

## الفصل

# 6

## طرق البرهان

### Methods of Proof

نعلم أن التقرير، سواء كان بسيطا أو مركبا، بأنه جملة خبرية ذات معنى تحمل خبرا ويمكن الحكم بأنها صائبة أو خاطئة، ولا تكون صائبة وخاطئة في آن واحد. ولكي نتمكن من الحكم على تقرير ما بالصواب أو الخطأ فلا بد أن نكون على علم تام بما نعنيه في كل كلمة تدخل في تركيب التقرير وهذا أمر في غاية الأهمية في جميع العلوم بل وفي جميع أمور الحياة وليس في الرياضيات فقط. وتتوزع أساليب البرهان على صحة أو خطأ تقرير ما وفقا للتقرير نفسه، فمثلا التقرير "يتجمد الماء بالبرودة" صائب والبرهان على ذلك يتم بالتجربة والمشاهدة ومن هنا يظهر ما يسمى بالبرهان التجريبي والتقرير "المثلث المتساوي الأضلاع مجموع زواياه 180 درجة" هو تقرير صائب والبرهان على ذلك يتم قياسا للقاعدة التي تقول أن مجموع زوايا المثلث تساوي 180 درجة أي أننا حصلنا على نتيجة خاصة من حالة عامة ومن هنا يظهر ما يسمى بالبرهان القياسي، وهناك بعض التقارير التي نقبل صوابها دون تحليل لأنه لا يوجد ما يناقض صحتها ومثل هذه التقارير تسمى مسلمات Axioms فمثلا التقرير

" من نقطة خارج مستقيم معلوم يمر مستقيم واحد فقط يوازي المستقيم المعلوم "

صائب لأنه يمثل مسلمة. وفي الفصل الخامس تحدثنا عن الحججة أو الإثبات ووضحنا كيف نحدد إلزامية أو عدم إلزامية الحججة بطرق مختلفة وبمعنى آخر وضحنا كيف نحدد ما إذا كان الإثبات منطقي أو غير منطقي وفكرة الحججة يمكن تطويرها لتصبح برهان لقضية ويمكننا القول أن البرهان هو إثبات منطقي لقضية ما.

تعريف ١ : البرهان هو متتالية من التقارير  $S_1, S_2, \dots, S_n$  يستمد منها التقرير  $S$  أى أنه على شكل الحجة  $S_1, S_2, \dots, S_n \alpha S$  وبحيث أن كل  $S_i$  إما أن يكون مسلمة صحيحة أو تقرير صواب مثبت بشكل منطقي من التقارير السابقة له في المتتالية وفي هذه الحالة فإن الاستنتاج  $S$  يسمى نظرية، وكذلك فإن كل  $S_i$  يمكن أن يسمى نظرية وبرهانها هو ما يسبق  $S_i$  في المتابعة من تقارير  $S_1, S_2, \dots, S_{i-1}$ .

وفي مجال الرياضيات فإن العديد من التقارير الرياضية التي يطلب البرهان على صحتها تكون على صورة تقارير شرطية "إذا كان ... فإن ..." وان لم تكن كذلك، فإنه غالباً ما نستطيع تحويلها إلى تقارير شرطية، وسوف نتعرف الآن على بعض الأنواع الرئيسية من البرهان والتي تستخدم في الرياضيات وسنوضح كلا منها بالأمثلة.

## ١ - البرهان المباشر Direct Proof

توجد بعض التقارير التي يتم برهنتها عن طريق الانتقال من المعطيات إلى المطلوب مباشرة بالاستعانة بالمنطق والمسلمات والتعاريف الرياضية، لذلك يسمى هذا الأسلوب بالبرهان المباشر، أى إن البرهان المباشر يعتمد على الحقيقة المنطقية "إذا كان... فإن..."  $P \rightarrow Q$  حيث نفترض أن المعطيات  $P$  صواب ثم نبرهن أن صواب المعطيات يؤدي إلى صواب المطلوب  $Q$  (أى نبرهن أن التضمين  $P \Rightarrow Q$  متحقق) ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية:

مثال ١ : باستخدام البرهان المباشر اثبت صحة التضمين الآتى :

$$(\sim p \vee q) \wedge (r \rightarrow p) \wedge r \Rightarrow q$$

الحل :

المعطيات :	$(\sim p \vee q)$	صواب
	$r \rightarrow p$	صواب
	$r$	صواب

المطلوب :  $q$  صواب

حيث أن  $r$  صواب،  $r \rightarrow p$  صواب (من المعطيات)  
 إذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن  $p$  صواب  
 ومن تعريف أداة النفي إذن  $\sim p$  يكون خطأ  
 وحيث أن  $(\sim p \vee q)$  صواب (من المعطيات)  
 إذن من تعريف أداة الفصل ينتج أن  $q$  صواب  
 إذن التضمين  $(\sim p \vee q) \wedge (r \rightarrow p) \wedge r \Rightarrow q$  متحقق.

مثال ٢ : باستخدام البرهان المباشر البت صحة ما يأتي :

المعطيات :  $p, q, p \vee q \rightarrow r$

المطلوب :  $r$

الحل :

المعطيات جميعها صواب

حيث أن  $p, q$  صواب (من المعطيات)  
 إذن من تعريف أداة الفصل ينتج أن  $p \vee q$  صواب  
 وحيث أن  $p \vee q \rightarrow r$  صواب (من المعطيات)،  
 إذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن  $r$  صواب .

مثال ٣ : باستخدام البرهان المباشر برهن على صحة الحجة الآتية :

إذا فهم الطالب الرياضيات فإنه سوف ينجح في الامتحان بتفوق .

الطالب لم ينجح في الامتحان بتفوق .

إذن الطالب لم يفهم الرياضيات .

الحل : نفرض التقارير

$p$  : الطالب فهم الرياضيات

$q$  : الطالب نجح في الامتحان بتفوق

أذن المعطيات :  $p \rightarrow q$  صواب

صواب  $\sim q$

المطلوب إثبات أن :  $\sim p$  صواب

حيث أن  $\sim q$  صواب (من المعطيات)

أذن من تعريف أداة النفي  $q$  يكون خطأ

وحيث أن  $p \rightarrow q$  صواب (من المعطيات)،  $q$  خطأ

أذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن  $p$  خطأ

ومن تعريف أداة النفي أذن  $\sim p$  يكون صواب .

مثال 4 : باستخدام البرهان المباشر برهن على صحة الحججة الآتية :

سقوط المطر شرط ضروري وكافي لتعمير الصحراء .

إذا تم تعمير الصحراء فإن الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة .

المطر يسقط .

أذن الصحراء يتم تعميمها والشباب يجدون فرص عمل جديدة .

الحل : نفرض التقارير  $p$  : المطر يسقط

$q$  : الصحراء يتم تعميمها

$r$  : الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة

أذن المعطيات :  $p$  ،  $q \rightarrow r$  ،  $p \leftrightarrow q$  صواب

المطلوب إثبات أن :  $q \wedge r$  صواب

حيث أن  $p \leftrightarrow q$  ،  $p$  صواب (من المعطيات). أذن من تعريف أداة المزوجة فليكن

$q$  يكون صواب. وحيث أن  $q \rightarrow r$  صواب (من المعطيات)،  $q$  صواب. أذن من تعريف

أداة الشرطية ينتج أن  $r$  صواب، ومن تعريف أداة الوصل أذن  $q \wedge r$  يكون صواب.

أذن التضمين  $(p \leftrightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p \Rightarrow (q \wedge r)$  متحقق.

مثال ٥ : باستخدام البرهان المباشر برهن صحة التقرير

" إذا كان  $x$  عددا فرديا فإن  $x^2$  عدد فردى "

الحل : نفرض التقرير  $p$  : "  $x$  عدد فردى "

والتقرير  $q$  : "  $x^2$  عدد فردى "

أذن المعطيات هي أن  $p$  صائب والمطلوب إثبات أن  $q$  صائب ، أى إثبات صحة التضمين

$$p \Rightarrow q$$

حيث أن ، أى عدد فردى يمكن كتابته بالصورة  $2n + 1$  حيث  $n$  عدد صحيح

$$x \text{ عدد فردى} \Rightarrow x = 2n + 1$$

$$\Rightarrow x^2 = (2n + 1)^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 4n^2 + 4n + 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 2(2n^2 + 2n) + 1$$

$$\Rightarrow x^2 = 2m + 1 \quad , \quad m = 2n^2 + 2n$$

$$\Rightarrow x^2 \text{ عدد فردى}$$

أذن التضمين  $p \Rightarrow q$  متحقق .

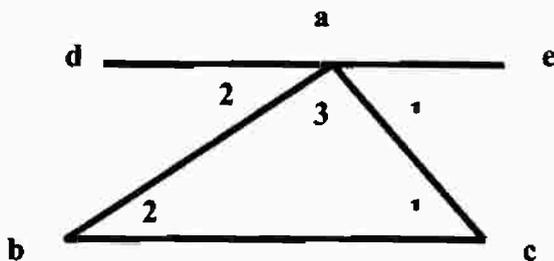
مثال ٦ : باستخدام البرهان المباشر برهن أن

"مجموع زوايا المثلث تساوى 180 درجة"

الحل :

المعطيات : مثلث  $abc$

المطلوب إثبات أن : قياس  $(\hat{a})$  + قياس  $(\hat{b})$  + قياس  $(\hat{c}) = 180$



نرسم المثلث  $abc$  ومن الرأس  $a$  نرسم المستقيم  $de$  موازى للقطعة المستقيمة  $bc$   
حيث أن

$$\text{قياس } (\hat{c}) = \text{قياس } (\hat{1}) \quad \text{بالتبادل} \quad (\text{لان } de \text{ يوازي } bc)$$

$$\text{قياس } (\hat{b}) = \text{قياس } (\hat{2}) \quad \text{بالتبادل} \quad (\text{لان } de \text{ يوازي } bc)$$

وحيث أن

$$\text{قياس } (\hat{1}) + \text{قياس } (\hat{2}) + \text{قياس } (\hat{3}) = 180 \quad (\text{لان } d\hat{a}e \text{ زاوية مستقيمة})$$

أذن

$$180 = \text{قياس } (\hat{a}) + \text{قياس } (\hat{b}) + \text{قياس } (\hat{c})$$

أى إن مجموع زوايا أى مثلث تساوى 180 درجة.

## ٢ - البرهان الغير مباشر Indirect Proof

نعلم أن  $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$  وبالتالي إذا كان التقرير  $p \rightarrow q$  صائب منطقيا فإن التقرير المكافى  $\sim q \rightarrow \sim p$  يكون صائب منطقيا ومن ذلك نستنتج أنه إذا كان التضمين  $p \Rightarrow q$  متحقق فإن التضمين  $\sim q \Rightarrow \sim p$  يكون متحقق أيضا، وبالتالي يمكن استخدام التضمين  $\sim q \Rightarrow \sim p$  بدلا من التضمين  $p \Rightarrow q$  ولذلك تسمى هذه الطريقة بالبرهان الغير مباشر وهى تستخدم فى كثير من الأحيان فى الرياضيات لإثبات بعض القوانين والنظريات، ومن ذلك يمكننا القول أن البرهان المباشر ينطلق من القاعدة المنطقية  $p \rightarrow q$  بينما البرهان الغير مباشر ينطلق من القاعدة المنطقية  $\sim q \rightarrow \sim p$ . أى إننا فى البرهان الغير مباشر نفرض أن نفى المطلوب هو الصواب، ثم نستخدم أسلوب البرهان المباشر فى إثبات أن نفى المعطيات يكون صواب.

مثال  $\vee$  : باستخدام البرهان الغير مباشر اثبت صحة ما يأتى :

المعطيات :  $p , q , p \vee q \rightarrow r$

المطلوب :  $r$

الحل : باستخدام البرهان الغير مباشر نحاول إثبات أن  $\sim r \Rightarrow \sim((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r))$  .  
نفرض أن نقى المطلوب يكون صواب أى إن  $\sim r$  صواب. أذن  $r$  يكون خطأ. أذن  
من تعريف أداة الشرطية  $p \vee q \rightarrow r$  وحيث أن  $r$  خطأ فإنه ينتج حالتين:

الحالة الأولى :  $p \vee q \rightarrow r$  خطأ وهذا يتحقق إذا كان  $p \vee q$  صواب، ومن  
تعريف أداة الفصل فإنه توجد ثلاث احتمالات:

الاحتمال الأول :  $p$  صواب ،  $q$  صواب

الاحتمال الثانى :  $p$  صواب ،  $q$  خطأ

الاحتمال الثالث :  $p$  خطأ ،  $q$  صواب

وفى جميع هذه الاحتمالات ومن تعريف أداة الوصل فإن التقرير  $(p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r)$   
يكون خطأ وبالتالي  $\sim((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r))$  يكون صواب. أذن فى  
هذه الحالة التضمين  $\sim r \Rightarrow \sim((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r))$  يكون متحقق.

الحالة الثانية :  $p \vee q \rightarrow r$  صواب وهذا يتحقق إذا كان  $p \vee q$  خطأ، ومن  
تعريف أداة الفصل فإن  $p$  خطأ،  $q$  خطأ وبالتالي فإن التقرير  
 $(p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r)$  يكون خطأ أى إن  
 $\sim((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r))$  يكون صواب. أذن فى هذه الحالة  
أيضا فإن التضمين  $\sim r \Rightarrow \sim((p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r))$  يكون  
متحقق.

مثال ٨ : باستخدام البرهان الغير مباشر برهن أن

"إذا كان  $x^2$  عددا فرديا فإن  $x$  عدد فردى"

الحل : نفرض

التقرير  $p$  : " $x^2$  عدد فردى"

والتقرير  $q$  : " $x$  عدد فردى"

المعطيات : التقرير  $p$  صائب

والمطلوب : إثبات أن التقرير  $q$  صائب

أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين  $p \Rightarrow q$

وباستخدام البرهان الغير مباشر نحاول إثبات صحة التضمين  $\sim q \Rightarrow \sim p$

وحيث أن

$\sim p$  هو التقرير " $x^2$  عدد غير فردى" أى إن " $x^2$  عدد زوجى"

$\sim q$  هو التقرير " $x$  عدد غير فردى" أى إن " $x$  عدد زوجى"

أذن وفقا لأسلوب البرهان الغير مباشر فإن المطلوب هو إثبات صحة التضمين

$$x^2 \text{ عدد زوجى} \Rightarrow x \text{ عدد زوجى}$$

وحيث أن ، أى عدد زوجى يمكن كتابته بالصورة  $2n$  حيث  $n$  عدد صحيح . أذن

$$x \text{ عدد زوجى} \Rightarrow x = 2n$$

$$\Rightarrow x^2 = 4n^2$$

$$\Rightarrow x^2 = 2(2n^2)$$

$$\Rightarrow x^2 = 2m \quad , \quad m = 2n^2$$

$$\Rightarrow x^2 \text{ عدد زوجى}$$

أذن التضمين  $\sim q \Rightarrow \sim p$  متحقق .

مثال ٩ : باستخدام البرهان الغير مباشر برهن أن  
 "إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا"

الحل : نفرض

التقرير p : " المثلث متساوى الأضلاع "

والتقرير q : " المثلث متساوى الزوايا "

المعطيات : التقرير p صائب

المطلوب : إثبات أن التقرير q صائب

أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين  $p \Rightarrow q$

وباستخدام البرهان الغير مباشر نحاول إثبات صحة التضمين  $\sim q \Rightarrow \sim p$

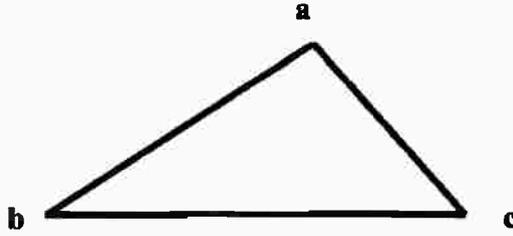
وحيث أن  $\sim p$  هو التقرير " المثلث غير متساوى الأضلاع "

$\sim q$  هو التقرير " المثلث غير متساوى الزوايا "

أذن وفقا لأسلوب البرهان الغير مباشر فإن المطلوب هو إثبات صحة التضمين

المثلث غير متساوى الأضلاع  $\Rightarrow$  المثلث غير متساوى الزوايا

نفرض المثلث abc غير متساوى الزوايا



أذن قياس (â)  $\neq$  قياس (b̂)  $\neq$  قياس (ĉ)

$\Rightarrow$  قياس (â)  $\neq$  قياس (b̂)  $\Rightarrow bc \neq ac$

$\Rightarrow$  قياس (b̂)  $\neq$  قياس (ĉ)  $\Rightarrow ac \neq ab$

أذن  $ab \neq bc \neq ac$

أذن المثلث غير متساوى الأضلاع .

### ٣ - البرهان بالتناقض Proof by Contradiction

لإثبات صحة التقرير  $p \rightarrow q$  فإننا أحيانا نلجأ إلى افتراض جدلي بأن التقرير  $p \rightarrow q$  خاطئ وبالتالي فإن نفيه  $(p \rightarrow q) \sim$  يكون صواب، وحيث أن

$$\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

أذن من التكافؤ ينتج أن التقرير  $p \wedge \sim q$  صواب ومن تعريف أداة الوصل فإن كل من  $\sim q$  ,  $p$  يكون صواب، أى إن  $q$  يكون خطأ وهذا يقودنا إلى أسلوب البرهان بالتناقض حيث نبدأ البرهان بافتراض أن النتيجة المطلوبة  $q$  تكون تقرير خطأ وبالتالي يكون  $\sim q$  صواب ثم نستخدم هذا الفرض والمعطيات فى إثبات أن ذلك يؤدي إلى الوقوع فى تناقض حيث نصل إلى تقرير ما يكون صائبا وخاطئا فى آن واحد وهذا مستحيل ويكون سبب هذا التناقض هو افتراضنا بأن نفي المطلوب صحيح، وبالتالي فإن المخرج الوحيد من هذا التناقض هو التسليم بأن  $p \wedge \sim q$  تقرير خاطئ وبالتالي التقرير المكافئ له  $(p \rightarrow q) \sim$  هو الآخر تقرير خاطئ وهذا يعنى أن  $p \rightarrow q$  تقرير صائب، أى إن التضمين  $p \Rightarrow q$  متحقق وبذلك يتم البرهان بأسلوب التناقض.

مثال ١٠ : باستخدام البرهان بالتناقض اثبت صحة ما يأتى:

المعطيات :  $p , q , p \vee q \rightarrow r$   
المطلوب :  $r$

الحل :

المعطيات جميعها صواب

وباستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفي المطلوب يكون صواب، أى إن  $\sim r$  صواب أذن  $r$  يكون خطأ.

وحيث أن  $p \vee q \rightarrow r$  صواب ( من المعطيات )

أذن من تعريف أداة الشرطية ينتج أن  $p \vee q$  خطأ

ومن تعريف أداة الفصل ينتج أن  $p, q$  خطأ وهذا يناقض المعطيات التى تقول أن  $p, q$  صواب وبالتالي الفرض يكون خطأ، أى إن  $r$  تقرير صواب.

مثال ١١ : باستخدام البرهان بالتناقض برهن أن

"إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا"

الحل : نفرض التقرير  $p$  : " المثلث متساوى الأضلاع "

والتقرير  $q$  : " المثلث متساوى الزوايا "

أذن المعطيات هى أن  $p$  صائب والمطلوب إثبات أن  $q$  صائب، أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين  $q \Rightarrow p$  وباستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفي المطلوب هو الصواب أى نفرض أن  $q \sim$  صواب، وحيث أن  $q \sim$  هو التقرير "المثلث غير متساوى الزوايا" أذن فى المثلث  $abc$

$$\text{قياس } (\hat{a}) \neq \text{قياس } (\hat{b}) \neq \text{قياس } (\hat{c})$$

$$bc \neq ac \Rightarrow \text{قياس } (\hat{a}) \neq \text{قياس } (\hat{b})$$

$$ac \neq ab \Rightarrow \text{قياس } (\hat{b}) \neq \text{قياس } (\hat{c})$$

أذن  $ab \neq bc \neq ac$  وهذا تناقض مع المعطيات  $p$  التى تقول أن المثلث متساوى الأضلاع. أذن الفرض بأن المثلث غير متساوى الزوايا يكون خاطئ وبالتالي فإن الصواب هو أن المثلث متساوى الزوايا.

مثال ١٢ : باستخدام البرهان بالتناقض برهن أن

"إذا كان  $x^2$  عددا فرديا فإن  $x$  عدد فردى"

الحل : نفرض التقرير  $p$  : "  $x^2$  عدد فردى "

والتقرير  $q$  : "  $x$  عدد فردى "

أذن المعطيات هي أن  $p$  صائب والمطلوب إثبات أن  $q$  صائب، أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين  $p \Rightarrow q$  وباستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفي المطلوب هو الصواب أى نفرض أن  $\sim q$  صواب، وحيث أن  $\sim q$  هو التقرير " عدد غير فردى " أى إن  $x$  عدد زوجي، أذن

وفقا لأسلوب البرهان بالتناقض

$$\begin{aligned} x \text{ عدد زوجي} &\Rightarrow x = 2n \\ &\Rightarrow x^2 = 4n^2 \\ &\Rightarrow x^2 = 2(2n^2) \\ &\Rightarrow x^2 = 2m, \quad m = 2n^2 \\ &\Rightarrow x^2 \text{ عدد زوجي} \end{aligned}$$

أى أننا حصلنا على  $x^2$  عدد زوجي وهذا يناقض المعطيات  $p$  التى تقول أن  $x^2$  عدد فردى. أذن الفرض بأن  $x$  عدد غير فردى يكون فرض خاطئ وبالتالي فإن الصواب هو أن  $x$  عدد فردى.

مثال ١٣ : باستخدام البرهان بالتناقض برهن أن

"إذا كان حاصل ضرب عددين طبيعيين  $x, y$  عددا فرديا فإن كلا من  $x, y$  عدد فردى"

الحل : نفرض التقرير  $p$  : "حاصل ضرب عددين طبيعيين  $x, y$  يكون عددا فرديا"

والتقرير  $q$  : " عدد فردى "

والتقرير  $r$  : " عدد فردى "

أذن المعطيات : التقرير  $p$  صائب

المطلوب : إثبات أن كلا من  $q, r$  صائب (أى المطلوب إثبات أن التقرير  $q \wedge r$  صائب)

أى إن المطلوب هو إثبات صحة التضمين  $p \Rightarrow q \wedge r$  وباستخدام البرهان

بالتناقض نفرض أن نفي المطلوب هو الصواب، أى نفرض أن  $\sim(q \wedge r)$  صواب.

$$\sim(q \wedge r) \equiv \sim q \vee \sim r$$

أذن نفى التقرير "كلا من  $x, y$  عدد فردي" هو التقرير

" $x$  عدد غير فردي أو  $y$  عدد غير فردي" وهذا يكافئ " $x$  عدد زوجي أو  $y$  عدد زوجي"  
 وحيث أن حاصل ضرب عدد زوجي بآخر فردي أو زوجي يكون عدد زوجي. إذن التقرير  $p$   
 يكون خطأ وهذا يناقض المعطيات  $p$  التي تقول أن "حاصل ضرب العددين الطبيعيين  $x, y$   
 عددا فرديا". إذن الفرض يكون خاطئ وبالتالي فإن الصواب هو أن كلا من  $x, y$   
 عدد فردي وهذا يثبت صحة التضمين  $p \Rightarrow q \wedge r$ .

مثال ١٤ : باستخدام البرهان بالتناقض برهن أن

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2} \quad \forall x > 0$$

الحل : المعطيات  $x > 0$  :

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2} \quad \text{المطلوب إثبات أن :}$$

باستخدام البرهان بالتناقض نفرض أن نفى المطلوب هو الصواب، أي نفرض

$$\text{أن } \frac{x}{x+1} \geq \frac{x+1}{x+2}$$

وحيث أن  $x > 0$  (من المعطيات). إذن

$$\begin{aligned} x(x+2) \geq (x+1)(x+1) &\Rightarrow x^2 + 2x \geq x^2 + 2x + 1 \\ &\Rightarrow 0 \geq 1 \end{aligned}$$

أي أننا حصلنا على تناقض، إذن الفرض يكون خاطئ وبالتالي فإن الصواب هو أن

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2}$$

## ٤ - البرهان بالمثال المعاكس Proof by Counter example

بعض التقارير الرياضية يكفي لتوضيح صوابها أو خطئها أن نعطي مثالا نؤيد به أجابتنا وهذه الطريقة تسمى البرهان بالمثال المعاكس والمقصود بالمثال المعاكس هو مثال القصد منه أبطال ادعاء حول قضية معينة وقد يكون لدينا مثال أو أكثر لهدم القضية ولكن الحد الأدنى هو إعطاء مثال واحد، والمثال المعاكس لا يعطي برهانا للقضية ولكن يبطل ادعاء قضية معينة عن طريق إعطاء تناقض يعاكس هذا الإدعاء .

ملاحظة :

إذا أردنا إثبات قضية ما فعلينا برهنتها في جميع الحالات وليس بمثال خاص بينما إذا أردنا أن ننقضها أو نقيم الدليل على عدم صحتها فيكفي إعطاء مثال معاكس واحد على الأقل .

فمثلا التقرير "  $\frac{x}{y} = \frac{y}{x}$  حيث  $x, y \neq 0$  أعداد حقيقية"

لا يمكن إثباته عن طريق اخذ مثال يحققه مثل  $x = 1, y = 1$  ولكن يمكن إقامة الدليل على عدم صحة هذا التقرير بأخذ المثال  $x = 3, y = 2$  لأن  $\frac{3}{2} \neq \frac{2}{3}$  وهذا يعتبر مثال معاكس يثبت أن التقرير المعطى خاطئ.

مثال ١٥ : ناقش صحة التقرير  $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \neq 0$

الحل : بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال  $x = 0$  ، وحيث أن  $|0| = 0$

أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

مثال ١٦ : ناقش صحة التقرير  $\forall x \in \mathbb{R} , x^2 > x$

الحل : بإعطاء مثال معاكس

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} \quad \text{نأخذ المثال } x = \frac{1}{2} \text{ ، وحيث أن}$$

أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

مثال ١٧ : ناقش صحة التقرير

$$(x - y)^2 \neq x^2 + y^2 \quad \text{حيث } x, y \text{ عددين حقيقيين.}$$

الحل :

بإعطاء مثال معاكس، نأخذ المثال  $x=3$  ،  $y=2$

$$(x - y)^2 = (3 - 2)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 = 9 + 4 = 13$$

أذن  $(x - y)^2 \neq x^2 + y^2$  تقرير صواب.

مثال ١٨ : أوجد مثال معاكس للتقرير  $\forall x \in \mathbb{B} , x + 5 > 15$

$$B = \{ 6 , 8 , 10 , 12 , 14 \} \quad \text{حيث}$$

الحل : بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال  $x = 6$  ، وحيث أن  $6 + 5 \leq 15$  أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

مثال ١٩ : ناقش صحة التقرير

"لأي عدد طبيعي  $n$  يكون  $6n - 1$  عددا أوليا"

الحل : بإعطاء مثال معاكس

نأخذ المثال  $n = 6$  ، أذن

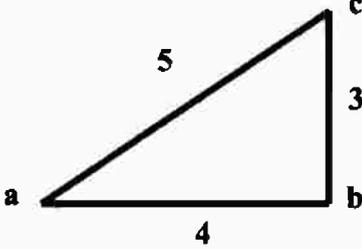
$$6n - 1 = 36 - 1 = 35$$

وحيث أن 35 عدد غير أولي. أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

مثال ٢٠ : ناقش صحة التقرير

"إذا كان المثلث قائم الزاوية فإنه يكون متساوي الأضلاع"

الحل :



بإعطاء مثال معاكس نفرض المثلث abc فيه

$$ab = 4 , bc = 3 , ac = 5$$

حيث أن

$$(ab)^2 + (bc)^2 = (ac)^2$$

أذن المثلث قائم الزاوية ولكنه غير متساوي الأضلاع

أذن التقرير المعطى يكون خطأ.

### ٥ - البرهان بالاستقراء الرياضى (الاستنتاج الرياضى)

#### Proof by Mathematical Induction

البرهان بالاستقراء الرياضى يعتبر أسلوب قوى فى برهان الكثير من النظريات والمسائل فى الرياضيات والتي تتعلق بأعداد صحيحة موجبة، فمثلا لإثبات صحة التقرير

$$P(n) \equiv 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1) , \forall n \in \mathbb{N}$$

نلاحظ بالتجريب أن

$$P(1) \equiv 2 = 1(1+1) = 2$$

$$P(2) \equiv 2 + 4 = 2(2+1) = 6$$

$$P(3) \equiv 2 + 4 + 6 = 3(3+1) = 12$$

$$P(4) \equiv 2 + 4 + 6 + 8 = 4(4+1) = 20$$

$$P(5) \equiv 2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 5(5+1) = 30$$

أذن التقرير  $P(n)$  صواب فى حالة  $n = 1, 2, 3, 4, 5$  ولبحث صحة التقرير فى حالة  $n > 5$  فإن أسلوب التجريب الذى اتبعناه لن ينتهى كما أنه لا نستطيع أن ندعى بأن التقرير

صواب لجميع قيم  $n > 5$  لان هذا سيكون مجرد تخمين غير مقبول في الرياضيات ولذلك لا بد من البحث عن أسلوب آخر غير التجريب لإثبات مثل هذه المسائل الرياضية.

تعريف ٢ : إذا كانت  $S \subset N$  حيث  $N$  مجموعة الأعداد الطبيعية فإن  $S$  تسمى مجموعة استقرائية إذا تحقق

$$n \in S \Rightarrow n+1 \in S$$

مثال ٢١ : المجموعات الآتية تمثل مجموعات استقرائية

1-  $A = \{ 1, 2, 3, \dots \}$

2-  $B = \{ 6, 7, 8, \dots \}$

3-  $C = \{ n \in N \mid n \geq 9 \}$

4-  $D = \{ n+1 \mid n \in N \}$

والمجموعات الآتية تمثل مجموعات غير استقرائية

5-  $E = \{ 4, 6, 8, \dots \}$

6-  $F = \{ n \in N \mid 5 \leq n \leq 20000 \}$

7-  $G = \{ n^2+1 \mid n \in N \}$

8-  $S = \{ k \in N \mid k \leq 2^{100} \}$

نظرية ١ : مبدأ الاستقراء (الاستنتاج) الرياضي

إذا كانت  $S \subset N$  تحقق الشرطين التاليين

1) -  $1 \in S$

2) -  $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$

فإن  $S = N$ .

البرهان : المعطيات هي  $S \subset N$  تحقق الشرط  $1 \in S$  وتحقق الشرط  $k \in S \Rightarrow k+1 \in S$  والمطلوب إثبات أن  $S = N$  . نفرض أن المجموعة  $D$  هي مكملة المجموعة  $S$  بالنسبة إلى المجموعة الشاملة  $N$  ، أى إن  $D = N - S$  . أذن يوجد حالتان فقط

الحالة الأولى:  $D = \Phi$  وفى هذه الحالة تكون النظرية صحيحة لأن  $S = N \Rightarrow D = \Phi$

الحالة الثانية:  $D \neq \Phi$  وهذا يعنى أن المجموعة  $S$  محتواه بالكامل داخل المجموعة  $N$  ، أى إن

$$\exists k \in N : k \notin S$$

والآن نحاول إثبات خطأ هذا الإدعاء. حيث أن  $1 \in S$  ( من المعطيات )

نفرض أن  $m \neq 1$  هو أصغر عدد صحيح موجب ينتمى إلى المجموعة  $D$ ، أى إن  $m \notin S$  ، ومن تعريف الفرق بين مجموعتين فإن العدد الذى يسبق العدد  $m$  مباشرة ينتمى إلى  $S$  ، أى إن  $m-1 \in S$  ولكن من الشرط الثانى من المعطيات نجد أن  $m-1 \in S \Rightarrow m \in S$  وهذا يؤدى إلى تناقض حيث  $m \notin S$  وفى نفس الوقت  $m \in S$  ومن ذلك نستنتج أن الفرض  $D \neq \Phi$  فرض خاطئ أى إن  $D = \Phi$  وبالتالي  $S = N$ .

ملاحظات :

١ - لكي نثبت صحة التقرير  $P(n)$  حيث  $n \in N$  فإنه وفقا لمبدأ الاستقراء

الرياضى (نظرية (١) ) فإنه لا بد من التحقق من الشرطين الآتيين معا:

الشرط الأول : عند  $n = 1$  فإن التقرير  $P(1)$  صواب

الشرط الثانى : بفرض أن  $P(n)$  صائب عند  $n = k$  فإن ذلك يؤدى

إلى أن التقرير  $P(k+1)$  صائب أيضا، أى إن

$$P(k) \Rightarrow P(k+1)$$

٢ - إذا لم يتحقق أحد الشرطين فإن  $P(n)$  تكون تقرير خاطئ.

٣ - إذا كان التقرير  $P(n)$  صائب فى حالة  $n = l$  (بدلا من  $n = 1$ ) وكان

الشرط الثانى متحقق فإن التقرير  $P(n)$  يكون صائب لجميع

قيم  $n \geq l$ .

مثال ٢٢ : استخدم البرهان بالاستقراء الرياضي في إثبات صحة التقرير

$$P(n) \equiv 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

الحل :

أولا : نثبت صحة التقرير في حالة  $n = 1$

بوضع  $n = 1$  فإن

$$1 = P(n) \text{ الطرف الأيسر من التقرير}$$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = P(n) \text{ الطرف الأيمن من التقرير}$$

أذن التقرير  $P(n)$  صواب في حالة  $n = 1$

ثانيا : نفرض صحة التقرير  $P(n)$  في حالة  $n = k$

ونحاول إثبات صحته في حالة  $n = k + 1$

أى نفرض أن

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2} \quad (1)$$

ونحاول إثبات أن

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

والآن بإضافة  $(k+1)$  إلى طرفي المعادلة (١) نحصل على

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

أذن التقرير  $P(n)$  صواب في حالة  $n = k + 1$ .

أذن وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضي فإن التقرير  $P(n)$  صواب لكل  $n \in \mathbb{N}$ .

مثال ٢٣ : باستخدام البرهان بالاستقراء الرياضى بين ما إذا كان التقرير الآتى صواب أم خطأ

$$P(n) \equiv 1+3+5+ \dots + (2n-1) = 3n-1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

الحل :

أولا : نثبت صحة التقرير في حالة  $n=1$

بوضع  $n=1$  فإن

$$1 = P(n) \text{ الطرف الأيسر من التقرير}$$

$$1 = 3-2 = P(n) \text{ الطرف الأيمن من التقرير}$$

أذن التقرير  $P(n)$  صواب في حالة  $n=1$

ثانيا : نفرض صحة التقرير في حالة  $n=k$  ونحاول إثبات صحة التقرير في حالة  $n=k+1$

أى نفرض أن

$$1+3+5+ \dots + (2k-1) = 3k-2 \quad (1)$$

ونحاول إثبات أن

$$1+3+5+ \dots + (2k-1) + (2(k+1)-1) = 3(k+1)-2$$

والآن بإضافة  $(2(k+1)-1)$  إلى طرفي المعادلة (١) نحصل على

$$\begin{aligned} 1+3+5+ \dots + (2k-1) + (2(k+1)-1) &= 3k-2 + (2(k+1)-1) \\ &= 3k-2 + 2k+2-1 \\ &= 5k-1 \\ &\neq 3(k+1)-2 \end{aligned}$$

أذن التقرير  $P(n)$  غير متحقق في حالة  $n=k+1$  أى إن الشرط الثانى من الاستقراء الرياضى غير متحقق وبالتالي فإن التقرير  $P(n)$  يكون خطأ.

مثال ٢٤ : استخدم البرهان بالاستقراء الرياضى فى إثبات صحة التقرير

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

الحل :

أولاً : نثبت صحة التقرير فى حالة  $n = 1$

بوضع  $n = 1$  فإن

$$6 = 1 \times 2 \times 3 = \text{الطرف الأيسر من التقرير}$$

$$6 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{4} = \text{الطرف الأيمن من التقرير}$$

أذن التقرير صواب فى حالة  $n = 1$

ثانياً : نفرض صحة التقرير فى حالة  $n = k$  ونحاول إثبات صحته فى حالة  $n = k + 1$

أى نفرض أن

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + k(k+1)(k+2) = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} \quad (1)$$

ونحاول إثبات أن

$$1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

والآن بإضافة  $(k+1)(k+2)(k+3)$  إلى طرفى المعادلة (١) نحصل على

$$\begin{aligned} & 1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + \dots + (k+1)(k+2)(k+3) \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3) \\ &= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4} \end{aligned}$$

أذن التقرير صواب فى حالة  $n = k + 1$ .

أذن وفقاً لمبدأ الاستقراء الرياضى فإن التقرير صواب لكل  $n \in \mathbb{N}$ .

مثال ٢٥ : برهن بالاستقراء الرياضي صحة التقرير

$$P(n) \equiv 2^n \leq n! \quad \forall n \geq 4$$

الحل :

أولا : نثبت صحة التقرير  $P(n)$  في حالة  $n = 4$

بوضع  $n = 4$  فإن

$$16 = 2^4 = P(n) \text{ الطرف الأيسر من التقرير}$$

$$24 = 4! = P(n) \text{ الطرف الأيمن من التقرير}$$

أذن  $2^4 \leq 4!$  وبالتالي التقرير  $P(n)$  صواب في حالة  $n = 4$

ثانيا : نفرض صحة التقرير  $P(n)$  في حالة  $n = k \geq 4$

ونحاول إثبات صحته في حالة  $n = k + 1$

أى نفرض أن  $2^k \leq k!$  ونحاول إثبات أن  $2^{k+1} \leq (k+1)!$  من خواص المتباينات

$$k \geq 4 \Rightarrow k+1 > 4 > 2 \Rightarrow 2 < k+1$$

والآن من الفرض

$$2^{k+1} = 2 \times 2^k \leq 2(k!) \leq (k+1)(k!) = (k+1)!$$

أذن التقرير  $P(n)$  صواب في حالة  $n = k + 1$  .

أذن وفقا لمبدأ الاستقراء الرياضى فإن التقرير  $P(n)$  صواب لكل  $n \geq 4$  .

مثال ٢٦ : برهن بالاستقراء الرياضي صحة التقرير

"العدد  $3^n - 1$  يقبل القسمة على 2 لكل  $n \in \mathbb{N}$ "

الحل :

أولا : نثبت صحة التقرير في حالة  $n = 1$

بوضع  $n = 1$  نلاحظ أن  $3^1 - 1 = 2$  يقبل القسمة على 2 وبالتالي التقرير صواب في حالة  $n = 1$  .

ثانيا : نفرض صحة التقرير في حالة  $n = k$  ونحاول إثبات صحته في حالة  $n = k + 1$

أى نفرض أن العدد  $3^k - 1$  يقبل القسمة على 2 ونحاول إثبات أن  $3^{k+1} - 1$  يقبل القسمة على 2. ومن قابلية القسمة بالفرض فإنه يوجد عدد  $m$  بحيث أن

$$3^k - 1 = 2m \text{ وبضرب الطرفين في } 3. \text{ أذن}$$

$$3^{k+1} - 3 = 6m \Rightarrow 3^{k+1} - 1 = 6m + 2 = 2(3m + 1) = 2l$$

حيث  $l = 3m + 1$  وبالتالي ينتج أن التقرير صواب في حالة  $n = k + 1$  وبالتالي صواب لكل  $n \in \mathbb{N}$  .

## تمارين الفصل السادس

١ - اثبت صحة كل مما يأتي باستخدام

البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهان بالتناقض :

١ - المعطيات : $p, q, p \wedge q \rightarrow r$ المطلوب : $r$
٢ - المعطيات : $\sim p, \sim q, q \vee r \rightarrow p$ المطلوب : $\sim r$
٣ - المعطيات : $p \rightarrow q, \sim r \rightarrow \sim q$ المطلوب : $\sim r \rightarrow \sim p$
٤ - المعطيات : $\sim p \vee \sim q, q$ المطلوب : $\sim p$
٥ - المعطيات : $p \rightarrow q, \sim p \rightarrow r, r \rightarrow s, s$ المطلوب : $\sim q \rightarrow s$

٢ - اثبت صحة كلا من الحجج الآتية باستخدام

البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهان بالتناقض:

- 1-  $(p \rightarrow \sim q), \sim p \alpha \sim q$
- 2-  $(p \leftrightarrow q), q \alpha p$
- 3-  $(p \rightarrow \sim q), (r \rightarrow q), r \alpha \sim p$
- 4-  $(p \rightarrow \sim q), (\sim r \rightarrow \sim q) \alpha (p \rightarrow \sim r)$
- 5-  $(p \rightarrow q), (r \rightarrow \sim q) \alpha (r \rightarrow \sim p)$

٣ - اثبت صحة كل مما يأتى باستخدام

البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهان بالتناقض :

- 1-  $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
- 2-  $(q \rightarrow p) \wedge \sim p \Rightarrow \sim q$
- 3-  $((p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)) \wedge p \Rightarrow q$
- 4-  $(p \wedge q) \wedge (p \vee q \rightarrow r) \Rightarrow r$
- 5-  $(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow q) \Rightarrow (p \vee r \rightarrow q)$

٤ - باستخدام البرهان المباشر أوجد الاستنتاج المناسب لكل من المقدمات المنطقية التالية،

بحيث تكون الحجة ملزمة :

- 1-  $(p \rightarrow \sim q), q$
- 2-  $(p \leftrightarrow q), (r \rightarrow \sim p)$
- 3-  $(p \rightarrow \sim q), (\sim p \rightarrow r)$
- 4-  $(r \rightarrow p), (q \rightarrow \sim p), r$
- 5-  $(p \rightarrow q), (\sim r \rightarrow \sim q), (r \rightarrow \sim s)$

٥ - اثبت صحة كل مما يأتى باستخدام البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهان

بالتناقض :

١ -  $x$  عددا زوجيا شرط ضرورى لكى يكون  $x^2$  عددا زوجيا .

٢ - إذا كان  $x = 4$  فإن  $x^2 = 16$  .

٣ - إذا كان المثلث متساوى الأضلاع فإنه يكون متساوى الزوايا .

٤ - إذا كان  $x$  عددا زوجيا فإن  $x + 1$  عدد فردى .

٥ - حاصل ضرب عددين زوجيين يكون عدد زوجى .

٦ - الزاوية المحيطة نصف الزاوية المركزية المشتركة معها فى القوس .

٧ - العمود النازل من مركز الدائرة على أى وتر فيها ينصفه .

٨ - الزاوية الخارجة لأي مثلث تساوي مجموع الزاويتين الداخليتين في المثلث ماعدا المجاورة.

٩ - المعادلة  $2x + 1 = 0$  ليس لها حل إذا كان  $x$  تنتمي في مجموعة الأعداد الطبيعية.

١٠ - إذا كان  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  فإن  $\frac{ad + 4b^2}{bd} = \frac{c + 4b}{d}$

٦ - إذا كان  $a, b$  أعداد زوجية فباستخدام البرهان المباشر أثبت أن كل مما يأتي عدد زوجي:

$$a + b, ab, 2a + 3b, a^2 + b^2, (a + 2)^2 + b^2$$

٧ - باستخدام البرهان بالتناقض أثبت كلا مما يأتي :

١ - العدد  $\sqrt{2}$  عدد غير نسبي .

٢ - المستقيم الواصل بين منتصفين ضلعين في المثلث يوازي الضلع الثالث ويساوي نصفه.

٣ - في المثلث  $abc$  إذا كان  $ab \neq ac$  فإن  $\hat{c} \neq \hat{b}$  .

٤ - حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد فردي.

٥ - مجموع عددين فرديين هو عدد زوجي.

٨ - برهن على صحة كلا من الحجج الآتية باستخدام

البرهان المباشر - البرهان الغير مباشر - البرهان بالتناقض .

١ - سقوط المطر شرط كافي لنمو المزروعات .

المزروعات لم تنمو .

أذن المطر لم يسقط .

٢ - سقوط المطر شرط ضروري وكافي لتعمير الصحراء .

إذا تم تعمير الصحراء فإن الشباب سوف يجدون فرص عمل جديدة .

المطر يسقط والشباب يجدون فرص عمل جديدة . أذن الصحراء يتم تعميمها .
٣ - إذا درس الطالب منهج الرياضيات بفهم فإنه سوف يجتاز الامتحان بتفوق . الطالب لم يجتاز الامتحان بتفوق . أذن الطالب لم يدرس منهج الرياضيات بفهم .
٤ - إذا كانت الدالة $f$ قابلة للتفاضل فإنها تكون متصلة . الدالة $f$ قابلة للتفاضل . أذن الدالة $f$ متصلة .
٥ - إذا كانت الدالة $f$ غير متصلة فإنها تكون غير قابلة للتفاضل . الدالة $f$ قابلة للتفاضل . أذن الدالة $f$ متصلة .
٦ - إذا كانت الدالة $f$ قابلة للتفاضل فإنها تكون متصلة . الدالة $f$ غير متصلة . أذن الدالة $f$ غير قابلة للتفاضل .
٧ - تساوى أضلاع المثلث شرط ضرورى وكاف لتساوى زوايا المثلث . المثلث زواياه مختلفة . أذن المثلث أضلاعه مختلفة .

٩ - ناقش صحة كل من التقارير الآتية :

١ - إذا كان  $n$  عددا فرديا فإن  $n + 1$  عددا زوجيا .

٢ - إذا كان  $n$  عددا أوليا فإن  $2^2 + 1$  عددا أوليا .

٣ - كل الأعداد الفردية تكون أعداد أولية .

٤ - حاصل ضرب عددين فرديين هو عدد غير زوجي .

٥ - مجموع عددين زوجيين هو عدد فردى .

- ٦ - لكل عدد طبيعي  $n$  فإن العدد  $n^2 + n + 41$  يكون عدد أولي.
- ٧ -  $(x+1)^2 = x^2 + x + 1$  حيث  $x$  عدد حقيقي .
- ٨ -  $(x+1)^2 \neq x^2 + x + 1$  حيث  $x$  عدد حقيقي.
- ٩ -  $(x-y)^2 \neq x^2 - y^2$  حيث  $x, y$  عددين حقيقيين.
- ١٠ -  $x - y = y - x$  حيث  $x, y$  عددين حقيقيين.
- ١١ - كل الأعداد الفردية تقبل القسمة على 3 أو 5 .
- ١٢ - بعض الأعداد الأولية تكون أعداد زوجية .
- ١٣ - كل الأعداد الزوجية تكون أعداد غير أولية .
- ١٤ - يوجد عدد حقيقي  $x$  بحيث أن  $\log(x) < 0$  .
- ١٥ - لكل عدد حقيقي  $x$  فإن  $|x| = -x$  .

١٠ - نفرض المجموعة  $B = \{2, 4, 6, 8\}$  . ناقش صحة كل من التقارير الآتية باستخدام المثال المعاكس:

- 1-  $\forall x \in B$  ,  $x - 4 > 0$       4-  $\exists x \in B$  : عدد غير زوجي
- 2-  $\forall x \in B$  ,  $x^2 < 2^x$       5-  $\forall x, y \in B$  ,  $x + y \geq x^2 - y^2$
- 3-  $\exists x \in B : x! = 6$       6-  $\exists x \in B : 3!$  عامل من عوامل العدد

١١ - نفرض أن  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  . ناقش صحة كل من التقارير الآتية باستخدام المثال المعاكس:

- 1 -  $\forall x, y \in A$  ,  $x^2 + y^2 > 5$
- 2 -  $\exists x, y \in A$  ,  $x + y < 6$
- 3 -  $\exists y \in A : \forall x \in A$  ,  $3x + y > 12$
- 4 -  $\forall x \in A$  ,  $\exists y \in A : x + 2y < 10$

5 -  $\forall x, y \in A : x^2 - y \geq 1$

١٢ - ناقش صحة كل من التقارير الآتية باستخدام البرهان بالمثال المعاكس:

1)  $(\forall n \in \mathbb{N}) (n - 1 \geq 2)$

2)  $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 - 9 = 0$

3)  $(\forall n \in \mathbb{N}) (n^2 < 2^n)$

4)  $\exists n \in \mathbb{N} : 50 \leq n^2 < 90$

5)  $\forall x \in (0,1] , x^2 < 1$

6)  $\exists x \in (0,2] : x^2 < x$

7)  $\exists n \in \mathbb{N} : (n^2 - 14 > 0) \wedge (n^3 < 70)$

8)  $\forall n \in \mathbb{N} , (n^2 \leq 20) \wedge (n^3 > 3)$

9)  $\forall n \in \{1,2,3,4,5\} , (n^2 \leq 21) \vee (n^3 > 130)$

10)  $\forall n \in \{1,2,3,4,5\} , n^2 \leq 10 \rightarrow n^3 < 30$

١٣ - استخدم البرهان بالاستقراء الرياضي في إثبات صحة كل من التقارير الآتية :

1)  $P(n) \equiv 1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2) = \frac{n(3n - 1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2)  $P(n) \equiv 4 + 8 + 12 + \dots + 4n = 2n(n + 1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3)  $P(n) \equiv 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

4)  $P(n) \equiv 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n + 1)^2}{4} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

5)  $P(n) \equiv \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n + 1)} = \frac{n}{(n + 1)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

١٤ - برهن بالاستقراء الرياضى صحة التقرير  $\forall n \geq 3 \quad P(n) \equiv 2^n > 2n+1$

١٥ - برهن بالاستقراء الرياضى صحة كل من التقارير الآتية :

١ -  $n^3 - n + 3$  يقبل القسمة على 3 لكل  $n \in \mathbb{N}$

٢ -  $5^n - 2^n$  يقبل القسمة على 3 لكل  $n \in \mathbb{N}$

٣ -  $3^n - 1$  عدد زوجى لكل عدد طبيعى  $n \geq 3$

٤ -  $n^3 - n + 1 > n^2$  لكل عدد طبيعى  $n > 1$

٥ -  $3^n + 2^n$  عدد فردى لكل عدد طبيعى  $n \in \mathbb{N}$