الفصل

4

المقاييس (الأسوار)

Quantifiers

١ – الدوال الافتراضية (دوال التقارير)

نعلم أن التقرير هو جملة خبرية ذات معنى تحمل خبرا ويمكن الحكم بأنها إما صائبة وإما خاطئة ولا تكون صائبة وخاطئة فى آن واحد، وتوجد بعض الجمل التى تحتوى على رموز تسمى متغيرات، وهذه المتغيرات تأخذ قيما معينة ومثل هذه الجمل تسمى بالجمل المفتوحة ولتوضيح ذلك نفرض الجملة

" $x > 6$ حيث x عدد ينتمى لمجموعة الأعداد الطبيعية $\{ \dots ,3 ,2 ,1\} = N$ "

هذه الجملة لا تمثل تقرير لأنها تحتمل الصواب أو الخطأ وذلك تبعا لقيمة المتغير x التى يتم التعويض بها فى الجملة ، فمثلا إذا وضعنا $x = 8$ فإن الجملة تصبح " $8 > 6$ " وهذه تمثل تقرير له قيمة الحقيقة صواب أما إذا وضعنا $x = 4$ فإن الجملة تصبح " $4 > 6$ " وهذه تمثل تقرير له قيمة الحقيقة خطأ. وكمثال آخر نفرض الجملة

" $x + y > 5$ حيث x , y أعداد تنتمى لمجموعة الأعداد الطبيعية"

هذه الجملة أيضا لا تمثل تقرير لأنها تحتمل الصواب أو الخطأ وذلك تبعا لقيمة المتغيرات x , y التى يتم التعويض بها فى الجملة، فمثلا إذا وضعنا $x = 2 , y = 4$ فإن الجملة تصبح " $2 + 4 > 5$ " وهذه تمثل تقرير له قيمة الحقيقة صواب أما إذا وضعنا $x = 1 , y = 3$ فإن الجملة تصبح " $1 + 3 > 5$ " وهذه تمثل تقرير له قيمة الحقيقة خطأ.

تعريف ١ : الجملة المفتوحة هى جملة تحتوى على متغير أو اكثر وهذه الجملة تتحول إلى تقرير عند إعطاء المتغير أو المتغيرات قيما معينة، ومجموعة القيم التى يمكن أن يأخذها المتغير أو المتغيرات تسمى مجموعة التعويض والجملة المفتوحة تسمى دالة افتراضية.

تعريف ٢: نفرض أن المجموعة A معطاة ضمنيا (مجموعة التعويض)، الدالة الافتراضية أو ببساطة الجملة المفتوحة للمجموعة A يرمز لها $p(x)$ وهى تحقق الخاصية

"لكل $a \in A$ فإن $p(a)$ تكون تقرير صواب أو خطأ"

أى إن

"$p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A إذا كان لأى عنصر $a \in A$ يحل محل المتغير x فى $p(x)$ فإن $p(a)$ تصبح تقرير."

مثال ١ : نفرض مجموعة الأعداد الطبيعية $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ونفرض أن $p(x)$ ترمز إلى الجملة "$x + 3 > 8$"

أذن $p(x)$ تمثل دالة افتراضية فى N ونلاحظ أن

$p(1)$ هو التقرير "$1 + 3 > 8$" وهو تقرير خاطئ

بينما

$p(6)$ هو التقرير "$6 + 3 > 8$" وهو تقرير صائب.

مثال ٢ : نفرض مجموعة الأعداد المركبة $C = \{a + ib \mid a, b \in R\}$

ونفرض أن $p(x)$ ترمز إلى الجملة "$x + 3 > 8$"

أذن $p(x)$ لا تمثل دالة افتراضية فى C لان العلاقة $>$ غير معرفة على مجموعة الأعداد المركبة .

تعريف ٣ : إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A أذن مجموعة العناصر $a \in A$ التى يكون عندها التقرير $p(a)$ صواب تسمى مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ ويرمز لها T_p ، أى إن

$$T_p = \{ a \mid a \in A \ , \ p(a) \ \text{صواب} \}$$

أو اختصارا يكتب

$$T_p = \{ a \mid p(a) \}$$

مثال ٣ : نفرض أن $p(x)$ هى الدالة الافتراضية " $x + 3 > 8$ " المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N. أذن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى

$$T_p = \{ a \mid a \in N , a + 3 > 8 \}$$
$$= \{ 6 , 7 , 8 , \ldots \} \subset N$$

مثال ٤ : نفرض أن $p(x)$ هى الدالة الافتراضية " $x + 3 > 2$ " المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N . أذن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى

$$T_p = \{ a \mid a \in N , a + 3 > 2 \} = N$$

مثال ٥ : نفرض أن $p(x)$ هى الدالة الافتراضية " $x + 3 < 2$ " المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية N . أذن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى

$$T_p = \{ a \mid a \in N , a + 3 < 2 \}$$
$$= \Phi$$

أى إن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى المجموعة الخالية.

مثال ٦ : نفرض أن $p(x)$ هى الدالة الافتراضية " $x^2 + 2 > 5$ " المعرفة على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$. أذن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى

$$T_p = \{ a \mid a \in (-1,1) , a^2 + 2 > 5 \}$$
$$= \Phi$$

أى إن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى المجموعة الخالية.

نلاحظ من الأمثلة ٣ , ٤ , ٥ , ٦ انه إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية معرفة على المجموعة A فإن $p(a)$ يمكن ان تكون صواب لبعض $a \in A$ أو صواب لكل $a \in A$ أو ليست صواب لكل $a \in A$ ، أى إن مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ على المجموعة A يمكن ان تكون

$$T_p = \Phi \qquad \text{أو} \qquad T_p = A \qquad \text{أو} \qquad T_p \subset A$$

٢ – تقارير تحتوى على مقاييس (الأسوار Quantifiers)

فى حديثنا اليومى كثيرا ما يصدر عنا بعض العبارات التى تشتمل على الكلمات

(كل – جميع – بعض – يوجد بعض – . . .)

وكأمثلة على ذلك العبارات الآتية :

- كل الطلاب حضروا الامتحان .
- جميع طلاب قسم الرياضيات يدرسون المنطق الرياضى .
- بعض الأعداد الصحيحة يكون سالب .
- يوجد بعض الطلاب راسبون .
- لكل مجتهد نصيب .

ومثل هذه الكلمات تسمى مقاييس (أسوار) ، والكلمات (كل - جميع) تعتبر بمثابة تسوير كلي للعبارة، بمعنى أننا نقوم بتشييد سورا كاملا حول العبارة بحيث لا يفلت منها أى عنصر، فعندما نقول

" كل الطلاب حضروا الامتحان "

فمعنى ذلك أن كلمة كل قد شيدت سورا كاملا حول العبارة (الطلاب حضروا الامتحان) أى لم يتغيب أحد على الإطلاق وذلك بسبب قوة كلمة كل، و عندما نقول جميع الأعداد

الطبيعية موجبة فمعنى ذلك انه لا يوجد أى عدد طبيعى مهما كان غير موجب والسبب أن كلمة جميع هى بمثابة تسو ير كلى للعبارة. إما الكلمات (بعض- يوجد بعض) فتعتبر بمثابة تسو ير جزئى حول العبارة يحمى جزء واحد فقط من العبارة بينما بقية الأجزاء غير محمية. فعندما نقول

" بعض الأعداد الصحيحة يكون سالب "

فمعنى ذلك أن السور تم تشيده حول الأعداد السالبة فقط وهذه العبارة تعنى أن هناك أعداد صحيحة تكون غير سالبة.

ويستخدم الرمز $\forall$ للتعبير عن كلمة (كل - جميع) أو ما شابه ذلك فى المعنى ويستخدم الرمز $\exists$ للتعبير عن كلمة (يوجد - يوجد بعض) أو ما شابه ذلك فى المعنى.

تعريف ٤ : المقياس الشامل **Universal Quantifier**

إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A أذن التقرير

" لكل عنصر x فى المجموعة A فإن $p(x)$ تقرير صواب "

أو بالاختصار التقرير

" لكل x فإن $p(x)$ "

يمكن التعبير عنه بالصورة

$$(\forall\ x \in A)\ (p(x))$$

أو بالصورة المختصرة

$$\forall x\ ,\ p(x)$$

والرمز $\forall$ والذى يقرأ "لكل" أو "لجميع" يسمى مقياس شامل.

ملاحظات :

١ - إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A وكان مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ هى نفسها المجموعة A ، أى إن $T_p = A$ فإن التقرير " $\forall x \;,\; p(x)$ " يكـــون صواب.

٢ - إذا كان $T_p \neq A$ فإن التقرير " $\forall x \;,\; p(x)$ " يكون خطأ.

٣ - الدالة الافتراضية $p(x)$ فى حد ذاتها هى جملة مفتوحة ولذلك ليس لها قيمة حقيقة لكن عند كتابة المقياس $\forall$ أمام $p(x)$ فإن " $\forall x \;,\; p(x)$ " تصبح تقرير وبالتالى له قيمة حقيقة.

مثال ٧ : نفرض أن $p(x)$ هى الدالة الافتراضية "x حضر الامتحـان " وان S ترمـز إلى مجموعة الطلاب فى مدرسة ما، أذن التقرير

"كل الطلاب حضروا الامتحان"

يمكن أن يكتب بالصورة

$\forall x \;,\; p(x)$ أو اختصارا $(\forall x \in S)(p(x))$

مثال ٨ : أوجد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية :

1) - $(\forall n \in N)(n+3>2)$

2) - $(\forall n \in N)(n+3>6)$

الحل :

١) - التقرير $(\forall n \in N)(n+3>2)$ صواب لان

$$\{ n \mid n+3>2 \} = \{1,2,3,\ldots\} = N$$

٢) – التقرير $(\forall\ n \in N)(n+3>6)$ خطأ لان

$$\{\ n \mid n+3>6\ \} = \{\ 4, 5, 6, \ldots\ \} \neq N$$

مثال ٩ : يمكن استخدام المقياس الشامل $\forall$ لتعريف تقاطع عائلة من المجموعات $\{A_i\}_{i\in J}$ ، حيث J تمثل مجموعة من الأعداد الطبيعية (منتهية أو غير منتهية)، كالآتى

$$\bigcap_{i\in J} A_i = \{\, x \mid \forall\, i \in J\ ,\ x \in A_i \,\}$$

تعريف ٥ : مقياس الوجود **Existential Quantifier**

إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A أذن التقرير

"يوجد عنصر x فى المجموعة A بحيث أن $p(x)$ تقرير صواب"

أو بالاختصار

"يوجد بعض x بحيث أن $p(x)$ "

يمكن التعبير عنه بالصورة

$$(\exists\ x \in A)\ (p(x))$$

أو بالصورة المختصرة

$$\exists\, x\ :\ p(x)$$

الرمز $\exists$ والذى يقرأ يوجد أو يوجد بعض أو لواحد على الأقل يسمى مقياس وجود والرمز " : " يستخدم عادة ليعبر عن " بحيث أن ".

ملاحظات :

١ – إذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A وكان مجموعة الصواب للدالـة $p(x)$ غير خالية،

أى إن $T_p \neq \Phi$ فإن التقرير " $\exists x : p(x)$ " يكون صواب.

٢ – إذا كان $T_p = \Phi$ فإن التقرير " $\exists x : p(x)$ " يكون خطأ.

٣ – الدالة الافتراضية $p(x)$ فى حد ذاتها هى جملة مفتوحة ولذلك ليس لها قيمة صـــــواب لكن عند كتابة المقياس $\exists$ أمام $p(x)$ فإن " $\exists x : p(x)$ " تصبح تقريـــــر وبالتالى له قيمة صواب.

مثال ١٠ : أوجد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية :

1) - $(\exists\, n \in N)(n + 3 < 8)$

2) - $(\exists\, n \in N)(n + 3 < 2)$

الحل :

١) – التقرير $(\exists\, n \in N)(n + 3 < 8)$ صواب لأن

$$\{ n \in N \mid n + 3 < 8 \} = \{1, 2, 3, 4\} \neq \Phi$$

٢) – التقرير $(\exists\, n \in N)(n + 3 < 2)$ خطأ لأن

$$\{ n \in N \mid n + 3 < 2 \} = \Phi$$

مثال ١١ : يمكن استخدام مقياس الوجود $\exists$ لتعريف اتحاد عائلة المجموعات $\{A_i\}_{i \in J}$ ، حيث J تمثل مجموعة من الأعداد الطبيعية (منتهية أو غير منتهية)، كالآتى

$$\bigcup_{i \in J} A_i = \{ x \mid \exists\, i \in J : x \in A_i \}$$

مثال ١٢ : اختبر صحة التقرير

" يوجد عدد طبيعى n بحيث أن $20 < n^2 < 60$ "

الحل : يمكن كتابة التقرير بالصورة

$$\exists\ n \in N\ :\ 20 < n^2 < 60$$

وحيث ان

$$\{n \in N \mid 20 < n^2 < 60\} = \{5, 6, 7\} \neq \Phi$$

أذن التقرير يكون صواب .

مثال ١٣ : حدد نوع المقياس (شامل – وجود) فى كلا من التقارير الآتية ثم اعد صياغة التقرير فى صورة رمزية:

١) بعض الطلاب يحبون دراسة المنطق .

٢) كل المثلثات متساوية الأضلاع .

٣) جميع الأعداد الطبيعية موجبة .

٤) يوجد عدد حقيقى x يحقق المعادلة $x^2 - 5 = 0$.

٥) يوجد بعض الأعداد الطبيعية مربعها يساوى 16 .

٦) يوجد حل للمعادلة $x^2 + 4 = 0$ فى مجموعة الأعداد المركبة .

٧) القيمة المطلقة لأى عدد حقيقى تكون غير سالبة .

٨) كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين $0 , 1$ مربعها يكون اقل من 1 .

الحل : فى الجدول الآتى نحدد نوع المقياس ونضع التقارير والمناظر لها باستخدام الرموز :

التقرير فى صيغة جملة إنشائية	المقياس	التقرير باستخدام الرموز
١) بعض الطلاب يحبون دراسة المنطق.	وجود	$\exists x \in S :$ x يحب دراسة المنطق حيث S مجموعة الطلاب.
٢) كل المثلثات متساوية الأضلاع.	شامل	$\forall x \in T ,$ x مثلث متساوى الأضلاع حيث T مجموعة المثلثات.
٣) جميع الأعداد الطبيعية موجبة.	شامل	$\forall x \in N\ ,\ x > 0$

التقرير فى صيغة جملة إنشائية	المقياس	التقرير باستخدام الرموز
٤) يوجد عدد حقيقى x يحقق المعادلة $x^2 - 5 = 0$.	وجود	$\exists x \in R : x^2 - 5 = 0$
٥) يوجد بعض الأعداد الطبيعية مربعها يساوى 16.	وجود	$\exists n \in N : n^2 = 16$
٦) يوجد حل للمعادلة $x^2 + 4 = 0$ فى مجموعة الأعداد المركبة.	وجود	$\exists x \in C : x^2 + 4 = 0$
٧) القيمة المطلقة لأى عدد حقيقى تكون غير سالبة.	شامل	$\forall x \in R \ , \ \lvert x \rvert \geq 0$
٨) كل الأعداد الحقيقية المحصورة بين 0 , 1 مربعها يكون اقل من 1.	شامل	$\forall x \in (0,1) \ , \ x^2 < 1$

مثال ١٤ : حول الجمل الآتية من صيغة الرموز إلى جمل إنشائية

1- $\forall x \in N \ , \ x + 3 > 5$

2- $\exists x \in R : x^2 = 3x$

3- $\exists x \in S :$ x طالب غير مجتهد (S مجموعة الطلاب بالفصل)

4- $\forall x \in R \ , \ x \geq 0$

5- $\exists x \in T :$ x مثلث متساوى الأضلاع (T مجموعة المثلثات)

الحل :

١ - لكل عدد طبيعى x فإن $x + 3 > 5$.

٢ - يوجد عدد حقيقى x بحيث يحقق المعادلة $x^2 = 3x$.

٣ - بعض طلاب الفصل غير مجتهدون.

٤ – كل الأعداد الحقيقية غير سالبة.

٥ – يوجد بعض المثلثات المتساوية الأضلاع.

مثال ١٥ : بفرض أن مجموعة التعويض هى مجموعة الأعداد الحقيقية حدد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية.

1- $\forall x \ , \ |x| = x$ 　　 3- $\exists x : x^2 = 3x$

2- $\forall x \ , \ x + 2 > x$ 　　 4- $\exists x : x + 1 \le x$

الحل :

١ – خطأ : نلاحظ انه إذا كان x عدد سالب فإن $x \neq |x|$.

٢ – صواب : لأنه لكل عدد حقيقى x يوجد حل للمتباينة $x + 2 > x$.

٣ – صواب : لأنه بوضع $x = 3$ تتحقق المعادلة $x^2 = 3x$.

٤ – خطأ : لأنه لا يوجد حل للمتباينة $x + 1 \le x$.

مثال ١٦ : بفرض أن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، حدد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية:

1- $\exists x \in A : x + 2 = 9$ 　　 3- $\forall x \in A \ , \ x + 2 \le 6$

2- $\forall x \in A \ , \ x + 2 < 9$ 　　 4- $\exists x \in A : 2x + 1 < 6$

الحل :

١ – خطـــأ : لأنه لا يوجد عدد فى المجموعة A يحقق المعادلة $x + 2 = 9$.

٢ – صواب : لان كل عدد فى المجموعة A يحقق المتباينة $x + 2 < 9$.

٣ – خطـــأ : لان $x = 5$ لا تحقق المتباينة $x + 2 \le 6$.

٤ – صواب : لأنه بوضع $x = 1$ أو $x = 2$ تتحقق المتباينة $2x + 1 < 6$.

مثال ١٧ : حدد قيمة الحقيقة فى كل من التقارير الآتية :

1) $\exists \ n \in \{1,2,3,4\} : (n^2 \le 8) \vee (n^3 > 30)$

2) $\forall \ n \in \{1,2,3,4,5\} , \ n^2 \le 10 \rightarrow n^3 < 25$

الحل :

١) بأخذ $n = 1$ أو $n = 2$ نجد أن

$n^2 \le 8$ صواب

$n^3 > 30$ خطـأ

ومن تعريف أداة الفصل، أذن فى هــذه الحالــة $(n^3 > 30) \vee (n^2 \le 8)$ يكــون صواب وبالتالى التقرير المعطى يكون صواب ونلاحظ أيضا انه إذا أخذنا $n = 4$ فإن

$n^2 \le 8$ خطـأ

$n^3 > 30$ صواب

أذن فى هذه الحالة أيضا $(n^3 > 30) \vee (n^2 \le 8)$ يكون صواب وبالتالى التقريـــر المعطى يكون صواب.

٢) لمعرفة قيمة الحقيقة للتقرير

$$\forall\ n \in \{1,2,3,4,5\},\quad n^2 \le 10 \ \rightarrow\ n^3 < 25$$

نبحث فى جميع قيم n المختلفة ونستخدم تعريف أداة الشرطية كما موضح بـــالجدول الآتى:

n	$n^2 \le 10$	$n^3 < 25$	$n^2 \le 10 \ \rightarrow\ n^3 < 25$
1	$1 \le 10$ صواب	$1 < 25$ صواب	صواب
2	$4 \le 10$ صواب	$8 < 25$ صواب	صواب
3	$9 \le 10$ صواب	$27 < 25$ خطـأ	خطـأ
4	$16 \le 10$ خطأ	$64 < 25$ خطـأ	صواب
5	$25 \le 10$ خطأ	$125 < 25$ خطـأ	صواب

ويتضح من الجدول أن التقرير لا يتحقق فى حالة $n = 3$ ، أذن التقرير المعطى يكون خطـأ.

٣ - نفى التقارير التى تحتوى على مقاييس

توجد بعض الأخطاء الشائعة عند نفي التقارير التى تحتوى على مقاييس ولتوضيح ذلـــك نفرض التقرير

" كل الطلاب حضروا الامتحان "

نلاحظ انه من الأخطاء الشائعة أن ننفى هذا التقرير بقولنا "كل الطلاب لم يحضروا الامتحـان" لان احدهم ليس نفى للأخر، ولتوضيح ذلك نفترض أن بعض الطلاب حضروا وبعضهم غـاب عن الامتحان حينئذ سيكون التقرير الأول خاطئ وكذلك التقرير الثانى خاطئ وهـــذا يمثـل تعارض حيث أننا نعلم أن قيمة الحقيقة لنفى التقرير تكون عكس قيمة الحقيقة للتقرير، ولكــن من الواضح أننا نستطيع الحكم على خطأ التقرير "كل الطلاب حضروا الامتحان" إذا كـــان يوجد طالب واحد على الأقل لم يحضر الامتحان وعلى ذلك فإن نفى هذا التقرير يكون

"ليس من الحقيقى أن كل الطلاب حضروا الامتحان"

وهذا يعنى

" يوجد على الأقل طالب واحد لم يحضر الامتحان "

وحيث أن كلمة "بعض " تعنى "واحد على الأقل" فإن نفي التقرير يمكن ان يصاغ كما يلي:

" بعض الطلاب لم يحضروا الامتحان "

وبفرض أن A ترمز إلى مجموعة الطلاب، والدالة الافتراضية $p(x)$ ترمز إلى " x طـــالب حضر الامتحان" فإنه يمكننا صياغة القاعدة الآتية:

$$\sim\big(\forall x \in A\ ,\ p(x)\big) \equiv \exists x \in A : \sim p(x)$$

أى إن

نفى التقرير $\forall x \; , \; p(x)$ والذى يحتوى على المقياس الشامل يتم فى الخطوات الآتية :

١ - تحويل المقياس الشامل $\forall$ إلى مقياس الوجود $\exists$

٢ - تحويل علامة الفاصلة " , " إلى علامة حيث أن " : "

٣ - تحويل $p(x)$ إلى صيغة النفى $\sim p(x)$

وللتعرف على كيفية نفى تقرير يحتوى على مقياس الوجود $\exists$ نفرض التقرير

" بعض طلاب الفصل راسبون "

من الواضح أننا نستطيع الحكم على خطأ هذا التقرير إذا كان لا يوجد أى طالب راسب وعلى ذلك فإن نفى هذا التقرير يكون

" ليس من الحقيقى أن بعض طلاب الفصل راسبون "

وهذا يعنى

" لا يوجد بالفصل أى طالب راسب "

أذن نفى التقرير يمكن ان يصاغ كما يلى :

" كل طلاب الفصل غير راسبون "

وبفرض أن A ترمز إلى مجموعة الطلاب، والدالة الافتراضية $p(x)$ ترمز إلى "x طالب راسب" فإنه يمكننا صياغة القاعدة الآتية:

$$\sim\big(\exists\, x \in A \;:\; p(x)\big) \equiv \forall\, x \in A \;,\; \sim p(x)$$

أى إن

نفى التقرير $\exists x \; : \; p(x)$ والذى يحتوى على مقياس الوجود يتم فى الخطوات الآتية:

١ - تحويل مقياس الوجود $\exists$ إلى المقياس الشامل $\forall$

٢ - تحويل علامة حيث أن " : " إلى علامة الفاصلة " , "

٣ - تحويل $p(x)$ إلى صيغة النفى $\sim p(x)$

نظرية (ديمورجان):

$$\sim\left(\forall\, x \in A \ ,\ p(x) \right) \equiv \exists\, x \in A : \sim p(x)$$

$$\sim\left(\exists\, x \in A :\ p(x) \right) \equiv \forall\, x \in A \ ,\ \sim p(x)$$

مثال ١٨ : أوجد نفى كل من التقارير الآتية :

١ - جميع الرجال شجعان .

٢ - كل الأعداد الفردية أعداد أولية .

٣ - بعض الطلاب لم يكملوا واجباتهم .

٤ - يوجد بعض الطلبة غير مجتهدين .

٥ - لكل عدد طبيعى n فإن $n + 3 < 7$.

الحل :

بتطبيق قوانين ديمورجان

١ - التقريـــــــــر : " جميع الرجال شجعان " يحتوى على مقياس شامل

نفى التقرير يكون : " ليس من الحقيقى ان جميع الرجال شجعان "

≡ " يوجد على الأقل أحد الرجال ليس شجاع "

≡ " يوجد بعض الرجال ليسوا شجعانا "

٢ - التقريـــــــــر : " كل الأعداد الفردية أعداد أولية " يحتوى على مقياس شامل

نفى التقرير يكون : " ليس من الحقيقى ان كل الأعداد الفردية أعداد أولية "

≡ " يوجد على الأقل عدد فردى وليس أولى "

≡ " يوجد بعض الأعداد الفردية ليست أولية "

٣ - التقريــــــــر : " بعض الطلاب لم يكملوا واجباقم " يحتوى على مقياس وجود
نفى التقرير يكون : " ليس من الحقيقى ان بعض الطلاب لم يكملوا واجباقم "
≡ " كل الطلاب اكملوا واجباقم "

٤ - التقريــــــــر : " يوجد بعض الطلبة غير مجتهدين " يحتوى على مقياس وجود
نفى التقرير يكون : " كل الطلاب مجتهدون "

٥ - التقريــــــــر : "لكل عدد طبيعى n فإن $n + 3 < 7$ " يحتوى على مقياس شامل
نفى التقرير يكون : " يوجد عدد طبيعى n بحيث ان $n + 3 < 7$ غير متحققة"
≡ "يوجد على الأقل عدد طبيعى n بحيث ان $n + 3 \geq 7$ "

مثال ١٩ : بفرض أن مجموعة الأعداد الحقيقية هى مجموعة التعويض ، أوجد نفى كل مــــن التقارير الآتية :

1. $\forall x \ , \ |x| = x$
2. $\forall x \ , \ x + 2 > x$
3. $\exists x : x^2 = 3x$
4. $\exists x : x + 1 \leq x$

الحل : بتطبيق قوانين ديمورجان

1. $\sim(\forall x \ , \ |x| = x) \equiv \exists x : \sim(|x| = x)$
$\equiv \exists x : |x| \neq x$

2. $\sim(\forall x \ , \ x + 2 > x) \equiv \exists x : \sim(x + 2 > x)$
$\equiv \exists x : x + 2 \leq x$

3. $\sim(\exists x : x^2 = 3x) \equiv \forall x \ , \sim(x^2 = 3x)$
$\equiv \forall x : x^2 \neq 3x$

4. $\sim(\exists x : x + 1 \leq 1) \equiv \forall x \ , \sim(x + 1 \leq 1)$
$\equiv \forall x : x + 1 > 1$

ملاحظة : بفرض أن $p(x)$ دالة افتراضية للمجموعة A فإن $\sim p(x)$ تكون أيضا دالة افتراضية ويمكن الحصول عليها بكتابة " ليس من الحقيقى أن $p(x)$ " وتكـــون مجموعة الصواب للدالة $\sim p(x)$ هى مكملة مجموعة الصواب للدالة $p(x)$ فى المجموعة الشاملة A ، فإذا كانت $p(a)$ صواب فإن $\sim p(a)$ تكـــون خطـــأ والعكس صحيح. وفى الفصل الثانى استخدمنا الرمز $\sim$ كأداة من أدوات الربـــط للتقارير، وهنا تستخدم كعملية من عمليات الدوال الافتراضيـــة ، وبـــالمثل يمكـــن استخدام أداة الوصل $\wedge$ وأداة الفصل $\vee$ كعمليات على الــــدوال الافتراضيـــة ، وبفرض أن $p(x), q(x)$ دوال افتراضية فإن

$p(x) \wedge q(x)$ تقرأ " $p(x)$ و $q(x)$ "

$p(x) \vee q(x)$ تقرأ " $p(x)$ أو $q(x)$ "

ويمكن تطبيق قوانين جبر التقارير على الدوال الافتراضية فمثلا

$$\sim (p(x) \wedge q(x)) \equiv \sim p(x) \vee \sim q(x)$$
$$\sim (p(x) \vee q(x)) \equiv \sim p(x) \wedge \sim q(x)$$
$$\sim (p(x) \rightarrow q(x)) \equiv p(x) \wedge \sim q(x)$$

مثال ٢٠ : أوجد فى ابسط صورة نفى التقرير

" الآن وقت الصباح وكل الناس استيقظوا "

الحل : التقرير من نوع الوصلة .

نفرض

التقرير p : " الآن وقت الصباح "

التقرير q : " كل الناس استيقظوا " وهذا التقرير يحتوى على مقياس شامل

وباستخدام قانون ديمورجان

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

وحيث أن $\sim p$: " الآن ليس وقت الصباح "

$\sim q$: " بعض الناس لم يستيقظوا "

أذن نفى التقرير المعطى يكون

" الآن ليس وقت الصباح أو ليس صحيحا أن كل الناس استيقظوا "

وهذا يكافئ

" الآن ليس وقت الصباح أو بعض الناس لم يستيقظوا "

مثال ٢١ : أوجد فى ابسط صورة نفى التقرير

" بعض المدارس مغلق اليوم أو كل الطلاب حاضرون "

الحل : التقرير من نوع الفاصلة .

نفرض

التقرير p : " بعض المدارس مغلق اليوم " وهذا التقرير يحتوى على مقياس وجود

التقرير q : " كل الطلاب حاضرون " وهذا التقرير يحتوى على مقياس شامل

وباستخدام قانون ديمورجان

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

أذن نفى التقرير يكون

"ليس صحيحا أن بعض المدارس مغلق اليوم وليس صحيحا أن كل الطلاب حاضرون"

وهذا يكافئ

" كل المدارس مفتوحة اليوم وبعض الطلاب غائبون"

مثال ٢٢ : أوجد فى ابسط صورة نفى كل من التقارير الآتية :

١ - إذا كان الجو حار فإن بعض المزروعات لا تنمو .

٢ - الشرط الكافى لتلاشى كل السحب اليوم هو سقوط بعض الأمطار .

الحل :

١ - التقرير من نوع الشرطية .

نفرض

التقرير p : " الجو حار "

التقرير q : " بعض المزروعات لا تنمو " وهذا التقرير يحتوى على مقياس وجود

أذن التقرير يكون على الصورة $p \to q$ وحيث إن

$$\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$$

أذن نفي التقرير يكون

" الجو حار وليس صحيحا أن بعض المزروعات لا تنمو "

وهذا يكافئ

" الجو حار وكل المزروعات تنمو "

٢ - التقرير من نوع الشرطية .

نفرض

التقرير p : " كل السحب تتلاشى اليوم " وهذا التقرير يحتوى على مقياس شامل

التقرير q : " بعض الأمطار تسقط " وهذا التقرير يحتوى على مقياس وجود

أذن التقرير يكون على الصورة $q \to p$ وحيث إن

$$\sim (q \to p) \equiv q \wedge \sim p$$

أذن نفي التقرير يكون

"بعض الأمطار تسقط وليس صحيحا أن كل السحب تتلاشى اليوم"

وهذا يكافئ

"بعض الأمطار تسقط وبعض السحب لن تتلاشى اليوم"

مثال ٢٣ : أوجد فى ابسط صورة نفى كل من التقارير الآتية :

1. $(\forall x, p(x)) \wedge (\exists y : q(y))$

2. $(\exists x : p(x)) \vee (\forall y, q(y))$

3. $(\exists x : p(x)) \rightarrow (\forall y, q(y))$

4. $\forall x, \exists y : p(x) \vee q(y)$

5. $\exists y : \exists x : p(x) \wedge \sim q(y)$

الحل :

١ - حيث أن $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ أذن

$$\sim ((\forall x, p(x)) \wedge (\exists y : q(y))) \equiv \sim (\forall x, p(x)) \vee \sim (\exists y : q(y))$$
$$\equiv (\exists x : \sim p(x)) \vee (\forall y, \sim q(y))$$

٢ - حيث أن $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ أذن

$$\sim ((\exists x : p(x)) \vee (\forall y, q(y))) \equiv \sim (\exists x : p(x)) \wedge \sim (\forall y, q(y))$$
$$\equiv (\forall x, \sim p(x)) \wedge (\exists y : \sim q(y))$$

٣ - حيث أن $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ أذن

$$\sim ((\exists x : p(x)) \rightarrow (\forall y, q(y))) \equiv (\exists x : p(x)) \wedge \sim (\forall y, q(y))$$
$$\equiv (\exists x : p(x)) \wedge (\exists y : \sim q(y))$$

٤ - $\sim (\forall x, \exists y : p(x) \vee q(y)) \equiv \exists x : \sim (\exists y : p(x) \vee q(y))$

$$\equiv \exists x : \forall y, \sim (p(x) \vee q(y))$$
$$\equiv \exists x : \forall y, \sim p(x) \wedge \sim q(y)$$

٥ - $\sim (\exists y : \exists x : p(x) \wedge \sim q(y)) \equiv \forall y, \sim (\exists x : p(x) \wedge \sim q(y))$

$$\equiv \forall y, \forall x, \sim (p(x) \wedge \sim q(y))$$
$$\equiv \forall y, \forall x, \sim p(x) \vee q(y)$$

من نظرية ديمورجان

$$\sim(\forall x\ ,\ p(x)) \equiv \exists x : \sim p(x)$$

أذن لإثبات أن التقرير $\forall x\ ,\ p(x)$ خطأ نحاول إثبات ان التقرير $\exists x : \sim p(x)$ صواب أى نحاول إثبات انه يوجد على الأقل عنصر x_0 يحقق ان $\sim p(x_0)$ صواب وبالتالى $p(x_0)$ خطأ، مثل هذا العنصر x_0 يسمى مثالا عكسيا Counter Example للتقرير $\forall x\ ,\ p(x)$ وهذه تمثل طريقة من طرق البرهان، وسوف نتناولها بالتفصيل فى الفصل السادس.

مثال ٢٤ : نفرض التقرير $\forall x\ ,\ |x| \neq 0$ حيث مجموعة التعويض هى مجموعة الأعداد الحقيقية.

هذا التقرير خطأ لان العدد 0 يعتبر مثالا عكسيا حيث $|0| \neq 0$ يمثل تقرير خطأ.

مثال ٢٥ : نفرض المجموعة $B = \{2, 3, \ldots, 9\}$. أعطى مثالا عكسيا ان امكن لكل من التقارير الآتية :

1- $\forall\ x \in B\ ,\ x + 4 \leq 10$

2- $\forall\ x \in B\ ,\ x^2 > 2$

3- $\forall\ x \in B\ ,\ 6x + 4 < x^2$

4- $\forall\ x \in B$, x عدد أولى

5- $\forall\ x \in B$, x عدد زوجى

الحل :

١ - إذا كان $x_0 \in \{7, 8, 9\}$ فإن المتباينة $x_0 + 4 \leq 10$ تكون غير متحققة، أذن كمثال عكسى نأخذ $x_0 = 7$ أو $x_0 = 8$ أو $x_0 = 9$.

٢ - التقرير $\forall\ x \in B\ ,\ x^2 > 2$ صواب . أذن لا يوجد مثال عكسى .

٣ - إذا كان $x_0 \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ فإن المتباينة $6x_0 + 4 < x_0^2$ تكون غير متحققة . أذن كمثال عكسى نأخذ $x_0 = 2$.

٤ - إذا كان $x_0 \in \{4, 6, 8, 9\}$ فإن التقرير " $\forall\ x \in B$, x عدد أولى " يكون خطأ. أذن كمثال عكسى نأخذ $x_0 = 4$.

٥ - إذا كان $x_0 \in \{3, 5, 7, 9\}$ فإن التقرير " $\forall\ x \in B$, x عدد زوجى " يكون خطأ. أذن كمثال عكسى نأخذ $x_0 = 3$.

٤ - الدوال الافتراضية فى اكثر من متغير

نفرض المجموعتان A_2 , A_1 . الدالة الافتراضية (فى متغيرين) لمجموعة حاصل الضرب الديكارتى $A_1 \times A_2$ هى جملة مفتوحة يرمز لها $p(x,y)$ وتحقق الخاصية "لكل $(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2$ فإن $p(a_1, a_2)$ يكون تقرير له قيمة حقيقة صواب أو خطأ."

مثال ٢٦ :

١ - نفرض أن A_1 مجموعة من الأولاد وان A_2 مجموعة من البنات. أذن "x اخ y " تمثل دالة افتراضية للمجموعة $A_1 \times A_2$.

٢ - نفرض N مجموعة الأعداد الطبيعية. أذن " $2x + y < 6$ " تمثل دالة افتراضية فى متغيرين $p(x, y)$ للمجموعة $N \times N$. ولإيجاد مجموعة الصواب للدالة $p(x, y)$ نلاحظ أن المتباينة $2x + y < 6$ تكون صواب فى الحالات الآتية:

$x = 1$, $y = 1$
$x = 1$, $y = 2$
$x = 2$, $y = 1$

أذن مجموعة الصواب تكون

$$T_p = \{(1,1), (1,2), (2,1)\}$$

وبوجه عام :

للمجموعات $A_1 , A_2 , \dots , A_n$ فإن الدالــــة الافتراضيــــة (فى n مـــن المتغـــيرات) للمجموعـــــة $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ يرمـــز لهـــا $p(x_1 , x_2 , \dots , x_n)$ وتحقق الخاصية

"لكل $(a_1 , a_2 , \dots , a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ فإن $p(a_1 , a_2 , \dots , a_n)$ يكون تقرير له قيمة حقيقة صواب أو خطأ"

مثال ٢٧ : نفرض N مجموعة الأعداد الطبيعية. أذن " $x + 2y + 3z < 9$ " تمثل دالــة افتراضية فى ثلاث متغيرات $p(x , y , z)$ للمجموعة $N \times N \times N$. ولإيجــاد مجموعة الصواب للدالة $p(x , y , z)$ نلاحظ أن المتباينة $x + 2y + 3z < 9$ تكون صواب فى الحالات الآتية:

$$x = 1 \quad , \quad y = 1 \quad , \quad z = 1$$
$$x = 1 \quad , \quad y = 2 \quad , \quad z = 1$$
$$x = 2 \quad , \quad y = 1 \quad , \quad z = 1$$
$$x = 3 \quad , \quad y = 1 \quad , \quad z = 1$$

اذن مجموعة الصواب تكون

$$T_p = \{ (1,1,1) , (1,2,1) , (2,1,1) , (3,1,1) \}$$

ملاحظة :

الدالة الافتراضية المسبوقة بمقياس (شامل أو وجود) لكل متغير فيها تكون تقرير له قيمة حقيقة.

فمثلا إذا كان $p(x,y)$ دالة افتراضية فى $A_1 \times A_2$ فإن

$$\forall x, \exists y : p(x, y)$$

يقرأ

"لكل $x \in A_1$ يوجد $y \in A_2$ بحيث أن $p(x,y)$ صواب"

ويمثل تقرير له قيمة حقيقة، بينما إذا كان $p(x,y)$ مسبوقة بمقياس لمتغير واحد فإنها تكــون دالة افتراضية للمتغير الآخر، فمثلا

$$\exists y : p(x, y)$$

تمثل دالة افتراضية للمتغير y . وبتطبيق نظرية ديمورجان يمكن نفى تقارير تحتوى على مقــاييس متعددة.

مثال ٢٨ : نفرض

$$\{ \text{احمد ، حسن ، محمود} \} = A_1$$
$$\{ \text{سعاد ، مريم} \} = A_2$$

ونفرض الدالة الافتراضية $p(x,y)$ للمجموعة $A_1 \times A_2$ هى "x أخ y". أذن التقرير

$$\forall x \in A_1, \exists y \in A_2 : p(x, y)$$

يقرأ

"لكل $x \in A_1$ يوجد $y \in A_2$ بحيث ان x أخ y"

أى إن لكل عنصر فى A_1 يوجد أخ إما لسعاد أو مريم ونفى هذا التقرير يكون كالآتى :

$$\sim \left(\forall x, \exists y : p(x, y) \right) \equiv \exists x : \sim \left(\exists y : p(x,y) \right)$$
$$\equiv \exists x : \forall y, \sim p(x, y)$$

أى إن نفى التقرير يكون "يوجد على الأقل رجل ليس أخ لأى من النساء"

مثال ٢٩ : نفرض أن $\{1,2,3\}$ هي مجموعة التعويض. حدد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية:

$$1-\quad \exists x : \forall y ,\ x^2 < y+1$$
$$2-\quad \forall x , \exists y :\ x^2 + y^2 < 12$$
$$3-\quad \forall x , \forall y ,\ x^2 + y^2 < 12$$
$$4-\quad \exists x : \forall y , \exists z :\ x^2 + y^2 < 2z^2$$
$$5-\quad \exists x : \exists y : \forall z ,\ x^2 + y^2 < 2z^2$$

الحل :

١ - صواب : بأخذ $x_0 = 1$ فإن المتباينة $1 < y+1$ متحققة لجميع قيم $y \in \{1,2,3\}$.

٢ - صواب : لكل $x_0 \in \{1,2,3\}$ بأخذ $y = 1$ فإن المتباينة $x_0^2 + 1 < 12$ تكون متحققة.

٣ - خطأ : بأخذ $y_0 = 2$, $x_0 = 3$ فإن $x_0^2 + y_0^2 = 9 + 4 = 13$ أى إن المتباينة $x_0^2 + 1 < 12$ تكون غير متحققة.

٤ - صواب : بأخذ $x_0 = 1$ فإن المتباينة $1 + y^2 < 2z^2$ تكون متحققة لجميع قيم $y, z \in \{1,2,3\}$.

٥ - خطأ : بأخذ $z_0 = 1$ فإنه لا يوجد x_0 أو y_0 فى المجموعة $\{1,2,3\}$ بحيث يحقق المتباينة $x^2 + y^2 < 2$.

مثال ٣٠ : نفرض أن $A = \{1,2,3,4,5,6\}$. فى كل مما يأتى وضح ما إذا كانت الجملة تمثل تقرير أو دالة افتراضية وإذا كانت الجملة تمثل تقرير أوجد قيمة الحقيقة وإذا كانت تمثل دالة افتراضية أوجد مجموعة الصواب:

$$1-\quad \forall x \in A , \exists y \in A :\ x + y < 8$$
$$2-\quad \forall y \in A ,\ x + y < 8$$
$$3-\quad \forall x \in A , \forall y \in A ,\ x + y < 8$$
$$4-\quad \exists x \in A :\ x + y < 8$$
$$5-\quad \exists x \in A : \forall y \in A ,\ x + y > 5$$

الحل :

١ - دالة افتراضية فى متغيرين مسبوقة بمقياسين. أذن هى تمثل تقرير، ولإيجاد قيمة الحقيقة نلاحظ انه لكل $x \in A$ يوجد $y \in A$ (مثلا $y = 1$) بحيث أن $x + 1 < 8$ متحققة وبالتالى قيمة الحقيقة للتقرير هى صواب .

٢ - دالة افتراضية فى متغيرين مسبوقة بمقياس واحد فقط للمتغير y. أذن هى تمثل دالة افتراضية للمتغير الآخر x ، ولإيجاد مجموعة الصواب نلاحظ ان لكل $y \in A$ فإن $x_0 + y < 8$ فقط إذا كان $x_0 = 1$ وبالتالى فإن مجموعة الصواب تكون $\{1\}$.

٣ - دالة افتراضية فى متغيرين مسبوقة بمقياسين. أذن هى تمثل تقرير، ولإيجاد قيمة الحقيقة نلاحظ انه بأخذ $y_0 = 5$, $x_0 = 6$ فإن $x_0 + y_0 = 6 + 5 = 11$ أى إن المتباينة $x_0 + y_0 < 8$ غير متحققة وبالتالى قيمة الحقيقة للتقرير هى خطأ.

٤ - دالة افتراضية فى متغيرين مسبوقة بمقياس واحد فقط للمتغير x . أذن هى تمثل دالة افتراضية للمتغير الآخر y ، ولإيجاد مجموعة الصواب نلاحظ انه بأخذ $x_0 = 1$ فإن المتباينة $1 + y < 8$ تتحقق لكل $y \in A$ وبالتالى فإن مجموعة الصواب تكون هى المجموعة A نفسها.

٥ - دالة افتراضية فى متغيرين مسبوقة بمقياسين . أذن هى تمثل تقرير ، ولإيجاد قيمة الحقيقة نلاحظ انه يوجد $x \in A$ (مثلا $x = 6$) بحيث أن لكل $y \in A$ يتحقق ان $6 + y > 5$ وبالتالى قيمة الحقيقة للتقرير هى صواب.

مثال ٣١ : أوجد نفى كل من التقارير الآتية :

1 – $\exists x : \forall y , p(x , y)$

2 – $\forall x , \forall y , p(x , y)$

3 – $\exists y : \exists x : \forall z , p(x , y, z)$

$$4-\quad \exists x:\forall y,\ \big(p(x,y)\rightarrow q(x,y)\big)$$
$$5-\quad \exists z:\forall x,\exists y:\ \big(p(x,y,z)\vee q(x,y,z)\big)$$

الحل :

$$1-\quad \sim\big(\exists x:\forall y,\ p(x,y)\big)\equiv \forall x,\sim\big(\forall y,\ p(x,y)\big)$$
$$\equiv \forall x,\exists y:\sim p(x,y)$$

$$2-\quad \sim\big(\forall x,\forall y,\ p(x,y)\big)\equiv \exists x:\sim\big(\forall y,\ p(x,y)\big)$$
$$\equiv \exists x:\exists y:\sim p(x,y)$$

$$3-\quad \sim\big(\exists y:\exists x:\forall z,\ p(x,y,z)\big)\equiv \forall y,\sim\big(\exists x:\forall z,p(x,y,z)\big)$$

$$\equiv \forall y,\forall x,\sim\big(\forall z,p(x,y,z)\big)$$
$$\equiv \forall y,\forall x,\ \exists z:\sim p(x,y,z)$$

$$4-\quad \sim\big(\exists x:\forall y,\big(p(x,y)\rightarrow q(x,y)\big)\big)\equiv\forall x,\sim\big(\forall y,\big(p(x,y)\rightarrow q(x,y)\big)\big)$$

$$\equiv\forall x,\exists y:\sim\big(p(x,y)\rightarrow q(x,y)\big)$$
$$\equiv\forall x,\exists y:p(x,y)\wedge\sim q(x,y)$$

$$5-\quad \sim\big(\exists z:\forall x,\exists y:\ \big(p(x,y,z)\vee q(x,y,z)\big)\big)$$
$$\equiv\forall z,\exists x:\forall y,\sim\big(p(x,y,z)\vee q(x,y,z)\big)$$
$$\equiv\forall z,\exists x:\forall y,\sim p(x,y,z)\wedge\sim q(x,y,z)$$

مثال ٣٢ : أوجد نفى التقرير " $\forall n\ ,n\geq 4\ \rightarrow\ 2^n\leq n!$ "

الحل : نفرض التقرير p : " $n\geq 4$ "

التقرير q : " $2^n\leq n!$ "

أذن التقرير المعطى يمكن كتابته بالصورة $\forall n\ ,\ p\rightarrow q$ وحيث أن

$$\sim\big(\forall n\ ,\ p\rightarrow q\big)\equiv\ \exists n:\sim\big(p\rightarrow q\big)$$
$$\equiv\ \exists n:\big(p\ \wedge\sim q\big)$$

أذن نفى التقرير يكون " $\exists n:\ n\geq 4\ \wedge\ 2^n>n!$ "

مثال ٣٣ : أوجد نفى التقرير

" إذا كان $x \le x^t$ لكل $t \in (0,1)$ فإن $x \le 1$ ".

الحل : نفرض

التقرير p : " $x \le x^t$ لكل $t \in (0,1)$ "

التقرير q : " $x \le 1$ "

أذن التقرير المعطى يمكن كتابته بالصورة $p \to q$

وحيث أن

$$\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$$
$$\equiv \left(\forall t \in (0,1) , \ x \le x^t\right) \wedge (x > 1)$$

أذن نفى التقرير يكون

" $x \le x^t$ لكل $t \in (0,1)$ و أيضا $x > 1$ ".

مثال ٣٤ : أوجد نفى التقرير

"إذا كانت المتتابعة $\{a_n\}$ تقاربية للعدد ℓ فإنـــه لكــل $\varepsilon > 0$ يوجــد عــدد طبيعى n_0 بحيث أن $n \ge n_0 \to |a_n - \ell| < \varepsilon$ "

الحل : نفرض

التقرير p : " المتتابعة $\{a_n\}$ تقاربية للعدد ℓ "

التقرير q : " $\forall \varepsilon > 0 , \exists \ n_0 : \ n \ge n_0 \to |a_n - \ell < \varepsilon$ "

أذن التقرير المعطى يمكن كتابته بالصورة $p \to q$

وحيث أن

$$\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q \quad ,$$
$$\sim q \equiv \ \sim \left(\forall \varepsilon > 0 , \exists \ n_0 : \ n \ge n_0 \to |a_n - \ell| < \varepsilon \right)$$
$$\equiv \ \exists \varepsilon > 0 : \forall \ n_0 , \sim \left(n \ge n_0 \to |a_n - \ell| < \varepsilon \right)$$
$$\equiv \ \exists \varepsilon > 0 : \forall \ n_0 , \left(n \ge n_0 \wedge |a_n - \ell| \ge \varepsilon \right)$$

أذن نفى التقرير يكون

" المتتابعة $\{a_n\}$ تقاربية للعدد ℓ ويوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن لكل n_0 فــإن $n \geq n_0$
وأيضا $|a_n - \ell| \geq \varepsilon$ "

مثال ٣٥ : أوجد نفى التقرير

" إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ فإنه لكل $\varepsilon > 0$ يوجـد $\delta > 0$
بحيث أن $|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ "

الحل : نفرض

التقرير p : " الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ "

التقرير q : " $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ "

أذن التقرير المعطى يمكن كتابته بالصورة $p \rightarrow q$

وحيث ان

$$\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q \quad ,$$

$$\begin{aligned}
\sim q &\equiv \sim \left(\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right) \\
&\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \sim \left(|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \right) \\
&\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0, \left(|x - x_0| < \delta \wedge |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon \right)
\end{aligned}$$

أذن نفى التقرير المعطى يكون

" الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = x_0$ ويوجد $\varepsilon > 0$ بحيث أن لكل $\delta > 0$ فإن $|x - x_0| < \delta$ وأيضا $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$ ".

مثال ٣٦ : أوجد نفى التقرير

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n, \left(n > n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon \right)$$

الحل :

$$\begin{aligned}
&\sim \left(\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 : \forall n, \left(n > n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon \right) \right) \\
&\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0, \exists n, \sim \left(n > n_0 \rightarrow |a_n| < \varepsilon \right) \\
&\equiv \exists \varepsilon > 0 : \forall n_0, \exists n, \left(n > n_0 \wedge |a_n| \geq \varepsilon \right)
\end{aligned}$$

تمارين الفصل الرابع

١ - نفرض أن $p(x)$ ترمز إلى الجملة " $x^2 + 3 > 7$ ". حدد ما إذا كانت $p(x)$ تمثل دالة افتراضية لكل من المجموعات الآتية وإذا كانت $p(x)$ دالة افتراضية أوجد مجموعة الصواب:

١) مجموعة الأعداد الطبيعية N .

٢) مجموعة الأعداد الصحيحة I .

٣) مجموعة الأعداد الحقيقية R .

٤) مجموعة الأعداد المركبة C .

٥) المجموعة A حيث $A = \{0, 1\}$.

٦) المجموعة A حيث $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

٧) المجموعة A حيث $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$.

٨) الفترة المفتوحة $(1, 4)$.

٩) الفترة المغلقة $[a, b]$ حيث $0 < a < b < 1$.

١٠) الفترة المغلقة $[a, b]$ حيث $-3 < a < b < 3$.

٢ - أوجد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية ثم عبر عن كل منها فى صورة إنشائية :

1) $(\forall\ n \in N)(n + 1 \geq 2)$

2) $\exists\, x \in R : x^2 + 1 = 0$

3) $(\forall\ n \in I)\left(n^2 - 1 > 0\right)$

4) $\exists\ n \in N\ :\ 50 \leq n^2 < 100$

5) $\forall\, x \in (0,1]\ ,\ x^2 < 1$

6) $\forall x \in (0,1] \;,\; x^2 \leq 1$

7) $\exists\; n \in N \;:\; \left(n^2 - 30 > 0\right) \wedge \left(n^4 < 60\right)$

8) $\exists\; n \in N \;:\; \left(n^2 \leq 20\right) \wedge \left(n > 3\right)$

9) $\forall\; n \in \{1,2,3,4,5\},\; \left(n^2 \leq 21\right) \vee \left(n^3 > 60\right)$

10) $\forall\; n \in \{1,2,3,4,5\},\; n^2 \leq 10 \;\rightarrow\; n^3 < 30$

٣ – فى كل من التقارير الآتية حدد نوع المقياس (شامل – وجود) وأوجد نفى التقرير ثم اعد صياغة التقرير ونفيه فى صورة رمزية :

١) لكل مجتهد نصيب .

٢) يوجد بعض الطلاب لا يستخدمون الكومبيوتر .

٣) جميع مقررات الرياضيات شيقة ويمكن فهمها بسهولة .

٤) كل الأعداد الفردية تقبل القسمة على 3 أو 5 .

٥) بعض الأعداد الأولية تكون أعداد زوجية .

٦) يوجد حل للمعادلة $x^2+1=0$ فى مجموعة الأعداد المركبة .

٧) من نقطة خارج مستقيم معلوم يوجد مستقيم يمر بالنقطة ويوازى المستقيم المعلوم.

٨) كل زاويتان متتامتان مجموعها يساوى قائمة .

٩) منصفات زوايا المثلث تتقاطع جميعها فى نقطة واحدة .

١٠) الدالة الآسية e^x دالة موجبة لجميع قيم x الحقيقية .

٤ – بفرض أن مجموعة التعويض هى مجموعة الأعداد الحقيقية R،حدد قيمة الحقيقة فى كـــل من التقارير الآتية :

1 - $\forall x \;,\; |x| = |-x|$

2 - $\forall x \;,\; x - 2 > 0$

3 - $\exists x \;:\; \log(x) < 0$

4 - $\exists x \;:\; \log(x) = e^x$

5- $\exists x : x^2 = x$

6- $\exists x : x^2+6 < 0$

7- $\exists x : x + 1 \geq 0$

8- $\forall x , e^x > 0$

9- $\exists x : e^x \leq 0$

10- $\forall x , x>7 \rightarrow x>2$

وبفرض أن مجموعة التعويض هى الفترة المغلقة $A = [-1 , 1]$ ، حدد قيمة الحقيقة فى كل من التقارير المعطاة.

٥ - أوجد نفى كل من التقارير الآتية :

١) جميع الطلاب مجتهدون ولكل مجتهد نصيب .

٢) كل الطلاب يستخدمون الكومبيوتر ولكن بعضهم لا يصممون برامج بلغات الكومبيوتر.

٣) الشرط الضرورى لتلاشى كل السحب اليوم هو سقوط بعض الأمطار .

٤) الأعداد الأولية جميعها أعداد فردية إذا كان العدد 2 عدد غير أولى .

٥) جميع الأعداد الأولية إما تقبل القسمة على الواحد الصحيح أو على نفسها .

٦ - أوجد فى ابسط صورة نفى كل من التقارير الآتية :

1- $(\forall x , p(x)) \wedge (\forall y, \sim q(y))$

2- $(\exists x : p(x)) \vee (\exists y : q(y))$

3- $(\forall x , p(x)) \rightarrow (\exists y : q(y))$

4- $\forall x , \exists y : \sim p(x) \vee q(y)$

5- $\exists y : \forall x , \sim (p(x) \wedge \sim q(y))$

٧ - نفرض المجموعة $B = \{2, 4, 6, 8\}$. أعطى مثالا عكسيا أن أمكن لكل من التقارير الآتية :

1- $\forall\ x \in B \ ,\ x - 4 > 0$

2- $\forall\ x \in B \ ,\ x^2 \le 2^x$

3- $\forall\ x \in B \ ,\ 5x + 1 \ge x^2$

4- $\forall\ x \in B$, x عامل من عوامل العدد 16

5- $\forall\ x \in B$, x عدد زوجي

٨ - نفرض أن $\{1, 2, 3, 4\}$ هى مجموعة التعويض. حدد قيمة الحقيقة لكل من التقارير الآتية:

1 – $\exists\ x : \forall\ y\ ,\ x + 1 < y$

2 – $\forall\ x\ , \exists\ y :\ x^2 + y < 18$

3 – $\forall\ x\ , \forall\ y\ ,\ x^2 + y^2 \ge 3$

4 – $\exists\ x : \forall\ y\ , \forall\ z\ ,\ x^2 + y^2 \le 3z^2$

5 – $\forall\ x : \exists\ y : \forall\ z\ ,\ x^2 + y^2 > 2z^2$

٩ - نفرض أن $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. فى كل مما يأتى وضح ما إذا كانت الجملة تمثل تقرير أو دالة افتراضية وإذا كانت الجملة تمثل تقرير أوجد قيمة الحقيقة وإذا كانت تمثل دالة افتراضية أوجد مجموعة الصواب:

1 – $\forall\ x \in A\ , \exists\ y \in A :\ x + 2y < 10$

2 – $\exists\ y \in A :\ 3x + y < 7$

3 – $\exists\ x \in A : \forall\ y \in A\ ,\ x + y < 6$

4 – $\forall\ x \in A :\ x^2 - y \ge 0$

5 – $\exists\ x \in A : \forall\ y \in A\ ,\ x^2 + y^2 > 5$

١٠ - أوجد نفى كل من التقارير الآتية :

1- $\exists x : \forall y , \sim p(x,y)$

2 - $\forall x , \exists y : p(x,y) \vee q(x,y)$

3- $\forall y , \exists x : \forall z , p(x,y,z)$

4- $\forall x , \forall y , \left(p(x,y) \rightarrow q(x,y) \right)$

5- $\exists z : \forall x , \exists y : \left(\sim p(x,y,z) \wedge q(x,y,z) \right)$

6- $\left(\exists x : \forall y , \sim p(x,y) \right) \wedge \left(\forall x , \forall y , q(x,y) \right)$

7- $\left(\forall x , \exists y : p(x,y) \right) \rightarrow \left(\forall x , \exists y : q(x,y) \right)$

8- $\left(\forall x , \exists y : p(x,y) \right) \vee \left(\exists x : \exists y : p(x,y) \rightarrow q(x,y) \right)$

9- $\left(\forall x , \exists y : p(x,y) \right) \rightarrow \left(\exists x : \forall y , p(x,y) \rightarrow q(x,y) \right)$

10- $\left(\exists x : \exists y , p(x,y) \right) \vee \left(\forall x , \forall y , p(x,y) \wedge q(x,y) \right)$

١١ - استخدم قانون ديمورجان لإيجاد تقرير مكافئ فى كل من التقارير الآتية :

1- $\left(\forall x , p(x) \right) \wedge \left(\forall y , \sim q(y) \right)$

2- $\left(\exists x : p(x) \right) \vee \left(\exists y : q(y) \right)$

3- $\left(\exists x , \sim p(x) \right) \wedge \left(\forall x , \sim q(x) \right)$

4- $\left(\exists x : \sim p(x) \right) \rightarrow \left(\forall x , q(x) \right)$

5- $\left(\forall x , p(x) \right) \rightarrow \left(\exists x : q(x) \right)$

6- $\left(\exists x : \forall y , \sim p(x,y) \right) \wedge \left(\forall x , \forall y , q(x,y) \right)$

7- $\sim \left(\left(\exists x : \forall y , p(x,y) \right) \rightarrow \left(\forall x , \exists y : \sim q(x,y) \right) \right)$

8- $\left(\forall x , \exists y : p(x,y) \right) \vee \left(\exists x : \exists y : p(x,y) \rightarrow q(x,y) \right)$

9- $\left(\forall x , \forall y , p(x,y) \right) \rightarrow \left(\exists x : \forall y , \sim p(x,y) \rightarrow q(x,y) \right)$

10- $\left(\forall x , \exists y , p(x,y) \right) \wedge \left(\forall x , \forall y , p(x,y) \vee \sim q(x,y) \right)$

١٢ – أوجد نفى وعكس ومقلوب ومضاد كل من التقارير الآتية :

١) الدالة $f(x)$ تكون دالة تصاعدية إذا كان لكل x , y حيث $x \le y$ فإن $f(x) \le f(y)$.

٢) إذا قطع مستقيم مستقيمان متوازيان فإن كل زاويتان متبادلتان متساويتان فى القياس وكل زاويتان متناظرتان متساويتان فى القياس.