ |
| قوانين الوحدة<br>**Identity Laws** | $A \cup \Phi = A \quad , \quad A \cap U = A$<br>$A \cup U = U \quad , \quad A \cap \Phi = \Phi$ |
| قوانين المكملة<br>**Complement Laws** | $A \cup A' = U \quad , \quad A \cap A' = \Phi$<br>$U' = \Phi \quad , \quad \Phi' = U$<br>$A'' = A$ |
| قوانين ديمورجان<br>**De Morgan's Laws** | $(A \cup B)' = A' \cap B'$<br>$(A \cap B)' = A' \cup B'$ |

ونلاحظ من الجدول أن هناك تشابه كبير بين قوانين جبر المجموعات وقوانين جـــبر التقـــارير بالفصل الثالث، ويأتى هذا التشابه من التناظر بين العمليات الأساســية فى جــبر المجموعـــات (الاتحاد $\cup$ والتقاطع $\cap$ والمكملة) وأدوات الربط المنطقية فى جـــبر التقـــارير (الوصـــل $\vee$ والفصل $\wedge$ والنفى $\sim$). ونلاحظ فى الجدول أيضا أن القوانين مرتبة فى صـــورة ثنائيـــات (أزواج) وهذا الترتيب يعتمد على مبدأ هام فى جبر المجموعات يسمى مبدأ الثنائية (الـــترافق)

Duality Principle وينص على أن صحة متطابقة ما فى جبر المجموعات تقتضـــى صحـــة متطابقة أخرى تسمى بالمتطابقة الثنائية (المرافقـــة) ونحصـــل عليـــها مـــن إحـــلال ظـــهور $U$ , $\Phi$ , $\cup$ , $\cap$ محل $\Phi$ , $U$ , $\cap$ , $\cup$ على الترتيب. ونلاحـــظ فى أزواج القوانين بالجدول أن كل قانون مرافق للآخر.

مثال ١٢ : باستخدام التعاريف اثبت صحة قانون ديمورجان $(A \cup B)' = A' \cap B'$

الحل : من شرط تساوى مجموعتان نحاول إثبات

$$1- \quad (A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$$

$$2- \quad A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$$

ولإثبات (1) نفرض أن $x \in (A \cup B)'$

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \\ &\Rightarrow x \in A' \cap B' \end{aligned}$$

وبالتالى ينتج أن $(A \cup B)' \subseteq A' \cap B'$

ولإثبات (2) نفرض أن $x \in A' \cap B'$

$$\begin{aligned} x \in A' \cap B' &\Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \\ &\Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Rightarrow x \notin A \cup B \\ &\Rightarrow x \in (A \cup B)' \end{aligned}$$

وبالتالى ينتج أن $A' \cap B' \subseteq (A \cup B)'$

ويمكن إثبات ما سبق باستخدام التضمين $\Leftrightarrow$ كالأتى : نفرض أن $x \in (A \cup B)'$

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B)' &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ &\Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B' \\ &\Leftrightarrow x \in A' \cap B' \end{aligned}$$

وبالتالى ينتج أن $A' \cap B' = (A \cup B)'$. ووفقا لمبدأ الثنائية فـإن القـانون المرافـق $A' \cup B' = (A \cap B)'$ يكون متحقق أيضا.

مثال ١٣ : باستخدام قوانين جبر المجموعات اثبت صحة $A-(B \cup C) = (A-B')-C$

الحل :

| | |
|---|---|
| من تعريف الفرق | $A-(B \cup C) = A \cap (B \cup C)'$ |
| قانون ديمورجان | $= A \cap (B' \cap C')$ |
| قانون الدمج | $= (A \cap B') \cap C'$ |
| من تعريف الفرق | $= (A-B')-C$ |

مثال ١٤ : فى الجدول الآتى نضع بعض المتطابقات فى جبر المجموعات ونوضح المتطابقة المرافقة لكل منها.

| المتطابقة | المتطابقة المرافقة |
|---|---|
| $A \cap A' = \Phi$ | $A \cup A' = U$ |
| $A \cup A' = U$ | $A \cap A' = \Phi$ |
| $A \cap (B \cup A) = A$ | $A \cup (B \cap A) = A$ |
| $A \cap (B \cup C)' = (A \cap B') \cap C'$ | $A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$ |
| $(U \cap A) \cup (B \cap A) = A$ | $(\Phi \cup A) \cap (B \cup A) = A$ |
| $(U \cup A) \cup (A \cap \Phi) = U$ | $(\Phi \cap A) \cap (A \cup U) = \Phi$ |
| $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ | $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ |
| $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ | $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ |

# تمارين ملحق أ

١ - إذا كانت $A = \{a, b, c, d\}$

( ا ) اكتب جميع المجموعات الجزئية للمجموعة A .

( ب ) اكتب جميع المجموعات الجزئية B بحيث يكون $B \subseteq A$ ، $\{b\} \subseteq B$ ،
$B \neq A$ .

( ج ) اكتب جميع المجموعات الجزئية C بحيث يكون $n(C) \leq 2$ .

( د ) فى الجدول الآتى وضح أى من العبارات الآتية صحيح وأيها خطأ ؟ ولماذا ؟

| | | |
|---|---|---|
| $a \in A$ | $n(\{a\}) = n(\{b\})$ | $\Phi \subseteq \{a\}$ |
| $\{a, b\} \in A$ | $\{\{a, b\}\} \in p(A)$ | $\Phi \in A$ |
| $\{a, d\} \subseteq \{b, d, c\}$ | $\{a, b\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$ | $\Phi \in p(A)$ |
| $\{a, b\} \subseteq p(A)$ | $\{c\} \subseteq \{\{a\}, \{c\}\}$ | $\Phi \subseteq p(A)$ |
| $\{a, c\} = \{c, a, c\}$ | $\{d\} \in \{\{d, c\}, \{c\}\}$ | $\Phi \in p(\Phi)$ |

٢ - اكتب كل من المجموعات الآتية باستخدام الصفة المميزة

(1) $A = \{3, 6, 9, \ldots, 99\}$

(2) $B = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

(3) $C = \{1, 3, 5, \ldots\}$

(4) $A = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$

٣ - إذا كانت $B = \{b, d, e\}$ ، $A = \{a, b, c, d\}$ فاوجد كل من

$AxB$ , $BxA$ , $AxA$ , $p(B)$ , $p(A \cap B)$, $p(A-B)$ , $p(AXB)$

٤ - إذا كانت $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$ فأوجد $n(X)$ فى كـــل مـــن الحالات الآتية :

$$(1)-\quad X = \{x \mid (x \in A) \wedge (2x > 17)\}$$
$$(2)-\quad X = \{x \mid (x \in A) \wedge (x^2 \geq x!)\}$$

٥ - إذا كـــانت $A = \{1,3,5,7\}$ , $B = \{2,3,6,12\}$ , $C = \{1,2,3,4,5,6,9\}$ مجموعات جزئية من المجموعة الشاملة $U = \{1,2,3, \ldots ,12\}$ فاستخدم أشكال فـــن فى إيجاد كل مما يأتى:

$$A \cup B \quad , \quad A \cup (B \cap C) \quad , \quad A - (B \cup C) \quad , \quad B - C'$$
$$(A \cap B)' \quad , \quad A \cap (B' - C) \quad , \quad A' \cap (B \cup C)' \quad , \quad (A' \cup C')'$$

٦ - نفرض أن $A , B , C$ مجموعات جزئية من مجموعة شاملة $U$ . أستخدم أشكال فـــن فى وصف كل من المجموعات الآتية :

$$A \cup B' \quad , \quad A \cap (B \cup C) \quad , \quad A \cap (B \Delta C) \quad , \quad B \cap C'$$
$$(A \cap B)' \quad , \quad A - (B \cap C) \quad , \quad A' \cap (B \Delta C)' \quad , \quad (A' \cup C')'$$

٧ - نفرض أن $A , B , C$ مجموعات جزئية من مجموعة شاملة $U$. رتب المجموعـــات الآتيـــة بحيث تكون كل واحدة منها محتواة فى المجموعة التى تليها:

$$A \cup B \quad , \quad A \cap B \quad , \quad A \cup B \cup C \quad , \quad A \cap B \cap C \quad , \quad \Phi' \quad , \quad A$$

٨ - وضح كل من القوانين الآتية باستخدام أشكال فن ثم أثبت كل منها باستخدام جـــداول الانتماء وكذلك أثبت كل منها باستخدام التعاريف:

1- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3- $A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$
4- $A \cap (B \cup A) = A$
5- $(A \cap B)' = A' \cup B'$
6- $A \Delta B = B \Delta A$
7- $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

٩ - باستخدام جبر المجموعات أثبت كل مما يأتى:

1- $(A \cup (B' \cap C))' = (A' \cap B) \cup (A \cup C)'$

2- $A \cup (B \cap C)' = (A \cup B') \cup C'$

١٠ - فى عينة من 225 طالب بأحد الكليات تم سؤال كل منهم عن الألعاب التى يمارسونها، فإذا كان 62 طالب يمارسون كرة القدم، 53 يمارسون كرة السلة، 65 يمارسون العاب القوى، 19 يمارسون كرة القدم وكرة السلة، 14 يمارسون كرة القدم والعاب القوى، 21 يمارسون كرة السلة والعاب القوى، 8 لا يمارسون أيا من الألعاب الثلاث. استخدم أشكال فن فى إيجاد عدد الطلاب الذين يمارسون لعبة واحدة فقط.

ب

# ملحق ( ب ) مجموعات الأعداد

## Sets of Numbers

### ١ – مقدمة Introduction

مجموعات الأعداد تعتبر من المجموعات الهامة التى دائما ما تقابلنا فى دراسة الرياضيات، وتنقسم الأعداد إلى تسلسل من المجموعات الجزئية، وابسط الأعداد هى مجموعة الأعداد الطبيعية Natural Numbers ويرمز لها بالرمز N، $N=\{1,2,3,...\}$ ، وإذا بدئنا بمجموعة الأعداد الطبيعية N فإنه لجعل الطرح عملية ممكنة فى معادلات مثل " $x+a=b \quad , \quad a,b \in N \;, a>b$ " فإننا نحتاج إلى تعريف مجموعة الأعداد الصحيحة Integers Numbers ويرمز لها بالرمز I ، $I=\{0,\pm 1,\pm 2,...\}$ ، ولجعل القسمة عملية ممكنة فى معادلات مثل " $ax=b \quad , \quad a,b \in I \;, a\neq b$ " فإننا نحتاج إلى تعريف مجموعة الأعداد النسبية Rational Numbers ويرمز لها بالرمز Q

$$Q=\left\{ \frac{a}{b} \;\middle|\; a,b \in I \;, b\neq 0 \right\}$$

ولملئ الفراغات بين مجموعات الأعداد السابقة فإننا نحتاج إلى تعريف مجموعة الأعداد الغيرنسبية Irrational Numbers ويرمز لها بالرمز $Q'$ وهى الأعداد التى لا يمكن تمثيلها فى الصورة النسبية ومن أمثلة الأعداد الغير نسبية $\pi \quad , \quad \sqrt{2}$ ، وبعد ذلك تأتى مجموعة الأعداد الحقيقية ويرمز لها بالرمز R لتشمل كل مجموعات الأعداد السابقة أى أن $R \supset Q \supset Z \supset N$ . ومن اجل الحصول على حل لمعادلات فى الصورة

" $a > 0$ , $x^2 + a = 0$ " فإننا نحتاج إلى تعريف مجموعة الأعداد المركبة Complex Numbers ويرمز لها بالرمز C

$$C = \{ a + ib \mid a , b \in R \}$$

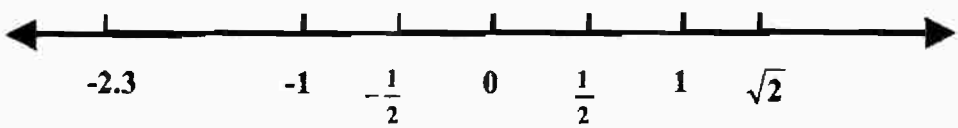
حيث $i = \sqrt{-1}$ مقدار تخيلي، وحيث أن، أى عدد حقيقى x يمكن كتابته فى الصورة $x = x + 0\,i$ أذن كل عدد حقيقى هو أيضا عدد مركب، وعلى ذلك فإن العلاقة بين مجموعات الأعداد تكون

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$$

## ٢ - التمثيل الهندسى للأعداد الحقيقية

## Geometric Representation

المفهوم الأساسى فى الرياضيات الذى يربط الرمز المجرد للعدد الحقيقى بالرمز الهندسى للنقطة هو تمثيل الأعداد الحقيقية كنقط على خط مستقيم ويتم ذلك عن طريق تحديد نقطة اختيارية O على خط مستقيم لتمثل العدد صفر 0 ونقطة أخرى u لتمثيل العدد 1، والنقطة O تسمى نقطة الأصل Origin والمسافة بين النقطة O والنقطة u تمثل وحدة القياس، وبواسطة النقطتين u , O فإن كل عدد حقيقى يمكن تمثيله كنقطة على هذا الخط المستقيم والعكس أيضا صحيح، أى إن كل نقطة على هذا الخط المستقيم تمثل عدد حقيقى، وهذا الخط المستقيم الذى يمثل الأعداد الحقيقية يسمى خط الأعداد Real Line والعدد المناظر للنقطة P على خط الأعداد يسمى إحداثى النقطة P، والأعداد الموجبة Positive Numbers يتم تحديدها بالنقط الواقعة فى الجهة اليمنى من نقطة الأصل O والأعداد السالبة Negative Numbers يتم تحديدها بالنقط الواقعة فى الجهة اليسرى من نقطة الأصل O، والعدد صفر 0 ليس موجب وليس سالب، وفى ضوء ذلك فإننا سوف نشير إلى الأعداد الحقيقية كنقط على خط الأعداد والشكل الآتى يوضح بعض الأعداد الحقيقية مرسومة كنقط على خط الأعداد



## ٣ – خواص الترتيب Order Properties

نفرض أن $b$ , $a$ عدديين حقيقيين، يقال أن العدد $a$ اقل من العدد $b$ ، ويرمز لذلك $a < b$ إذا كان $b - a$ عدد موجب وهذا يكافئ أن نقول $b$ اكبر من $a$ ، ويرمز لذلك $b > a$ ، وهندسيا يكون $a < b$ إذا كانت النقطة $a$ تسبق النقطة $b$ (أى تقع على الجهة اليسرى منها) على خط الأعداد، والرمز $a \le b$ يعنى إما $a < b$ أو $a = b$ وبالمثل $b \ge a$ يعنى إما $b > a$ أو $b = a$ .

لأى عدديين حقيقيين $b$ , $a$ فإن واحدة فقط مما يأتي يتحقق:

$$a < b \quad , \quad a = b \quad , \quad a > b$$

وفى ضوء ذلك فإن الأعداد الحقيقية تكون مرتبة.

والرموز $\ge$ , $\le$ , $>$ , $<$ تسمى متباينات inequalities ولأى أعداد حقيقية $d$ , $c$ , $b$ , $a$ فإن المتباينات تحقق الخواص الآتية:

1 - $a < b \quad , \quad b < c \quad \Rightarrow \quad a < c$

2 - $a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c$

3 - $a < b \quad , \quad c < d \quad \Rightarrow \quad a + c < b + d$

4 - $a < b \quad , \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad a\,c < b\,c$

5 - $a < b \quad , \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad a\,c > b\,c$

والخواص المناظرة تتحقق للمتباينات $\ge$ , $\le$ , $>$ أيضا .

## ٤ – القيمة المطلقة Absolute Value

لأى عدد حقيقى $a \ne 0$ توجد خاصتين هامتين هما إشارة العدد $a$ ومقدار العدد $a$ ، وهندسيا فإن إشارة العدد $a$ تخبرنا عن ما إذا كان النقطة $a$ تقع على يمين أو يسار نقطة الأصل $0$ على خط الأعداد، ومقدار العدد $a$ يمثل المسافة بين النقطة $a$ ونقطة الأصل $0$ ، والعدد $0$

ليس له إشارة ومقداره يساوى صفر. ومقدار العدد $a$ يسمى القيمة المطلقة للعدد $a$ ويرمز له $|a|$ ويعرف أيضا كالآتى

$$|a| = \begin{cases} a & , \quad a \geq 0 \\ -a & , \quad a < 0 \end{cases}$$

أى إن القيمة المطلقة لأى عدد حقيقى تكون دائما غير سالبة، $|a|$ يمثل المسافة بين النقطة $a$ ونقطة الأصل $0$ وبالمثل $|a - b|$ يمثل المسافة بين النقطة $a$ والنقطة $b$ .

والقيمة المطلقة تحقق الخواص الآتية لأى عددين حقيقيين $a , b$ :

(1) $|a| = 0 \iff a = 0$

(2) $|-a| = |a|$

(3) $|ab| = |a||b|$

(4) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

(5) $|a + b| \leq |a| + |b|$

(6) $\big||a| - |b|\big| \leq |a - b|$

ولأى أعداد حقيقية $x , \delta$ حيث $\delta > 0$ فإن الخواص الآتية تكون متحققة:

(1) $|x| < \delta \iff -\delta < x < \delta$

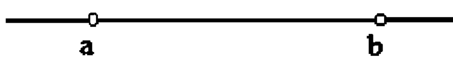
(2) $|x - c| < \delta \iff c - \delta < x < c + \delta$

(3) $0 < |x - c| < \delta \iff c - \delta < x < c \;\vee\; c < x < c + \delta$

## ٥ – الفترات Intervals

نفرض أن $a , b \in R$ بحيث أن $a < b$ . الفترة المفتوحة $(a , b)$ هى مجموعة كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين $a , b$

$$(a , b) = \{ x : a < x < b \}$$



الفترة المغلقة $[a , b]$ هى مجموعة كل الأعداد المحصورة بين $a$ , $b$ بالإضافة إلى نقطتى الأطراف $a$ , $b$

$[a , b] = \{ x : a \le x \le b \}$


وبالمثل توجد سبع أنواع أخرى من الفترات كالآتى :

$[a , b) = \{ x : a \le x < b \}$


$(a , b] = \{ x : a < x \le b \}$


$[a , \infty) = \{ x : a \le x < \infty \}$


$(a , \infty) = \{ x : a < x < \infty \}$


$(-\infty , b] = \{ x : x \le b \}$


$(-\infty , b) = \{ x : x < b \}$


$(-\infty , \infty) = R$

ورموز الفترات من السهل أن نتذكرها فنحن نستخدم الأقواس المربعة [ ] للدلالة على أن نقط الأطراف تقع ضمن الفترة بينما نستخدم الأقواس العادية ( ) عندما تكون نقط الأطراف لا تقع ضمن الفترة، وعلى خط الأعداد يتم تميز وجود أو عدم وجود نقط الأطراف بواسطة دائرة صغيرة ممتلئة ● أو فارغة O على الترتيب. الرمز $\infty$ يقرا لانهاية ووجوده فى الفترة يعنى أن الفترة ممتدة بدون حدود فى الاتجاه الموجب والرمز $-\infty$ يقرا سالب لانهاية ووجوده فى الفترة يعنى أن الفترة ممتدة بدون حدود فى الاتجاه السالب، ورموز اللانهاية $\infty$ , $-\infty$ لا تمثل أعداد حقيقية.

## ٦ – المجموعات المحدودة Bounded Sets

نفرض أن S مجموعة من الأعداد الحقيقية، إذا وجد عدد M بحيث أن $x \le M \quad \forall \quad x \in S$ فإنه يقال أن M هو حد علوى upper bound للمجموعة S وأن المجموعة S محدودة من اعلى bounded above وإذا وجد عدد m بحيث أن $m \le x \quad \forall \quad x \in S$ فإنه يقال أن m هو حد سفلى lower bound للمجموعة S وأن المجموعة S محدودة من اسفل bounded below وإذا كانت المجموعة S محدودة من اعلى ومحدودة من اسفل فإنه يقال أن المجموعة S محدودة bounded وخلاف ذلك تسمى المجموعة S غير محدودة unbounded.

ملاحظات :

١ – إذا كان M حد علوى للمجموعة S فإن أى عدد $K \ge M$ يكون أيضا حد علوى للمجموعة S أى انه يوجد عدد لا نهائى من الحدود العليا للمجموعة.

٢ – إذا كان m حد سفلى للمجموعة S فإن أى عدد $k \le m$ يكون أيضا حد سفلى للمجموعة S أى انه يوجد عدد لا نهائى من الحدود السفلى للمجموعة السفلى.

٣ – المجموعة S تكون محدودة إذا وجد $m , M \in R$ بحيث أن $m \le x \le M \quad \forall \; x \in S$ وبعبارة أخرى، المجموعة S تكون محدودة إذا وجد $K > 0$ بحيث أن $|x| \le K \quad \forall \quad x \in S$ وفى الجدول الآتى نضع بعض الأمثلة على المجموعة المحدودة :

| المجموعة | نوع المجموعة |
|---|---|
| $[2 , 5]$ | محدودة |
| $[-4 , 9)$ | محدودة |
| $(2 , 2^{20}]$ | محدودة |
| $[3 , \infty)$ | محدودة من اسفل وغير محدودة من اعلى |
| $(3 , \infty)$ | محدودة من اسفل وغير محدودة من اعلى |

| نوع المجموعة | المجموعة |
|---|---|
| محدودة من اعلى وغير محدودة من اسفل | $(-\infty, b]$ |
| محدودة من اسفل وغير محدودة من اعلى | $\{1, 2, 3, \dots\}$ |
| غير محدودة | $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$ |
| محدودة | $\{2^{-n} : n \in N\}$ |
| محدودة من اسفل وغير محدودة من اعلى | $\{2^{-n} : n \in I\}$ |

## ٧ – كثيرات الحدود Polynomials

المتغير variable هو رمز يستخدم لتمثيل عنصر اعتباطى arbitrary element فى مجموعة معطاة، وعند التعامل مع مجموعات من الأعداد الحقيقية فإنه عادة ما يستخدم الحروف الصغيرة $x, y, z, \dots$ لترمز إلى المتغيرات، وتشكيل عمليات جمع (+)، وطرح (−) وضرب (.) للمتغير x تقودنا إلى تكوين ما يسمى بكثيرة الحدود فى المتغير x ويرمز لها $P(x)$ وتعرف كالآتى:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث $(a_n \neq 0)$ $a_0, a_1, \dots, a_n$ أعداد حقيقية وتسمى معاملات coefficients كثيرة الحدود $P(x)$ والعدد $n \in N$ يسمى درجة كثيرة الحدود $P(x)$.
وفى حالة $n = 1$ فإن كثيرة الحدود $P(x) = a_1 x + a_0$ تسمى كثيرة حدود خطية linear polynomial، وفى حالة $n = 2$ فإن كثيرة الحدود $P(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ تسمى كثيرة حدود تربيعية linear polynomial. والعدد r يسمى جذر أو حل للمعادلة

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

إذا وفقط إذا كان

$$P(r) = a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

وفى هذه الحالة العدد r يسمى أيضا صفر لكثيرة الحدود $P(x)$.

وفى الجدول الآتى نضع بعض الأمثلة لكثيرات حدود ونوضح درجة كلا منها:

| كثيرة الحدود | درجة كثيرة الحدود |
|---|---|
| $P(x) = 3x - 4$ | من الدرجة الأولى ( كثيرة حدود خطية ) |
| $P(x) = 8$ | من الدرجة صفر |
| $P(x) = 5x^2 - 2x + 3$ | من الدرجة الثانية ( كثيرة حدود تربيعية ) |
| $P(x) = 4x^3 - 9x - 12$ | من الدرجة الثالثة |
| $P(x) = -x^2 + 6x^6 - 8x^5 + 2$ | من الدرجة السادسة |

## ٨ - المتباينات Inequalities

حل معادلة فى المتغير x هو أيجاد مجموعة الأعداد x التى تحقق المعادلة وبالمثل حل متباينة فى المتغير x هو أيجاد مجموعة الأعداد x التى تحقق المتباينة، وطريقة حل المتباينة يشبه طريقة حل المعادلة من حيث انه يمكن إضافة أو طرح نفس العدد من طرفى المتباينة، ويمكن ضرب أو قسمة طرفى المتباينة على عدد موجب تماما كما يحدث مع المعادلات ولكن الاختلاف الوحيد هو انه عند ضرب أو قسمة طرفى المتباينة على عدد سالب فإن المتباينة يتم عكسها فمثلا،بضرب المتباينة $-x > 4$ فى -1 تصبح المتباينة $x < -4$ وبقسمة المتباينة $-2x \le 6$ على -2 تصبح المتباينة $x \ge -3$ .

مثال ١ : أوجد حل المتباينة $x^2 - 4x + 3 < 0$ .

الحل : بتحليل المقدار $x^2 - 4x + 3$ فإن المتباينة تصبح $(x-1)(x-3) < 0$ ، وحل المتباينة يتم بإيجاد قيم x التى تحقق المتباينة، ونلاحظ أن حاصل الضرب $(x-1)(x-3)$ يساوى صفر عند النقط $x = 3$ , $x = 1$ وبوضع هذه النقط على خط الأعداد فإننا نجد أنها تقسم خط الأعداد إلى الفترات الثلاثة

$(3,\infty)$ , $(1,3)$ , $(-\infty,1)$ وعلى كل من هذه الفترات فإن حاصل الضرب $(x-1)(x-3)$ يكون له إشارة ثابتة ولتعيين هذه الإشارة نرسم خط الأعداد ونعين إشارة المقدار $(x-1)$ وإشارة المقدار $(x-3)$ وبالتالى نعين إشارة حاصل الضرب كما هو موضح بالجدول الآتى:

| $(3,\infty)$ | $(1,3)$ | $(-\infty,1)$ | |
|---|---|---|---|
| + | + | − | إشارة المقدار $(x-1)$ |
| + | − | − | إشارة المقدار $(x-3)$ |
| + | − | + | إشارة $(x-1)(x-3)$ |

وفى الجدول الآتى نضع حل المتباينة $x^2-4x+3>0$ بصورها المختلفة

| مجموعة حل المتباينة | المتباينة |
|---|---|
| $(1,3)$ | $x^2-4x+3>0$ |
| $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$ | $x^2-4x+3<0$ |
| $[1,3]$ | $x^2-4x+3\geq 0$ |
| $(-\infty,1]\cup[3,\infty)$ | $x^2-4x+3\leq 0$ |

مثال ٢:أوجد حل المتباينة $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2>0$ .

الحل : حل المتباينة يتم بإيجاد قيم $x$ التى تحقق أن حاصل الضرب $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2$ يكون موجب. نلاحظ أن حاصل الضرب يساوى صفر عند النقط $x=4$ , $x=1$ , $x=-3$ وبوضع هذه النقط على خط الأعداد فإننا نجد أنها تقسم خط الأعداد إلى الفترات الأربعة $(4,\infty)$ , $(1,4)$ , $(-3,1)$ , $(-\infty,-3)$ وعلى كل من هذه

الفترات فإن حاصل الضرب يكون له إشارة ثابتة وتعيين هـــذه الإشـــارة موضـــح بالجدول الآتي

| | $(4,\infty)$ | $(1,4)$ | $(-3,1)$ | $(-\infty,-3)$ |
|---|---|---|---|---|
| إشارة المقدار $(x+3)^5$ | + | + | + | − |
| إشارة المقدار $(x-1)$ | + | + | − | − |
| إشارة المقدار $(x-4)^2$ | + | + | + | + |
| إشارة $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2$ | + | + | − | + |

إذن حاصل الضرب يكون موجب على الفترات $(4,\infty)$ , $(1,4)$ , $(-\infty,-3)$ إى إن مجموعة حل المتباينة يكون $(-\infty,-3)\cup(1,4)\cup(4,\infty)$ . وفى الجدول الآتـــى نضع حل المتباينة بصورها المختلفة

| مجموعة الحل | المتباينة |
|---|---|
| $(-\infty,-3)\cup(1,4)\cup(4,\infty)$ | $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2 > 0$ |
| $(-3,1)$ | $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2 < 0$ |
| $(-\infty,-3]\cup[1,4]\cup[4,\infty)$ | $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2 \geq 0$ |
| $[-3,1]$ | $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2 \leq 0$ |

عند حل متباينات تحتوى على خارج قسمة فإننا نستخدم الحقيقة الآتية :

$$\frac{a}{b} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab > 0 \quad , \quad \frac{a}{b} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad ab < 0$$

مثال ٣ : أوجد حل المتباينة $\dfrac{(x+3)^5(x-1)}{(x-4)^2} > 0$ .

الحل : المتباينة المعطاة لها نفس الحل مثل المتباينة $(x+3)^5(x-1)(x-4)^2 > 0$
وهذه المتباينة تم حلها فى المثال السابق (انظر مثال ٢).

مثال ٤ : أوجد حل المتباينة $\frac{x+2}{1-x} < 1$ .

الحل : إشارة المقدار $(1-x)$ غير معلومة لذلك لا يمكن ضرب المتباينة فى $(1-x)$
ولكن بطرح 1 من المتباينة نحصل على

$$\frac{x+2}{1-x} - 1 < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x+2-(1-x)}{1-x} < 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2x+1}{1-x} < 0 \quad \Rightarrow \quad (2x+1)(1-x) < 0$$

$$\Rightarrow \quad (2x+1)(x-1) > 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1) > 0$$

نلاحظ أن حاصل الضرب $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$ يساوى صفر عند النقط $x=1$ , $x=-\frac{1}{2}$ وبوضع هذه النقط على خط الأعداد فإننا نجد أنها تقسم خط الأعداد إلى الفترات الثلاث $(1,\infty)$ , $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ , $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ وعلى كل من هذه الفترات فإن حاصل الضرب يكون له إشارة ثابتة، وتعيين هذه الإشارة موضح بالجدول الآتي:

| | $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ | $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ | $(1,\infty)$ |
|---|---|---|---|
| إشارة المقدار $\left(x+\frac{1}{2}\right)$ | − | + | + |
| إشارة المقدار $(x-1)$ | − | − | + |
| إشارة $\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)$ | + | − | + |

أذن مجموعة حل المتباينة يكون $\left(1,\infty\right) \cup \left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$ .

مثال ٥ : أوجد مجموعة حل المتباينة $|x+2|<3$

الحل : باستخدام خواص المتباينات

$$\begin{aligned} |x+2|<3 \quad &\Leftrightarrow \quad -3<x+2<3 \\ &\Leftrightarrow \quad -3-2<x<3-2 \\ &\Leftrightarrow \quad -5<x<1 \end{aligned}$$

أذن مجموعة حل المتباينة هي الفترة المفتوحة $(-5,1)$.

# تمارين ملحق ب

١ – أرسم كل من المجموعات الآتية على خط الأعداد

(1) $[5,\infty)$

(2) $(1,5]\cup(5,9)$

(3) $[-3,6)\cap(4,7)$

(4) $(1,5]\cup[5,9]$

(5) $(-\infty,6)$

(6) $[-1,4]\cup(2,8]$

(7) $[-3,\infty)\cap(4,\infty)$

(8) $(-\infty,-1)\cap[-2,\infty)$

٢ – فى كل من المجموعات الآتية عين ما إذا كانت المجموعة المعطاة محدودة من اسفل – محدودة من اعلى – محدودة، وإذا كانت المجموعة المعطاة محدودة من اسفل أعطى حد سفلى للمجموعة، وإذا كانت المجموعة المعطاة محدودة من اعلى أعطى حد علوى للمجموعة، وإذا كانت المجموعة المعطاة محدودة أعطى حد سفلى وحد علوى للمجموعة.

(1) $\{-1,0,3,7,7.1\}$

(2) $\{2,4,6,8,\dots\}$

(3) $S=\{x \mid x\le 5\}$

(4) $S=\left\{\dfrac{(-1)^n}{2^n} \;\middle|\; n\in N\right\}$

(5) $[-3,6)\cap(4,7)$

(6) $(1,5]\cup(5,9)$

(7) $\{0,-1,-2,-3,\dots\}$

(8) $\left\{\dfrac{1}{n} \;\middle|\; n\in N\right\}$

(9) $S=\left\{\dfrac{n-1}{n} \;\middle|\; n\in N\right\}$

(10) $S=\{x \mid x\in Q\ ,\ x<\sqrt{2}\}$

(11) $[-3,\infty)\cap(4,\infty)$

(12) $(-\infty,-1)\cap[-2,\infty)$

٣ - أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات الآتية :

(1) $16x + 64 > 32$

(2) $6x^2 + 2x \leq (x-1)^2$

(3) $x^3 - 2x^2 + x \leq 0$

(4) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{4}{x-6} \geq 0$

(5) $|3x - 5| > 3$

(6) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2} < 0$

(7) $\dfrac{x^2 - 9}{x+1} > 0$

(8) $|3x + 1| \leq 5$

(9) $\dfrac{x}{x-5} > \dfrac{1}{4}$

(10) $0 < |x - 3| \leq 8$

# المراجع

1- Breuer , Joseph . : Introduction to the theory of Sets, Prentice – Hall , NJ. 1958.

2- Fraenkel , Abraham : Set theory and Logic , Addison – Wesley , 1966 .

3- Lipschurtz , Seymour : Theory and Problems of Sets , Schaum's outline Series , McGraw – Hill , New York , 1964.

4- Lipschurtz , Seymour : Set Theory and Related Topics , Schaum's outline Series . McGraw – Hill , New York , 1964.

5- Spiegel , M . : Set Theory , Schaum's outline Series , McGraw – Hill , New York , 1975.

6- i , J . : Elements of Mathematical Logic and Set Theory , Oxford P. 1967 .

7- William M . Setek, Jr. : Fundamentals of Mathematics , Prentice – Hall , 1996.