

Probability and probability distributions

- ١- تعريف الاحتمال
- ٢- قواعد الاحتمال
- ٣- الاحتمال الشرطي
- ٤- الاحتمالات اللاحقة
- ٥- التوزيعات الاحتمالية
- ٦- مقدمة عن التباديل والتوافيق
- ٧- توزيع "ذو الحدين"
- ٨- توزيع بواسون
- ٩- التوزيع الطبيعي
- ١٠- التوزيع الطبيعي القياسى
- ١١- توزيع المتوسطات
- ١٢- تقريب توزيع "ذو الحدين" بالتوزيع الطبيعي

من منا لا يستخدم كلمة احتمال probability في حياته اليومية ولكن قد تكون في عبارات مختلفة فيقال إن هذين الزوجين قد ينجبان ذكراً أو أن هذا الطالب يكاد يكون من المؤكد نجاحه في مادة ما أو أن هذا الطفل الصغير قد يصير طويلاً وغير ذلك كثير. وهذه العبارات إما مؤكدة الحدوث أو مؤكدة في عدم حدوثها أو تقع بين هاتين الفئتين. وتقوم نظرية الاحتمالات probability theory بترجمة هذه العبارات الوصفية إلى قياسات كمية حيث إنها الأكثر دقة، فيقال مثلاً إن احتمال الحصول على ذكر يساوي النصف أي 50% واحتمال أن هذا الطالب المؤكد نجاحه هو الواحد الصحيح أو 100% ... وهكذا. ويطلق على إنجاب ذكر أو نجاح الطالب في مادة ما أو أن يكون الطفل طويلاً "حدث" event وفي مثل هذه الحالة يسمى حدث بسيط simple event، وقد يكون الحدث مركباً compound event كما في حالة إلقاء حجرى نرد مرة واحدة فإن احتمال الحصول على الوجه العلوى 6 للحجرين هو احتمال الحصول على حدث مركب. وللحصول على نسبة حدوث هذا الحدث أو أى حدث فقد تجرى تجربة experiment والتي قد تشمل على عدة محاولات trials وعندما تجرى محاولة يتحصل على عدد مختلف من الحالات الممكن ظهورها وتسمى كل الحالات المختلفة الممكن حدوثها (جميع النواتج الممكنة) all possible outcomes. فمثلاً عند إلقاء حجر النرد فإن أى رقم من الأرقام التالية يظهر على وجهه العلوى: 1 أو 2 أو 3 أو 4 أو 5 أو 6 وتمثل هذه الأحداث كل النواتج الممكن ظهورها. ويعبر عن كل الأحداث الممكنة بفراغ العينة sample space وقد يمثل بمحور واحد one dimensional space كما هو الحال عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة حيث سيكون هناك محور واحد عليه الأرقام من 1 إلى 6، وقد يمثل فراغ العينة بمحورين two dimensional space كما في حالة إلقاء حجرى نرد مرة واحدة فالمحور السيني مثلاً يمثل حجر النرد الأول والمحور الصادى يمثل الحجر الثانى وقد يمثل فراغ العينة بأكثر من محورين.

وقد بدأت دراسة الاحتمالات من عدة مئات من السنين وكان هناك اهتمام بها وخاصة في الألعاب الميسرية التى تتوقف على الصدفة chance. وتلعب الاحتمالات دوراً مهماً في الإحصاء وفي اختبارات الفروض الإحصائية tests of hypotheses وفى التقديرات estimations وغيرها الكثير.

٤-١ تعريف الاحتمال

هناك نوعان من التعريفات أحدهما هو التعريف الكلاسيكى والآخر هو التعريف التجريبي.

١-٤-١ التعريف الكلاسيكي Classical definition

وفيه يعرف احتمال حدوث حدث ما وليكن هذا الحدث E مثلاً بأنه النسبة بين عدد مرات ظهور هذا الحدث المرغوب فيه (n) desired event إلى عدد كل النواتج الممكنة (m)، ويعبر عن ذلك كما يلي:

$$\Pr(E) = \frac{n}{m} \quad (1-4)$$

ومن هذا التعريف فإن أقل قيمة لاحتمال هي الصفر عندما يكون عدد مرات ظهور الحدث المرغوب فيه مساوياً للصفر وأعلى قيمة لاحتمال هي الواحد الصحيح عندما يكون عدد مرات ظهور الحدث المرغوب فيه (n) مساوياً لعدد كل النواتج الممكنة (m).

مثال ١-٤

ما هو احتمال الحصول على صورة (H) عند رمي قطعة نقود مرة واحدة؟ وللحصول على قيمة هذا الاحتمال فإن عدد مرات ظهور الحدث المرغوب فيه هو 1 والعدد الكلي للحالات الممكن حدوثها هو 2 وعلى ذلك فإن احتمال الحصول على صورة يساوي $\frac{1}{2}$ ، مع ملاحظة أن قطعة النقود هذه يجب أن تكون غير متحيزة fair، بمعنى عند رمي هذه القطعة فإنها تستقر إما على الصورة أو على الكتابة بنفس درجة التوقع.

ويجب ملاحظة أنه عند استخدام هذا التعريف الكلاسيكي لاحتمال فإنه يشترط أن تكون الأحداث متنافية mutually exclusive، أي حدوث أي منها يمنع حدوث الأخرى وأن يكون لكل حدث نفس الفرصة في الظهور equally likely.

مثال ٢-٤

ما هو احتمال الحصول على ولد Jack عند سحب ورقة من أوراق اللعب (الكوتشينة)؟

$$\text{عدد الأوراق التي عليها Jack} = 4$$

العدد الكلي للأوراق = 52 و هذا يمثل كل الأحداث الممكنة

$$\text{إذا احتمال الحصول على Jack} = 4 \div 52 = 0.0769$$

مثال ٣-٤

في المثال ١-٤ ما هو احتمال الحصول على كتابة (T)؟

عدد مرات الحصول على كتابة عند رمى قطعة واحدة من النقود = 1 والعدد الكلى الممكن حدوثه هو 2 أى أن:

$$m = 2, \quad \bar{n} = 1$$

$$1 \div 2 = 0.5 \quad \text{إذا احتمال الحصول على كتابة:}$$

يتضح مما سبق عدة حقائق حول الاحتمالات:

١- إذا أجريت محاولة لها k من الحالات الممكنة والمتساوية فى إمكانية حدوثها فإن احتمال الحصول على أى منها هو:

$$\Pr(E_i) = \frac{1}{k}, i = 1, 2, \dots, k \quad (2-4)$$

كما ظهر ذلك فى الأمثلة ١-٤، ٣-٤.

٢- احتمال حدوث حدث ما E_i أكبر من أو يساوى الصفر وأقل من أو يساوى الواحد الصحيح أى أن:

$$0 \leq \Pr(E_i) \leq 1 \quad (3-4)$$

٣- مجموع الاحتمالات لكل الأحداث الممكنة يساوى الواحد الصحيح:

$$\sum_i \Pr(E_i) = 1 \quad (4-4)$$

فحاصل جمع احتمال الحصول على صورة واحتمال الحصول على كتابة عند رمى قطعة من النقود يساوى الواحد الصحيح وعند إلقاء حجر نرد مرة واحدة فإن احتمال الحصول على أى رقم يساوى $\frac{1}{6}$ ومجموع الاحتمالات لكل الأحداث الممكنة هو الواحد الصحيح أيضاً... وهكذا.

٤- احتمال عدم الحصول على حدث ما وليكن $E_i = k$ يساوى الواحد الصحيح مطروحاً منه احتمال الحصول على هذا الحدث أى أن:

$$\Pr(E_i \neq k) = 1 - \Pr(E_i = k) \quad (5-4)$$

مثال ٤-٤

عند إلقاء حجر نرد مرة واحدة ما هو احتمال عدم الحصول على الرقم 6 ؟

$$\frac{1}{6} = 0.166 \quad \text{احتمال الحصول على الرقم 6}$$

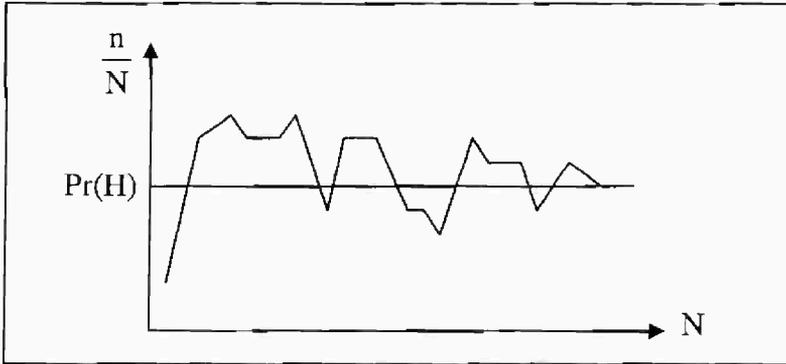
$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 0.834 \quad \text{واحتمال عدم الحصول على الرقم 6}$$

٢-١-٤ التعريف التجريبي Experimental or empirical definition

إذا أجريت تجربة من عدة محاولات في كل محاولة يرمى مثلاً عدد من قطع النقود N ، ظهرت الصورة (H) في n منها فإنه عندما تؤول N إلى ∞ (ما لانهاية) فإن النسبة $\frac{n}{N}$ تعبر عن قيمة الاحتمال أى أن:

$$\Pr(H) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n}{N} \quad (٦-٤)$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانياً بالشكل ١-٤ إذا كان المحور السيني يمثل N والمحور الصادي يمثل النسبة $\frac{n}{N}$.



شكل ١-٤ التمثيل البيانى للتعريف التجريبي للاحتمال

ومن هذا التعريف التجريبي للاحتمال يتضح أنه كلما زادت N كلما أمكن الحصول على قيمة دقيقة للاحتمال بعيداً عن تأثير الصدفة chance التي قد تلعب دوراً كبيراً إذا كانت N صغيرة.

مثال ٥-٤

إذا كان عدد عجول الذكور المولودة 4900 علماً بأن العدد الكلى 10000 عجل من الذكور والإناث. فما احتمال الحصول على عجل ذكر ؟

$$\frac{4900}{10000} = \frac{49}{100} = 0.49 \quad \text{احتمال الحصول على عجل ذكر}$$

وأبسط طريقة للحصول على قيمة الاحتمال لحدوث حدث ما وليكن E_i هو كتابة كل الحالات المختلفة الممكن ظهورها ثم تحصر عدد الحالات التي يظهر فيها الحدث المرغوب E_i وباستخدام تعريف الاحتمال الكلاسيكي السابق الإشارة إليه يمكن حساب قيمة الاحتمال المراد تقديره.

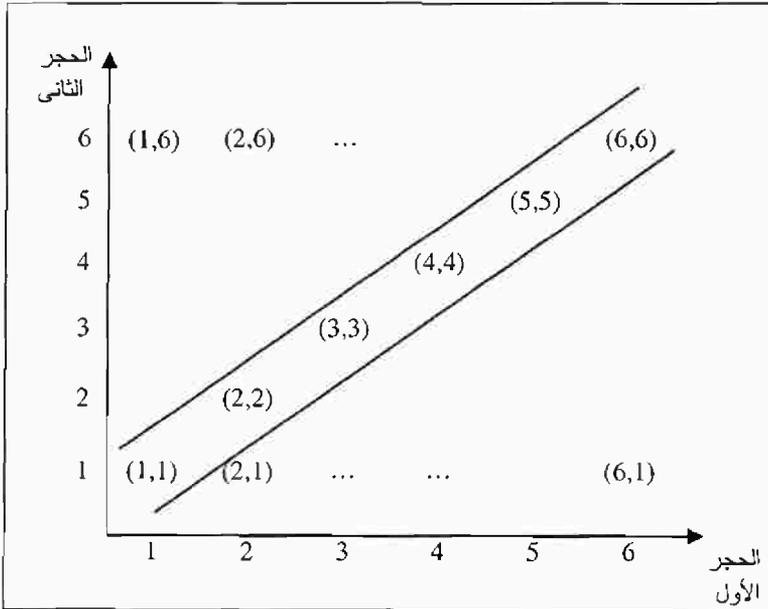
مثال ٤-٦

عند إلقاء حجرى نرد ما احتمال الحصول على الوجهين متشابهين؟

افتراض أن الإحداث السيني يمثل الحجر الأول والإحداث الصادي يمثل الحجر الثانى حيث تكون كل النقط الممكن ظهورها 36 وعدد المرات التى يظهر فيها الوجهان متشابهين 6 مرات وعليه فإن احتمال الحصول على الوجهين متشابهين هو:

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

كما هو واضح من شكل ٤-٢



شكل ٤-٢ النقط الممكن ظهورها عند إلقاء حجرى نرد مرة واحدة

ولكن حساب الاحتمال بتلك الطريقة قد يحتاج إلى جهد ووقت لحصر كل الحالات المختلفة الممكن حدوثها ولذا تستخدم قواعد الاحتمالات التي وضعت لتوفر الوقت والجهد.

٤-٢ قواعد الاحتمال Rules of probability

٤-٢-١ قاعدة الجمع Addition rule

إذا ألقى حجرا نرد غير متحيزين مرة واحدة. فما احتمال الحصول على وجهين متشابهين (هو نفس المثال ٤-٦)؟ ويمكن التعبير عن ذلك كالآتي:

ما قيمة احتمال الحصول على: (1, 1) أو (2, 2) أو (3, 3) أو (4, 4) أو (5, 5) أو (6, 6)؟

لاحظ أنه إذا ألقى حجري نرد فإن الحصول على (1,1) على كلا الوجهين للحجرين يمنع ظهور الحالات الأخرى الممكنة. والحصول على (2,2) يعني أيضا عدم ظهور الحالات الأخرى، وهكذا فإن ظهور أي حدث يمنع ظهور الأحداث الأخرى. ويعبر عن تلك الخاصية بأنها أحداث متنافية mutually exclusive ويكون احتمال الحصول على هذه الأحداث المتنافية والتي لها نفس الفرصة في الظهور هو مجموع احتمالات كل منها ويعبر عن ذلك كما يلي:

$$\begin{aligned} \Pr[(1,1) \text{ or } (2,2) \cdots \text{ or } (6,6)] &= \Pr(1,1) + \Pr(2,2) + \cdots + \Pr(6,6) \\ &= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \cdots + \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

وهي نفس النتيجة السابق الحصول عليها في مثال ٤-٦. ويمكن تعميم هذه القاعدة لأي من الأحداث المتنافية أي:

$$\Pr(E_1 \text{ or } E_2 \cdots \text{ or } E_k) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2) + \cdots + \Pr(E_k) \quad (٧-٤)$$

أما إذا كانت الأحداث غير متنافية (وهذا شرط أساسي يلزم توفره) فإن النتيجة سوف تختلف وسوف تكون الإجابة خطأ، والمثال التالي يبين ذلك:

مثال ٤-٧

ما احتمال الحصول على وجهين متشابهين أو أن يكون مجموع الوجهين هو 2 عند إلقاء حجري نرد مرة واحدة؟

عند النظر للرسم البياني (شكل ٤-٢) في المثال ٤-٦ وحصر عدد النقط التي تمثل الحصول على الوجهين متشابهين (6 نقاط) أو أن يكون مجموع الوجهين هو 2 (نقطة واحدة) وعليه فإن الاحتمال عبارة عن: $\frac{6}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}$ وهي قيمة غير مضبوطة للاحتمال. وللحصول على القيمة المضبوطة تستخدم العلاقة التالية:

$$\Pr(A \text{ or } B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(AB) \quad (٨-٤)$$

وتعبر $\Pr(AB)$ عن الاحتمال المشترك joint probability وهو احتمال الحصول على الحدث A والحدث B معاً أي نسبة عدد المرات التي يظهر فيها الحدث A والحدث B معاً إلى العدد الكلي الممكن حدوثه. وقد يعبر عن المعادلة (٨-٤) كما يلي:

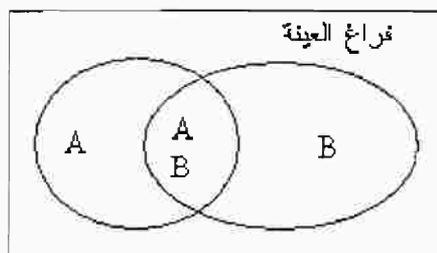
$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B) \quad (٩-٤)$$

حيث تمثل \cup اتحاد union بينما تمثل \cap تقاطع intersection.

وتكون الإجابة الصحيحة للمثال ٤-٧ كالتالي:

$$\frac{6}{36} + \frac{1}{36} - \frac{1}{36} = \frac{6}{36}$$

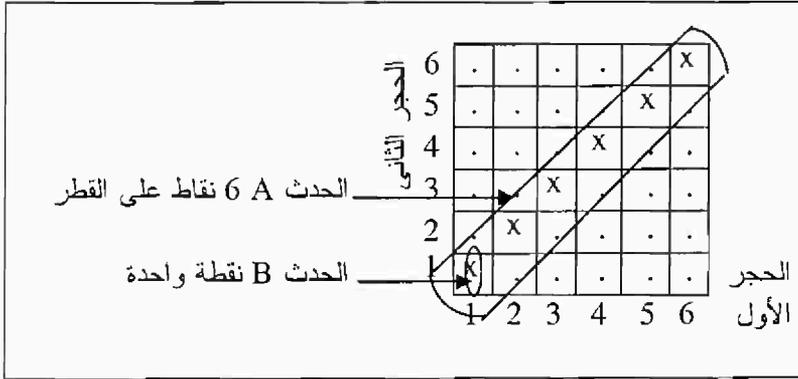
ويمكن التعبير عن المعادلة (٩-٤) بالشكل ٤-٣ المعروف باسم Venn diagram



شكل ٤-٣ تخطيط (شكل) فن Venn diagram

حيث إن احتمال الحصول على الحدث A أو الحدث B هو احتمال الحصول على الحدث A مضافاً إليه احتمال الحصول على الحدث B مطروحاً منه احتمال الحصول على كليهما معاً.

ولتوضيح هذا الشكل فإنه في المثال ٤-٧ يمكن التعبير عن كل النقط الممكنة وعددها 36 بفراغ العينة sample space ويعبر عن عدد النقط التي يظهر فيها الوجهان متشابهين بالحدث A وهي 6 نقاط وعدد النقط التي فيها مجموع الوجهين يساوى 2 بالحدث B وعددها نقطة واحدة ويمكن بيان ذلك بالشكل ٤-٤ التالي:



شكل ٤-٤ عدد النقط التي يمثلها الحدث A وعدد النقط التي يمثلها الحدث B

وفي هذه الحالة فإن احتمال الحصول على الحدث B هو نفسه احتمال الحصول على الحدثين A، B معا.

٤-٢-٢ قاعدة الضرب Multiplication rule

عند إجراء عدد من المحاولات المستقلة independent trials فإن احتمال الحصول على حدثين مستقلين معا هو حاصل ضرب احتمال الحصول على الحدث الأول في احتمال الحصول على الحدث الثاني أى:

$$\Pr(E_1 \text{ and } E_2) = \Pr(E_1) \cdot \Pr(E_2) \quad (١٠-٤)$$

و للتعميم فإن:

$$\Pr(E_1 \text{ and } E_2 \text{ and } \dots E_k) = \Pr(E_1) \cdot \Pr(E_2) \cdot \dots \cdot \Pr(E_k) \quad (١١-٤)$$

حيث إن الأحداث من E_1 إلى E_k أحداث مستقلة independent events وتعرف بأنها الأحداث التي إذا حدثت أى منها لا يؤثر على ظهور الأحداث الأخرى. ويلاحظ هنا استخدام كلمة and وهي تعنى مع فى حين أنه فى حالة الأحداث المتنافية استعملت كلمة or وتعنى أو.

مثال ٤-٨

عند إلقاء حجرى نرد معاً، ما احتمال الحصول على رقم 6 على الوجهين؟
حيث إن ظهور رقم 6 على وجه حجر النرد الأول مستقل ولا يمنع ظهور الرقم 6 أيضاً على وجه حجر النرد الثانى أى أنهما حدثان مستقلان فإن:

$$\text{احتمال الحصول على } (6,6) \text{ عند رمى حجرى النرد معاً: } \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

وهى نفس قيمة الاحتمال لو استخدمت الطريقة المبسطة السابق الإشارة إليها كما فى المثال ٤-٦ حيث إن عدد النقط التى فيها الوجهين (6,6) هو واحد والعدد الكلى 36 وبالتالي فهى تعطى نفس النتيجة.

مثال ٤-٩

فى دراسة الوراثة فى النباتات، عند تزاوج الفرد الخليط وتركيبه الوراثى Aa مع نفسه (التلقيح الذاتى)، ما احتمال الحصول على فرد تركيبه AA؟

الحل:

الفرد Aa يعطى نوعين من الجاميطات هما A، a وبالتالي فإن

$$\text{احتمال الحصول على جاميطة } A = 0.5$$

$$\text{احتمال الحصول على جاميطة } a = 0.5$$

وحيث إن الفرد AA ينتج عندما يحصل على A من الأب وأيضاً يحصل على A من الأم، وحيث إن حصوله على أى منهما مستقل ولا يؤثر فى احتمال حصوله على الجاميطة الأخرى فإن احتمال الحصول على فرد تركيبه AA $(0.5)(0.5) = 0.25$

مثال ٤-١٠

فى مثال ٤-٩ ما هو احتمال الحصول على فرد تركيبه الوراثى Aa؟

الحل:

استخدام قاعدتى الضرب والجمع معاً يعطى قيمة هذا الاحتمال. فالفرد الذى تركيبه Aa قد ينتج من جاميطة A من الأب وجاميطة a من الأم أو قد ينتج من اتحاد جاميطة A من الأم مع جاميطة a من الأب. لاحظ أن الاحتمالين متافيان وعليه

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{فإن احتمال الحصول على هذا الفرد هو:}$$

مثال ١١-٤

في المثال ٩-٤، إذا كان الجين A سائداً على a ويتسبب في طول الأفراد فما احتمال الحصول على فرد طويل إذا كان كل من AA ، Aa أفراداً طويلة بينما aa أفراداً قصيرة ؟

الحل:

الفرد الطويل إما أن يكون تركيبه الوراثي AA أو تركيبه Aa وكما سبق احتمال الحصول على التركيب الوراثي Aa هو $\frac{1}{2}$ واحتمال الحصول على AA هو $\frac{1}{4}$ ،

$$\text{وعلى ذلك فإن احتمال الحصول على فرد طويل } \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة بالطريقة المبسطة التالية:

		جاميطات الأب	
		A	a
جاميطات الأم	A	AA طويل	Aa طويل
	a	Aa طويل	aa قصير

ومنها يتضح وجود 3 طويل وواحد قصير وعليه فإن احتمال الحصول على فرد طويل = $\frac{3}{4}$.

مثال ١٢-٤

عند تزاوج فردين تركيبهما الوراثي BB، bb فما احتمال:

١ - الحصول على فرد تركيبه BB؟

٢ - الحصول على فرد تركيبه Bb؟

احتمال الحصول على فرد تركيبه BB يساوي احتمال أن يحصل هذا الفرد على B من كل من الأم والأب ، وحيث إنه يمكن أن يحصل على B من الأب BB فإنه يلزم أن يحصل على B (الجاميطة الأخرى) من الأب الآخر وهذا مستحيل لأن الفرد الآخر bb ولا يعطى إلا نوعاً واحداً من الجاميطات وهو b وعليه فإن:

احتمال الحصول على فرد تركيبه BB هو $(0)(1) = 0$ ، ويطلق على هذا الحدث حدثاً مستحيلاً impossible event.

أما احتمال الحصول على فرد تركيبه Bb:

$$\Pr(Bb) = \Pr(B \text{ from one parent}) \cdot \Pr(b \text{ from the other parent}) = (1)(1) = 1$$

ويطلق على هذا الحدث حدثاً مؤكداً sure event.

صندوق ٤-١

قانون جمع الاحتمالات:

إذا كان هناك حدثان متنافيان فإن احتمال حدوث أحدهما أو الآخر هو حاصل جمع احتمالهما منفرداً

$$\Pr(E_1 \text{ or } E_2) = \Pr(E_1) + \Pr(E_2)$$

قانون ضرب الاحتمالات:

إذا كان هناك حدثان مستقلان فإن احتمال حدوث الأول و الثاني هو حاصل ضرب احتمالهما منفرداً

$$\Pr(E_1 \text{ and } E_2) = \Pr(E_1) \cdot \Pr(E_2)$$

٤-٣ الاحتمال الشرطي Conditional probability

إذا كانت هناك محاولتان غير مستقلتين non-independent أي متتابعتين فإن احتمال حدوث الحدث E_1 في أول محاولة والحدث E_2 في ثانی محاولة معا هو:

$$\Pr(E_1 E_2) = \Pr(E_1) \cdot \Pr(E_2 / E_1) \quad (٤-١٢)$$

الحد الثاني من الطرف الأيمن يطلق عليه الاحتمال الشرطي:

$$\Pr(E_2 / E_1) = \Pr(E_2 \text{ given that } E_1 \text{ has happened})$$

أي احتمال حدوث الحدث E_2 علماً بأن الحدث E_1 قد حدث.

ومن العلاقة (١٢-٤) يمكن استنتاج أن:

$$\Pr(E_2 / E_1) = \Pr(E_2 E_1) / \Pr(E_1) \quad (١٣-٤)$$

وأيضاً:

$$\Pr(E_1 / E_2) = \Pr(E_2 E_1) / \Pr(E_2) \quad (١٤-٤)$$

مع توفر شرط أن $\Pr(E_1)$ و $\Pr(E_2)$ أيضاً لا تساويان الصفر.

فإذا كان $\Pr(E_1 / E_2) = \Pr(E_1)$ فهذا معناه أن الحدثين E_1 ، E_2 مستقلان.

مثال ١٣-٤

صندوق به 5 كرات حمراء، 10 كرات بيضاء. إذا سحب كرتان، ما احتمال الحصول على الأولى بيضاء (W) والكرة الثانية حمراء (R)؟ علماً بأن الكرة التي تسحب لا تزد مرة أخرى إلى الصندوق without replacement؟.

$$\Pr(W) = \frac{10}{15} \text{ احتمال الحصول على الكرة الأولى بيضاء}$$

$$\text{احتمال الحصول على الكرة الثانية حمراء لو كانت الكرة الأولى بيضاء} \\ \Pr(R/W) = \frac{5}{14}$$

إذا احتمال الحصول على الكرة الأول بيضاء والثانية حمراء هو:

$$\Pr(WR) = \Pr(W) \Pr(R / W) = \frac{10}{15} \times \frac{5}{14} = \frac{5}{21}$$

٤-٤ الاحتمالات اللاحقة (صيغة بيز)

Aposteriori probability (Bayes' formula)

كان انحديث فيما سبق عن الاحتمالات المسبقة apriori probability والتي كانت تعنى على سبيل المثال أنه إذا سحب كرة من صندوق به كرات حمراء وأخرى بيضاء فالمطلوب هو معرفة احتمال أن تكون الكرة حمراء (مثلاً). أما في حالة الاحتمالات اللاحقة للحدث aposteriori probability فهي تعنى أنه إذا سحب كرة وكانت فعلاً حمراء وكان هناك عدد من الصناديق بكل منها كرات حمراء وبيضاء فما هو الصندوق الأكثر احتمالاً في أن تكون الكرة قد سحب منه؟ ولإيجاد قيمة ذلك

الاحتمال تستخدم صيغة بيز Bayes' formula، ولمزيد من الدراسة يمكن الرجوع إلى واحد أو أكثر من المراجع المدونة في نهاية هذا الكتاب.

مثال ٤-١٤

إذا كان يوجد صندوقان الأول به 5 كرات حمراء، 4 كرات بيضاء، والثاني به 12 كرة حمراء وكررة واحدة بيضاء، علماً بأن احتمال السحب من الصندوق الأول يساوى احتمال السحب من الصندوق الثانى وسحبت كرة واحدة وكانت حمراء فما احتمال أن تكون الكرة الحمراء مسحوبة من الصندوق الأول؟

في هذه الحالة تستخدم Bayes' formula حيث:

$$\Pr(B_i/E) = \frac{\Pr(B_i) \Pr(E/B_i)}{\sum \Pr(B_i) \Pr(E/B_i)} \quad (١٥-٤)$$

حيث:

$\Pr(B_i/E)$ تعنى احتمال السحب من الصندوق B_i علماً بأن الكرة التي سحبت كانت حمراء E في هذا المثال.

$\Pr(B_i)$ تعنى احتمال السحب من الصندوق B_i

$\Pr(E/B_i)$ تعنى احتمال سحب كرة حمراء E علماً بأن الصندوق B_i هو الذى سحبت منه الكرة.

وعلى ذلك:

$$\Pr(E/B_1) = \frac{5}{9} \quad \text{احتمال سحب كرة حمراء من الصندوق الأول}$$

$$\Pr(E/B_2) = \frac{12}{13} \quad \text{احتمال سحب كرة حمراء من الصندوق الثانى}$$

احتمال أن يكون السحب من الصندوق الأول = احتمال أن يكون السحب من الصندوق الثانى

$$\Pr(B_1) = \Pr(B_2) = \frac{1}{2}$$

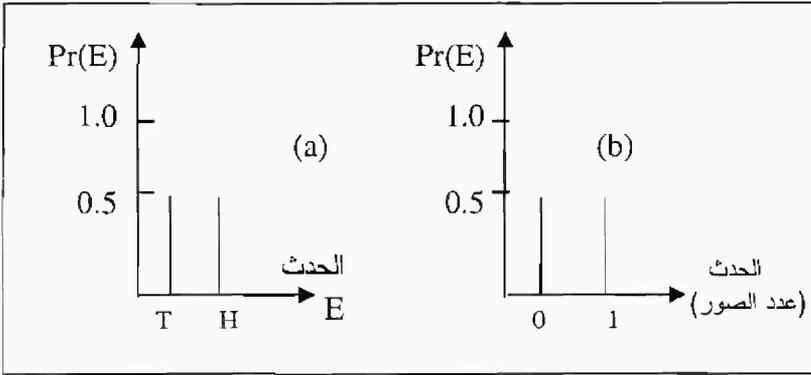
ومن العلاقة (١٥-٤) فإن احتمال أن تكون الكرة الحمراء قد سحبت من الصندوق الأول هو:

$$\Pr(B_1/E) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}}{\frac{1}{2} \times \frac{5}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{12}{13}} = \frac{65}{173}$$

واحتمال أن تكون الكرة الحمراء قد سحبت من الصندوق الثاني = $\frac{108}{173}$

٥-٤ التوزيعات الاحتمالية Probability distributions

عند رمي قطعة نقود غير متحيزة fair يوجد احتمالان: احتمال الحصول على صورة (H) أو احتمال الحصول على كتابة (T) وكل منهما يساوي النصف. والاحتمالات المختلفة للأحداث الممكن حدوثها موضحة بشكل ٥-٤.



شكل ٥-٤ احتمالات الأحداث التي يمكن حدوثها عند رمي قطعة نقود

ويطلق على احتمالات كل الأحداث الممكنة بالتوزيع الاحتمالي. ويمكن أن يعبر عن التوزيع الاحتمالي عن طريق تكوين متغير جديد dummy variable يمثل عدد حالات النجاح مثلاً ولتكن عدد الصور التي تظهر في كل ناتج من كل النواتج الممكنة، ففي مثل هذه الحالة فإن عدد الصور قد تكون مساوية للصفر باحتمال $\frac{1}{2}$ أو مساوية للواحد الصحيح باحتمال قدره $\frac{1}{2}$ أيضاً. ويمكن تمثيل ذلك بما يلي:

الناتج	عدد مرات ظهور صورة	الاحتمال
H	1	$\frac{1}{2}$
T	0	$\frac{1}{2}$

بمعنى أن

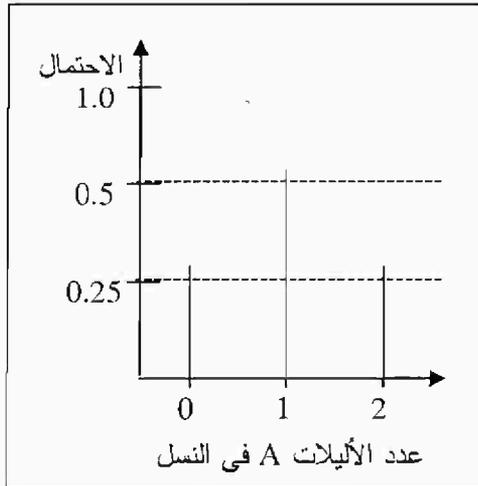
$$\Pr(X = x_i) = \frac{1}{2}, x_i = 0, 1$$

أى احتمال أن المتغير X يأخذ قيمة معينة ولتكن x_i يساوى النصف. وأيضاً فى حالة تزاوج Aa مع نفسه فإن احتمالات كل النواتج الممكنة للحدث تكون ما يسمى بالتوزيع الاحتمالى والذى يكون كالتالى:

$$\Pr(X = x_i) = \frac{1}{4} \quad \text{for } x_i = 0, 2$$

$$= \frac{1}{2} \quad \text{for } x_i = 1$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانياً بالشكل ٦-٤ كالتالى:



شكل ٦-٤ التوزيع الاحتمالى للنسل الناتج من تزاوج Aa مع نفسه

وفى مثل تلك الحالات يعبر عن $\Pr(X = x_i)$ بدالة كثافة الاحتمال أو الدالة الاحتمالية probability or density function.

أما إذا كان المطلوب معرفة احتمال الحصول على فرد يحتوى على أليل a على الأكثر فإن ذلك يمكن أن يعبر عنه بالآتى:

$$F(X) = \Pr(X \leq x_i) \quad , x_i \leq 1$$

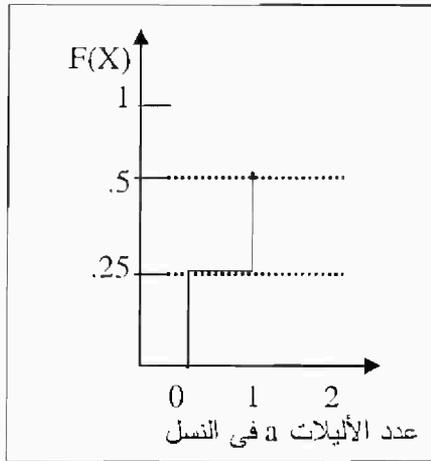
وحيث إن x_i إما أن تساوى الصفر أو الواحد فى هذه الحالة فإن:

$$F(X) = \Pr(x_i = 0) + \Pr(x_i = 1) = \sum \Pr(x_i)$$

وتسمى هذه الدالة بالدالة التجميعية cumulative distribution function وهى تمثل احتمال الحصول على aa أو Aa حيث إن بكل منها الأليل a وفى هذه الحالة فإن:

$$\begin{aligned} F(X) &= \Pr(X = 0) + \Pr(X = 1) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

ويمكن تمثيل ذلك بيانياً بالشكل ٧-٤

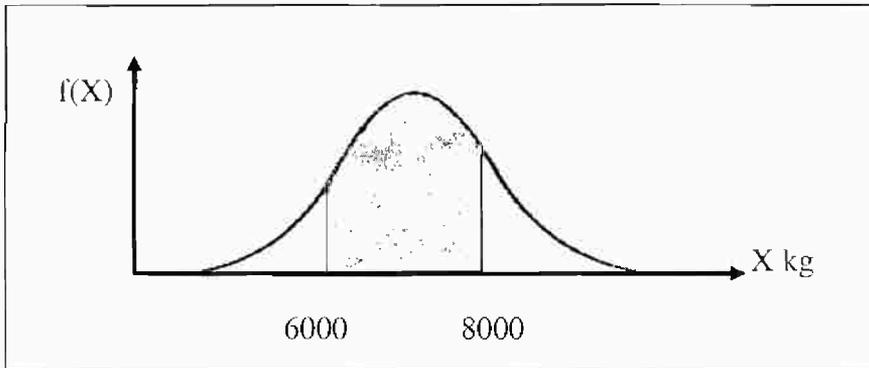


شكل ٧-٤ الدالة التجميعية للحصول على فرد يحتوى على a على الأكثر والصورة العامة للدالة التجميعية للمتغيرات المنقطعة هى:

$$\begin{aligned} F(X) &= \Pr(X \leq x_i) \\ &= \sum_{x_i} \Pr(X = x_i) \end{aligned}$$

وأقصى قيمة يمكن أن تأخذها الدالة التجميعية هي الواحد الصحيح وأقل قيمة هي الصفر.

والتوزيع الاحتمالي قد يكون لمتغير متقطع discrete variable كما هو الحال في الأمثلة السابقة وكما في حالة قطعة النقود وأوراق اللعب والتلقيح الذاتي للفرد Aa. وقد يكون التوزيع الاحتمالي لمتغير متصل (مستمر) continuous variable ومن أمثلة المتغيرات المستمرة القياسات الكمية. ومن أمثلة تلك القياسات: وزن الأفراد، الطول، مستوى هرمون معين في الدم وكمية اللبن التي تعطيها البقرة. فاحتمال أن تعطي بقرة ما بين 6000 إلى 8000 كج من اللبن في الموسم هو المساحة المظللة بالنسبة للمساحة الكلية تحت المنحنى (شكل ٤-٨) ويمكن الحصول عليها بحساب التكامل.



شكل ٤-٨ التوزيع الاحتمالي لمتغير متصل (كمية اللبن بالكيلوجرام)

فإذا كانت دالة هذا التوزيع هي $f(x)$ فإن الاحتمال يكون:

$$\int_{6000}^{8000} f(x) dx$$

أما الصورة العامة للدالة التجميعية في التوزيعات المستمرة فهي:

$$\int_{-\infty}^X f(x) dx$$

لاحظ إن احتمال الحصول على نقطة محددة بالضبط في التوزيعات المستمرة يساوى صفراً (احتمال الحصول على بقرة تعطى 3000 كج لبن بالضبط يساوى صفر حيث إن $\int_{3000}^{3000} f(x) dx = 0$). بينما هذا الاحتمال في التوزيعات المتقطعة قد يساوى الصفر وقد يكون أكبر من الصفر ويعتبر هذا فرقاً أساسياً بين التوزيعات المتقطعة والتوزيعات المستمرة.

ويقع تحت هذين القسمين من التوزيعات عدد كبير من التوزيعات الهامة. وسوف تقتصر الدراسة الحالية على توزيع "ذو الحدين" و "بواسون" كأمثلة عن التوزيعات المتقطعة والتوزيع الطبيعي من التوزيعات المستمرة.

٤-٦ مقدمة عن التباديل Permutations والتوافيق Combinations

٤-٦-١ التباديل

التباديل تعرف بأنها عدد الطرق التي يمكن أن يقع بها حدث ما مع مراعاة الترتيب، فإذا كان هناك مجموعة مكونة من 3 أفراد هم A , B , C ويراد اختيار اثنين منهم أحدهما رئيس والآخر نائب للرئيس فإن هذين الفردين قد يكونان بست طرق:

$$AB, BA, AC, CA, BC, CB$$

مع ملاحظة أن AB ليست هي BA ففي الأولى A أولاً بينما B ثانياً بينما في BA فإن B أولاً، A ثانياً ويعبر عن ذلك بما يلي:

تباديل n من الأشياء مأخوذة r في كل مرة هو:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad (٤-١٦)$$

وهذه المعادلة يمكن فكها كالتالي:

$$\begin{aligned} P(n,r) &= \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3 \times 2 \times 1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3 \times 2 \times 1} \\ &= n(n-1)\cdots(n-r+1) \end{aligned}$$

وعلى ذلك فإن عدد الطرق التي يمكن أن ترتب بها 3 أفراد مأخوذة 2 في كل مرة هو:

$$P(3,2) = \frac{3!}{(3-2)!}$$

لاحظ أن:

$n!$ يطلق عليها مفكوك n وهو عبارة عن

$$\begin{aligned} n! &= n(n-1)! \\ &= n(n-1)(n-2)! \\ &= n(n-1)(n-2)\dots 3 \times 2 \times 1 \end{aligned}$$

$$5! = 5 \times 4! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \quad \text{فمثلاً}$$

$$0! = 1 \quad \text{ومفكوك الصفر يساوى الواحد أى}$$

وفيما يلي بعض القواعد الجبرية الخاصة بالتباديل:

قاعدة ١:

إذا كانت A تحدث في m من المرات، B تحدث في n من المرات وكان كل من A ، B مستقلين فإن عدد الطرق التى يمكن أن يحدث بها A ، B معاً هو حاصل ضرب m في n .

قاعدة ٢:

إذا كانت A ممكن أن تحدث في m من المرات، B يمكن أن تحدث في n من المرات وكان A ، B حدثين متنافيين فإن A أو B ممكن حدوثهما في $m+n$ من المرات.

قاعدة ٣:

في حالة المجموعات التى يكون داخلها تشابه تستخدم المعادلة:

$$P(n, n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \quad (17-4)$$

مثال ١٥-٤

عند إلقاء حجرى نرد، ما عدد طرق التى يمكن أن يحدث بها الحدثان معاً؟

$$\text{عدد طرق } = 36 = (6)(6) \text{ (قاعدة ١)}$$

مثال ١٦-

عند رمي حجر نرد، ما عدد الطرق التي يمكن الحصول منها على 1 أو 6؟
عدد الطرق $1+1=2$ (قاعدة ٢).

مثال ١٧-٤

10) ما عدد التباديل في الأحرف التي يمكن أخذها من كلمة STATISTICS (أحرف)؟

في كلمة STATISTICS يوجد الأحرف التالية:

$$3S = n_1, 3T = n_2, 2I = n_3, 1A = n_4, 1C = n_5$$

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 = 10 \quad \text{وبالتالي}$$

$$P(10, 3, 3, 2, 1, 1) = \frac{10!}{3!3!2!1!1!} = 50400 \quad \text{فإن ٣ قاعدة}$$

٢-٦-٤ التوافيق

تعرف التوافيق على أنها عدد الطرق التي يمكن بها تكوين مجموعة حجمها r من n من الأفراد دون مراعاة الترتيب ويعبر عنها:

$$nC_r \text{ or } C_r^n \text{ or } C(n, r) \text{ or } \binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \quad (١٨-٤)$$

مثال ١٨-٤

إذا كان هناك مجموعة من 3 أفراد ويراد تكوين لجنة من فردين بغض النظر عن ترتيبهما، فما عدد الطرق الممكنة؟

عدد الطرق الممكنة للحصول على لجنة مكونة من فردين من 3 أفراد هو 3 حيث
إن:

$$C_2^3 = \frac{3!}{(3-2)!2!} = 3$$

فإذا كانت الأفراد هي $A B C$ فإن اللجنة قد تكون AB أو AC أو BC
ويلاحظ من المعادلة (١٨-٤) أن:

$$C_r^n = P(n, r) / r!$$

ومن أهم القواعد عند دراسة التوافيق لاستخدامها في الاحتمالات أن

$$C_r^n = C_{n-r}^n \quad (١٩-٤)$$

وعلى ذلك فإن: C_3^5 هي نفسها C_2^5 حيث إن: $C_3^5 = 10 = C_{5-3}^5 = C_2^5$

وهناك علاقة بين التباديل والتوافيق و نظرية الاحتمالات، فقد سبق تعريف احتمال حدث ما بأنه عدد مرات ظهور هذا الحدث على عدد المرات الممكنة، والتباديل والتوافيق يسهلان الحصول على ذلك. والآن افترض وجود كيس به 4 كرات حمراء (R)، 3 كرات بيضاء (W)، وسحبت 3 كرات بدون إحلال، فما احتمال الحصول على الكرات الثلاث حمراء ؟ ولإيجاد مثل هذا الاحتمال باستخدام القواعد السابق ذكرها عن الاحتمالات فإن احتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية حمراء والثالثة حمراء هو باستخدام العلاقة (١٢-٤) بعد تعميمها هو:

$$\Pr(3R) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة لو استخدمت التوافيق، فإن عدد الطرق التي يمكن الحصول بها على أي 3 كرات من بين 7 هو $C_3^7 = \frac{7!}{4!3!}$ ، وعدد الطرق التي يمكن الحصول بها على 3 كرات حمراء من بين 4 كرات حمراء هو $C_3^4 = \frac{4!}{3!1!}$ ، وباستخدام العلاقة (١-٤) فإن احتمال الحصول على 3 كرات حمراء عند سحب 3 كرات هو: $\Pr(3R) = \frac{C_3^4}{C_3^7} = \frac{4}{35}$ أي أن التوافيق تستخدم في حساب عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بهم حدث ما وعدد الطرق الكلية والتي يمكن حساب قيمة الاحتمال.

٤-٧ توزيع "ذو الحدين" Binomial Distribution

من التوزيعات المتقطعة discrete distribution والتي تختص بالمتغيرات المتقطعة discrete variables. وكما هو واضح من اسم التوزيع فإن المتغير قد يأخذ

أحد حالتين إما حالة نجاح فى حالة وقوعه أو حالة فشل فى حالة عدم وقوعه. فإذا وجد متغير، X مثلاً، وكان له الدالة الاحتمالية:

$$\Pr(X = r; n, p) = C_r^n p^r q^{n-r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n \quad (٢٠-٤)$$

فإن هذا المتغير يتبع توزيع "ذو الحدين" بالمعلمين n, p .

١-٧-٤ مفكوك "ذو الحدين" Binomial expansion

$(a + b)^n$ يتبع القاعدة التالية:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n!}{(n-1)!1!} a^{n-1}b + \frac{n!}{(n-2)!2!} a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n!}{1!(n-1)!} ab^{n-1} + b^n \quad (٢١-٤)$$

$a + b$	إذا كانت $n = 1$ فإن المفكوك يساوى
$a^2 + 2ab + b^2$	و إذا كانت $n = 2$ فإنه يصبح
$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$	و إذا كانت $n = 3$ فإنه يصبح
$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$	و إذا كانت $n = 4$ فإنه يصبح

وهكذا. ويمكن الحصول على معاملات coefficients حدود "ذو الحدين" وهى كما فى حالة $n=1$ مثلاً $1, 1$ ، وفى حالة $n=2$ هى $1, 2, 1$ ، وفى حالة $n=3$ تكون $1, 3, 3, 1$ ويمكن استخدام قاعدة باسكال Pascal rule للحصول على تلك المعاملات كما يلى:

n						
1			1		1	
2			1		2	
3			1		3	
4		1		4		6
5	1		5		10	
6						

... وهكذا ...

وعلى ذلك فإذا كان هناك عدد n من المحاولات كل محاولة إما حالة نجاح (باحتمال p) أو حالة فشل (باحتمال q) فإن توزيع "ذو الحدين" يمكن الحصول عليه من مفكوك "ذو الحدين" أى:

$$(p+q)^n = p^n + np^{n-1}q + \dots + npq^{n-1} + q^n$$

$$= \sum_{r=0}^n C_r^n p^{n-r} q^r = \sum_{r=0}^n C_r^n p^r q^{n-r} \quad (٢٢-٤)$$

ويطلق على القيمة $C_r^n p^{n-r} q^r$ الحد العام للتوزيع ويعرف بأنه الدالة الاحتمالية للتوزيع ومنه يمكن حساب احتمال الحصول على $n-r$ حالة نجاح فى عينة حجمها n أو عند إجراء n من المحاولات المتكررة مع ملاحظة:

- ١ - مجموع احتمالى النجاح والفشل يساوى الواحد الصحيح أى $p+q=1$.
- ٢ - إذا كانت n هى عدد المحاولات المتكررة أو حجم العينة فإن عدد الحدود يساوى $n+1$.
- ٣ - مجموع أسى p, q فى أى حد من الحدود يساوى n .
- ٤ - الحدود متنافية بمعنى أن حدوث أى منها يمنع الباقي من الحدوث.
- ٥ - مجموع الاحتمالات لكل الحدود يساوى الواحد الصحيح.
- ٦ - يلاحظ أن p وهى احتمال الحصول على حالة نجاح ثابتة لا تتغير من محاولة إلى أخرى وبالتالي q ، وهى احتمال الفشل، لا تتغير.

مثال ٤-١٩

عند رمى قطعة من النقود مرة واحدة فإن الحالات التى يمكن أن تظهر هى صورة H أو كتابة T واحتمال كل منها عبارة عن:

$$\Pr(H) = \Pr(T) = \frac{1}{2}$$

وهذا هو مفكوك "ذو الحدين" عندما تكون $n=1$ حيث $(p+q)^1 = p+q$

النواتج	عدد الطرق	عدد مرات ظهور صورة	عدد مرات ظهور كتابة	الاحتمال
H	1	1	0	$\frac{1}{2}$
T	1	0	1	$\frac{1}{2}$

وعند رمي قطعتين من النقود مرة واحدة أو رمي قطعة واحدة من النقود مرتين فإن:

النواتج	عدد الطرق	عدد مرات ظهور صورة	عدد مرات ظهور كتابة	الاحتمال
HH	1	2	0	$\Pr(2H) = \frac{1}{4}$
$\left. \begin{array}{l} HT \\ TH \end{array} \right\}$	2	1	1	$\Pr(HT) = \frac{1}{2}$
TT	1	0	2	$\Pr(2T) = \frac{1}{4}$

وهذا هو مفكوك "نو الحدين" عندما تكون $n = 2$ هو

$$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

وعند رمي 3 قطع من النقود مرة واحدة أو رمي قطعة من النقود ثلاث مرات فإن:

النواتج	عدد الطرق	عدد مرات ظهور صورة	عدد مرات ظهور كتابة	الاحتمال
HHH	1	3	0	$\Pr(3H) = \frac{1}{8}$
$\left. \begin{array}{l} HHT \\ HTH \\ THH \end{array} \right\}$	3	2	1	$\Pr(2H, 1T) = \frac{3}{8}$
$\left. \begin{array}{l} HTT \\ THT \\ TTH \end{array} \right\}$	3	1	2	$\Pr(1H, 2T) = \frac{3}{8}$
TTT	1	0	3	$\Pr(3T) = \frac{1}{8}$

إذا سحبت عينة من 5 نباتات وكان احتمال الحصول على نبات طويل $\frac{3}{4}$ و احتمال الحصول على نبات قصير $\frac{1}{4}$ ، احسب الاحتمالات الآتية:

١- كل النباتات طويلة.

٢- ٣ نباتات طويلة.

٣- الحصول على كلتا الصفتين في العينة.

حيث إن الحدثين احتمالهما $p = \frac{3}{4}$ ، $q = \frac{1}{4}$ لصفتي الطول والقصر، على الترتيب ويتبعان توزيع "ذو الحدين" بحجم عينة $n = 5$ ، فإن:

١ - احتمال كل النباتات طويلة:

$$C_5^5 p^5 q^{5-5} = p^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 0.2373$$

٢ - احتمال ٣ نباتات طويلة:

$$C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!2!} \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = (10) \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 0.2637$$

٣ - احتمال الحصول على كلتا الصفتين في العينة: وهذه تشمل الحدود التي تظهر فيها كلا الصفتين (صفة الطول وصفة القصر) وهى كل الحدود فى مفكوك "ذو الحدين" فيما عدا الحدين الأول والأخير أى:

$$\begin{aligned} &= C_1^5 p q^4 + C_2^5 p^2 q^3 + C_3^5 p^3 q^2 + C_4^5 p^4 q \\ &= (5) \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{1}{4}\right)^4 + (10) \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^3 + (10) \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{4}\right)^2 + (5) \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right) = 0.9998 \end{aligned}$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة إذا علم أن مجموع الاحتمالات = 1 وبالتالي فإن احتمال الحصول على كلا الصفتين هو:

$$1 - p^5 - q^5 = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^5 - \left(\frac{1}{4}\right)^5 = 0.9998$$

٤-٧-٢ متوسط وتباين "ذو الحدين"

تظهر معادلة (٤-٢٢) مفكوك "ذو الحدين" ومنها فإن الحد الأول هو احتمال الحصول على n حالة نجاح وصفر حالة فشل، والحد الثاني هو احتمال الحصول على $(n-1)$ حالة نجاح وحالة فشل واحدة، والحد الأخير هو احتمال الحصول على صفر حالة نجاح، n حالة فشل. وبالتالي فإن متوسط هذا التوزيع يمكن حسابه كما يلي:

X	f	fX
n	p^n	np^n
n-1	$np^{(n-1)}q$	$n(n-1)p^{(n-1)}q$
n-2	$\frac{n(n-1)}{2!}p^{(n-2)}q^2$	$\frac{n(n-1)(n-2)}{2!}p^{(n-2)}q^2$
⋮	⋮	⋮
1	$npq^{(n-1)}$	$npq^{(n-1)}$
0	q^n	0
إجمالي	1	$np^n + n(n-1)p^{(n-1)}q + \dots + npq^{(n-1)} + 0$

وحيث إن: $\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \sum fX$ (لاحظ أن $\sum f = 1$) وبالتالي:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= np^n + n(n-1)p^{(n-1)}q + \dots + npq^{(n-1)} \\ &= np \left[p^{(n-1)} + (n-1)p^{(n-2)}q + \dots + q^{(n-1)} \right] \end{aligned}$$

بوضع $m = (n-1)$ فإن:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= np[p^m + mp^{m-1}q + \dots + q^m] \\ &= np(p+q)^m\end{aligned}$$

وبما أن $(p+q) = 1$ فيصبح المتوسط:

$$\bar{X} = np \quad (٢٣-٤)$$

وهو يمثل متوسط عدد الأفراد الحاملة للصفة والتي تمثل p احتمال حدوثها (الطول مثلاً). وبنفس المفهوم فإن متوسط عدد الأفراد الحاملة للصفة الأخرى هو nq .

ويمكن إثبات أن التباين:

$$\sigma^2 = npq \quad (٢٤-٤)$$

ويتوقف متوسط "ذو الحدين" على حجم العينة واحتمال الحصول على حالة النجاح (مثلاً) فيزداد بزيادتها أو بزيادة أحدهما. أما التباين فيتوقف على حجم العينة وقيمة pq التي تكون أكبر ما يمكن عندما تكون $p = q = \frac{1}{2}$.

وعند الرغبة في التعبير عن هذه القيم في صورة نسب وليست وحدات فيكون المتوسط p, q والتباين $\frac{pq}{n}$.

مثال ٢١-٤

احسب المتوسط والتباين للمثال ٢٠-٤

$$np = 5 \times \frac{3}{4} = 3.75 \quad \text{متوسط عدد الأفراد الحاملة لصفة الطول:}$$

$$nq = 5 \times \frac{1}{4} = 1.25 \quad \text{متوسط عدد الأفراد الحاملة لصفة القصر:}$$

$$npq = 5 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 0.9375 \quad \text{التباين:}$$

٤-٨ توزيع بواسون Poisson distribution

يعتبر هذا التوزيع من التوزيعات التي تختص بالمتغيرات المنقطعة نادرة الحدوث وعندما تحدث يمكن أن تحدث n من المرات، مثال ذلك عدد الميكروبات في لتر من ماء نقي أو في طبق من أطباق بترى أو عدد الأشخاص المرضى بمرض نادر الحدوث أو اضمحلال أثر مادة مشعة بمرور الوقت. كما يستخدم توزيع بواسون في نظرية الصفوف، حيث أنه من المعروف أن "الوصول لطلب الخدمة" يتبع هذا التوزيع، مثال ذلك عدد الأشخاص الواردين إلى متجر معين لشراء سلعة مثلاً في وقت معين.

وتوزيع بواسون هو نهاية limit توزيع "ذو الحدين" عندما p تؤول إلى الصفر ($p \rightarrow 0$) وعندما n تؤول إلى ما لا نهاية ($n \rightarrow \infty$) وعلى ذلك فإن $\mu = np$ يكون مقدراً ثابتاً تقريباً ويكون: $\sigma^2 = np(1-p) = np$ حيث إن p صغيرة جداً أي أن المتوسط لهذا التوزيع يكون مساوياً لتباينه. ويتبين أن احتمال الحصول على r حالة نجاح يؤول إلى:

$$\Pr(r) = \frac{e^{-\mu} \mu^r}{r!} \quad r = 0, 1, \dots \quad (٢٥-٤)$$

وهي صورة مبسطة لحساب احتمال الحصول على r حالة نجاح حيث: $e = 2.7183$ و μ هي متوسط عدد مرات النجاح r في العينة محسوباً من العشرة.

وجداول ٤-١ يبين احتمال الحصول على r من النجاحات محسوباً بتوزيع بواسون عندما تكون $\mu = 1$ مقارنة بتوزيع "ذو الحدين" عندما تكون $n = 100$ ، $p = 0.01$ ، وعندما تكون $n = 25$ ، $p = 0.04$ ومتوسط توزيع "ذو الحدين" في كلتا الحالتين يساوي الواحد الصحيح أيضاً. ويلاحظ من هذا الجدول أن توزيع بواسون يكون أكثر مطابقة لتوزيع "ذو الحدين" عندما يكون حجم العينة كبيراً.

مثال ٤-٢٢

إذا كان متوسط عدد العينات من مرض نادر الحدوث هو 25 لكل 10000 فرد فما احتمال الحصول على صفر حالة وفاة في عينة من 100 فرد؟ وما احتمال الحصول على 3 حالات وفاة؟

$$\mu = np = \frac{25}{10000} \times 100 = 0.25 \quad \text{متوسط العينة}$$

احتمال الحصول على صفر حالة وفاة:

$$Pr(r = 0) = \frac{e^{-\mu} \mu^0}{r!} = e^{-\mu} = e^{-0.25} = 0.779$$

احتمال الحصول على 3 حالة وفاة:

$$Pr(r = 3) = \frac{e^{-\mu} \mu^3}{r!} = \frac{2.718^{-0.25}}{3 \times 2 \times 1} \times 0.25^3 = 0.002$$

جدول ٤-١ مقارنة بين توزيع بواسون وتوزيع "ذو الحدين"

احتمال الحصول على r من النجاحات محسوبا بـ			
r	توزيع بواسون	توزيع "ذو الحدين"	
		p = 0.01, n = 100	p = 0.04, n = 25
0	0.3679	0.3660	0.3604
1	0.3679	0.3697	0.3754
2	0.1839	0.1849	0.1877
3	0.0613	0.0610	0.0600
4	0.0153	0.0149	0.0137
5	0.0031	0.0029	0.0024
6	0.0005	0.0005	0.0003
≥7	0.0001	0.0001	0.0000
Total	1.0000	1.0000	0.9999

المصدر: Snedecor and Cochran (1987)

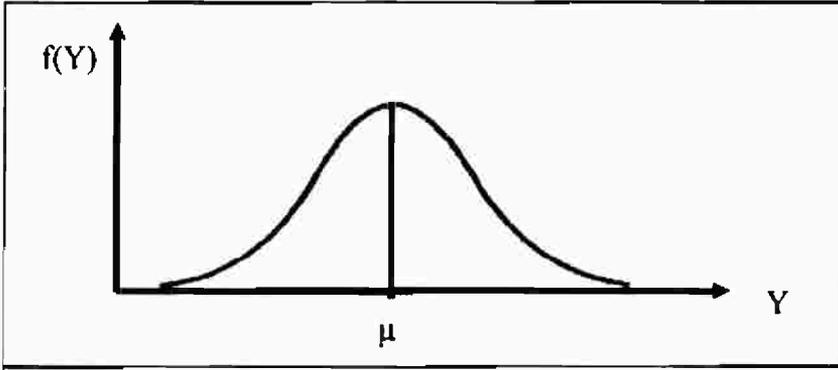
٤-٩ التوزيع الطبيعي Normal distribution

من أهم التوزيعات الخاصة بالصفات ذات التوزيع المستمر continuous وهو أكثرها شيوعاً ويتبعه العديد من الصفات البيولوجية (الكمية).

والتوزيع الطبيعي يتحدد بمعلمين هما المتوسط μ والانحراف المعياري σ . وتتحدد قيم المتغير نظرياً في المدى من $-\infty$ إلى $+\infty$.

ودالة التوزيع الطبيعي تأخذ الشكل الناقوسي وقد يطلق عليه المنحنى الطبيعي للأخطاء normal curve of error وقد يطلق عليه أيضاً Gaussian or Laplacian

curve نسبة إلى مكتشفه، ولو أن De Moivre اكتشفه أيضاً في نفس الوقت. الشكل ٩-٤ يوضح المنحنى الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ .



شكل ٩-٤ التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وانحراف معياري σ

ومعادلة المنحنى الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ هي $f(Y)$ والتي تمثل التكرار النسبي relative frequency أو الارتفاع height على المحور الصادي المقابل لقيم Y هي:

$$f(Y, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right)^2} \quad (٢٦-٤)$$

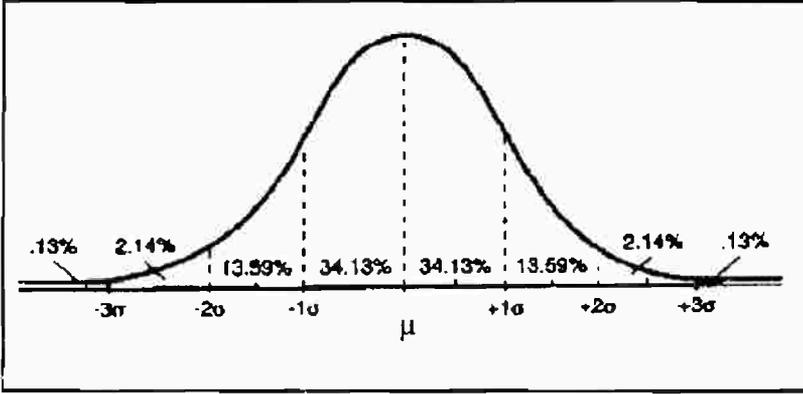
حيث: $\pi = 3.1416$ (وهي القيمة "ط" في العربية)، $e = 2.7183$ ، $-\infty \leq Y \leq +\infty$

ومن أهم خصائص التوزيع الطبيعي أنه متماثل حول نقطة المنتصف μ وأن النقطتين $\mu \pm \sigma$ تحصران فيما بينهما حوالي 68% من المساحة تحت المنحنى أي $\frac{2}{3}$ مساحة هذا التوزيع تقريباً وأيضاً النقطتين $\mu \pm 2\sigma$ تحصران فيما بينهما حوالي 95% من المساحة، بينما $\mu \pm 3\sigma$ فإنهما يحصران 99.7% من المساحة. الشكل ٩-٤ يظهر قيم المساحات المختلفة.

ويرجع الاهتمام بالتوزيع الطبيعي إلى عدة أسباب:

١- يسهل تحويل أي توزيع طبيعي مهما كان متوسطه وانحرافه المعياري إلى توزيع طبيعي قياسي standardized normal distribution والذي وضعت

له جداول (جدول ٣ ملحق أ) يمكن منها حساب القيم المختلفة للاحتمالات في أقل وقت وبأقل جهد ودون الحاجة إلى استخدام حساب التفاضل.



شكل ٤-١٠ العلاقة بين المساحة تحت المنحنى الطبيعي وكل من المتوسط والانحراف المعياري.

٢- كثير من المتغيرات الكمية كالأطوال والأوزان (مثلاً) تتخذ في توزيعها عادة شكل التوزيع الطبيعي.

٣- وحتى لو كانت هذه البيانات لا تتوزع طبيعياً فإنه يمكن أحياناً بواسطة التحويلات المختلفة transformations لمقاييس هذه البيانات أن تتوزع طبيعياً كأن يأخذ الجذر التربيعي مثلاً \sqrt{X} أو لوغاريتم القيم $\log X$.

٤- بعض التوزيعات الأخرى تقترب في توزيعها من التوزيع الطبيعي تحت ظروف معينة كأن يزداد حجم العينة n مثلاً كما في توزيع "ذو الحدين" وخاصة عندما تقترب p من النصف.

٥- لأي توزيع متغير X تباينه محدد finite فإن توزيع متوسطات العينات المسحوبة من عشيرة هذا المتغير تقترب في توزيعها من التوزيع الطبيعي وتزداد قريباً كلما زاد حجم العينة n ، وتعرف هذه الخاصية بنظرية الحد المركزي central limit theorem ويكون تباين التوزيع الطبيعي للمتوسطات هو σ^2/n ومتوسطه μ أيضاً. ولهذا القانون أهمية خاصة في الاختبارات الإحصائية للمقارنة بين متوسطات العينات.

٤-١٠ التوزيع الطبيعي القياسي Standard normal distribution

يحدد شكل أى توزيع طبيعي معلمان هما المتوسط والانحراف المعياري للقيم، وعلى ذلك فقد يوجد عدد لانهاى من التوزيعات.

والتوزيع الطبيعي القياسي هو التوزيع الطبيعي الذى متوسطه يساوى الصفر وتباينه يساوى الواحد الصحيح واصطلاح على ذلك بكتابة $N \sim (0,1)$. وأنشئت جداول يمكن منها حساب المساحات المحصورة بين المتوسط وقيمة معينة منه (جدول ٣ ملحق أ) ومن ذلك يسهل الحصول على قيم الاحتمالات المختلفة. ويمكن تحويل أى توزيع طبيعي مهما كان متوسطه وانحرافه المعياري إلى التوزيع الطبيعي القياسي باستخدام العلاقة التالية:

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma} \quad (٢٧-٤)$$

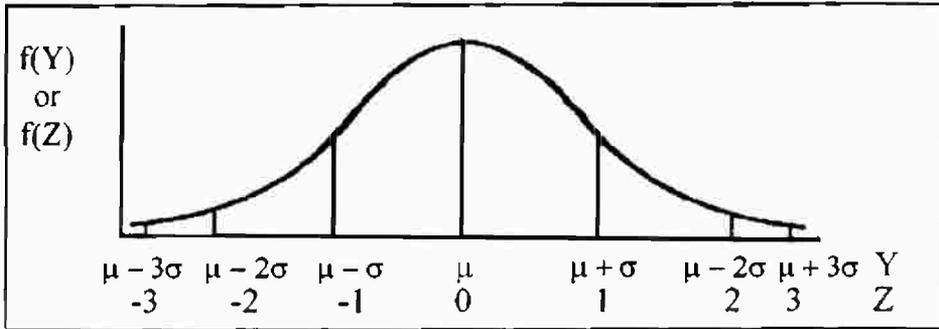
ومنها:

$$Y = \mu + Z\sigma \quad (٢٨-٤)$$

فإذا كانت Y تتوزع بمتوسط μ وانحراف معياري σ فإن Z تتوزع بمتوسط يساوى الصفر وانحراف معياري يساوى الواحد الصحيح وتكون دالة هذا التوزيع:

$$f(Z, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \quad (٢٩-٤)$$

أى أن القيم Z هي عبارة عن انحرافات المتغير الأساسى Y عن متوسطها مقدرة بوحدات الانحراف القياسي للمتغير الأساسى. والشكل ٤-١١ يبين العلاقة بين المنحنى الطبيعي والمنحنى الطبيعي القياسي



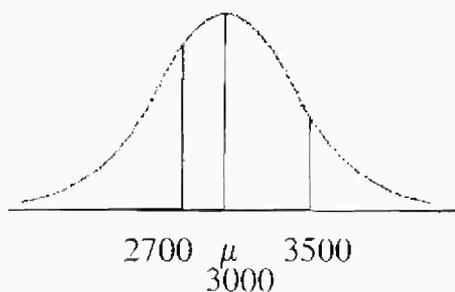
شكل ٤-١١ العلاقة بين المنحنى الطبيعي والمنحنى الطبيعي القياسي

إذا كانت صفة إنتاج اللبن في أبقار قطيع ما تتوزع طبيعياً بمتوسط 3000 kg لبن في الموسم وانحراف معياري 250 kg احسب ما يلي:

- ١ - احتمال الحصول على بقرة إنتاجها من اللبن 3050 kg بالضبط.
- ٢ - احتمال الحصول على بقرة إنتاجها يتراوح بين $2700, 3500 \text{ kg}$ لبن في الموسم.
- ٣ - احتمال الحصول على بقرة إنتاجها على الأقل 2500 kg لبن في الموسم.
- ٤ - احتمال الحصول على بقرة إنتاجها على الأكثر 2500 kg لبن في الموسم.
- ٥ - إذا استبعد أقل 10% من الأبقار، ما هي حدود الإنتاج التي تحصر أقل 10% من الأبقار.
- ٦ - ما حدود الإنتاج التي تحصر أعلى 15% من الأبقار.
- ٧ - إذا كان في قطيع ما عدد 1000 بقرة فما عدد الأبقار التي يتراوح إنتاجها بين $2700, 3500 \text{ kg}$ لبن في الموسم.

لحساب مثل تلك الاحتمالات في حالة التوزيع الطبيعي يجدر بادئ ذي بدء رسم شكل تخطيطي للتوزيع مع بيان المطلوب ليسهل الحساب.

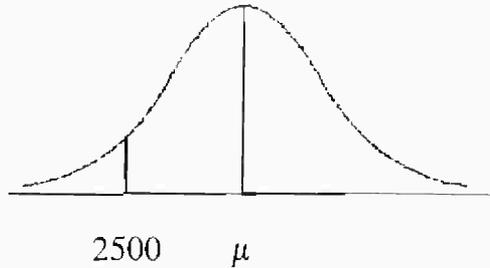
- ١ - احتمال الحصول على بقرة إنتاجها من اللبن 3050 kg بالضبط يساوى الصفر وهي تمثل المساحة المنحصرة فوق القيمة 3050 kg والممثلة بنقطة على المنحى ليس لها أبعاد حيث إن صفة إنتاج اللبن في هذه الحالة تتوزع توزيعاً مستمراً.
- ٢ - احتمال الحصول على بقرة إنتاجها يتراوح بين $2700, 3500 \text{ kg}$ لبن في الموسم:



$$\begin{aligned} \Pr(2700 \leq X \leq 3500) &= \Pr\left(\frac{2700 - 3000}{250} \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{3500 - 3000}{250}\right) \\ &= \Pr(-1.2 \leq Z \leq 0) + \Pr(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.3849 + 0.4772 = 0.8621 \end{aligned}$$

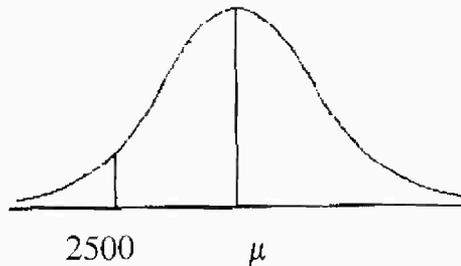
بما أن التوزيع متماثل فإن قيمة الاحتمال ما بين (الصفري، -1.2) هي نفسها قيمة الاحتمال ما بين (الصفري، 1.2) جدول ٣ ملحق أ.

٣- احتمال الحصول على بقرة إنتاجها على الأقل 2500 kg لبن في الموسم:



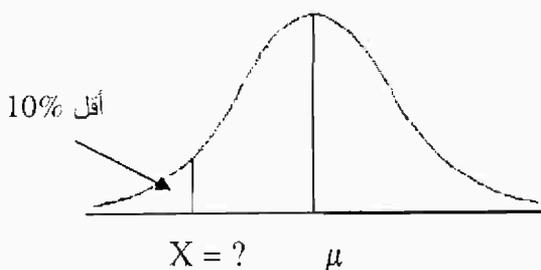
$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 2500) &= \Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \geq \frac{2500 - 3000}{250}\right) \\ &= \Pr(Z \geq -2) = 0.5 + \Pr(0 \leq Z \leq 2) \\ &= 0.5 + 0.4772 = 0.9772 \end{aligned}$$

٣- احتمال الحصول على بقرة إنتاجها على الأكثر 2500 kg لبن في الموسم:



$$\begin{aligned} \Pr(X \leq 2500) &= \Pr\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{2500 - 3000}{250}\right) \\ &= \Pr(Z \leq -2) \\ &= 1 - \Pr(Z \geq -2) = 1 - 0.9772 = 0.0228 \end{aligned}$$

٥- حدود الإنتاج التي تحصر أقل 10% من الأبقار:



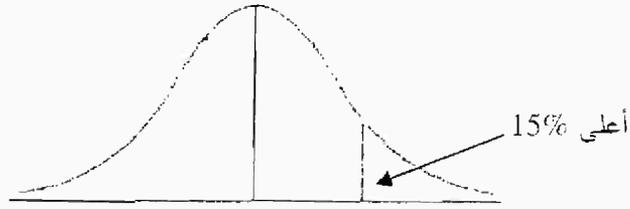
إذا كانت أقل 10% من الأبقار تمثل 10% من المساحة تحت المنحني (على يسار المتوسط) فإن باقي المساحة تمثل 90% وبالتالي يتم البحث في جدول ٣ ملحق أ عن قيمة Z التي تقابل مساحة قدرها $0.9 - 0.5 = 0.4$ والتي تساوي $Z = 1.281$ ، هذه القيمة تم الحصول عليها بالاستكمال interpolation.

$$\begin{aligned} Z &= \frac{X - \mu}{\sigma} \\ -1.281 &= \frac{X - 3000}{250} \\ X &= 2680 \text{ kg} \end{aligned}$$

إذا حدود الإنتاج التي تحصر أقل 10% من الأبقار هي كل قيمة أقل من 2680 kg

٦- حدود الإنتاج التي تحصر أعلى 15% من الأبقار:

أعلى 15% من الأبقار تمثل 15% من المساحة تحت المنحني (على يمين المتوسط) وبالتالي فإن باقي المساحة تمثل 85%، يتم البحث في جدول ٣ لملحق أ عن قيمة Z التي تقابل مساحة قدرها $0.85 - 0.5 = 0.35$ وهي $Z = 1.0365$



$$\mu \quad X = ?$$

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

$$1.0365 = \frac{X - 3000}{250}$$

$$X = 3259 \text{ kg}$$

إذا حدود الإنتاج التي تحصر أعلى 15% من الأبقار هي كل قيمة أعلى من 3259 kg

٧ - عدد الأبقار التي يتراوح إنتاجها بين 2700, 3500 kg لبن في الموسم إذا كان العدد الكلي للأبقار 1000 بقرة:

سبق حساب احتمال الحصول على بقرة يتراوح إنتاجها بين 2700 ، 3500 وكان $\Pr(2700 \leq X \leq 3500) = 0.8621$

$$1000 \times 0.8621 = 862 \text{ إذا عدد الأبقار}$$

صندوق ٤-١

توزيع "ذو الحدين":

$$\Pr(X = r; n, p) = C_r^n p^r q^{n-r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n$$

المتوسط = np ، التباين = npq

توزيع بواسون:

$$\Pr(r) = \frac{e^{-\mu} \mu^r}{r!}$$

المتوسط = التباين

التوزيع الطبيعي:

$$f(Y, \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{Y-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

حيث μ هي المتوسط، σ هي الانحراف المعياري

التوزيع الطبيعي القياسي:

إذا كانت Y تتوزع طبيعياً بمتوسط μ وتباين σ^2 فإن Z تتوزع طبيعياً

بمتوسط صفر وتباين يساوي الواحد الصحيح حيث إن

$$Z = \frac{Y - \mu}{\sigma}$$

٤-١١ توزيع المتوسطات Distribution of means

إذا سحبت عينة sample من عشيرة بإحدى طرق المعاينة sampling methods وقدر لها المتوسط الحسابي وليكن \bar{X} وكرر سحب العينات وفي كل مرة بحسب المتوسط منها فإنه يتكون عشيرة من المتوسطات متوسطها μ وتباينها σ^2/n . وحتى يمكن حساب قيم الاحتمالات المختلفة فإنه يمكن تحويل هذا التوزيع مهما كان متوسطه وتباينه إلى التوزيع الطبيعي القياسى بالعلاقة التالية:

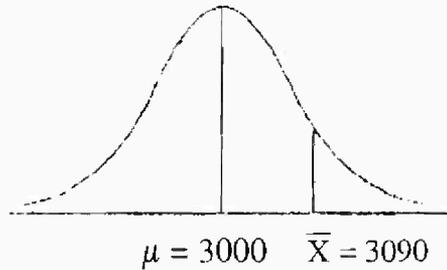
$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \quad (٣٠-٤)$$

حيث: $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ وتسمى الخطأ القياسى standard error.

مثال ٤-٢٤

في مثال ٤-٢٣ إذا سحبت عينة عددها 25 بقرة. أحسب احتمال أن يزيد متوسطها عن 3090 kg لبن في الموسم ؟

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{250}{\sqrt{25}} = 50 \text{ kg} \text{ وباستخدام معادلة (٣٠-٤) فإن:}$$



$$\Pr(\bar{X} \geq 3090) = \Pr\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma_{\bar{X}}} \geq \frac{3090 - 3000}{50}\right)$$

$$= \Pr(Z \geq 1.8)$$

$$= 0.5 - \Pr(0 \leq Z \leq 1.8) = 0.0359$$

١٢-٤ تقريب توزيع "ذو الحدين" بالتوزيع الطبيعي

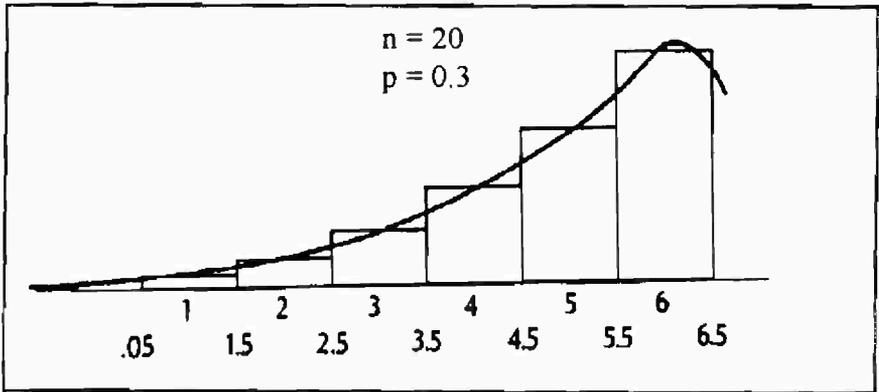
عند زيادة حجم العينة n لصفة تتبع توزيع "ذو الحدين" فإن هذا التوزيع يقترب من التوزيع الطبيعي بمتوسط $\mu = np$ وانحراف معياري $\sigma = \sqrt{npq}$ ويزداد هذا التوزيع قرباً من التوزيع الطبيعي كلما اقتربت p من النصف (إذا كانت p أقل من النصف وكان $\mu \geq 15$ يستخدم التوزيع الطبيعي التقريبي بدلا من استخدام التوزيع الأصلي وهو "ذو الحدين" والمتوسط يقل عن ذلك إذا كانت p تساوى النصف).

ولهذا التقريب أهمية كبرى في جعل حساب الاحتمالات أكثر سهولة عندما تكون n كبيرة ولكن يجب إجراء تصحيحاً لعدم الاستمرارية correction for discontinuity حيث إن توزيع "ذو الحدين" من التوزيعات المتقطعة كما سبق ذكره بينما التوزيع الطبيعي من التوزيعات المستمرة ويكون التصحيح بطرح $\frac{1}{2}$ من القيمة المطلقة للفرق بين r (عدد مرات النجاح) والمتوسط كما في العلاقة التالية:

$$Z = \frac{|r - \mu| - \frac{1}{2}}{\sigma} \quad (٣١-٤)$$

حيث أن: $\mu = np$ ، $\sigma = \sqrt{npq}$

والشكل التالي يوضح العلاقة بين التوزيع الطبيعي وتوزيع "ذو الحدين".



شكل ١٢-٤ العلاقة بين التوزيع الطبيعي وتوزيع "ذو الحدين"

مثال ٤-٢٥

فى قطيع مكون من 400 بقرة متوقع ولادتها، احسب احتمال الحصول على:

١- 200 ذكر.

٢- 230 ذكر على الأقل.

٣- 170 أنثى على الأكثر.

فى هذا المثال يوجد نوعان من جنس المولود إما أن يكون ذكراً وإما أن يكون أنثى، واحتمال كل منهما يساوى النصف، وبهذا فإن صفة الجنس تتبع توزيع "ذو الحدين" وللحصول على إجابة مضبوطة فإن:

$$\begin{aligned} \Pr(200 \text{ males}) &= C_{200}^{400} \left(\frac{1}{2}\right)^{200} \left(\frac{1}{2}\right)^{200} \\ &= \frac{400!}{200!200!} \left(\frac{1}{2}\right)^{400} \\ &= \frac{400 \times 399 \times \dots \times 201 \times 200!}{200!200 \times 199 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{400} \\ &= \frac{400 \times 399 \times \dots \times 201}{200 \times 199 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{400} \end{aligned}$$

١- واضح أنه من الصعب حساب قيمة هذا الاحتمال. وحيث إن متوسط "ذو الحدين" عبارة عن $np = 200$ واحتمال الحصول على حالة نجاح (الحصول على ذكر مثلاً فى هذه الحالة) يساوى النصف فإنه يمكن استخدام التوزيع الطبيعي التقريبي للحصول على قيم الاحتمالات المختلفة فى مثل هذه الحالة. ويبين الشكل ٤-١٣ توزيع "ذو الحدين" لهذا المثال.

وحيث إن:

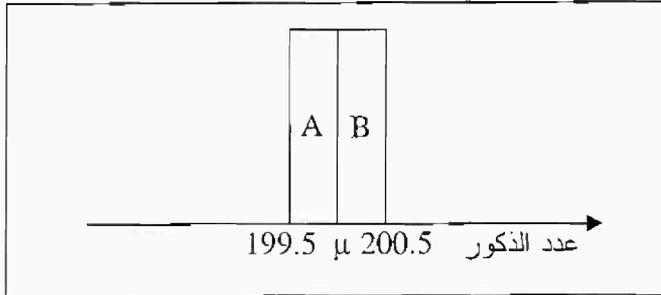
$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{400 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = 10 \quad , \quad \mu = np = 400 \times \frac{1}{2} = 200$$

$$Z_1 = \frac{200.5 - 200}{10} = 0.05$$

وقيمة هذا الاحتمال هو 0.0199، وقيمة الاحتمال المقابلة لـ Z_2 هي: 0.0199 أيضاً.

وحيث إن $A = B$ حيث إن التوزيع الطبيعي متماثل (شكل ٤-١٣) فإن مساحة $A + B$ تساوي ضعف مساحة A .

أي أن احتمال الحصول على 200 ذكر عبارة عن $(2)(0.0199) = 0.0398$



شكل ٤-١٣ توزيع "ذو الحدين" لعدد الذكور

٢- احتمال الحصول على 230 ذكر على الأقل:

$$Z = \frac{|r - \mu| - \frac{1}{2}}{\sigma} = \frac{|230 - 200| - \frac{1}{2}}{10} = \frac{29.5}{10} = 2.95$$

إذا احتمال الحصول على 230 ذكر على الأقل هو $0.5 - 0.4984 = 0.0016$

٣- احتمال الحصول على 170 أنثى على الأكثر. أي احتمال الحصول على 170 أو 169 أو 168 أو ... أو صفر أنثى. وهذا الاحتمال هو نفسه احتمال الحصول على 230 أو 231 أو ... 400 ذكراً، لأن هذه الاحتمالات تقع تحت توزيع "ذو الحدين" أصلاً، وحيث إن حالة النجاح في هذا المثال هي الحصول على ذكر وتم حساب المتوسط بناء على ذلك (مع ملاحظة أن متوسط الذكور هو نفسه متوسط الإناث حيث إن $p = q$ في هذه الحالة) وقد حسبت قيمة هذا الاحتمال قبل ذلك مباشرة أي أن:

احتمال الحصول على 170 أنثى على الأكثر هو نفسه الحصول على 230 ذكر على الأقل = 0.0016.

تمارين الباب الرابع

٤-١ إذا أُلقت قطعة من النقود عشرة مرات فما احتمال الحصول على (0, 1, 2, 3,) صورة ؟ (احتمال الصورة = احتمال الكتابة = 0.5).

٤-٢ إذا كان هناك 4 أحداث (A, B, C, D) هي كل الأحداث الممكنة الناتجة من تجربة وكلها متنافية ويوجد 4 إجابات لقيم الاحتمالات مبينة بالجدول التالي. اختبر أى الإجابات يمثل الإجابة الصحيحة:

احتمال				
الحالة	A	B	C	D
أ	0.34	0.29	0.17	0.30
ب	0.17	0.59	0.21	0.03
ج	0.24	0.05	0.18	0.33
د	$\frac{13}{80}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{3}{8}$

٤-٣ ما عدد الطرق التى يمكن بها لأسرة أن تتجب 3 ذكور و 2 أنثى ؟

٤-٤ عند إلقاء حجرى نرد ما احتمال أن يكون مجموع الوجهين 5 على الأقل ؟

٤-٥ أسرة مكونة من 5 أطفال ما احتمال أن يكون الأطفال من كلا الجنسين ؟

٤-٦ إذا كان لديك صندوقان أحدهما: (أ) به 4 كرات حمراء، 6 كرات بيضاء، والآخر (ب) به 5 كرات حمراء، 6 كرات بيضاء. سحب كرة من كل صندوق، ما احتمال أن تكون الكرتان من لون واحد ؟

٧-٤ إذا كان لديك الأرقام التالية: (3, 2, 1, 0) فما الأعداد الثلاثية الممكن تكوينها دون تكرار الرقم أكثر من مرة في العدد الواحد وبحيث يكون في خانة العشرات دائما الرقم 3 ؟

٨-٤ احسب: C_3^5 ، C_5^6 ، C_2^5

٩-٤ إذا نتج طلوقة من تزاوج فردين طبيعيين ولكن حاملين لأليل أوتوسومي مميت، فما احتمال أن يكون هذا الطلوقة حاملا لهذا الأليل، مع العلم أنه عندما لقح هذا الطلوقة 5 بقرات طبيعية حاملة لهذا الأليل نتج عن هذا التلقيح 5 أبناء طبيعية ؟

١٠-٤ إذا كان لديك 3 صناديق:

صندوق (أ) به 2 كرة بيضاء، 3 كرة حمراء، كرة واحدة سوداء،

صندوق (ب) به 3 كرات بيضاء، 4 كرة حمراء، 2 كرة سوداء،

صندوق (ج) به 4 كرات بيضاء، 2 كرة حمراء، 3 كرات سوداء.

سحبت كرتان من أحد الصناديق وكانت إحداهما حمراء والأخرى سوداء، فما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من الصندوق الأول ؟

١١-٤ إذا كان اللون الأسود سائداً سيادة تامة على اللون الأحمر في سلالة أبقار الأبردين أنجس، طلوقة أسود اللون لقح بقرة سوداء فانتجا عجلاً أحمر، احسب الاحتمالات الآتية:

أ- أن يكون العجل القادم من نفس الفردين أحمر اللون.

ب- إذا أنتج هذا التزاوج أربع عجول، فما احتمال أن يكون من بينهما 3 عجول حمراء؟

١٢-٤ إذا كان اللون الأجوتي يسود على اللون الأبيض في الأرانب ويتوقف على زوج واحد من العوامل الوراثية، وفي تزاوج بين فردين خليطين تم الحصول على خمسة أفراد، فما احتمال الحصول على:

١- فردين أجوتى.

٢- على الأقل 3 أفراد أجوتى.

٣- أن يكون الأفراد الخمسة أجوتى.

٤- أن يظهر اللونان فى النسل.

١٣-٤ فى توزيع "ذو الحدين"، إذا كانت $n = 10$ ، $p = q = 0.5$ ، احسب الاحتمالات الآتية:

١- الحصول على 4 حالات نجاح على الأقل

٢- الحصول على 4 حالات نجاح على الأكثر

٣- الحصول على 3 حالات نجاح

١٤-٤ باستخدام البيانات فى (٤-١٣) احسب الاحتمالات مستخدماً التوزيع الطبيعى التقريبي، مرة عندما تكون $p = 0.5$ وأخرى عندما $p = 0.75$ ثم قارن النتائج التى حصلت عليها بنتائج التمرين السابق. وما تستنتج ؟

١٥-٤ فى تزاوج بين فردين خليطين (Aa)، تم الحصول على 144 فرداً. فما احتمال أن يكون:

(أ) عدد الأفراد الخليطة بين 71 ، 73 فرداً.

(ب) عدد الأفراد الأصلية aa يزيد عن 42 فرداً.

(ج) متوسط عدد الأفراد aa بين 36-36.5 فرداً.

١٦-٤ إذا كانت صفة الطول تتوزع طبيعياً بمتوسط 50 cm وتباين 64 cm^2 ، أوجد ما يلى:

١- احتمال الحصول على فرد طوله 50 cm

٢- القيم التى تحصر فيما بينها أطول 20% من الأفراد

٣- احتمال الحصول على:

أ- فرد طوله بين 45, 60 cm

ب- فرد طوله أقل من 40 cm