الفصل

5

الأسباب المنطقية

Logical Reasoning

كثير من الحجج (القضايا) التى نتعامل معها فى حياتنا تكون بحاجة إلى إثبات وبدون تقديم الإثبات تبقى مثل هذه الحجج مجرد ادعاءات معلقة إلى أن يتم إثبات صحتها أو إثبات عدم صحتها، ومن الأهداف الأساسية للمنطق هو الاهتمام بإثبات صحة الحجج وكذلك الاهتمام بوضع الإثبات فى خطوات منظمة دون غموض أو إبهام، فأحيانا نتعامل مع حجة (قضية) صحيحة ولكن الإثبات الذى وضع لها مبهم ولا يفى بالغرض. وأحيانا نسمع بعض الكلمات مثل "التفكير المنطقى -الإثبات المنطقى" أو نسمع من يصف شخصا بقوله

- انه يتحدث بطريقة منطقية
- انه يفكر بطريقة غير منطقية
- انه يفكر بطريقة منطقية

وربما يتساءل البعض " ما المقصود بالطريقة المنطقية ؟ "

وهذا ما سنجيب ونركز عليه فى دراستنا لهذا الفصل .

١ - الحجة (الإثبات) Argument (Proof)

تعريف ١ : الحجة **Argument** (أو الإثبات **Proof**) تتكون من جزئين أساسيين، الجزء الأول يمثل مجموعة من التقارير المعطاة $S_1 , S_2 , \dots , S_n$ تسمى معطيات الحجة أو مقدمات منطقية **premises** وهذه المقدمات تؤدى إلى الجزء الثانى وهو تقرير آخر يسمى النتيجة أو الاستنتاج **conclusion** ، ومثل هذه الحجة سيرمز لها بالصورة $S_1 , S_2 , \dots , S_n \ \alpha \ S$ حيث الرمز α يعنى " يؤدى إلى " .

ونلاحظ من التعريف أن الحجة تمثل تقرير، ولذلك فإن الحجة لها قيمة حقيقة وإذا كانت قيمة الحقيقة صواب فإن الحجة تسمى حجة ملزمة **valid** وبمعنى آخر نقول ان الإثبات منطقى، وإذا كانت قيمة الحقيقة خطأ فإن الحجة تسمى حجة غير ملزمة **invalid** وبمعنى آخر نقول ان الإثبات غير منطقى، أى إن

الحجة تكون ملزمة إذا كانت المقدمات تؤدى إلى الاستنتاج بشكل منطقى .

ولتحديد أن الحجة ملزمة

نربط المقدمات المنطقية للحجة معا بواسطة أداة الوصل **conjunction** والتقرير المركب الناتج يستخدم كمقدمة **antecedent** لتقرير من نوع الشرطية **conditional** "إذا كان . . . فإن . . . " واستنتاج الحجة يمثل النتيجة **consequent** للشرطية، وإذا كانت الشرطية صائبة منطقيا **tautology** فهذا يعنى أن الحجة ملزمة إما إذا كانت الشرطية غير صائبة منطقيا فهذا يعنى أن الحجة غير ملزمة.

وعند تكوين التقرير الشرطى يراعى استخدام الأقواس فى التقارير التى تحتوى على اكثر من رمز وذلك منعا لحدوث أى أخطاء فى فهم التقرير الشرطى .

تعريف ٢ : الحجة (أو الإثبات) $S_1 , S_2 , \dots , S_n \ \alpha \ S$ تكون ملزمة إذا كان التقرير المركب $(S_1 \wedge S_2 \wedge \dots \wedge S_n) \rightarrow S$ صائب منطقيا **tautology** وفى هذه الحالة نقول ان الإثبات منطقى.

ويمكن تحديد إلزامية الحجة بأكثر من طريقة كما سنوضح بالأمثلة الآتية :

مثال ١ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

إذا كان الشكل المعطى مربع فإنه يكون مستطيل .

الشكل المعطى مربع .

أذن الشكل المعطى يكون مستطيل .

الحل : نفرض التقارير

p : الشكل المعطى مربع

q : الشكل المعطى مستطيل

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$$S_1 \ : \ p \rightarrow q$$
$$S_2 \ : \ p$$

$$S \ : \ q$$

التقريران S_2 , S_1 اعلى الخط يرمزان إلى المقدمات المنطقية والتقرير S الموجود اســـــفل الخط يرمز إلى الاستنتاج.

الطريقة الأولى :

بربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$$(p \rightarrow q) \wedge p \ \rightarrow \ q$$

المقدمات المنطقية   الاستنتاج

وبتكوين جدول الحقيقة للتقرير الشرطى $(p \rightarrow q) \wedge p \ \rightarrow \ q$

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

نلاحظ من العمود الأخير بالجدول ان التقرير الشرطى $(p \rightarrow q) \wedge p \ \rightarrow \ q$ صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة. ومن جدول الحقيقة نلاحظ ما يأتى:

١ – الحجة الملزمة يمكن أن يكون لها استنتاج صواب أو خطأ ، أى إن

"صواب أو خطأ الاستنتاج للحجة لا يحدد إلزامية الحجة"

وأيضا

" إلزامية الحجة لا تضمن أن يكون استنتاجها صواب"

وهذا واضح من الجدول حيث نجد ان الاستنتاج q خطأ فى حالات (الصفـــوف ٢، ٤) بينمـا الحجة ملزمة .

٢ – إذا كانت المقدمات المنطقية للحجة صواب فإنه لكى تكون الحجة ملزمة يجب أن يكـون الاستنتاج صواب، واعتمادا على هذا فانه يمكن حل المثال (١) بطريقة ثانية كالآتى:

الطريقة الثانية :

نكون جدول الحقيقة لكل من المقدمات المنطقية والاستنتاج

المقدمات المنطقية

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

الاستنتاج

وفى الجدول نبحث عن جميع الحالات التى يكون فيها المقدمات المنطقية صواب معـدثم ننظر إلى النتيجة فى هذه الحالات فإذا كانت النتيجة صواب فإن الحجة تكون ملزمـة. وفى هذا المثال نلاحظ من الجدول أن المقدمات المنطقية p , $(p \rightarrow q)$ صـــواب معا فى حالة واحدة فقط بالصف الأول ويكون عندها الاستنتاج q صواب أيضـــا فى الصف الأول وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة، ومن ذلك يمكننا القول

إذا كان لدينا حجة جميع مقدماتها المنطقية صواب بينما
الاستنتاج خطأ فإن الحجة تكون غير ملزمة

تعريف ٣: الحجة $S_1 , S_2 , \ldots , S_n \;\alpha\; S$ تكون غير ملزمة إذا استطعنا إيجاد حالة واحدة على الأقل تأخذ فيها جميع المقدمات المنطقية القيمة صواب بينما يأخذ الاستنتاج القيمة خطأ.

مثال ٢ : حدد بطريقتين مختلفتين ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة:

إذا فهم الطالب الرياضيات فإنه سوف ينجح فى الامتحان .
الطالب نجح فى الامتحان .
أذن الطالب فهم الرياضيات .

الحل : نفرض التقارير

p : الطالب فهم الرياضيات
q : الطالب نجح فى الامتحان

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$$\begin{array}{lll} S_1 & : & p \to q \\ S_2 & : & q \\ \hline S & : & p \end{array}$$

__الطريقة الأولى :__

بربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$$(p \to q) \wedge q \to p$$

المقدمات المنطقية الاستنتاج

وبتكوين جدول الحقيقة

p	q	(p	→	q)	∧	q	→	p
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T	F	F
F	F	F	T	F	T	F	T	F
1	2	1	3	2	4	2	5	1

ومن الجدول بالخطوة رقم 5 يتضح أن التقريـــــر الشـــرطى $p \rightarrow q \wedge (q\rightarrow p)$ غير صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون غير ملزمة.

الطريقة الثانية :

نكون جدول الحقيقة لكل من المقدمات المنطقية والاستنتاج

المقدمات المنطقية

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

الاستنتاج

وفى الجدول نبحث عن جميع الحالات التى يكون فيها المقدمات المنطقية صواب معا ثم ننظــر إلى النتيجة فى هذه الحالات فإذا استطعنا أيجاد حالة واحدة على الأقل تأخذ فيها جميع المقدمـــات المنطقية القيمة صواب بينما يأخذ الاستنتاج القيمة خطأ فإن الحجة تكون غير ملزمـــة. ومـــن الجدول نلاحظ أن المقدمات المنطقية لا تؤدى إلى الاستنتاج فى جميع الحالات، فمثلا فى الصـــف الأول المقدمات المنطقية q , $p \rightarrow q$ صواب والاستنتاج p صواب أيضا، ولكـــن فى الصف الثالث المقدمات المنطقية q , $p \rightarrow q$ صواب بينما الاستنتاج p خطأ وبالتـلى فإن الحجة تكون غير ملزمة.

مثال ٣ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

إذا فهم الطالب الرياضيات فإنه سوف ينجح فى الامتحان .

الطالب لم ينجح فى الامتحان .

أذن الطالب لم يفهم الرياضيات .

الحل : نفرض التقارير

p : الطالب فهم الرياضيات

q : الطالب نجح فى الامتحان

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$$S_1 \; : \; p \to q$$
$$S_2 \; : \; \sim q$$

$$\overline{\hspace{4cm}}$$

$$S \; : \; \sim p$$

وبربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$$(p \to q) \wedge \sim q \to \sim p$$

المقدمات المنطقية   الاستنتاج

وبتكوين جدول الحقيقة

p	q	(p	→	q)	∧	~	q	→	~	p
T	T	T	T	T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	F	F	F	T	F	T	F	T
F	T	F	T	T	F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	F	T	T	F	T	T	F
1	2	1	3	2	5	4	2	7	6	1

ومن الجدول نلاحظ من العمود فى الخطوة رقم 7 أن التقرير الشرطى $(p \to q) \wedge \sim q \to \sim p$ صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة.

ونأتى الآن إلى السؤال التالى :

إذا كان واحد أو اكثر من المقدمات المنطقية خطأ وكذلك الاستنتاج خطأ فهل يمكن أن تكون الحجة ملزمـــة ؟

وللتعرف على إجابة لهذا السؤال نناقش المثال الآتى :

مثال ٤ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

إذا كان مجموع زوايا المثلث 300 درجة فإن $1 = 2$.

مجموع زوايا المثلث 300 درجة .

أذن $1 = 2$.

الحل : نفرض التقارير

p : مجموع زوايا المثلث 300 درجة

q : $1 = 2$

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$$\begin{array}{lll} S_1 & : & p \to q \\ S_2 & : & p \\ \hline S & : & q \end{array}$$

وبربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$$(p \to q) \wedge p \to q$$

الاستنتاج   المقدمات المنطقية

وبتكوين جدول الحقيقة

p	q	$(p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	p	$\rightarrow$	q
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	F	T	T	F
F	T	F	T	T	F	F	T	T
F	F	F	T	F	F	F	T	F
1	2	1	3	2	4	2	5	1

↑

ومن الجدول نلاحظ من العمود فى الخطوة رقم 5 أن التقرير الشرطى $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة. والحجة المعطاة فى مثال (٤) توضح لنا قاعدة أساسية فى المنطق تسمى قانون الانفصال law of detachment حيث نجد فى هذا المثال حجة ملزمة على الرغم من أن أجزاء من المقدمات المنطقية خطأ، فالتقرير "مجموع زوايا المثلث 300 درجة" خطأ وكذلك الاستنتاج والذى يمثله التقرير " 1 = 2 " هو خطأ أيضا وبالرغم من ذلك الحجة ملزمة، وهنا نؤكد على قاعدة هامة فى المنطق وهى

يوجد فرق بين إلزامية الحجة وحقيقتها ، فالحجة تكون ملزمة بسبب الطريقة المنطقية التى نحصل بها على الاستنتاج من المقدمات المنطقية وليس بسبب صحة أو معنى التقارير الموجودة بالحجة.

مثال ٥ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

المدرسة مغلقة أو الطلاب غير حاضرون .

الطلاب غير حاضرون .

أذن المدرسة ليست مغلقة .

الحل : نفرض p يرمز إلى التقرير "المدرسة مغلقة "، q يرمز إلى التقرير "الطلاب حاضرون"
أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$$S_1 \ : \ p \vee \sim q$$
$$S_2 \ : \ \sim q$$
$$\overline{\hspace{5em}}$$
$$S \ : \ \sim p$$

وبربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$$(p \vee \sim q) \wedge \sim q \ \rightarrow \ \sim p$$

المقدمات المنطقية   الاستنتاج

وبتكوين جدول الحقيقة

p	q	$(p$	$\vee$	$\sim$	$q)$	$\wedge$	$\sim$	q	$\rightarrow$	$\sim$	p
T	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T	F	F	F	T
F	T	F	F	F	T	F	F	T	T	T	F
F	F	F	T	T	F	T	T	F	T	T	F
1	2	1	4	3	2	5	3	2	7	6	1

ومن الجدول نلاحظ من العمود فى الخطوة رقم 7 أن التقرير الشرطى

$$(p \vee \sim q) \wedge \sim q \ \rightarrow \ \sim p$$

غير صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون غير ملزمة .

مثال ٦ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

سقوط المطر شرط ضرورى وكافى لتعمير الصحراء .

إذا تم تعمير الصحراء فإن الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة .

المطر يسقط .

أذن الصحراء يتم تعميرها والشباب يجدون فرص عمل جديدة .

الحل : نفرض التقارير

p : المطر يسقط

q : الصحراء يتم تعميرها

r : الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$$S_1 \ : \ p \leftrightarrow q$$
$$S_2 \ : \ q \rightarrow r$$
$$S_3 \ : \ p$$

$$S \ : \ q \wedge r$$

وبربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$$(p \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p \ \rightarrow \ (q \wedge r)$$

المقدمات المنطقية   الاستنتاج

وبتكوين جدول الحقيقة

p	q	r	(p	↔	q)	∧	(q	→	r)	∧	p	→	(q	∧	r)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	F	T	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	F	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	F	T	T	F	F	F
F	T	T	F	F	T	F	T	T	T	F	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	T	F	F	F	F	T	T	F	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	F	F	T	F	F	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	F	F	T	F	F	F
1	2	3	1	4	2	6	2	5	3	7	1	9	2	8	3

ومن الجدول بالعمود فى الخطوة 9 يتضح أن التقرير صائب منطقيا وبالتـالى الحجـة تكـون ملزمة.

مثال ٧ : أثبت بطريقتين مختلفتين أن الحجة الآتية ملزمة $(p\to\sim q),(r\to q),r\ \alpha\ \sim p$

الحل :

<u>الطريقة الأولى</u> :بربط المقدمات المنطقية معا بأداة الوصل فإن الشرطية تصبح

$$(p\to\sim q)\wedge(r\to q)\wedge r\ \to\ \sim p$$

المقدمات المنطقية　　　　الاستنتاج

p	q	r	(p	→	~	q)	∧	(r	→	q)	∧	r	→	~	p
T	T	T	T	F	F	T	F	T	T	T	F	T	T	F	T
T	T	F	T	F	F	T	F	F	T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	T	F	F	T	F	F	F	T	T	F	T
T	F	F	T	T	T	F	T	F	T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	F	T	F	T	T	T	T	T	T	T	T	T	F
F	T	F	F	T	F	T	T	F	T	T	F	F	T	T	F
F	F	T	F	T	T	F	F	T	F	F	F	T	T	T	F
F	F	F	F	T	T	F	T	F	T	F	F	F	T	T	F
1	2	3	1	5	4	2	7	3	6	2	8	3	10	9	1

ومن جدول الحقيقة بالعمود فى الخطوة 10 يتضح أن التقرير صائب منطقيا وبالتالى الحجة تكون ملزمة .

<u>الطريقة الثانية</u> : نكون جدول الحقيقة لكل من المقدمات المنطقية والاستنتاج

المقدمات المنطقية　　　　الاستنتاج

p	q	r	$p\to\sim q$	$r\to q$	$\sim p$
T	T	T	F	T	F
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
T	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	F	T
F	F	F	T	T	T

وفى الجدول نبحث عن جميع الحالات التى يكون فيها المقدمات المنطقية صواب معا ثم ننظــو إلى النتيجة فى هذه الحالات فإذا كانت النتيجة صواب فإن الحجة تكون ملزمة. وفى هـــذا المثـــال نلاحظ من الجدول أن المقدمات المنطقية r , $(r \to q)$, $(p \to \sim q)$ صواب معـدلى حالة واحدة فقط بالصف الخامس ويكون عندها الاستنتاج $\sim p$ صواب أيضـــا فى الصـــف الخامس وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة.

٢ – الحجج والافتراضات Arguments and Propositions

نفرض الافتراضات

$$P(p,q,\dots),\ P_1(p,q,\dots),\ P_2(p,q,\dots),\ \dots,\ P_n(p,q,\dots)$$

ومن تعريف الحجة الملزمة يمكننا القول أن الحجة

$$P_1(p,q,\dots),\ P_2(p,q,\dots),\ \dots,\ P_n(p,q,\dots)\ \alpha\ \ P(p,q,\dots)$$

تكون ملزمة إذا كانت

$$P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \Rightarrow P$$

أى إذا كان التقرير الشرطى $P_1 \wedge P_2 \wedge \dots \wedge P_n \to P$ صائب منطقيا.

ووفقا لمفهوم الإحلال يمكن صياغة النظرية الآتية :

نظرية ١ : (المفهوم الأساسى للحجج)

إذا كانت الحجة

$$P_1(p,q,\dots),\ P_2(p,q,\dots),\ \dots,\ P_n(p,q,\dots)\ \alpha\ \ P(p,q,\dots)$$

ملزمة ، اذن لأى تقارير $p', q', \dots$ فإن الحجة

$$P_1(p',q',\dots),\ P_2(p',q',\dots),\ \dots,\ P_n(p',q',\dots)\ \alpha\ \ P(p',q',\dots)$$

تكون أيضا ملزمة .

مثال ٨ : (قانون الانفصال)

الحجة $(p \rightarrow q), p \quad \alpha \quad q$ ملزمة ويمكن التحقق من ذلك بأكثر من طريقة

الطريقة الأولى :

بتكوين جدول الحقيقة للتقرير $(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$ وقد أثبتنا فى مثال (١) أن هذا التقرير صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة.

الطريقة الثانية :

من المعطيات p صواب

$p \rightarrow q$ صواب

ومن تعريف الشرطية وحيث أن p صواب أذن q صواب، وهذه الطريقة تعرف باسم البرهان المباشر، وسوف نتعرف عليها بالتفصيل فى طرق البرهان بالفصل السادس .

ومن هذا المثال ووفقا للمفهوم الأساسى للحجج يمكننا القول انه لأى حجة مقدماهًا المنطقية صواب وتكون على الصورة $p \,,\, p \rightarrow q$ فإن الاستنتاج q يكون صواب، فمثلا الحجة

إذا كانت الدالةf قابلة للتفاضل فإنها تكون متصلة.

الدالةf قابلة للتفاضل.

أذن الدالةf متصلة.

تكون على الصورة $(p \rightarrow q), p \quad \alpha \quad q$ وبالتالى هى حجة ملزمة.

مثال ٩ : الحجة $(p \rightarrow q), \sim q \quad \alpha \quad \sim p$ ملزمة ويمكن التحقق من ذلك بتكوين جدول الحقيقة للتقرير $(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$ وقد أثبتنا فى مثال (٣) أن هذا التقرير صائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون ملزمة، ووفقا للمفهوم الأساسى للحجج يمكننا القول انه لأى حجة مقدماهًا المنطقية $\sim q \,,\, p \rightarrow q$ صواب فإن الاستنتاج $\sim p$ يكون صواب، فمثلا الحجة

إذا كانت الدالة f قابلة للتفاضل فإنها تكون متصلة.

الدالة f غير متصلة.

أذن الدالة f غير قابلة للتفاضل.

تكون على الصورة $(p \rightarrow q) , \sim q \;\; \alpha \;\; \sim p$ وبالتالى هى حجة ملزمة.

مثال ١٠ : (قانون القياس المنطقى)

الحجة $(p \rightarrow q) , (q \rightarrow r) \;\; \alpha \;\; (p \rightarrow r)$ ملزمة ويمكن التحقق من ذلك بتكوين جدول الحقيقة للتقرير $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$

p	q	r	(p	→	q)	∧	(q	→	r)	→	(p	→	r)
T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F
T	F	T	T	F	F	F	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	F	T	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	T	T	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F	T	F	F	T	F	T	F
F	F	T	F	T	F	T	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	T	F	T	F	T	F	T	F
1	2	3	1	4	2	7	2	5	3	8	1	6	3

ومن الجدول بالعمود فى الخطوة 8 يتضح أن التقرير صائب منطقيا وبالتالى الحجة تكون ملزمة.

مثال ١١ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

إذا واظب الطالب على حضور محاضرات الرياضيات فإنه سوف يفهم الرياضيات .

إذا فهم الطالب الرياضيات فإنه سوف ينجح فى الامتحان .

أذن المواظبة على حضور المحاضرات شرط كافى للنجاح فى الامتحان .

الحل : نفرض التقارير

p : الطالب يواظب على حضور محاضرات الرياضيات

q : الطالب يفهم الرياضيات

r : الطالب ينجح فى الامتحان

أذن يمكن كتابة الحجة بالصورة

$$\begin{array}{l} S_1 : p \to q \\ S_2 : q \to r \\ \hline S : p \to r \end{array}$$

أى إن الحجة $S_1 , S_2 \ \alpha \ S$ تكون بالصورة $(p \to q), (q \to r) \ \alpha \ (p \to r)$

وهذه حجة ملزمة وفقا لقانون القياس المنطقى، أذن الحجة المعطاة تكون ملزمة.

مثال ١٢ : بطريقتين مختلفتين حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة

$$(p \to q), \sim p \ \alpha \ \sim q$$

الحل :

الطريقة الأولى : بتكوين جدول الحقيقة للتقرير $(p \to q) \wedge \sim p \to \sim q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \to q$	$(p \to q) \wedge \sim p$	$(p \to q) \wedge \sim p \to \sim q$
T	T	F	F	T	F	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T	T

من الجدول نلاحظ أن التقرير الشـــرطى $(p \to q) \wedge \sim p \to \sim q$ غير صـــائب منطقيا وبالتالى فإن الحجة تكون غير ملزمة.

الطريقة الثانية : من المعطيات $\sim p$ صواب، $p \to q$ صـــواب، أذن p خطـــأ، ومـــن تعريف الشرطية $p \to q$ وحيث أن p خطأ أذن q يمكن أن تكـــون صواب أو خطأ وبالتالى لا نستطيع معرفة قيمة حقيقـــة q ، أى إن الحجـــة تكون غير ملزمة .

٣ - الحجج والمقاييس Arguments and Quantifiers

نفرض أن $p(x)$ دالة افتراضية على المجموعة A. إذا كان التقريـر $\forall x \in A , p(x)$ صواب فإنه بصفة خاصة يكون $p(x_0)$ صواب للعنصر $x_0 \in A$ ، وبـــالمثل إذا كـــان $p(x_0)$ صواب لعنصر معين $x_0 \in A$ أذن التقرير " $\exists x \in A : p(x)$ " يكـــون صواب.

نظرية ٢ : الحجج الآتية تكون ملزمة :

$$1- \quad \left(\forall x \in A , p(x) \right) , \; x_0 \in A \quad \alpha \quad p(x_0)$$

$$2- \quad x_0 \in A \; , \; p(x_0) \; \alpha \quad \left(\exists x \in A : p(x) \right)$$

مثال ١٣ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة:

كل طلاب قسم الرياضيات أذكياء .

حسين طالب بقسم الرياضيات .

أذن حسين طالب ذكى .

الحل : نفرض أن M هى مجموعة طلاب قسم الرياضيات

$p(x)$ ترمز إلى " x طالب ذكى "

x_0 ترمز إلى " حسين "

أذن يمكن صياغة الحجة بالصورة

$$S_1 \; : \; \forall x \in M \; , \; p(x)$$
$$S_2 \; : \; x_0 \in M$$

$$S \; : \; p(x_0)$$

أى إن الحجة هى

$$\left(\forall x \in M , p(x) \right) , \; x_0 \in M \quad \alpha \quad p(x_0)$$

وهذه حجة ملزمة (نظرية (٢))، أذن الحجة المعطاة تكون ملزمة.

مثال ١٤ : حدد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

حسين طالب بقسم الرياضيات .

حسين طالب ذكي .

أذن يوجد على الأقل طالب ذكي بقسم الرياضيات .

الحل :

نفرض أن

M ترمز إلى مجموعة طلاب قسم الرياضيات

$p(x)$ ترمز إلى " x طالب ذكي "

x_0 ترمز إلى " حسين "

أذن يمكن صياغة الحجة بالصورة

$$S_1 : \quad x_0 \in M$$
$$S_2 : \quad p(x_0)$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$$S : \quad \exists\, x \in M : p(x)$$

اى إن الحجة هى

$$x_0 \in M \;,\; p(x_0) \;\; \alpha \;\; \big(\exists\, x \in M : p(x)\big)$$

وهذه حجة ملزمة (نظرية (٢)) ، أذن الحجة المعطاة تكون ملزمة .

٤ – التقارير المصورة بأشكال فن
Picturing Statements with Venn Diagrams

أشكال فن يمكن استخدامها لتحديد إلزامية أو عدم إلزامية بعض الأنواع من الحجج، ومن أمثلة هذه الأنواع ما يسمى بالقياسات المنطقية Syllogisms.

تعريف ٤ : القياس المنطقى **Syllogism** هى حجة تحتوى على ثلاث تقارير

المقدمة الكبرى **major premise**

المقدمة الصغرى **minor premise**

الاستنتاج **conclusion**

وكما نعلم فإن الحجة الملزمة هى حجة نحصل فيها على الاستنتاج بطريقة منطقية من المقدمات وفقا لقوانين المنطق. والمثال الآتى يمثل قياس منطقى **Syllogism** وهى حجة ملزمة:

كل طلاب قسم الرياضيات أذكياء .

لا يوجد إنسان ذكى ويكون ضعيف .

أذن لا يوجد طالب بقسم الرياضيات ضعيف .

نلاحظ فى هذا المثال أن كل تقرير يحتوى على مقياس مثل " كل " أو " لا يوجد ". والقياس المنطقى **Syllogism** التى سنتعامل معها هنا هى تقارير تحتوى على مقاييس ، وسوف نتعامل مع أربعة أنواع :

النوع الأول : التقرير الكلى الموجب **universal affirmative**

" لكل A يكون **B** "

وكمثال على ذلك التقرير " كل الطلاب أذكياء "

النوع الثانى : التقرير الكلى السالب **universal negative**

" لا يوجد **A** يكون **B** "

وكمثال على ذلك التقرير " لا يوجد طلاب أذكياء "

النوع الثالث : التقرير الخاص الموجب particular affirmative

" بعضA يكون B "

وكمثال على ذلك التقرير " بعض الطلاب أذكياء "

النوع الرابع : التقرير الخاص السالب particular negative

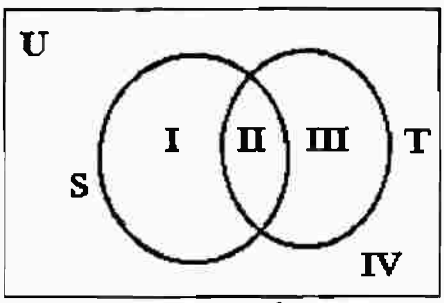
" بعض A لا يكون B "

وكمثال على ذلك التقرير " بعض الطلاب غير أذكياء "

وسوف نناقش الآن كيفية تمثيل كل من هذه الأنواع باستخدام أشكال فن .

النوع الأول : التقرير الكلى الموجب universal affirmative

نفرض التقرير " كل الطلاب أذكياء"، فى هذه الحالة لدينا مجموعتان ، المجموعة الأولى هى مجموعة الطلاب ونرمز لها بالرمز S والمجموعة الثانية هى مجموعة الناس الأذكياء ونرمز لها بالرمز T، والمجموعتان تقعان داخل المجموعة الشاملة وسوف نرمز لها دائما بالرمز U وهى تمثل هنا مجموعة كل الناس، ويتم تمثيل كل مجموعة على صورة دائرة ويفضل رسم الدائرتان متقاطعتان وذلك لدراسة جميع الاحتمالات الممكنة كما يفضل البدء برسم المجموعة S من اليسار يليها المجموعة T وفقا لترتيبهم فى التقرير كذلك نعطى ترقيم للمناطق المختلفة بالرسم وفى هذه الحالة (مجموعتان) تكون أربعة مناطق I , II , III , IV كما موضح بالشكل (١).



شكل (١)

S = مجموعة الطلاب ، T = مجموعة الناس الأذكياء

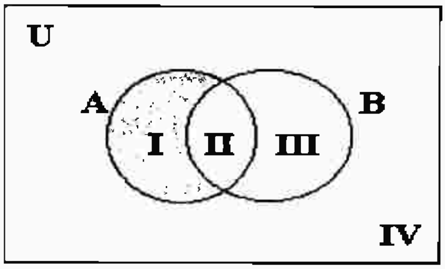
والتقرير "كل الطلاب أذكياء " يعنى أن مجموعة الطلاب تكون مجموعة جزئية من مجموعة الناس الأذكياء ، أى إن مجموعة الطلاب تكون موجودة بالكامل فى المنطقة II بينما المنطقة I تكون فارغة، وإذا استخدمنا أسلوب التظليل فقد يكون الانطباع الأول للقارئ هو القيام بتظليل المنطقة II والتى تمثل T I S لان جميع عناصر S موجودة فى T ، ولكن أسلوب التظليل هذا لن يكون مناسب لبعض التقارير خاصة إذا كان التقرير يحتوى على مجموعة خالية لا يوجد بها أى عنصر فمثلا التقرير

" كل الأعداد الصحيحة التى تحقق $2x = 1$ تكون أعداد زوجية "

من النوع الأول ولتمثيله بأشكال فن نفرض A مجموعة الأعداد الصحيحة التى تحقق$2x = 1$، ونفرض B مجموعة الأعداد الزوجية. نلاحظ أن المجموعة A مجموعة خالية حيث لا يوجد عدد صحيح يحقق $2x = 1$ وفى هذه الحالة إذا استخدمنا أسلوب التظليل فإن تظليل المنطقة II يعنى أن المجموعة A تحتوى على عناصر وهذا ليس صحيح ولذلك لابد أن نستخدم أسلوب آخر لرسم التقارير بأشكال فن بحيث يكون مناسب لجميع الحالات، والأسلوب الذى يصلح لذلك هو أن نميز المجموعات أو المناطق الخالية التى لا تحتوى على أى عنصر وفقا للتقرير المعطى ويتم ذلك عن طريق استبعاد أو حذف هذه المناطق الخالية وهذا الأسلوب يسمى أسلوب الحذف elimination technique وبتطبيق هذا الأسلوب على التقرير

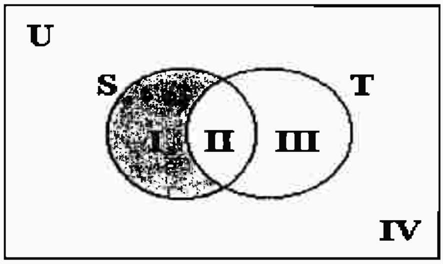
" كل الأعداد الصحيحة التى تحقق $2x = 1$ تكون أعداد زوجية "

نلاحظ انه إذا كان يوجد أعداد صحيحة تحقق $2x = 1$ فإنها لابد أن تكون جميعها داخل مجموعة الأعداد الزوجية ولكن سواء كانت موجودة أو غير موجودة فإن المنطقة I لابد أن تكون خالية ، ووفقا للتقرير المعطى فإنه لا يوجد عنصر فى A غير موجود فى B ولذلك يمكننا حذف المنطقة I ، ويتم ذلك بتظليل المنطقة I لنعنى إنها مستبعدة كما موضح بشكل (٢)



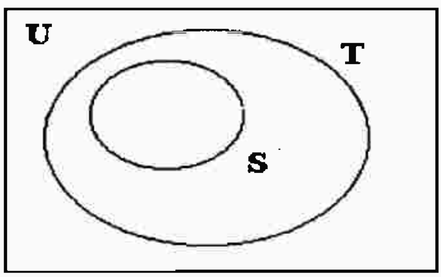
شكل (٢)

والآن نعود إلى التقرير الأصلى "كل الطلاب أذكياء"، ولرسمه بأشكال فن نلاحظ انه لا يوجد طالب فى المجموعة S غير موجود فى المجموعة T ، وبالتالى المنطقة I تكون خالية ويتم حذفها عن طريق التظليل كما موضح بشكل (٣)



شكل (٣)

وقد يتساءل البعض "لماذا لا يتم رسم المجموعتان T , S على صورة دائرة داخل دائرة بـــدلا من الدائرتان المتقاطعتان طالما أن $S \subset T$ كما موضح بالشكل (٤) ؟"



شكل (٤)

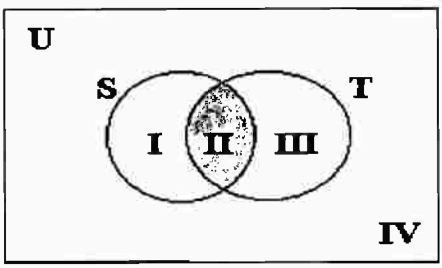
والإجابة بالطبع هى أن هذا التمثيل يكون أيضا صحيح، ولكن دعنا نتذكر أننا فى تعاملنا مع الحجج سوف نقوم برسم أكثر من تقرير فى شكل واحد ولذلك يكون التعامل بأسلوب الحذف افضل كثيرا من أسلوب دائرة داخل دائرة.

والآن وبعد هذه المناقشة يمكننا القول أن استخدام أسلوب الدوائر المتقاطعة فى أشكال فن وأسلوب الحذف سوف يمكننا من تحديد ما إذا كانت الحجة ملزمة أو غير ملزمة بمجرد النظر إلى الشكل بعد رسم المقدمات المنطقية للحجة.

النوع الثانى : التقرير الكلى السالب universal negative

نفرض التقرير "لا يوجد طلاب أذكياء " مرة ثانية لدينا مجموعتان هما مجموعة الطلاب S ومجموعة الناس الأذكياء T والسؤال الآن "أى المناطق سوف تحذف فى هذه الحالة ؟"

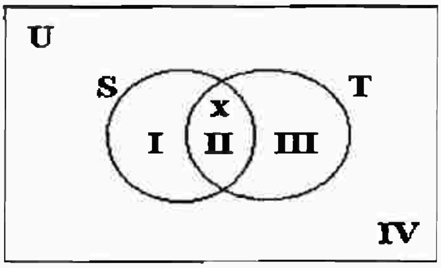
نلاحظ انه لا يوجد عناصر فى مجموعة الطلاب S بحيث تكون أيضا فى مجموعة الناس الأذكياء T، أذن المنطقة II تكون خالية ولذلك يمكننا حذفها بالتظليل، والشكل (٥) يوضح رسم التقرير المعطى



شكل (٥)

النوع الثالث : التقرير الخاص الموجب **particular affirmative**

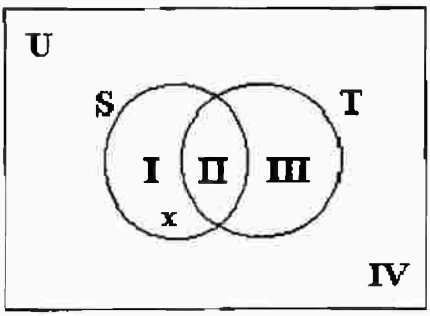
نفرض التقرير "بعض الطلاب أذكياء". لدينا مجموعة الطلاب S ومجموعة الناس الأذكياء T، ومن التقرير المعطى نلاحظ انه يوجد بعض الطلاب فى المجموعة S بحيث انهم أذكيـــاء أى فى المجموعة T ، أذن توجد بعض العناصر مشتركة بين المجموعتان T , S وحيــث أن كلمــة (بعض) تعنى يوجد واحد على الأقل أذن يوجد طالب واحد على الأقل مشترك بين المجموعتان T , S وبالتالى المنطقة II تكون غير خالية ونوضح ذلك على الرسم بوضع العنصــر x فى المنطقة II والشكل (٦) يوضح رسم التقرير المعطى



شكل (٦)

النوع الرابع : التقرير الخاص السالب **particular negative**

نفرض التقرير "بعض الطلاب غير أذكياء ". اى انه يوجد على الأقل طالب واحد فى مجموعــة الطلاب S ليس ذكى، أى غير موجود بالمجموعة T. أذن تقاطع المجموعتان T , S غير خالى وبالتالى المنطقة II غير خالية وكذلك المنطقة I غير خالية حيث يوجد على الأقــل عنصــر واحد فيها وسوف نرمز لهذا العنصر بالرمز x والشكل (٧) يوضح رسم التقرير المعطى.

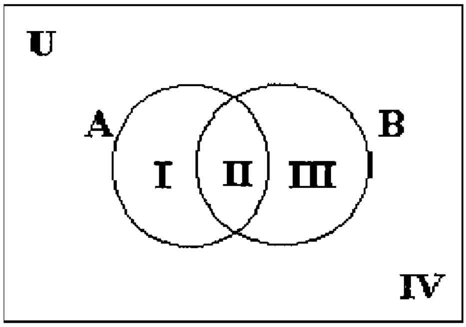


شكل (٧)

ملاحظة :

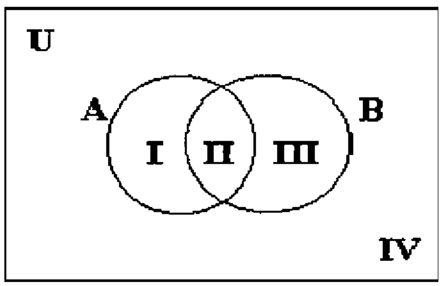
التقارير المتكافئة يكون لها نفس المناطق المحذوفة ونفس شكل فن .

فمثلا التقرير "لا يوجد A يكون B " يكافئ التقرير "لا يوجد B يكون A " ولهما نفس شكل فن الموضح بشكل (٨)



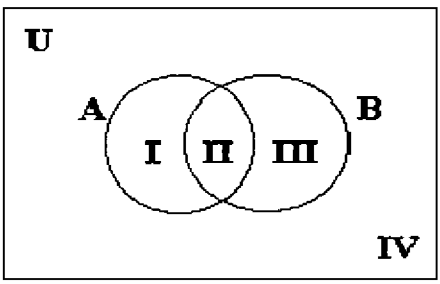
شكل (٨)

بينما التقرير "لكل A يكون B " لا يكافئ التقرير "لكل B يكون A " وهذا يتضح من شكل فن لكل تقرير بشكل (٩) ، (١٠).



شكل (٩)

" لكل A يكون B "



شكل (١٠)

"لكل B يكون A"

مثال ١٥ : حدد نوع كل من التقارير الآتية ثم ارسم كل منها باستخدام أشكال فن:

١ – بعض مواد الرياضيات مشوقة .

٢ – جميع الامتحانات سهلة .

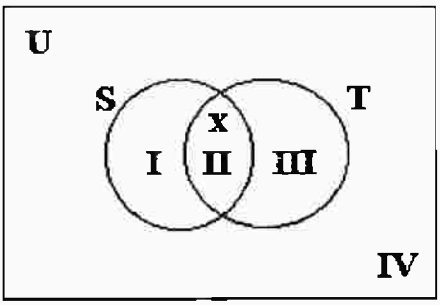
٣ – لا يوجد طالب يفهم الرياضيات ويرسب فيها .

٤ – بعض الطلاب يذاكرون ولكنهم لا يفهمون .

٥ – كل العمال يتفانون فى عملهم .

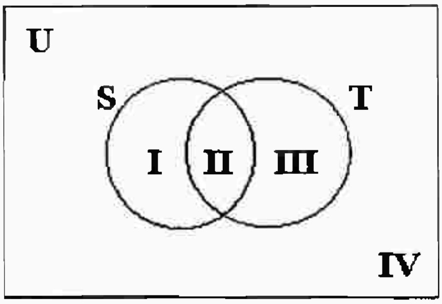
الحـــل :

١ – التقرير "بعض مواد الرياضيات مشوقة" نوعه تقرير خاص موجب ولرسم التقرير بأشكال فن ، نفرض المجموعة الأولى S ترمز إلى مجموعة مواد الرياضيات والمجموعة الثانية T ترمز إلى مجموعة مواد الرياضيات المشوقة ، ومن التقرير المعطى نلاحظ انه يوجد بعض مواد الرياضيات فى المجموعة S بحيث أنها مشوقة، أى فى المجموعة T، أذن يوجد مادة رياضيات واحدة على الأقل مشتركة بين المجموعتين S , T وبالتالى المنطقة II تكون غير خالية ونوضح ذلك على الرسم بوضع العنصر x فى المنطقة II ، والشكل الآتى يوضح رسم التقرير المعطى.

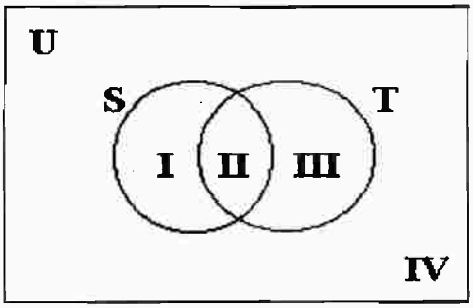


٢ – التقرير "جميع الامتحانات سهلة " نوعه تقرير كلى موجب ولرسم التقرير بأشكال فن، نفرض المجموعة الأولى S ترمز إلى مجموعة الامتحانات والمجموعة الثانية T ترمز إلى مجموعة الامتحانات السهلة ومن التقرير المعطى نلاحظ أن جميع عناصر المجموعة S

موجودة فى المجموعة T وبالتالى المنطقة I تكون خالية ويتم حذفها عن طريق التظليـــل، والشكل الآتى يوضح رسم التقرير المعطى.

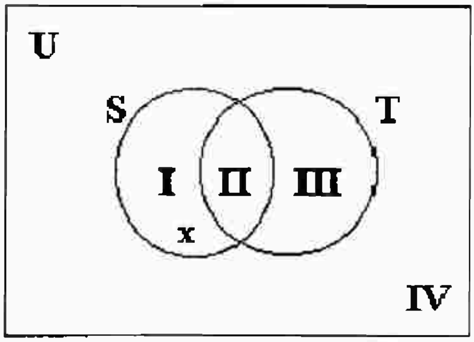


٣ – التقرير "لا يوجد طالب يفهم الرياضيات ويرسب فيها " نوعه تقرير كلى سالب ولرســم التقرير بأشكال فن ، نفرض المجموعة الأولى S ترمز إلى مجموعة الطلاب الذين يفــهمون الرياضيات والمجموعة الثانية T ترمز إلى مجموعة الطلاب الراسبون فى الرياضيات ومــن التقرير المعطى نلاحظ انه لا يوجد عناصر فى مجموعــة الطــلاب S الذيــن يفــهمون الرياضيات بحيث تكون أيضا فى مجموعة الطلاب T الراسبون، أذن المنطقة II تكــون خالية ولذلك يمكننا حذفها بالتظليل، والشكل الآتى يوضح رسم التقرير المعطى.

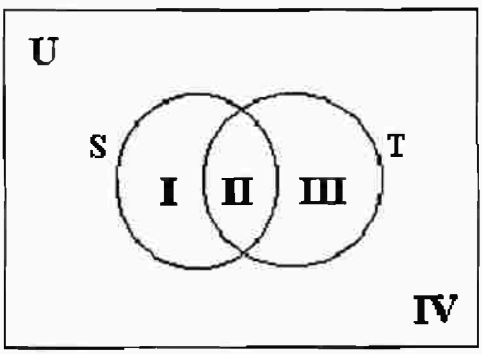


٤ – التقرير " بعض الطلاب يذاكرون ولكنهم لا يفهمون " نوعه تقرير خاص سالب ولرســم التقرير بأشكال فن، نفرض المجموعة الأولى S ترمز إلى مجموعة الطلاب الذين يذاكرون والمجموعة الثانية T ترمز إلى الطلاب الذين يفهمون، ومن التقرير المعطى نلاحظ انــه يوجد عناصر فى مجموعة الطلاب S الذين يذاكرون ولكنها تكــون غــير موجــودة فى

مجموعة الطلاب T الذين يفهمون ، أذن المنطقة I غير خالية حيث يوجد علـــى الأقـــل عنصر واحد فيها وسوف نرمز لهذا العنصر بالرمز x، والشكل الآتـــى يوضـــح رســـم التقرير المعطى.



٥ – التقرير "كل العمال يتفانون فى عملهم" نوعه تقرير كلى موجب ولرسم التقرير بأشـــكال فن، نفرض المجموعة الأولى S ترمز إلى مجموعة جميع العمال والمجموعة الثانية T ترمز إلى مجموعة العمال الذين يتفانون فى عملهم ومن التقرير المعطى نلاحظ أن جميـــع عنـــاصر المجموعة S موجودة فى المجموعة T وبالتالى المنطقة I تكون خالية ويتم حذفها عن طريق التظليل، والشكل الآتى يوضح رسم التقرير المعطى.



تعريف ٥: التقارير المترابطة Consistent

التقارير التى تكون متحققة معا، أى أنها لا تناقض بعضها البعض، تسمى تقارير مترابطة **consistent** والتقارير التى لا يمكن أن تتحقق معا، أى أنها تناقض بعضها البعض، تسمى تقارير غير مترابطة **inconsistent**.

ويمكن استخدام أشكال فن لتحديد ما إذا كانت التقارير مترابطة أو غير مترابطة .

مثال ١٦ : استخدم أشكال فن لتحديد ما إذا كان التقريران الإتيان مترابطان أو غير مترابطان

١ - بعض الطلاب راسبون .

٢ - لا يوجد طالب راسب .

الحـل :

نفرض S مجموعة الطلاب، T مجموعة الطلاب الراسبون، والآن نحاول رسم شكل فن للتقريرين معا.

التقرير

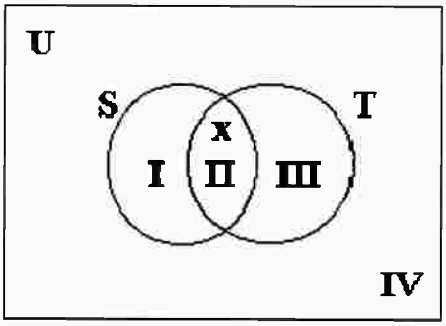
" بعض الطلاب راسبون "

أى انه يوجد على الأقل طالب واحد فى مجموعة الطلاب S ويكون راسب وبالتالى يكون موجود بالمجموعة T ورسم هذا التقرير يتم بوضع الرمز x فى المنطقة II .

والتقرير

" لا يوجد طالب راسب "

يعنى أنه لا يوجد أى عنصر مشترك بين المجموعتين T , S وبالتالى فإن المنطقة II تكون خالية لذلك نحذفها عن طريق التظليل كما بشكل (١١)



شكل (١١)

ونلاحظ أننا عند رسم التقرير الثانى حذفنا المنطقة II ولكن فى نفس الوقت عند رسم التقرير الأول وضعنا العنصر x فى المنطقة II لنعنى وجود عنصر على الأقل فى المنطقة II بينما هى منطقة محذوفة وهذا يمثل تناقض، أذن لا يمكن رسم التقريران فى نفس الشكل، أى لا يمكن أن يتحققا معا فى نفس الوقت وبالتالى التقريران غير مترابطان.

مثال ١٧: استخدم أشكال فن لتحديد ما إذا كان التقريران الإتيان مترابطان أو غير مترابطان

١ - لا يوجد مادة صعبة فى الرياضيات

٢ - بعض مواد الرياضيات ليست صعبة

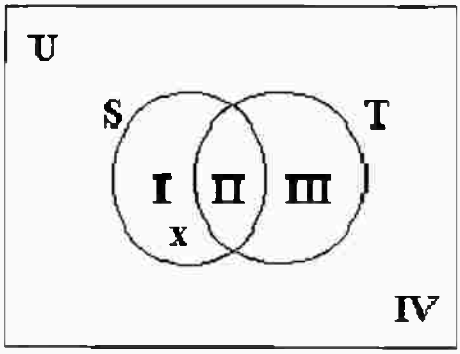
الحـــل :

نفرض S مجموعة مواد الرياضيات، T مجموعة مواد الرياضيات الصعبة والآن نحاول رسم شكل فن للتقريرين معا.

التقرير

"لا يوجد مادة صعبة فى الرياضيات"

يعنى أنه لا يوجد أى عنصر مشترك بين المجموعتين T , S وبالتالى فإن المنطقة II تكون خالية لذلك نحذفها عن طريق التظليل كما بشكل (١٢)



والتقرير

"بعض مواد الرياضيات ليست صعبة"

أى انه يوجد على الأقل مادة فى الرياضيات أى فى المجموعة S وليست ضمن المواد الصعبة، وبالتالى تكون غير موجودة بالمجموعة T ورسم هذا التقرير يتم بوضع الرمز x فى المنطقة I وحيث انه يمكننا رسم التقريران معا فى نفس الشكل بدون اى تعارض أذن التقريران مترابطان.

٥ - الحجج الملزمة وأشكال فن

Diagrams Valid Arguments and Venn

كما نعلم فإن الحجة تتكون من مقدمات منطقية واستنتاج، والحجة الملزمة نحصل فيها على الاستنتاج بطريقة منطقية من المقدمات ويمكن لمقدمات الحجة أن تحتوى على تقريرين أو أكثر، ولكننا سوف نتعامل فقط مع الحجج من نوع القياسات المنطقية **Syllogisms** والتى تحتوى على

المقدمة الكبرى	**major premise**
المقدمة الصغرى	**minor premise**
الاستنتاج	**conclusion**

وتعتبر أشكال فن من الوسائل المفيدة فى تحديد إلزامية الحجج من هذا النوع ونؤكد هنا أيضا على الفرق بين إلزامية الحجة وحقيقتها ، فيمكن للحجة أن تكون ملزمة على الرغم من أن الاستنتاج خطأ ومن جهة أخرى يمكن أن يكون الاستنتاج صواب ولكن الحجة غير ملزمة. والسؤال الآن

كيف نحدد إلزامية الحجة بواسطة أشكال فن ؟

ويتم ذلك بان نقوم برسم المقدمات المنطقية فى شكل فن، وإذا كان الاستنتاج واضح ويمكـــن الوصول أليه من شكل فن بدون أى غموض فهذا يعنى أن الحجة تكون ملزمة، أما إذا رسمنـــا المقدمات المنطقية بدون أن نتمكن من توضيح الاستنتاج فإن الحجة تكون غير ملزمـــة. والآن نعطى بعض الأمثلة لتوضيح كيفية استخدام أشكال فن فى تحديد إلزامية الحجة.

مثال ١٨ : استخدم أشكال فن فى تحديد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

كل الطلاب أذكياء

لا يوجد فاشل ويكون ذكى

أذن لا يوجد فاشل بين الطلاب

الحل :

أولا : نرسم شكل فن وذلك برسم ثلاث دوائر متقاطعة كما بالشكل

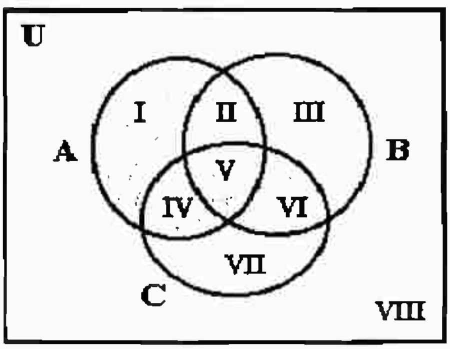
الدائرة الأولى A تمثل مجموعة الطلاب

الدائرة الثانية B تمثل مجموعة الناس الأذكياء

الدائرة الثالثة C تمثل مجموعة الناس الفاشلون

ونقوم بترقيم المناطق بالرسم وعددها فى هذه الحالة 8 مناطق .

ثانيا : نقوم برسم المقدمات المنطقية



رسم المقدمة الكبرى "كل الطلاب أذكياء" يتم باستبعاد المناطقIV , I ورسم المقدمة الصغرى "لا يوجد فاشل ويكون ذكي" يتم باستبعاد المنـاطق VI , V . والآن نلاحظ أن الاستنتاج "لا يوجد فاشل بين الطلاب" يعنى انه لا يوجد عنصر مشترك بين المجموعتين A , C وهذا واضح من الرسم حيث نجد أن المنطقة المشتركة بين المجموعتين A , C يمثلها المنـاطق V , IV وهى ضمن المناطق المستبعدة عند رسم المقدمات المنطقية ، وهذا يعنى أن الاستنتاج واضح ويمكن الوصول أليه من شكل فن بدون أى غموض وبالتالى الحجة تكون ملزمة.

مثال ١٩ : استخدم أشكال فن فى تحديد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة:

لا يوجد من المغامرين خاسر

لا يوجد من الخاسرين ذكي

أذن لا يوجد من المغامرين ذكي

الحل :

أولا : نرسم شكل فن وذلك برسم ثلاث دوائر متقاطعة كما بالشكل

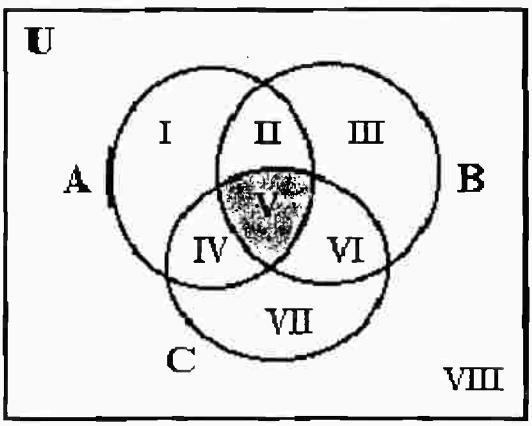
الدائرة الأولى A تمثل مجموعة الناس المغامرين

الدائرة الثانية B تمثل مجموعة الناس الخاسرين

الدائرة الثالثة C تمثل مجموعة الناس الأذكياء

ونقوم بترقيم المناطق بالرسم وعددها فى هذه الحالة 8 مناطق.

ثانيا : نقوم برسم المقدمات المنطقية



رسم المقدمة الكبرى " لا يوجد من المغامرين خاسر" يتم باستبعاد المناطق V , II ورسم المقدمة الصغرى "لا يوجد من الخاسرين ذكي" يتم باستبعاد المناطق VI , V. والآن نلاحظ أن الاستنتاج "لا يوجد من المغامرين ذكي" يعنى انه لا يوجد عنصر مشترك بين المجموعتين A,C ولكن واضح من الرسم أن المنطقة IV مشتركة بين المجموعتين A , C أى أنها تمثل مغامرين أذكياء وهي ليست ضمن المناطق المستبعدة عند رسم المقدمات المنطقية، وبالتالى يمكن أن يتواجد بها عناصر، وهذا يعنى أن الاستنتاج لا يمكن الوصول أليه من المقدمات وبالتالى الحجة تكون غير ملزمة.

مثال ٢٠: استخدم أشكال فن فى تحديد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

كل المغامرون فائزون

بعض المغامرون أذكياء

أذن بعض الفائزون أذكياء

الحل :

أولا : نرسم شكل فن وذلك برسم ثلاث دوائر متقاطعة كما بالشكل

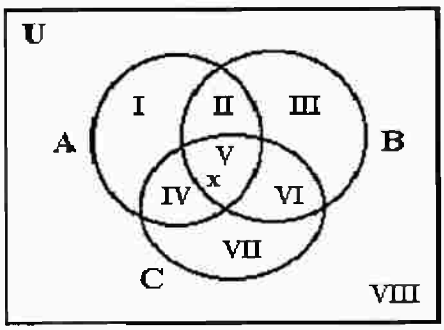
الدائرة الأولى A تمثل مجموعة الناس المغامرون

الدائرة الثانية B تمثل مجموعة الناس الفائزون

الدائرة الثالثة C تمثل مجموعة الناس الأذكياء

ونقوم بترقيم المناطق بالرسم وعددها فى هذه الحالة 8 مناطق .

ثانيا : نقوم برسم المقدمات المنطقية



رسم المقدمة الكبرى "كل المغامرون فائزون" يتم باستبعاد المناطق IV , I ورسـم المقدمة الصغرى "بعض المغامرون أذكياء" تخبرنا بوجود بعض العناصر فى C I A لذلـك نضع العنصر x فى المنطقة IV أو المنطقة V ، وحيث أن المنطقة IV مستبعدة لذلك فإن رسم المقدمة الصغرى يتم بوضع العنصر x فى المنطقة V. والآن نلاحظ أن الاستنتاج "بعض الفائزون أذكياء " يعنى انه يوجد عنصر مشترك بين المجموعتين C , B وهذا واضح من الرسم لان العنصر x ينتمى فى المنطقة V الواقعة ضمن المجموعتين B , C وفى هذه الحالة العنصر x يمثل أحد الفائزون الأذكياء، وهذا يعنى أن الاستنتاج يمكن الوصول أليه من المقدمات وبالتالى الحجة تكون ملزمة.

مثال ٢١ : استخدم أشكال فن فى تحديد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة:

كل المغامرون فائزون

بعض المغامرون ليسوا أذكياء

أذن بعض الأذكياء ليسوا مغامرون

الحل :

أولا : نرسم شكل فن وذلك برسم ثلاث دوائر متقاطعة كما بالشكل

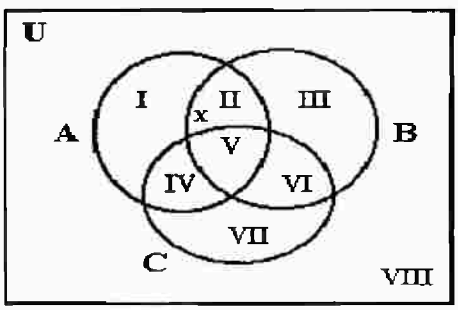
الدائرة الأولى A تمثل مجموعة الناس المغامرون

الدائرة الثانية B تمثل مجموعة الناس الفائزون

الدائرة الثالثة C تمثل مجموعة الناس الأذكياء

ونقوم بترقيم المناطق بالرسم وعددها فى هذه الحالة 8 مناطق .

ثانيا : نقوم برسم المقدمات المنطقية



رسم المقدمة الكبرى "كل المغامرون فائزون" يتم باستبعاد المناطق IV , I ورسم المقدمة الصغرى "بعض المغامرون ليسوا أذكياء" تخبرنا بوجود بعض العناصر فى مجموعة المغامرونA وفى نفس الوقت غير موجودة فى مجموعة الأذكياءC لذلك نضع العنصر x فى المنطقة I أو المنطقة II وحيث أن المنطقة I مستبعدة لذلك فإن رسم المقدمة الصغرى يتم بوضع العنصر x فى المنطقة II. والآن نلاحظ أن الاستنتاج "بعض الأذكياء ليسوا مغامرون" يعنى انه يوجد عنصر فى مجموعة الأذكياءC وفى نفس الوقت غير موجود فى مجموعة المغامرونA وهذا ليس واضح من الرسم لان العنصر x الموجود على الرسم ينتمى فى المنطقة II وفى هذه الحالة العنصر x يمثل أحد المغامرون الغير أذكياء، وهذا يعنى أن الاستنتاج لا يمكن الوصول أليه من المقدمات وبالتالى الحجة تكون غير ملزمة.

مثال ٢٢ : استخدم أشكال فن فى تحديد ما إذا كانت الحجة الآتية ملزمة أو غير ملزمة :

كل المربعات مستطيلات

بعض المستطيلات تكون متوازيات أضلاع

أذن بعض المربعات تكون متوازيات أضلاع

الحل :

أولا : نرسم شكل فن وذلك برسم ثلاث دوائر متقاطعة كما بالشكل

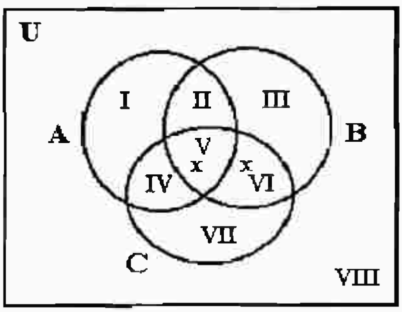
الدائرة الأولى A تمثل مجموعة المربعات

الدائرة الثانية B تمثل مجموعة المستطيلات

الدائرة الثالثة C تمثل مجموعة متوازيات أضلاع

ونقوم بترقيم المناطق بالرسم وعددها فى هذه الحالة 8 مناطق .

ثانيا : نقوم برسم المقدمات المنطقية



رسم المقدمة الكبرى "كل المربعات مستطيلات" يتم باستبعاد المناطق IV , I ورسم المقدمة الصغرى "بعض المستطيلات تكون متوازيات أضلاع" تخبرنا بوجود بعض العناصر فى مجموعة المستطيلات B وفى نفس الوقت موجودة فى مجموعة متوازيات الأضلاع C لذلك نضع العنصر x فى المنطقة V أو فى المنطقة VI وهنا يحدث الغموض لأنه إذا أخذنا العنصر x فى المنطقة V فإن الاستنتاج "بعض المربعات تكون متوازيات أضلاع" يتحقق، بينما إذا أخذنا العنصر x فى المنطقة VI فإن الاستنتاج لا يتحقق، وهذا يعنى أن الاستنتاج لا يمكن الوصول أليه من المقدمات وبالتالى الحجة تكون غير ملزمة.

تمارين الفصل الخامس

١ – حدد إلزامية كل من الحجج الآتية :

١ – إذا كنت بصحة جيدة فإنك سوف تكـــون سعيد. أنت سعيد . أذن أنت بصحة جيدة .	٦ – إذا سقطت الأمطار فلن أتمكن من السفر . سوف أتمكن من السفر . أذن لم تسقط أمطار .
٢ – عادل وحسين سوف يذهبان إلى الحديقة . عادل ذهب إلى الحديقة . أذن حسين سوف يذهب إلى الحديقة .	٧ – إذا كان $1 = 2$ فإن $4 = 8$. العدد 4 لا يساوى 8 . أذن العدد 2 لا يساوى 1 .
٣ – عادل وحسين سوف يذهبان إلى الحديقة . عادل لم يذهب إلى الحديقة . أذن حسين لن يذهب إلى الحديقة .	٨ – إذا كان 5 عدد زوجي فإن8 عدد فردى. العدد 5 عدد زوجي . أذن العدد 8 عدد فردى .
٤ – سقوط المطر شرط كاف لنمو المزروعات . المطر لم يسقط . أذن المزروعات لن تنمو .	٩ – إذا كان المستقيمان متعامدين فإنهما يصنعـــان زاوية قائمة . المستقيمان ℓ_2 , ℓ_1 لا يصنعـــان زاويـــة قائمة. أذن المستقيمان ℓ_2 , ℓ_1 غير متعامدان .

٥ – إذا سقطت الأمطار فلن أتمكن من السفر . أنها لم تمطر . أذن سوف أتمكن من السفر .	١٠ – إذا حضرت فى الموعد فإن ساعتك تكون مضبوطة . ساعتك غير مضبوطة . أذن أنت لن تحضر فى الموعد .

٢ – حدد إلزامية كل من الحجج الآتية :

١) تساوى أضلاع المثلث شرط ضرورى وكافى لتساوى زوايا المثلث .
المثلث زوياه مختلفة .
أذن المثلث أضلاعه مختلفة .

٢) إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الساقين .
المثلث متساوى الساقين .
أذن المثلث متساوى الأضلاع .

٣) إذا كانت الدالة f غير متصلة فإنها تكون غير قابلة للتفاضل .
الدالة f قابلة للتفاضل .
أذن الدالة f متصلة .

٤) إذا درس الطالب منهج الرياضيات بفهم فإنه سوف يجتاز الامتحان بتفوق .
الطالب لم يجتاز الامتحان بتفوق .
أذن الطالب لم يدرس منهج الرياضيات بفهم .

٥) الطالب لم يستذكر دروسه أو هو غائب عن المحاضرة .
إذا غاب الطالب عن حضور المحاضرة فإنه لن يفهم الدرس .
أذن ليس صحيحا أن الطالب فهم الدرس واستذكر دروسه .

٦) سقوط المطر شرط ضرورى وكافى لتعمير الصحراء .

إذا تم تعمير الصحراء فإن الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة .
المطر يسقط والشباب يجدون فرص عمل جديدة .
أذن الصحراء يتم تعميرها .

٧) سقوط المطر شرط ضرورى وكافى لتعمير الصحراء .
إذا تم تعمير الصحراء فإن الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة .
الشباب يجدون فرص عمل جديدة .
أذن المطر يسقط والصحراء يتم تعميرها .

٣ – حدد بطريقتين مختلفتين إلزامية كل من الحجج الآتية :

1 – $(p \to \sim q),\ \sim p \quad \alpha \quad \sim q$
2 – $(p \leftrightarrow q),\ q \quad \alpha \quad p$
3 – $(p \to \sim q),\ (r \to q),\ r \quad \alpha \quad \sim p$
4 – $(p \to \sim q),\ (\sim r \to \sim q) \quad \alpha \quad (p \to \sim r)$
5 – $(p \to q),\ (r \to \sim q) \quad \alpha \quad (r \to \sim p)$

٤ – بالنسبة للمقدمات المنطقية التالية ، أوجد الاستنتاج المناسب بحيث تكون الحجة ملزمة :

1 – $(p \to \sim q),\ q$
2 – $(p \leftrightarrow q),\ (r \to \sim p)$
3 – $(p \to \sim q),\ (\sim p \to r)$
4 – $(r \to p)(q \to \sim p),\ r$
5 – $(p \to q),\ (\sim r \to \sim q),\ (r \to \sim s)$

٥ – صنف كل من التقارير الآتية من حيث كونها
(كلى موجب – كلى سالب – خاص موجب – خاص سالب)
ثم ارسم التقرير باستخدام أشكال فن .
١ – كل الجيران طيبون .
٢ – بعض الأولاد أشقياء .
٣ – لا يوجد مدرس لا يجيد استخدام الكومبيوتر .

٤ - بعض السيارات تعمل بالغاز الطبيعى .

٥ - المدن الجديدة التى تم إنشائها فى الصحراء جميعها مدن منظمة .

٦ - بعض الأعداد الأولية ليست أعداد فردية .

٧ - الدوال القابلة للتفاضل يكون جميعها دوال متصلة .

٨ - يوجد دوال متصلة وتكون غير قابلة للتفاضل .

٩ - فاقد الشيء لا يعطيه .

١٠ - لكل مجتهد نصيب .

٦ - استخدم أشكال فن لتحديد ما إذا كان زوج التقارير مترابط أو غير مترابط فى كل مما يأتى :

١) بعض الناس الطيبون شجعان .
لا يوجد إنسان شجاع ويكون غير طيب .

٢) كل عدد حقيقي يكون عدد نسبي .
كل عدد نسبي يكون عدد حقيقي .

٣) بعض المواد الدراسية تكون مشوقة .
لا يوجد مادة دراسية غير مشوقة .

٤) كل الدوال القابلة للتفاضل تكون متصلة .
بعض الدوال المتصلة تكون قابلة للتفاضل .

٥) بعض المواد الدراسية تكون غير مشوقة .
المنطق الرياضى مادة مشوقة .

٦) كل الدوال القابلة للتفاضل تكون متصلة .
بعض الدوال القابلة للتفاضل تكون غير متصلة .

٧) كل عدد صحيح يكون عدد حقيقى .
بعض الأعداد الحقيقة تكون أعداد غير صحيحة.

٨) بعض الأعداد الحقيقة تكون أعداد نسبية .
بعض الأعداد النسبية تكون أعداد حقيقية .

٧ - فى كل من الحجج الآتية استخدم أشكال فن لتحديد ما إذا كانت الحجة ملزمة أو غير ملزمة :

١ - كل الطلاب الدارسون للرياضيات يستخدمون الكومبيوتر .
بعض الطلاب الدارسون للتاريخ يستخدمون الكومبيوتر .
أذن بعض الطلاب الدارسون للرياضيات يدرسون التاريخ .

٢ - كل الدوال القابلة للتفاضل تكون دوال متصلة .
بعض الدوال المتصلة تكون دوال زوجية .
أذن لا يوجد دالة زوجية غير قابلة للتفاضل .

٣ - كل الأعداد الصحيحة تكون أعداد حقيقية .
بعض الأعداد الحقيقية تكون أعداد مركبة .
أذن لا يوجد من بين الأعداد مركبة أعداد صحيحة.

٨ - فى كل من الحجج الآتية استخدم أشكال فن لتحديد ما إذا كانت الحجة ملزمة أو غير ملزمة :

١ - كل الفائزون مغامرون . لا يوجد مغامر غير ذكى . أذن بعض الأذكياء مغامرون .	٢ - كل مجتهد له نصيب فى النجاح . لا يوجد فاشل بين المجتهدون . أذن لا يوجد مجتهد بين الفاشلون .
٣ - بعض الطلاب شجعان . كل الرجال شجعان . أذن بعض الطلاب رجال .	٤ - كل الدوال المثلثية تكون دوال زوجية . بعض الدوال المثلثية تكون دوال متصلة . أذن بعض الدوال الزوجية تكون دوال متصلة .

٥ – كل المهندسون أذكياء . بعض المؤلفون أذكياء . أذن بعض المؤلفون مهندسون .	٦ – بعض الدوال المثلثية تكون دوال زوجية . لا يوجد دوال مثلثية غير متصلة . أذن لا يوجد من الدوال الزوجية دوال متصلة .
٧ – كل الصيادون يحبون البحر . كل الصيادون لا يكذبون . أذن من يحب البحر لا يكذب .	٨ – كل الأعداد الصحيحة أعداد حقيقية . كل الأعداد الحقيقية أعداد مركبة . أذن كل الأعداد الصحيحة أعداد مركبة .
٩ – لا يوجد بائع ويكون حاقد . لا يوجد من الحاقدين إنسان يكذب . أذن لا يوجد من البائعين كذاب .	١٠ – كل عدد نسبي يكون عدد حقيقي . كل الأعداد الحقيقية غير تخيلية . أذن لا يوجد عدد نسبي يكون تخيلي .