الفصل

3

التقارير المتكافئة

Equivalent Statements

١ – التكافؤ Equivalence

من دراستنا لجداول الحقيقة فى الفصل الثانى لاحظنا أن التركيبات الممكنة فى جدول الحقيقة لبعض التقارير المركبة يمكن أن تأخذ جميعها القيمة صواب T ، وكذلك لبعض التقارير المركبة، يمكن أن تأخذ جميعها القيمة خطأ F ، والتعاريف الآتية تميز بين مثل هذه الأنواع من التقارير.

تعريف ١ : يقال عن تقرير مركب انه صائب منطقيا (تحصيل حاصل أو حشو tautology) إذا كانت جميع قيم الحقيقة له صائبة، ويقال أنه خاطئ منطقيا (تناقض أو تعارض contradiction) إذا كانت جميع قيم الحقيقة له خاطئة.

والتقارير المركبة لا تنقسم إلى هذين النوعين فقط وإنما هناك تقارير ليست صائبة منطقيا وكذلك ليست خاطئة منطقيا وفى هذه الحالة فإن التركيبات الممكنة فى جدول الحقيقة تحتوى على القيمة صواب T والقيمة خطأ F.

ملاحظة :

إذا كان التقرير المركب A تقرير صائب منطقيا فإن A ~ يكون خاطئ منطقيا

وإذا كان التقرير المركب A تقرير خاطئ منطقيا فإن A ~ يكون صائب منطقيا.

مثال ١ : صنف التقارير الآتية من حيث كونها صائبة منطقيا أو خاطئة منطقيا

$$p \vee \sim p \quad , \quad p \wedge \sim p \quad , \quad \sim\sim p$$

الحل : بتكوين جدول الحقيقة للتقارير المعطاة

p	$\sim p$	$\sim\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \wedge \sim p$
T	F	T	T	F
F	T	F	T	F

يتضح لنا من الجدول أن

- قيم الحقيقة التى يأخذها التقرير $p \vee \sim p$ جميعها صائبة T وبالتالى فإن التقرير $p \vee \sim p$ صائب منطقيا.
- قيم الحقيقة التى يأخذها التقرير $p \wedge \sim p$ جميعها خاطئة F وبالتالى فإن التقرير $p \wedge \sim p$ خاطئ منطقيا.
- قيم الحقيقة التى يأخذها التقرير $\sim\sim p$ تحتوى على القيمة صواب T والقيمة خطأ F وبالتالى فإن التقرير $\sim\sim p$ ليس صائب منطقيا وكذلك ليس خاطئ منطقيا.

مثال ٢ : أثبت أن التقرير $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ صائب منطقيا.

الحل : جدول الحقيقة للتقرير يكون كالآتى:

p	q	$p \wedge q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	F	F	T
F	F	F	T	T

نلاحظ أن قيم الحقيقة التى يأخذها التقرير $(p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ جميعها صائبة T وبالتالى فإن التقرير يكون صائب منطقيا.

مثال ٣ : أثبت أن التقرير $p \wedge \sim (p \vee q)$ خاطئ منطقيا.

الحل : جدول الحقيقة للتقرير يكون كالآتى :

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$p \wedge \sim(p \vee q)$
T	T	T	F	F
T	F	T	F	F
F	T	T	F	F
F	F	F	T	F

نلاحظ من الجدول أن قيم الحقيقة التى يأخذها التقرير $p \wedge \sim (p \vee q)$ جميعها خاطئة F وبالتالى فإن التقرير يكون خاطئ منطقيا .

تعريف ٢ : يقال أن التقرير A يؤدى إلى التقرير B (وبمعنى آخر التقرير A تضمنا منطقيا للتقرير B) ونرمز لذلك بالرمز $A \Rightarrow B$ إذا كان التقرير $A \rightarrow B$ صائب منطقيا.

مثال ٤ : أثبت أن $p \Rightarrow p \vee \sim p$

الحل : بتكوين جدول الحقيقة للتقرير $p \rightarrow p \vee \sim p$

p	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$p \rightarrow p \vee \sim p$
T	F	T	T
F	T	T	T

نلاحظ من الجدول أن التقرير $p \rightarrow p \vee \sim p$ صائب منطقيا .

وبالتالى من تعريف (٢) ينتج أن

$$p \Rightarrow p \vee \sim p$$

مثال ٥ : مهما يكن التقريران q , p أثبت أن

1 - $p \Rightarrow p \vee q$ 3 - $p \wedge q \Rightarrow q$

2 - $p \wedge q \Rightarrow p$ 4 - $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

الحل : بتكوين جدول الحقيقة للتقارير

$$p \rightarrow p \vee q \ , \ p \wedge q \rightarrow p \ , \ p \wedge q \rightarrow q \ , \ p \wedge q \rightarrow p \vee q$$

p	q	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \vee q$	$p \wedge q \rightarrow p$	$p \wedge q \rightarrow q$	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T

نلاحظ من الجدول أن جميعها صائب منطقيا وبالتالى ينتج المطلوب.

ملاحظات

(١) – إذا كان $A \Rightarrow B$ فإنه بالنظر الى جدول الحقيقة للتقرير $A \rightarrow B$ نلاحظ الآتى:

ا – كلما كان التقرير A صائبا فإن التقرير B يكون صائبا أيضا .

ب – كلما كان التقرير B خاطئا فإن التقرير A يكون خاطئا أيضا .

ونعبر أحيانا عن الفقرتين (ا)، (ب) بالقول:

إذا كانت المقدمة A صائبة ، فإن النتيجة B صائبة أيضا ،

وإذا كانت النتيجة B خاطئة ، فإن المقدمة A خاطئة أيضا .

(٢) – $A \Rightarrow B$ ليس له جدول حقيقة، لأن الرمز $\Rightarrow$ لا يمثل أداة ربط بين التقريرين A , B وإنما $A \Rightarrow B$ يعنى أن التقرير $A \rightarrow B$ صائب منطقيا.

(٣) – إذا كان $A \Rightarrow B$ فإننا نعبر عن ذلك بقولنا أن " A شرط كافى لـ B " وهذا يعنى أنه إذا كان التقرير A صائبا، فإنه يكفى ليكون التقرير B صائبا أيضا.

مثال ٦ : أثبت بطريقتين مختلفتين أن $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$.

الحل : <u>الطريقة الأولى</u> : نعلم أنه عندما يكون التقرير $x = 2$ صائبا فإنه يؤدى بالضرورة إلى أن التقرير $x^2 = 4$ صائب، وانه لا يمكن أن يكون $x = 2$ بينما $x^2 \neq 4$ ، وبالتالى فإن $x = 2 \rightarrow x^2 = 4$ تقرير صائب، أى إن $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ متحقق.

<u>الطريقة الثانية</u> : نعلم أنه عندما يكون التقرير $x^2 = 4$ خاطئا، أى عندما يكون $x^2 \neq 4$ ، فإن التقرير $x = 2$ يكون خاطئا، أى إن $x \neq 2$ ، وبالتالى فإن $x = 2 \rightarrow x^2 = 4$ تقرير صائب، أى إن $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$ متحقق.

تعريف ٣ : يقال أن التقرير A يؤدى إلى التقرير B ، وأن التقرير B يؤدى إلى التقرير A ونرمز لذلك بالرمز $A \Leftrightarrow B$ ، إذا كان التقرير $A \leftrightarrow B$ صائب منطقيا.

$A \Leftrightarrow B$ ليس له جدول حقيقة لأن الرمز $\Leftrightarrow$ لا يمثل أداة ربط بين التقريرين A , B وإنما $A \Leftrightarrow B$ يعنى أن التقرير $A \leftrightarrow B$ صائب منطقيا، ونعبر أحيانا عن الرمز $\Leftrightarrow$ بقولنا

"الشرط اللازم والكافى" كما انه يعنى أيضا كلمة يكافئ.

تعريف ٤ : يقال عن تقريرين A , B إنهما متكافئان منطقيا أو اختصارا، متكافئان إذا كان لكل منهما نفس قيم الحقيقة بالجدول ويرمز لذلك $A \equiv B$ (ويقرأ A يكافئ B).

وأحيانا يستخدم الرمز $\Leftrightarrow$ بدلا من الرمز $\equiv$ للدلالة على تكافؤ تقريرين وبالتالى فإنه يمكن إثبات التكافؤ بين تقريرين A , B عن طريق تكوين جدول الحقيقة لكل من التقريرين وملاحظة التطابق بين قيم الحقيقة للتقريرين أو عن طريق إثبات أن $A \Leftrightarrow B$ أى إثبات أن التقرير $A \leftrightarrow B$ صائب منطقيا.

مثال ٧ : جدول الحقيقة التالى يثبت أن التقريرين $\sim p \vee q$, $p \to q$ متكافئان منطقيا

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T
			↑	↑

حيث نلاحظ أن قيم الحقيقة فى العمود الرابع المناظر للتقرير $p \to q$ هى نفسها قيم الحقيقة فى العمود الخامس المناظر للتقرير $\sim p \vee q$ أى إن $p \to q \equiv \sim p \vee q$.

ويمكن إثبات التكافؤ بين التقريرين عن طريق إثبات أن

$$p \to q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

أى إثبات أن التقرير $p \to q \leftrightarrow \sim p \vee q$ صائب منطقيا وهذا يتضح من الجدول الآتى:

p	q	$\sim p$	$p \to q$	$\sim p \vee q$	$p \to q \leftrightarrow \sim p \vee q$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

مثال ٨ : جدول الحقيقة التالى يثبت أن التقريرين $p \wedge \sim q$, $\sim(p \to q)$ متكافئان منطقيا.

p	q	$\sim q$	$\sim(p \to q)$	$p \wedge \sim q$
T	T	F	F	F
T	F	T	T	T
F	T	F	F	F
F	F	T	F	F

أى إن $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$

٢ – قانون ديمورجان De Morgan's law

عندما يكون لدينا تقرير مركب ما فإنه يمكن فى بعض الأحيان أن نستنتج تقرير آخر يكافئه ويتم ذلك بواسطة قاعدة تسمى قانون ديمورجان وللتعرف على هذه القاعدة نفرض التقريران

p : الجو بارد

q : السماء تمطر

أذن التقرير المركب "الجو ليس بارد والسماء لا تمطر" يمكن كتابته فى الصورة الرمزية

$\sim p \wedge \sim q$

والآن نفرض التقرير "من الخطأ القول أن الجو بارد أو السماء تمطر" و يمكن كتابته فى الصورة الرمزية $\sim(p \vee q)$ وبتكوين جدول الحقيقة للتقريرين $\sim p \wedge \sim q$, $\sim(p \vee q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

أذن $\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

وبالمثل يمكن إثبات أن $\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$

والآن وبوجه عام إذا كان لدينا تقرير مركب بشرط أن يكون

- من نوع الوصلة أو الفاصلة

أو

- من نوع النفى لوصلة أو النفى لفاصلة

فإنه بواسطة قانون ديمورجان يمكن إيجاد تقرير مكافئ ويتم ذلك وفقا للخطـــوات الثـلاث الآتية:

الخطوة الأولى : نفى التقرير المعطى بالكامل .

الخطوة الثانية : نفى التقارير المكونة لجزئي الوصل أو الفصل .

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الوصل $\wedge$ إلى أداة الفصل $\vee$.
أو تغيير أداة الفصل $\vee$ إلى أداة الوصل $\wedge$.

مثال ٩ : استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير يكافئ التقرير $p \wedge q$

الحل : التقرير المعطى من نوع الوصلة

الخطوة الأولى : نفى التقرير المعطى بالكامل فنحصل على $\sim(p \wedge q)$

الخطوة الثانية : نفى التقارير المكونة لجزئي الوصل فنحصل على $\sim(\sim p \wedge \sim q)$

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الوصل $\wedge$ إلى أداة الفصل $\vee$ فنحصل على $\sim(\sim p \vee \sim q)$

أذن $p \wedge q \equiv \sim(\sim p \vee \sim q)$

مثال ١٠ : استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير يكافئ التقرير $\sim(\sim p \vee q)$

الحل : التقرير المعطى من نوع النفى لفاصلة

الخطوة الأولى : نفى التقرير المعطى بالكامل فنحصل على $\sim\sim(\sim p \vee q)$

وحيث أن $\sim\sim A \equiv A$ فإن الناتج يمثل $\sim p \vee q$

الخطوة الثانية : نفى التقارير المكونة لجزئي الفاصلة فنحصل على $\sim\sim p \vee \sim q$

وحيث أن $\sim\sim A \equiv A$ فإن الناتج يمثل $p \vee \sim q$

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الفصل $\vee$ إلى أداة الوصل $\wedge$ فنحصل على $p \wedge \sim q$

أذن $\sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$

مثال ١١ : استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير يكافئ التقرير
$\sim(p \vee (q \rightarrow r))$

الحل : التقرير المعطى من نوع النفى لفاصلة

الخطوة الأولى : نفى التقرير المعطى بالكامل فنحصل على

$$\sim\sim(p \vee (q \rightarrow r))$$

وحيث أن $\sim\sim A \equiv A$ فإن الناتج يمثل $p \vee (q \rightarrow r)$

الخطوة الثانية : نفى التقارير المكونة لجزئي الفاصلة فنحصل على $\sim p \vee \sim (q \to r)$

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الفصل $\vee$ إلى أداة الوصل $\wedge$ فنحصل على

$$\sim p \wedge \sim (q \to r)$$

أذن $\sim (p \vee (q \to r)) \equiv \sim p \wedge \sim (q \to r)$

وحيث أن $\sim (q \to r) \equiv q \wedge \sim r$ أذن

$$\sim (p \vee (q \to r)) \equiv \sim p \wedge (q \wedge \sim r)$$

مثال ١٢ : استخدم قانون ديمورجان لكتابة تقرير يكافئ التقرير

" ليس صحيحا أن الجو بارد والسماء غير مشرقة "

الحل : نفرض أن p : الجو بارد

q : السماء مشرقة

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة $\sim (p \wedge \sim q)$ وهو من نوع النفى لواصلة وبتطبيق قانون ديمورجان لإيجاد تقرير مكافئ

الخطوة الأولى : نفى التقرير المعطى بالكامل فنحصل على $\sim \sim (p \wedge \sim q)$

وحيث أن $\sim \sim A \equiv A$ فإن الناتج يمثل $p \wedge \sim q$

الخطوة الثانية : نفى التقارير المكونة لجزئي الواصلة فنحصل على $\sim p \wedge \sim \sim q$

وحيث أن $\sim \sim A \equiv A$ فإن الناتج يمثل $\sim p \wedge q$

الخطوة الثالثة : تغيير أداة الوصل $\wedge$ إلى أداة الفصل $\vee$ فنحصل على $\sim p \vee q$

أذن $\sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$.

أذن التقرير المعطى " ليس صحيحا أن الجو بارد والسماء غير مشرقة "

يمكن كتابته فى الصورة المكافئة " الجو ليس بارد أو السماء مشرقة "

من الأمثلة المشهورة لقانون ديمورجان

$$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$$
$$\sim(p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$$

مثال ١٣ : استخدم قانون ديمورجان لإثبات أن $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

الحل : حيث أن $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ أذن بتطبيق قانون ديمورجان

$$\begin{aligned} \sim(p \rightarrow q) &\equiv \sim(\sim p \vee q) \\ &\equiv \sim\sim p \wedge \sim q \\ &\equiv p \wedge \sim q \end{aligned}$$

مثال ١٤ : استخدم التكافؤ

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

فى إعادة صياغة كل من التقارير الآتية :

١ – إذا كان اليوم هو الثلاثاء فإن غدا يكون الأربعاء .

٢ – إذا لم تسلك سلوكا حسنا فإننى سوف أعاقبك .

الحل :

١ – نفرض أن p : اليوم هو الثلاثاء

q : غدا يكون الأربعاء

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة $p \rightarrow q$ وهو من نوع الشرطية، وحيث أن

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

أذن التقرير المعطى

" إذا كان اليوم هو الثلاثاء فإن غدا يكون الأربعاء "

يمكن كتابته فى الصورة المكافئة

" اليوم ليس الثلاثاء أو غدا يكون الأربعاء "

٢ - نفرض أن p : اسلك سلوكا حسنا

q : سوف أعاقبك

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة $\sim p \rightarrow q$ وهو من نوع الشرطية، وحيث أن

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

أذن

$$\sim p \rightarrow q \equiv \sim\sim p \vee q \equiv p \vee q$$

أذن التقرير المعطى

" إذا لم تسلك سلوكا حسنا فإننى سوف أعاقبك"

يمكن كتابته فى الصورة المكافئة

" اسلك سلوكا حسنا أو سأعاقبك"

مثال ١٥ : بسـط كل من العبارات الآتية :

١ - ليس صحيحا أن الورد احمر تعنى أن البنفسج أزرق .

٢ - ليس من الحقيقى انه إذا كانت السماء لا تمطر فإن الشمس تكون مشرقة .

الحل :

١ - نفرض أن p : الورد احمر

q : البنفسج أزرق

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة $\sim(p \rightarrow q)$ وحيث أن

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

أذن التقرير المعطى

" ليس صحيحا أن الورد احمر تعنى أن البنفسج أزرق "

يمكن كتابته فى الصورة البسيطة

" الورد احمر والبنفسج ليس أزرق "

٢ – نفرض أن p : السماء تمطر

q : الشمس مشرقة

أذن التقرير المعطى يكون على الصورة $\sim(\sim p \to q)$ وحيث أن

$$\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$$

أذن

$$\sim(\sim p \to q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

أذن التقرير المعطى

" ليس من الحقيقى انه إذا كانت السماء لا تمطر فإن الشمس تكون مشرقة "

يمكن كتابته فى الصورة البسيطة

"السماء لا تمطر والشمس ليست مشرقة"

فى الجدول الآتى نعرض قائمة من التقارير المتكافئة منطقيا، تسمى جبر التقارير، ويمكن التحقق من صحتها باستخدام جداول الحقيقة.

القانون	التقارير المتكافئة منطقيا
قوانين اللاغو **Idempotent Laws**	$p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
قوانين الإبدال **Commutative Laws**	$p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$

التقارير المتكافئة منطقيا	القانون
$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$ $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$	قوانين الدمج **Associative Laws**
$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	قوانين التوزيع **Distributive Laws**
$p \vee f \equiv p \quad , \quad p \wedge t \equiv p$ $p \vee t \equiv t \quad , \quad p \wedge f \equiv f$ حيث t ترمز إلى تقرير صائب منطقيا بينما f ترمز إلى تقرير خاطئ منطقيا	قوانين الوحدة **Identity Laws**
$p \vee \sim p \equiv t \quad , \quad p \wedge \sim p \equiv f$ $\sim t \equiv f \quad , \quad \sim f \equiv t$ $\sim \sim p \equiv p$	قوانين المكملة **Complement Laws**
$\sim (p \vee q) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$ $\sim (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee \sim q)$	قوانين ديمورجان **De Morgan's Laws**

وباستخدام قوانين جبر التقارير الواردة فى الجدول السابق يمكن تبسيط التقارير وكذلك إثبات تكافؤها دون الرجوع الى جداول الحقيقة كما هو موضح بالأمثلة الآتية :

مثال ١٦ : استخدم قوانين جبر التقارير فى تبسيط كل من التقارير الآتية :

1 - $(p \vee q) \wedge \sim p$

2 - $p \vee (p \wedge q)$

3 - $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$

الحل :

قانون الإبدال	1 - $(p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge (p \vee q)$
قانون التوزيع	$\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge q)$
قانون المكملة	$\equiv f \vee (\sim p \wedge q)$
قانون الوحدة	$\equiv \sim p \wedge q$

أذن

$$(p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge q$$

قانون الوحدة	2 - $p \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge t) \vee (p \wedge q)$
قانون التوزيع	$\equiv p \wedge (t \vee q)$
قانون الوحدة	$\equiv p \wedge t$
قانون الوحدة	$\equiv p$

أذن

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

قانون ديمورجان	3 - $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$
قانون التوزيع	$\equiv \sim p \wedge (\sim q \vee q)$
قانون المكملة	$\equiv \sim p \wedge t$
قانون الوحدة	$\equiv \sim p$

أذن

$$\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$$

٣ – تقارير شرطية أخرى More Conditional Statements

فى دراستنا للرياضيات كثيرا ما يقابلنا قواعد و نظريات موضوعة فى صورة تقارير شرطية، فمثلا النظرية.

" إذا تساوى ضلعان فى مثلث فإن الزوايا المقابلة لهذه الأضلاع تتساوى "

موضوعة فى صورة شرطية، وسوف نناقش الآن وبالتفصيل التقارير الشرطية بصورها المختلفة: نفرض أننا أعطينا تقريرين p , q والسؤال الآن

"ما هى التقارير الشرطية التى يمكن تكوينها باستخدام التقارير $\sim q$, $\sim p$, q , p ؟"

والقائمة الآتية تحتوى على التقارير الشرطية الممكنة وأسماءها

التقرير الشرطى		$p \to q$
عكس التقرير الشرطى	Converse	$q \to p$
مقلوب التقرير الشرطى	Inverse	$\sim p \to \sim q$
مضاد التقرير الشرطى	Contrapositive	$\sim q \to \sim p$

تعريف ٥ : عكس التقرير الشرطى Converse

عكس التقرير الشرطى $p \to q$ هو التقرير الشرطى $q \to p$

ويجب ملاحظة أن نفى التقرير شيء وعكسه شيء آخر.

مثال ١٧ : فى الجدول الآتى نوضح بعض التقارير الشرطية وعكس كل منها وكذلك نوضح قيم الحقيقة للتقرير وعكسه .

التقرير الشرطى		عكس التقرير الشرطى	
$p \rightarrow q$	قيمة الحقيقة	$q \rightarrow p$	قيمة الحقيقة
إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الساقين .	صواب T	إذا كان المثلث متساوى الساقين فإنه يكون متساوى الأضلاع .	خطأ F
إذا تساوى ضلعان فى مثلث فإن الزوايا المقابلة لهذه الأضلاع تتساوى.	صواب T	إذا تساوت زاويتان فى مثلث فإن الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا تتساوى.	صواب T
إذا كان 5 عدد فردى فإن 5+5 يكون عدد فردى أيضا .	خطأ F	إذا كان 5 + 5 عدد فردى فإن 5 يكون عدد فردى أيضا.	صواب T

من هذا المثال نلاحظ الحقيقة الآتية :

صحة التقرير الشرطى لا تؤدى بالضرورة الى صحة عكسه، فالتقرير الشرطى قد يكون صواب ورغم ذلك فإن عكسه يكون أما صواب وأما خطأ بينما إذا كان التقرير الشرطى خطأ فإن عكسه لابد أن يكون صواب.

وفى الجدول الآتى نوضح قيم الحقيقة للتقرير $p \rightarrow q$ وعكسه

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	T	F
F	F	T	T

ونلاحظ من الجدول أن التقرير $q \rightarrow p$ لا يكافئ التقرير $p \rightarrow q$ ، أى إن التقريـر لا يكافئ عكسه.

تعريف ٦ : مقلوب التقرير الشرطى **Inverse**

مقلوب التقرير الشرطى $p \rightarrow q$ هو التقرير الشرطى $\sim p \rightarrow \sim q$

مثال ١٨ : فى الجدول الآتى نوضح بعض التقارير الشرطية و مقلوب كل منها وكذلك نوضح قيم الحقيقة للتقرير و مقلوبه.

التقرير الشرطى		مقلوب التقرير الشرطى	
$p \rightarrow q$	قيمة الحقيقة	$\sim p \rightarrow \sim q$	قيمة الحقيقة
إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا .	صواب T	إذا كان المثلث غير متساوى الأضلاع فإنه يكون غير متساوى الزوايا .	صواب T
إذا كان 3 عدد زوجي فإن 3+3 يكون عدد زوجي .	صواب T	إذا كان 3 عدد ليس زوجي فإن 3+3 يكون عدد ليس زوجي أيضا .	خطأ F
إذا كان 5 عدد فردى فإن 5+5 يكون عدد فردى .	خطأ F	إذا كان 5 عدد ليس فردى فإن 5+5 يكون عدد ليس فردى أيضا .	صواب T

والجدول الآتى نوضح فيه قيم الحقيقة للتقرير $p \rightarrow q$ ومقلوبه

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$\sim p \to \sim q$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T

ونلاحظ من الجدول أن التقرير $p \to q$ لا يكافئ التقرير $\sim p \to \sim q$ ، أى إن التقرير لا يكافئ مقلوبه .

تعريف ٧ : مضاد التقرير الشرطى $p \to q$

مضاد التقرير الشرطى $p \to q$ هو التقرير الشرطى $\sim q \to \sim p$

أى إن مضاد التقرير الشرطى هو مقلوب عكس التقرير.

مثال ١٩ : فى الجدول الآتى نوضح بعض التقارير الشرطية و مضاد كل منها وكذلك نوضح قيم الحقيقة للتقرير ومضاده.

التقرير الشرطى		مضاد التقرير الشرطى	
$p \to q$	قيمة الحقيقة	$\sim q \to \sim p$	قيمة الحقيقة
إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الساقين .	صواب T	إذا كان المثلث غير متساوى الساقين فإنه يكون غير متساوى الأضلاع .	صواب T
إذا كان 3 عدد زوجى فإن 3+3 يكون عدد زوجى .	صواب T	إذا كان 3+3 عدد ليس زوجى فإن 3 يكون عدد ليس زوجى أيضا.	صواب T
إذا كان 5 عدد فردى فإن 5+5 يكون عدد فردى .	خطأ F	إذا كان 5+5 عدد ليس فردى فإن 5 يكون عدد ليس فردى.	صواب F

والجدول الآتى نوضح فيه قيم الحقيقة للتقرير $p \rightarrow q$ ومضاده

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ونلاحظ من الجدول أن

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

أى إن التقرير يكافئ مضاده، وبالتالى فإنه يمكن إثبات صحة تقرير ما عن طريق إثبات صحة مضاده ، وهذه طريقة معروفة للبرهان تسمى بالبرهان الغير مباشر، وسوف نتناول بالتفصيل طرق البرهان فى الفصل السادس.

وفى الجدول الآتى نضع قيم الحقيقة للتقارير

$$p \rightarrow q \quad , \quad q \rightarrow p \quad , \quad \sim p \rightarrow \sim q$$
$$\sim q \rightarrow \sim p \quad , \quad \sim(p \rightarrow q)$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$\sim p \rightarrow \sim q$	$\sim q \rightarrow \sim p$	$\sim(p \rightarrow q)$
T	T	F	F	T	T	T	T	F
T	F	F	T	F	T	T	F	T
F	T	T	F	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T	T	F

من الجدول نلاحظ ما يأتي :

١ - $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

٢ - $q \to p \equiv \sim p \to \sim q$

٣ - نفى التقرير يختلف تماما عن عكس التقرير أو مقلوب التقرير أو مضاد التقرير.

مثال ٢٠ : نظرية فيثاغورث تنص على الآتى:

"فى المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طــولى الضلعــين الآخرين."

١ - اكتب عكس نظرية فيثاغورث .

٢ - اكتب مقلوب نظرية فيثاغورث .

٣ - اكتب مضاد نظرية فيثاغورث .

الحل : يمكن صياغة نظرية فيثاغورث على صورة الشرطية :

"إذا كان المثلث قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر يساوى مجمـــوع مربعــى طــولى الضلعين الآخرين."

نفرض التقرير

p : المثلث قائم الزاوية

q : مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين

أذن نظرية فيثاغورث تكون على الصورة الرمزية $p \to q$.

<u>١ - عكس نظرية فيثاغورث</u>

حيث أن عكس التقرير الشرطى $p \to q$ هو التقرير $q \to p$ ، أذن عكس نظرية فيثاغورث يكون

"إذا كان مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين فـــإن المثلث يكون قائم الزاوية."

٢ - مقلوب نظرية فيثاغورث

حيث أن مقلوب التقرير الشرطى $p \rightarrow q$ هو التقرير $\sim p \rightarrow \sim q$ ، أذن مقلوب نظرية فيثاغورث يكون

"إذا كان المثلث غير قائم الزاوية فإن مربع طول الوتر لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين."

٣ - مضاد نظرية فيثاغورث

حيث أن مضاد التقرير الشرطى $p \rightarrow q$ هو التقرير $\sim q \rightarrow \sim p$ ، أذن مضاد نظرية فيثاغورث يكون

"إذا كان مربع طول الوتر فى مثلث لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين فإن المثلث لا يكونقائم الزاوية."

مثال ٢١ : اكتب عكس ومقلوب ومضاد التقرير الآتى:

" x عددا زوجيا شرط كافى لكى يكون x^2 عددا زوجيا."

الحل :

التقرير يمكن كتابته فى الصورة

"إذا كان x عددا زوجيا فإن x^2 عددا زوجيا."

نفرض التقارير

p : x عددا زوجيا

q : x^2 عددا زوجيا

أذن التقرير يمكن كتابته على الصورة الرمزية $p \rightarrow q$

عكس التقرير

حيث أن عكس التقرير الشرطى $p \to q$ هو التقرير $q \to p$، أذن عكس التقرير يكون

"إذا كان x^2 عددا زوجيا فإن x عددا زوجيا."

مقلوب التقرير

حيث أن مقلوب التقرير الشرطى $p \to q$ هو التقرير $\sim p \to \sim q$ ، أذن مقلوب التقرير يكون

"إذا كان x عددا غير زوجيا فإن x^2 عددا غير زوجيا."

مضاد التقرير

حيث أن مضاد التقرير الشرطى $p \to q$ هو التقرير $\sim q \to \sim p$ ، أذن مضاد التقرير يكون

" إذا كان x^2 عددا غير زوجيا فإن x عددا غير زوجيا."

٤ – جبر الافتراضات

نعلم أن الافتراض يرمز له $P(p, q, \ldots)$ وهو كثيرة حدود بولية فى المتغيرات $p, q, \ldots$ وهذه المتغيرات تمثل تقارير غير محددة وبعبارة أخرى فإن الافتراض يمثل تقرير مركب ولذلك فإنه يمكننا إعادة صياغة التعاريف السابقة من هذا الفصل على الافتراض $P(p, q, \ldots)$.

تعريف ٨ : الافتراض $P(p, q, \ldots)$ يقال أنه صائب منطقيا (تحصيل حاصل أو حشو tautology) إذا كان $P(p_0, q_0, \ldots)$ له قيمة الحقيقة صواب ويقال أنه خاطئ منطقيا (تناقض أو تعارض contradiction) إذا كان $P(p_0, q_0, \ldots)$ له قيمة الحقيقة خطأ لأى تقارير $p_0, q_0, \ldots$ تحل مكان $p, q, \ldots$.

مثال ٢٢: الافتراض $P(p) = p \vee \sim p$ صائب منطقيـــا والافـتراض $Q(p) = p \wedge \sim p$ خاطئ منطقيا كما وضحنا فى مثال (١).

مثال ٢٣ : الافـــتراض $P(p,q) = (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ صـــائب منطقيـــا والافتراض $Q(p,q) = p \wedge \sim (p \vee q)$ خاطئ منطقيا كمـــا وضحنا فى مثال (٢)، (٣).

مثال ٢٤ : (قانون القياس المنطقى)

الافـــتراض $P(p,q,r) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ صائب منطقيا ويمكن التحقق من ذلك بتكوين جدول الحقيقة الآتى :

p	q	r	(p	→	q)	∧	(q	→	r)	→	(p	→	r)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
1	2	3	1	4	2	7	2	5	3	8	1	6	3

ومن الجدول بالعمود فى الخطوة 8 يتضح أن الافتراض $P(p,q,r)$ صائب منطقيا.

من الأمثلة السابقة وحيث أن الافتراض الصائب منطقيا يكون دائما صواب والافتراض الخاطئ منطقيا يكون دائما خطأ فإننا نلاحظ أن نفى الافتراض الصائب منطقيا يكون افتراض خـاطئ منطقيا والعكس صحيح.

ملاحظة :

إذا كان الافتراض $P(p,q,\dots)$ صائب منطقيا فإن الافتراض $\sim P(p,q,\dots)$ يكون خاطئ منطقيا والعكس صحيح.

فى مثال (٢٣) الافتراض

$$P(p,q) = (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$

صائب منطقيا وبالتالى فإن الافتراض $\sim P(p,q)$ يكون خاطئ منطقيا وبالمثل الافتراض

$$Q(p,q) = p \wedge \sim (p \vee q)$$

خاطئ منطقيا وبالتالى فإن الافتراض $\sim Q(p,q)$ يكون صائب منطقيا.

نظرية ١ : مفهوم الإحلال

١ – إذا كان الافتراض $P(p,q,\dots)$ صائب منطقيا فإن $P(p_0,q_0,\dots)$ يكون أيضا صائب منطقيا لأى تقارير $p_0, q_0, \dots$ تحل مكان $p, q, \dots$.

٢ – إذا كان الافتراض $P(p,q,\dots)$ خاطئ منطقيا فإن $P(p_0,q_0,\dots)$ يكون أيضا خاطئ منطقيا لأى تقارير $p_0, q_0, \dots$ تحل مكان $p, q, \dots$.

مثال ٢٥ : كما وضحنا بمثال (٢٣) فإن الافتراض $P(p,q) = (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$ صائب منطقيا والافتراض $Q(p,q) = p \wedge \sim (p \vee q)$ خاطئ منطقيا

والآن نفرض التقارير

p_0 : الجو بارد

q_0 : الشمس مشرقة

أذن وفقا لمفهوم الإحلال فإن الافتراض $P(p_0,q_0) = (p_0 \wedge q_0) \rightarrow (p_0 \leftrightarrow q_0)$ يكون صائب منطقيا وبالمثل الافتراض $Q(p_0,q_0) = p_0 \wedge \sim (p_0 \vee q_0)$ يكون خاطئ منطقيا.

تعريف ٩ : يقال أن الافتراض $P(p,q,\dots)$ يؤدى إلى الافتراض $Q(p,q,\dots)$ (وبمعنى آخر الافتراض $P(p,q,\dots)$ تضمنا منطقيا للافتراض $Q(p,q,\dots)$) ونرمز لذلك بالرمز $P(p,q,\dots) \Rightarrow Q(p,q,\dots)$ إذا كان الافتراض $P(p,q,\dots) \to Q(p,q,\dots)$ صائب منطقيا.

مثال ٢٦ : للافتراضيين

$$P(p,q) = p \wedge q \quad , \quad Q(p,q) = p \vee q$$

أثبت أن $P(p,q) \Rightarrow Q(p,q)$

الحل : بتكوين جدول الحقيقة للافتراض $P(p,q) \to Q(p,q)$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$P(p,q) \to Q(p,q)$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	F	T

ومن الجدول نلاحظ أن الافتراض $P(p,q) \to Q(p,q)$ صائب منطقيا، وبالتالى ينتج أن التضمين $P(p,q) \Rightarrow Q(p,q)$ متحقق.

تعريف ١٠ : يقال أن الافتراض $P(p,q,\dots)$ يؤدى إلى الافتراض $Q(p,q,\dots)$، وان الافتراض $Q(p,q,\dots)$ يؤدى إلى الافتراض $P(p,q,\dots)$ ونرمز لذلك بالرمز $P(p,q,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,\dots)$ إذا كان الافتراض $P(p,q,\dots) \leftrightarrow Q(p,q,\dots)$ صائب منطقيا.

تعريف ١١ : الافتراضيان $Q(p,q,...)$, $P(p,q,...)$ يسميان متكافئان منطقيا أو اختصارا متكافئان إذا كان لكل منهما نفس قيم الحقيقة بالجدول ويرمز لذلك

$$P(p,q,\dots) \equiv Q(p,q,\dots)$$

ويستخدم الرمز $\Leftrightarrow$ أحيانا بدلا من الرمز $\equiv$ للدلالة على تكافؤ الافتراضيان.

مثال ٢٧ : الافتراضيان

$$P(p,q) = p \leftrightarrow q$$
$$Q(p,q) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

متكافئان منطقيا ويمكن التحقق من ذلك بتكوين جدول الحقيقة لكل افتراض

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$P(p,q)$	$Q(p,q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

ومن الجدول يتضح أن $P(p,q) \equiv Q(p,q)$

نظرية ٢ : $P(p,q,\dots) \equiv Q(p,q,\dots)$ إذا وفقط إذا كان الافتراض

$$P(p,q,\dots) \leftrightarrow Q(p,q,\dots)$$

صائب منطقيا .

نظرية ٣ : العلاقة بين الافتراضيان $Q(p,q,...)$, $P(p,q,...)$ المعرفة بالصورة

$$P(p,q,\dots) \equiv Q(p,q,\dots)$$

هى علاقة تكافؤ أى إنها

١ - علاقة عاكسة :

لكل افتراض $P(p,q,\dots)$ فإن $P(p,q,\dots) \equiv P(p,q,\dots)$

٢ - علاقة متماثلة :

إذا كـــــان $P(p,q,\dots) \equiv Q(p,q,\dots)$ فـــــإن

$Q(p,q,\dots) \equiv P(p,q,\dots)$

٣ - علاقة ناقلة :

إذا كان $P(p,q,\dots) \equiv Q(p,q,\dots)$

وكان $Q(p,q,\dots) \equiv R(p,q,\dots)$

فإن $P(p,q,\dots) \equiv R(p,q,\dots)$

مثال ٢٨ : الافتراضيان

$$P(p,q) = p \leftrightarrow q$$
$$Q(p,q) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

متكافئتان منطقيا ويمكن التحقق من ذلك بتكوين جدول الحقيقة للافتراض

$$P(p,q) \leftrightarrow Q(p,q)$$

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$P(p,q)$	$Q(p,q)$	$P(p,q) \leftrightarrow Q(p,q)$
T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T

أذن الافـــــتراض $P(p,q) \leftrightarrow Q(p,q)$ صـــــائب منطقيـــــا، اى إن $P(p,q) \Leftrightarrow Q(p,q)$ وبالتالى ينتج أن $P(p,q) \equiv Q(p,q)$.

نظرية ٤ : إذا كان الافتراضيان $Q(p, q, \dots)$, $P(p, q, \dots)$ كل منهم صائب منطقيا أو كل منهم خاطئ منطقيا فإن

$$P(p,q,\dots) \equiv Q(p,q,\dots)$$

مثال ٢٩ : الافتراضيان

$$P(p,q) = (p \wedge q) \rightarrow (p \leftrightarrow q)$$
$$Q(p,q) = \sim p \vee (p \vee q)$$

كل منهم صائب منطقيا وبالتالى فإن $P(p,q) \equiv Q(p,q)$.

مثال ٣٠ : الافتراضيان

$$P(p,q) = (p \wedge q) \wedge \sim (p \leftrightarrow q)$$
$$Q(p,q) = p \wedge \sim (p \vee q)$$

كل منهم خاطئ منطقيا وبالتالى فإن $P(p,q) \equiv Q(p,q)$.

ووفقا لمفهوم الإحلال فإنه يمكن صياغة النظرية الآتية :

نظرية ٥ : إذا كان $P(p,q,\dots) \equiv Q(p,q,\dots)$ فإن $P(p_0,q_0,\dots) \equiv Q(p_0,q_0,\dots)$ لأى تقارير $p_0, q_0, \dots$ تحل مكان $p, q, \dots$.

مثال ٣١ : الافتراضيان

$$P(p,q) = p \leftrightarrow q \quad , \quad Q(p,q) = (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

متكافئان منطقيا، أى إن $P(p,q) \equiv Q(p,q)$ (من مثال (٢٨)). والآن نفرض التقارير

p_0 : الجو بارد

q_0 : الشمس مشرقة

أذن وفقا لمفهوم الإحلال فإن $P(p_0, q_0) = Q(p_0, q_0)$.

ووفقا لمفهوم الإحلال ونظرية (٥) فإنه يمكن أعاده صياغة قوانين جبر التقارير ليحل محلـــها قوانين جبر الافتراضات.

نظرية ٦ : لأى افتراضيان $Q(p,q,\dots)$, $P(p,q,\dots)$ فإن الشروط الثلاثـــة الآتيـــة تكون متكافئة :

١ - الافتراض $P(p,q,\dots) \rightarrow Q(p,q,\dots)$ صائب منطقيا .

٢ - الافتراض $\sim P(p,q,\dots) \vee Q(p,q,\dots)$ صائب منطقيا .

٣ - الافتراض $P(p,q,\dots) \wedge \sim Q(p,q,\dots)$ خاطئ منطقيا .

مثال ٣٢ : نفرض $Q(p,q) = p \leftrightarrow q$, $P(p,q) = p \wedge q$

وكما وضحنا بمثال (٢) فإن الافتراض $P(p,q) \rightarrow Q(p,q)$ يكون صائب منطقيا ومن نظرية (٦) نستنتج أن الافتراض $\sim(p \wedge q) \vee (p \leftrightarrow q)$ يكون صائب منطقيا وكذلك الافـــتراض $(p \wedge q) \wedge \sim (p \leftrightarrow q)$ يكـــون خاطئ منطقيا.

ملاحظة :

يقـــال أن الافـــتراض $P(p,q,\dots)$ يـــؤدى إلى الافـــتراض $Q(p,q,\dots)$ (وبمعنى آخـــر الافـــتراض $P(p,q,\dots)$ تضمنـــا منطقيـــا للافتراض $Q(p,q,\dots)$) ونرمز لذلـــك بـــالرمز $P(p,q,\dots) \Rightarrow Q(p,q,\dots)$ إذا تحققت أحد شروط نظرية (٦).

مثال ٣٣ : أثبت أن $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$

الحل : باستخدام نظرية (٦) يمكن الإثبات بثلاث طرق

الطريقة الأولى : إثبات أن الافتراض $p \wedge q \rightarrow p \vee q$ صائب منطقيا وهـذا واضح من جدول الحقيقة الآتى :

p	q	p∨q	p∧q	p∧q→p∨q
T	T	T	T	T
T	F	T	F	T
F	T	T	F	T
F	F	F	F	T

الطريقة الثانية : إثبات أن الافتراض $\sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ صائب منطقيا وهـذا واضح من جدول الحقيقة الآتى :

p	q	p∨q	p∧q	~(p∧q)	~(p∧q)∨(p∨q)
T	T	T	T	F	T
T	F	T	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	T

الطريقة الثالثة : إثبات أن الافتراض $(p \wedge q) \wedge \sim(p \vee q)$ خاطئ منطقيا وهذا واضح من جدول الحقيقة الآتى :

p	q	p∨q	p∧q	~(p∨q)	(p∧q)∧~(p∨q)
T	T	T	T	F	F
T	F	T	F	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	F	F	T	F

نظرية ٧ : العلاقة بين الافتراضيان $Q(p,q,\dots)$, $P(p,q,\dots)$ المعرفة بالصورة

$$P(p,q,\dots) \Rightarrow Q(p,q,\dots)$$

هى علاقة ترتيب جزئى أى إنها

١ - علاقة عاكسة :

لكل افتراض $P(p,q,\dots)$ فإن

$$P(p,q,\dots) \Rightarrow P(p,q,\dots)$$

٢ - علاقة غير متماثلة :

إذا كان $P(p,q,\dots) \Rightarrow Q(p,q,\dots)$

وكان $Q(p,q,\dots) \Rightarrow P(p,q,\dots)$

فإن $Q(p,q,\dots) \equiv P(p,q,\dots)$

٣ - علاقة ناقلة :

إذا كان $P(p,q,\dots) \Rightarrow Q(p,q,\dots)$

وكان $Q(p,q,\dots) \Rightarrow R(p,q,\dots)$

فإن $P(p,q,\dots) \Rightarrow R(p,q,\dots)$

نظرية ٨ : إذا كان $P(p,q,\dots) \Rightarrow Q(p,q,\dots)$ فإن

$$P(p_0,q_0,\dots) \Rightarrow Q(p_0,q_0,\dots)$$

لأى تقارير $p_0, q_0, \dots$ تحل مكان $p, q, \dots$.

البرهان : حيث أن $P(p,q,\dots) \Rightarrow Q(p,q,\dots)$ أذن من التعريف ينتج أن الافتراض $P(p,q,\dots) \rightarrow Q(p,q,\dots)$ يكون صائب منطقيا ومن مفهوم الإحـــلال

(نظرية ١) أذن الافتراض $Q(p_0,q_0,\dots)$ $P(p_0,q_0,\dots)\rightarrow$ يكون أيضـــا صائب منطقيا لأى تقارير ... $p_0 , q_0 ,$ تحل مكان ... $p , q ,$ وبالتـــالى ينتـــج المطلوب

$$P(p_0,q_0,\dots)\Rightarrow Q(p_0,q_0,\dots)$$

مثال ٣٤ : فى مثال (٣٣) أثبتنا أن

$$p \wedge q \Rightarrow p \vee q$$

والآن نفرض التقارير

p_0 : مجموع زوايا المثلث تساوى قائمتين

q_0 : مجموع عددين زوجين يكون عدد زوجى

أذن من نظرية (٨) فإن

$$p_0 \wedge q_0 \Rightarrow p_0 \vee q_0 \ .$$

ملاحظة :

لأى افتراضيان $Q(p_0,q_0,\dots)$, $P(p_0,q_0,\dots)$ فإن

$$P(p_0,q_0,\dots)\wedge Q(p_0,q_0,\dots) \Rightarrow P(p_0,q_0,\dots)\vee Q(p_0,q_0,\dots)$$

مثال ٣٥ : أثبت أنه لأى افتراض $P(p,q,\dots)$ فإن

$$p \Rightarrow p \vee P(p,q,\dots)$$

الحل : حيث أن $p \Rightarrow p \vee q$ (من مثال (٥))

أذن من نظرية (٨) فإن الافتراض $P(p,q,\dots)$ يمكن أن يحل مكان q .

أى إن

$$p \Rightarrow p \vee P(p,q,\dots)$$

تمارين الفصل الثالث

١ – استخدم جداول الحقيقة فى توضيح التقارير الصائبة منطقيا (التحصيل الحاصل) والتقارير الخاطئة منطقيا (التناقض) فى كل مما يأتى :

(1) - $p \wedge q \rightarrow q$

(2) - $p \vee q \rightarrow q$

(3) - $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow p \vee \sim q$

(4) - $p \wedge q \leftrightarrow \sim p \wedge q$

(5) - $\sim p \vee q \leftrightarrow p \rightarrow q$

(6) - $(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$

(7) - $\sim p \vee r \rightarrow \sim q$

(8) - $q \leftrightarrow \sim p \veebar q$

(9) - $p \veebar q \rightarrow \sim p$

(10) - $p \wedge (q \vee r)$

٢ – وضح التقارير الصائبة منطقيا فيما يأتى :

(1) - $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$

(2) - $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$

(3) - $(p \rightarrow q \wedge r) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

(4) - $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

(5) - $(\sim p \rightarrow \sim r) \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow q)$

٣ – حدد الصواب والخطأ فى كل مما يأتى :

(1) - $p \Rightarrow p \wedge q$

(2) - $p \Rightarrow p \vee q$

(3) - $p \wedge q \Rightarrow p \leftrightarrow q$

(4) - $q \Rightarrow p \rightarrow q$

(5) - $p \leftrightarrow q \Rightarrow q \rightarrow p$

(6) - $p \veebar q \Rightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \wedge q)$

(7) - $p \veebar q \Leftrightarrow (\sim p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$

(8) - $\sim (p \wedge q) \Rightarrow \sim p \vee \sim q$

(9) - $\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

(10) - $p \wedge (q \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \vee r$

٤ – أثبت كل مما يأتى :

(1) - $p \wedge q \Rightarrow q \wedge p$

(2) - $\sim p \Rightarrow p \rightarrow q$

(3) - $q \Rightarrow p \wedge q \leftrightarrow p$

(4) - $p \vee q \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow q$

(5) - $\sim (p \leftrightarrow q) \Rightarrow (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p)$

(6) - $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow p \rightarrow r$

(7) - $p \veebar q \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

(8) - $(p \rightarrow \sim q) \wedge (r \rightarrow q) \wedge r \Rightarrow \sim p$

(9) - $p \wedge q \rightarrow r \Leftrightarrow (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

(10) - $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Leftrightarrow (p \wedge \sim r) \rightarrow \sim q$

٥ – باستخدام جداول الحقيقة أثبت كل مما يأتى :

(1) - $p \rightarrow \sim q \equiv q \rightarrow \sim p$

(2) - $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

(3) - $p \vee q \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow q$

(4) - $p \vee q \equiv \sim (\sim p \wedge \sim q)$

(5) - $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$
$\equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

(6) - $p \leftrightarrow q \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv q \leftrightarrow p$

(7) - $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

(8) - $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(9) - $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$

(10) - $p \rightarrow (\sim q \wedge r) \equiv \sim p \vee (\sim q \wedge r)$

٦ – استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير مكافئ فى كل من التقارير الآتية :

(1) - $\sim p \wedge q$

(2) - $p \wedge \sim q$

(3) - $\sim (p \wedge q)$

(4) - $\sim (\sim p \wedge q)$

(5) - $\sim p \to q$

(6) - $\sim (\sim p \wedge \sim q)$

(7) - $(p \wedge q) \vee r$

(8) - $\sim (r \vee p \leftrightarrow q) \wedge s$

(9) - $\sim p \vee r \to \sim q$

(10) - $(\sim p \vee q \to r) \wedge s$

٧ – استخدم قانون ديمورجان فى أعاده صياغة كل من التقارير الآتية :

١) من الخطأ القول انه إذا كانت السماء لا تمطر فإن الشمس تكون مشرقة .

٢) المنطق الرياضى لغة علمية ولا غنى عنها فى الرياضيات .

٣) من الخطأ أن نقول ما لا نعنيه أو لا نعنى بما نقوله .

٤) المنطق الرياضى هو علم التفكير الدقيق ومن الخطأ أن نقول انه يوجد له قواعد غير واضحة أو لغته العلمية غير مفهومة .

٥) من الخطأ القول أن الشباب يجدون فرص عمل جديدة والصحراء من حولنا لا يتم تعميرها.

٦) ليس صحيحا أن اليوم أو غدا إجازة .

٧) إما الطائرة تأخرت عن الإقلاع أو ساعتى غير مضبوطة .

٨) هو غير سعيد لكن إذا اخلص فى عمله فسوف يكون سعيد .

٩) هو سعيد لكن إذا لم يخلص فى عمله فإنه لن يكون سعيد .

١٠) إما هو غير سعيد أو غير مخلص فى عمله .

٨ – بسط كلا من التقارير الآتية :

١) من الخطاء القول أن الشمس ساطعة أو السماء لا تمطر بينما الريح عاصف.

٢) ليس صحيحا أن سطوع الشمس أو عدم وجود رياح عاصفة شـرط كاف لعـدم سقوط المطر.

٣) ليس صحيحا أن الشرط الضرورى لعدم سقوط المطر هو أن تكون الشمس مشرقة.

٤) ليس صحيحا أن عدم الإخلاص فى العمل يؤدى إلى السعادة أو النجاح فى الحياة.

٥) من الخطأ القول أن الشباب لا يجدون فرص عمل جديدة والصحراء من حولنا يتـم تعميرها.

٦) ليس من الحقيقى أن الغربة عن الوطن غير صعبة إذا ما كانت الأسرة معى.

٧) من الخطأ القول أن اليوم يكون السبت شرط كافي لكى يكون غدا هو يوم الأحد.

٨) أن لا يكون غدا هو يوم الأحد شرط ضرورى لكى لا يكون اليوم هو يوم السبت.

٩) ليس من الحقيقى انه إذا كان $x^2 \neq 4$ فإن $x = 2$ أو $x = -2$.

١٠) من الخطأ أن نقول انه إذا كان العدد x غير زوجي فإنه يكون عدد أولى.

٩ – استخدم التكافؤ $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ فى إعادة صياغة كل من التقارير الآتية :

١) إذا كان اليوم هو يوم الثلاثاء فإن غدا لن يكون يوم الأحد .

٢) إذا لم تلتزم بالنظام داخل قاعة الدراسة فإننى سوف أخرجك من القاعة .

٣) عدم المواظبة على حضور المحاضرات شرط كافى للحرمان من دخول الامتحان.

٤) الشرط الضرورى لكى يكون مخلص فى عمله هو أن يكون سعيد .

٥) إذا كان غير مخلص فى عمله فإنه لن يكون ناجح فى حياته .

٦) إذا كان الجو حار فإن الأمطار لن تسقط .

٧) السماء لن تمطر و الشمس لن تسطع إذا كانت الرياح غير عاصفة .

٨) إذا كانت الرياح عاصفة فإن السماء تمطر أو الشمس غير ساطعة .

٩) سطوع الشمس أو عدم وجود رياح عاصفة شــرط كاف لسقوط المطر .

١٠) إذا لم تستحى فافعل ما تشاء .

١١) فى المثلث القائم الزاوية مربع طول الوتر يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين.

١٢) إذا كان المثلث غير قائــم الزاوية فإن مربــــع طول الوتر لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين .

١٣) إذا كان مربع طول الوتر فى مثلث لا يساوى مجموع مربعى طولى الضلعين الآخرين فإن المثلث لا يكون قائم الزاوية .

١٤) يقال أن الزاويتان متتامتان إذا كان مجموعهم يساوى ٩٠ درجة .

١٥) إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا .

١٦) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتين فى القياس وكل زاويتين متناظرتين متساويتين فى القياس .

١٧) يتوازى المستقيمان إذا قطعهما مستقيم ثالث وكــانت إمـا زاويتــان متبادلتــان متساويتان فى القياس أو زاويتان متناظرتان متساويتان فى القياس .

١٨) إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس متساويتين فى القياس .

١٩) x عددا زوجيا شرط كاف لكى يكون x^2 عددا زوجيا .

٢٠) إذا كان x عددا أوليا واكبر من 3 فإنه لن يكون عددا زوجيا .

١٠) – استخدم قوانين جبر التقارير فى تبسيط كل من التقارير الآتية :

1 - $p \wedge q \rightarrow q \wedge p$

2 - $p \wedge \left(\sim p \vee q \right)$

3 - $\sim \left(p \wedge q \right) \wedge \left(p \vee \sim q \right)$

4 - $(p \vee \sim q) \wedge \sim p$

5 - $((p \to q) \wedge \sim q) \to \sim p$

6 - $((p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q)) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

7 - $(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

8 - $((p \wedge r) \vee (p \wedge \sim q)) \vee q$

9 - $(p \wedge (\sim q \vee r)) \vee q$

10 - $(p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (\sim q \wedge p))$

١١) – اكتب عكس ومقلوب ومضاد كلا من التقارير الآتية موضحا قيمة الحقيقة فى كل حالة :

١) إذا كان $x = 4$ فإن $x^3 = 64$.

٢) $a + c = b + c$ بشرط أن $a = b$.

٣) إذا كان $a < b$ فإن $a+c < b+c$.

٤) إذا قطع مستقيم مستقيمين متوازيين فإن كل زاويتين متبادلتين متساويتين .

٥) إذا كان العدد x يقبل القسمة على 12 فإنه يقبل القسمة على 6 .

٦) $x > 5$ شرط ضرورى لكى يكون $x > 3$.

٧) $x > 5$ شرط كاف لكى يكون $x > 3$.

٨) اتصال الدالة عند النقطة شرط كاف لكى تكون الدالة قابلة للتفاضل عند هذه النقطة.

٩) الشرط الكافى لتفاضل الدالة عند نقطة هو أن تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة.

١٠) الشرط الضرورى لتفاضل الدالة عند نقطة هو أن تكون الدالة متصلة عند هذه النقطة .

١٢) - اكتب عكس ومقلوب ومضاد ونفى كلا من التقارير الآتية فى ابسط صورة :

١) إذا كان اليوم هو يوم الثلاثاء فأن غدا لن يكون الخميس .

٢) اليوم ليس الأحد فقط إذا كان غدا ليس الاثنين .

٣) إذا لم تفهم التقارير المتكافئة جيدا فأنصحك بقراءها بعناية من جديد .

٤) إذا كنت تعمل بإخلاص فإنك سوف تحقق النجاح .

٥) فاقد الشئ لا يعطيه .

١٣ - أثبت أنه لأى افتراض $P(p,q,\ldots)$ فإن

1) $p \Rightarrow p \wedge P(p,q,\ldots)$

2) $p \wedge P(p,q,\ldots) \Rightarrow p$

3) $p \wedge P(p,q,\ldots) \Rightarrow p \vee P(p,q,\ldots)$

١٤ - إذا كان $P(p,q,\ldots) \equiv Q(p,q,\ldots)$ فأثبت أن $P(p_0,q_0,\ldots) \equiv Q(p_0,q_0,\ldots)$ لأى تقارير $p_0 , q_0 , \ldots$ تحل مكان $p , q , \ldots$.

١٥ - للافتراضات

$$P(p,q,r) = p \rightarrow (\sim q \wedge r)$$
$$Q(p,q,r) = \sim(p \wedge q) \wedge (\sim q \vee r)$$
$$R(p,q,r) = (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$$
$$S(p,q,r) = \sim p \vee (\sim q \vee r)$$
$$T(p,q,r) = (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

وضح الصواب والخطأ فى كل مما يأتى :

(1) - $P(p,q,r) \equiv Q(p,q,r)$

(2) - $P(p,q,r) \Rightarrow Q(p,q,r)$

(3) - $R(p,q,r) \Rightarrow T(p,q,r)$

(4) - $R(p,q,r) \Leftrightarrow S(p,q,r)$

(5) - $S(p,q,r) \equiv T(p,q,r)$