# ٦ اختبارات الفروض Tests of hypotheses

١- التوزيع العينى للمتوسطات

٢- حدود الثقة

٣- اختبارات الفروض الإحصائية

٤- تحديد العدد الأمثل للمشاهدات فى التجربة (حجم العينة)

هناك نوعان من التقديرات:

**الأول:** تقديرات محددة بنقطة point estimation وهى التى يقدر فيها معلم العشيرة parameter بقيمة واحدة مثال ذلك تقدير متوسط العشيرة $\mu$ من العينة بواسطة $\overline{Y}$ أو تباين العشيرة $\sigma^2$ بواسطة $S^2$ ... وهكذا.

**الثانى:** تقديرات الفترة interval estimation وهى تقدير للمدى الذى يمكن أن يتراوح فيه تقدير المعلم نفسه باحتمال معين.

وسوف يتم فى هذا الباب تغطية موضعين رئيسيين:

١- بعد الحصول على التقديرات المعينة إلى أى مدى تكون الثقة فى هذه التقديرات ؟

٢- إلى أى مدى يمكن إرجاع النتائج المتحصل عليها إلى الصدفة المحضة، وإلى أى مدى يمكن اعتبار النتائج راجعة لفارق أو فوارق حقيقية بافتراض فرضاً معيناً ؟

وكلا المفهومين مهمان فى مجال الاستنباطات الإحصائية. وسوف يتم تغطية هذين الموضعين فيما يتعلق بالمتوسطات والتباين.

## ٦-١ التوزيع العينى للمتوسطات Sampling distribution of means

إذا كان هناك متغير ما، وليكن Y، ومهما كان توزيعه، أى أنه ليس بالضرورة أن يكون طبيعياً، ولكن له متوسط $\mu$ وتباين $\sigma^2$ وسحبت منه عينات عشوائية كبيرة الحجم كل منها n وحسب المتوسط لكل منها فإن هذه المتوسطات تتوزع طبيعياً (مهما كان توزيع المتغير الأصلى) بمتوسط قدره $\mu$ وتباين $\sigma^2 / n$ حيث n هى عدد الأفراد أو المشاهدات التى حسب على أساسها المتوسطات. والجذر التربيعى لتباين المتوسط يطلق عليه الانحراف المعيارى للمتوسط standard deviation of the mean أو الخطأ القياسى standard error.

**مثال ٦-١**

كانت أوزان سبع عجلات جاموسى عند عمر ثلاثة أشهر بالكيلوجرام هى:

112, 105, 91, 95, 96, 108, 90

فإن تقدير المتوسط: $\overline{Y} = 99.6$ kg، وتقدير التباين: $S_y^2 = 75.62$ kg$^2$، وتقدير تباين المتوسط: $S_{\overline{Y}}^2 = 75.62/7 = 10.8$ kg$^2$.

أى أنه إذا أخذ العديد من العينات حجم كل منها 7 حيوانات وحسب متوسط المتوسطات والتباين بينها فإنه من المتوقع أن يكونا 10.8,99.6 على التوالى، ويبدو من العلاقة (٣-١٣)، أنه كلما زاد حجم العينة المقدر منها المتوسط كلما قل تباين المتوسط وهذا منطقى، حيث إنه فى غالب الأحيان لا يعرف بالضبط قيمة $\sigma_Y^2$ ولكن يكون هناك تقدير له هو $S_Y^2$ وبالتالى يكون تقدير تباين المتوسط $S_{\bar{Y}}^2 = \sigma_Y^2 / n$.

وهنا تجدر الإشارة إلى نقطة مهمة عادة ما تكون غير واضحة لكثير من الباحثين وهى أنه لا علاقة بين قيمة $\sigma_Y^2$ المقدرة من عينة وبين حجم العينة ذاتها، أى أنه ليس بالضرورة أن تعطى العينة الكبيرة تقديراً أصغر $\sigma_Y^2$ طالما أن كل العينات مأخوذة عشوائياً من نفس العشيرة ولكن الذى له علاقة وثيقة بحجم العينة هو مدى الوثوق بالتباين المقدر هذا حيث يزيد الوثوق به كلما زاد حجم العينة، وكذلك تباين المتوسط حيث يقل كلما زاد حجم العينة. وسوف يتم التركيز فى معالجة المتوسط فى هذا الباب على التوزيع الطبيعى.

## ٦-٢ حدود الثقة **Confidence limits**

تركزت المناقشات فى معظم الأبواب السابقة على طريقة حساب تقديرات estimation المعالم parameters فى العشيرة وأن تكون هذه التقديرات غير متحيزة وهذه يطلق عليها تقديرات محددة بنقطة point estimates. وفى هذا الباب سوف يتم مناقشة مدى الوثوق فى هذا التقدير المحسوب أو بمعنى آخر مدى احتمال أن يكون التقدير ممثلاً تمثيلاً حقيقياً للعشيرة، فنادراً ما يعرف معالم العشيرة ولكن تقدر بهذه التقديرات.

### ٦-٢-١ حدا الثقة للمتوسط فى حالة معرفة التباين الحقيقى

افترض جدلاً أن هناك عشيرة حيث $\mu$، $\sigma_Y$ (المتوسط والانحراف المعيارى الحقيقيان) معلومان، وبفرض أن القيم تتوزع توزيعا طبيعيا. وأخذ من هذه العشيرة العديد من العينات كل منها حجمه n مشاهدة، فسيكون التباين بين هذه المتوسطات $\sigma^2 / n$، ويمكن القول بأن المدى من $\mu - (1.96)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ إلى $\mu + (1.96)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ يتوقع أن يحتوى على 95% من متوسطات العينات المأخوذة، أى أنه إذا أخذ 100 عينة مثلاً يتوقع أن يقع متوسط 95 منها فى هذا المدى. كما يتوقع أن المدى من $\mu - (2.58)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ إلى $\mu + (2.58)\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ يحتوى على 99% من العينات. (القيمتان 1.96 و 2.58 مأخوذتان من جدول ٣ ملحق أ). ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً كما يلى:

$$\Pr\left(-1.96 \le \frac{\overline{Y}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le +1.96\right) = 0.95$$

وبضرب الطرفين فى $\sigma/\sqrt{n}$

$$\Pr\left(-1.96\sigma/\sqrt{n} \le (\overline{Y}-\mu) \le +1.96\sigma/\sqrt{n}\right) = 0.95$$

ومنها:

$$\Pr\left(-1.96\sigma/\sqrt{n} \le (\mu - \overline{Y}) \le +1.96\sigma/\sqrt{n}\right) = 0.95$$

وبإضافة $\overline{Y}$ لكل الأطراف ينتج:

$$\Pr\left(\overline{Y} - 1.96\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \overline{Y} + 1.96\sigma/\sqrt{n}\right) = 0.95 \qquad (٦-١)$$

وبالمثل فإن:

$$\Pr\left(\overline{Y} - 2.58\sigma/\sqrt{n} \le \mu \le \overline{Y} + 2.58\sigma/\sqrt{n}\right) = 0.99 \qquad (٦-٢)$$

وتسمى (٦-١) حدى الثقة للمتوسط لـ 5% بينما (٦-٢) حدى الثقة لـ 1% ويمكن تعميم التعبيرين السابقين كما يلى:

$$\Pr\left(\overline{Y} - (Z_{\alpha/2})(\sigma)/\sqrt{n} \le \mu \le \overline{Y} + (Z_{\alpha/2})(\sigma)/\sqrt{n}\right) = 1-\alpha \qquad (٦-٣)$$

وكلما ضاق الفرق بين حدى الثقة كلما زادت الثقة فى المتوسط المحسوب. فمثلاً إذا كان حدا الثقة 5% لمتوسط ما هما 32 & 34 kg معنى هذا أن احتمال أن يحتوى المدى بين 32 & 34 kg متوسط العشيرة $\mu$ هو 95%، بينما إذا كان لمتوسط آخر حدا الثقة 5% هما 38 & 28 kg فإن احتمال أن يحوى هذان الحدان المتباعدان نسبياً المتوسط الحقيقى هو 95%، وبالتالى فإن الثقة تكون أكبر فى المتوسط الأول. وإذا فرض أن حدى الثقة لمتوسط ثالث هما 33.5 & 32.5 kg يكون هو أدقها جميعاً إلى أن يأخذ حدا الثقة القيمة النظرية $33+0$ إلى $33-0$ أى ينطبق التقدير $\overline{Y}$ على قيمة $\mu$ للعشيرة نفسها وهذا مطلق الثقة فى التقدير. وهناك خطأ شائع يجب العمل على تجنبه وهو أنه كثيراً ما يقال إن احتمال وقوع المتوسط الحقيقى بين حدى الثقة هو مثلاً 95%، والصحيح أن يقال إن احتمال أن يحتوى حدا الثقة المتوسط الحقيقى هو 95% وذلك لأن المتوسط الحقيقى ثابت لا يتغير ومعنى القول إن هناك احتمال 95% فى أن يقع المتوسط بين الحدين أن هناك احتمال 5% أن يقع خارجها وذلك غير ممكن لثبوت قيمته كما سبق القول.

**مثال ٦-٢**

إذا فرض أن $\sigma^2_{\bar{Y}}$ لوزن الفطام فى سلالة أغنام $25\ kg^2$ وقدر المتوسط من عينة حجمها 12 حملا بمقدار $18\ kg$.

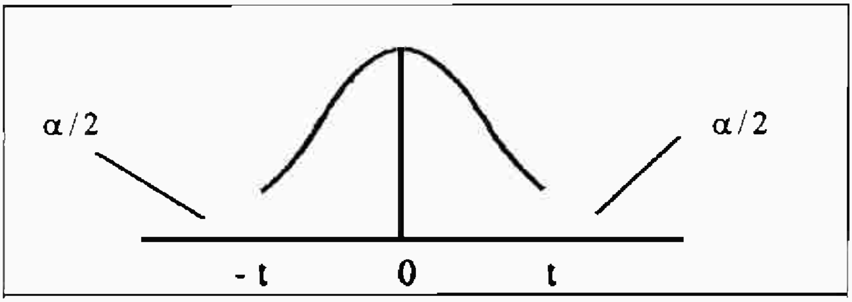
يكون حدا ثقة 5% لهذا المتوسط هما: $18 \pm \left( (1.96)(\frac{5}{\sqrt{12}}) \right) = 18 \pm 2.83$، أى أن الحد الأدنى هو $15.17\ kg$ والحد الأعلى هو $20.83\ kg$

بينما يكون حدا ثقة 1% هما $18 \pm \left( (2.58)(\frac{5}{\sqrt{12}}) \right) = 18 + 3.72$، أى أن الحد الأدنى هو $14.28\ kg$ والحد الأعلى هو $21.72\ kg$

**٦-٢-٢ حدا الثقة للمتوسط فى حالة عدم معرفة تباين العشيرة**

فى الفصل السابق افترض معرفة قيمة تباين العشيرة $\sigma^2$ وهذا فرض يسمح باستخدام جداول التوزيع الطبيعى القياسى (جدول ٣ ملحق أ). ولكن نادراً ما يتحقق مثل هذا الشرط وإن كان من الممكن استخدام جداول التوزيع الطبيعى على أى الأحوال إذا كان حجم العينة كبيراً (أكبر من 100 مثلاً). فإذا كانت $\bar{Y}$ تتوزع طبيعياً فإن القيمة $\bar{Y} - \mu$ تتوزع طبيعياً، وبقسمتها على ثابت $\sigma^2_{\bar{Y}}$ أى $(\bar{Y} - \mu)/\sigma^2_{\bar{Y}}$ فإن هذه القيمة تتوزع أيضاً طبقاً للتوزيع الطبيعى. فإذا لم تكن القيمة الحقيقة للتباين $\sigma^2_{\bar{Y}}$ معلومة يمكن استخدام القيمة المقدرة لها بدلاً منها أى $S^2_{\bar{Y}}$، وفى هذه الحالة لا تصبح القيمة $(\bar{Y} - \mu)/S_{\bar{Y}}$ موزعة حسب التوزيع الطبيعى ولكنها تتوزع حسب توزيع "t" (جدول ٤ ملحق أ) والمعروف باسم "student distribution" الذى وضعه "Gosset" والذى كان يوقع بحوثه باسم"Student" ويشبه توزيع "t" التوزيع الطبيعى فى أنهما متناظران حول المتوسط ولكن يختلفان عن بعضهما فى أن المساحة (وبالتالى الاحتمال) المحددة بين قيم "t" تختلف باختلاف حجم العينة معبراً عنها بدرجات الحرية degrees of freedom (df). وفى الحالات البسيطة تكون درجات الحرية مساوية لـــ $(n-1)$. ويتطابق التوزيعان عندما تكون n كبيرة جداً. ومن الوجهة العملية يمكن استخدام التوزيع الطبيعى إذا ما زادت n عن 100 كما سبق القول. وجدول ٤ ملحق أ يبين الاحتمال معبراً عنه بنسبة المساحة تحت المنحنى فى كلا الذيلين الخارجة عن نقطة t معينة. وهكذا تكون القيمة الحرجة critical value لـــ t عند احتمال 5% (ويطلق على هذا الاحتمال الرمز $\alpha$) ودرجات حرية 7 مثلاً 2.365 (جدول ٤ ملحق أ) وتكتب هكذا $t_{(.05,7)} = 2.365$، وحيث إن هذا الجدول يمثل الذيلين معاً فإنه يعنى مجموع المساحتين الخارجتين عن القيمتين $\pm 2.365$ هو

5%، وحيث إن المنحنى متناظر الشطرين فتكون المساحة ما بعد $+2.365$ هى 2.5% أى $\alpha/2$ والمساحة ما قبل $-2.365$ هى 2.5%. وعلى القارئ أن يتحقق من إن $t_{(.05,10)} = 2.228$ ، $t_{(.01,15)} = 2.947$ ، $t_{(.05,\infty)} = 1.96$. ويلاحظ أن القيمة الأخيرة 1.96 هى نفس القيمة للمنحنى الطبيعى عند احتمال 0.025 على كل من طرفى التوزيع الطبيعى. والشكل ٦-١ يوضح توزيع t




**شكل ٦-١** توزيع t عند درجات حرية df ومستوي معنوية α

ولحساب حدى الثقة فى حالة عدم معرفة $\sigma^2$ ولكن المتاح هو تقدير له وهو $S^2$، فإنه يمكن إعادة كتابة التعبير (٦-٣) ولكن مع استبدال t مكان Z، S مكان σ أى:

$$\Pr\left(\overline{Y} - t_{\alpha,(n-1)} S_{\overline{Y}} \le \mu \le \overline{Y} + t_{\alpha,(n-1)} S_{\overline{Y}}\right) = 1 - \alpha \qquad (٦-٤)$$

ويلاحظ القارئ هنا أن القيمة t عند α وليس عند قيمة $\alpha/2$ كما هو فى حالة التوزيع الطبيعى (٦-٣) وذلك لأن جدول التوزيع الطبيعى يحسب المساحات فى جانب واحد فقط من المتوسط بينما t يحسبها على كلا الجانبين كما سبق القول.

**مثال ٦-٣**

البيانات التالية تمثل وزن الميلاد بالكيلوجرام لعدد 12 عجل جاموسى والمطلوب هو حساب حدى الثقة للمتوسط عند 5% ، 1%

25, 28, 31, 30, 28, 22, 26, 30, 22, 28, 31, 32

المتوسط $\overline{Y} = 27.75\text{kg}$ ، التباين $S^2_{\overline{Y}} = 11.48\ \text{kg}^2$ ، $n = 12$ ، $df = 11$

وبالكشف فى جدول t عند درجات حرية 11 فإن $t_{.05,11} = 2.201$، $t_{.01,11} = 3.106$، وبالتالى يكون حدا الثقة عند 5% هما:

$$= 27.75 \pm 2.15 \quad 27.75 \pm 2.2\sqrt{\frac{11.48}{12}}$$ ، أى أن الحدين هما 29.9,25.6 kg

ويكون الحدان عند 1% هما:

$$= 27.75 \pm 3.04 \quad 27.75 \pm 3.106\sqrt{\frac{11.48}{12}}$$ ، أى أن الحدين هما 30.79, 24.71 kg

**٦-٢-٣ حدا الثقة للتباين:**

تتوزع النسبة $(n-1)S^2/\sigma^2$ طبقا لتوزيع مربع كاى $\chi^2$. ويمكن الرجوع إلى العديد من المراجع لتفهم ذلك رياضيا (مثلا Socal and Ralf 1973). وبطريقة مشابهة لتلك التى اتبعت عند استنباط حدى الثقة للمتوسط يمكن كتابة التعبير التالى:

$$\Pr\left[\chi^2_{(1-\alpha/2),(n-1)} \le \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{(\alpha/2),(n-1)}\right] = 1-\alpha$$

ويلاحظ أن قيم $\chi^2$ ليست متماثلة على الجانبين ذلك لأن توزيع مربع كاى نفسه ليس متناظر الشطرين ومن التعبير السابق يمكن كتابة:

$$\Pr\left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(\alpha/2),(n-1)}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2),(n-1)}}\right] = 1-\alpha$$

وحيث إن $(n-1)S^2 =$ مجموع مربعات الانحرافات المصححة $\sum y^2$ فإنه يمكن كتابة التعبير السابق كما يلى:

$$\Pr\left[\frac{\sum y^2}{\chi^2_{(\alpha/2),(n-1)}} \le \sigma^2 \le \frac{\sum y^2}{\chi^2_{(1-\alpha/2),(n-1)}}\right] = 1-\alpha \qquad (٦-٥)$$

**مثال ٦-٤**

حساب حدى الثقة للتباين فى مثال ٦-٣ عند كل من المستويين 1%, 5%

فى هذا المثال $S^2_Y = 11.48$ بدرجات حرية 11 أى أن $\sum y^2 = 126.28$ ، وباستخراج قيم $\chi^2$ المطلوبة من جدول ٦ ملحق أ، فيكون:

الحد الأدنى للثقة للتباين عند 5% هو:

$$126.28 \div \chi^2_{(.025),(11)} = 126.28 \div 21.92 = 5.76\ \text{kg}^2$$

والحد الأعلى للثقة للتباين عند 5% هو:

$$126.28 \div \chi^2_{(.975),(11)} = 126.28 \div 3.82 = 33.06\ \text{kg}^2$$

والحد الأدنى للثقة عند مستوى 1% هو:

$$126.28 \div \chi^2_{(.005),(11)} = 126.28 \div 26.76 = 4.72\ \text{kg}^2$$

والحد الأعلى للثقة عند مستوى 1% هو:

$$126.28 \div \chi^2_{(.995),(11)} = 126.28 \div 2.60 = 48.57\ \text{kg}^2$$

**صندوق ٦-١**

- التباين للعشيرة $\sigma^2_Y$: مجموع مربعات الانحرافات عن المتوسط مقسوماً على حجم العشيرة
- التباين من العينة $S^2_Y$: مجموع مربعات الانحرافات عن متوسط العشيرة مقسوماً على حجم العينة ناقص واحد
- $\sigma_Y$: الانحراف القياسي للعشيرة
- $S_Y$: الانحراف القياسي للعينة
- $\sigma_{\overline{Y}}$: الخطأ القياسي إذا كان تباين العشيرة معروف
- $S_{\overline{Y}}$: الخطأ القياسي إذا كان تباين العشيرة غير معروف ويقدر من التباين المحسوب من العينة

## ٦-٣ اختبارات الفروض الإحصائية Tests of hypotheses

من أهم وظائف علم الإحصاء الحيوى أنه بواسطته يمكن اختبار فرض ما اختباراً موضوعياً مع وضع العبارات الاحتمالية له. فالأسلوب الموضوعى المثالى لاتخاذ قرار ما هو أن تضع فرضا معينا يمكن اختباره ومعه بدائله وعندما يختبر الفرض إما أن يرفض أو لا يرفض وفى حالة رفضه قد يقبل الفرض البديل.

افترض أن عشيرة ما احتمال الذكور بها = احتمال الإناث = 0.5 وجىء بعينة من 10 حيوانات فكان منها 8 من جنس، و 2 من الجنس الآخر. والسؤال: هل هذه العينة تتبع فعلاً هذه العشيرة ؟، أو هل هذه العينة مأخوذة عشوائياً من العشيرة وإن أى اختلاف فى النسبة بينها وبين العشيرة هى اختلافات راجعة للصدفة المحضة ؟.

إذا أخذ مفكوك "ذو الحدين" لهذه الحالة $(p+q)^{10}$ حيث p احتمال الحصول على ذكر = q احتمال الحصول على أنثى = 0.5، يكون كما يلى:

$$p^{10}+10p^9q+45p^8q^2+...+45p^2q^8+10pq^9+q^{10}$$

ويبين الجدول التالى احتمالات حدوث الأعداد المختلفة من الذكور والإناث

| عدد ذكور | عدد إناث | الاحتمال تحت فرض $p = q = 0.5$ |
|---|---|---|
| 0 | 10 | 0.000977 |
| 1 | 9 | 0.009766 |
| 2 | 8 | 0.043945 |
| 3 | 7 | 0.117188 |
| 4 | 6 | 0.205078 |
| 5 | 5 | 0.246094 |
| 6 | 4 | 0.205078 |
| 7 | 3 | 0.117188 |
| 8 | 2 | 0.043945 |
| 9 | 1 | 0.009766 |
| 10 | 0 | 0.000977 |
| **المجموع** | | **1.000** |

يتضح من هذا الجدول أن هناك فعلاً احتمال أن تكون هذه العينة ممثلة للعشيرة حيث إنه بالصدفة المحضة يمكن الحصول على العينة بمثل هذا الانحراف أو أكبر فى طرفى التوزيع باحتمال قدره $(2)(0.043945) + 0.009766 + 0.000977 = 0.109$ أى حوالى 0.11 وهو احتمال ضئيل نسبياً. ويعنى هذا أنه إذا اتخذ قراراً بأن هذه العينة شاذة بالنسبة للعشيرة، ولذا فهى ليست تابعة لها، نكون قد وقعنا فى خطأ قدره 11% وهو احتمال أن تكون العينة تابعة للعشيرة ولكن الصدفة المحضة هى التى عملت على الحصول على نسبة (8:2). أيضاً إذا كان القرار أن هذه العينة تتبع العشيرة وأن الانحرافات بينها وبين العشيرة راجعة للصدفة قد يكون هذا قراراً يحتمل الخطأ والصواب طبقاً لحقيقة الأمر.

ويمكن النظر للموضوع بطريقة أخرى. عشيرة ما يراد اختبار ما إذا كانت $p = q = 0.5$ فأخذت عينة عشوائية سابقة الوصف فما هو القرار ؟

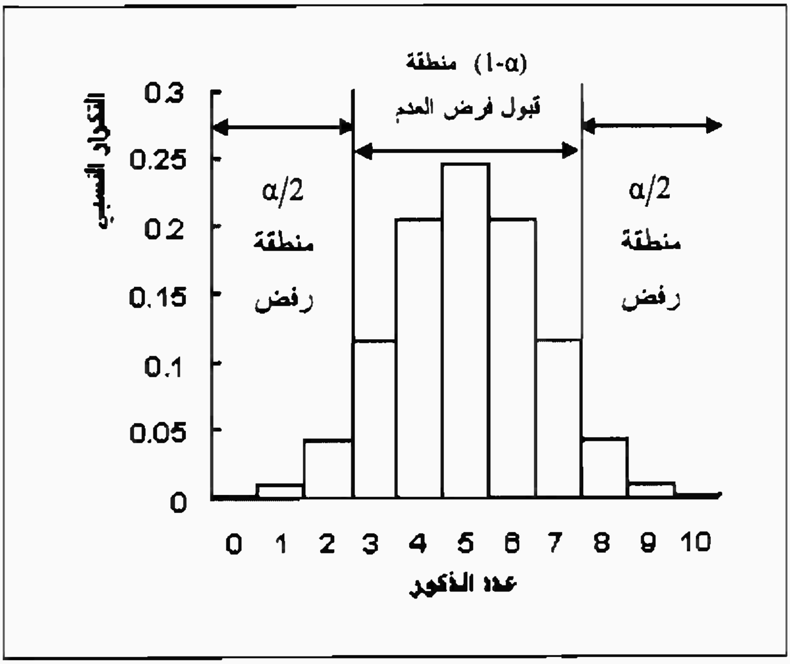
لهذا يوضع فرض يطلق عليه فرض العدم لأسباب ستتجلى فيما بعد (ويرمز له بالرمز $H_o$) ويمكن كتابته: $H_0 : p = q = 0.5$

وعادة ما يحدد الباحث النسبة التى يسمح بها لقراره أن يكون فى خطأ من هذا النوع، فإذا وضع الباحث لنفسه خطأ مسموحاً قدره 0.11، مثلاً فإنه سيقرر أن الفرض خاطئ فقط فى الحالات $(0-10)$، $(1-9)$، $(2-8)$، $(8-2)$، $(9-1)$، $(10-0)$ (شكل ٦-٢).

أما إذا أراد الباحث أن يكون أكثر تحوطاً بالنسبة لهذا الخطأ ولا يود أن يقرر أن النسبة $p : q = 1:1$ ، إلا فى الحالات $(0-10)$، $(10-0)$ فإنه فى هذه الحالة يكون قد وضع خطأ لنفسه قدره $0.001954 = (0.000977)(2)$، ولكن بتقليله لهذا النوع من الخطأ يكون قد وقع فى خطأ آخر وهو أنه من الممكن أن يقرر عدم رفض فرض العدم بينما هو خاطئ وتسمى القيم التى على أساسها يرفض أو يقبل الباحث فرض العدم بالقيم الحرجة وهى تحدد تحت المنحنى أو الهيستوجرام مساحات تسمى بمناطق الرفض أو المناطق الحرجة.

ويبين ٦-٢ المنطقة الحرجة أو منطقة الرفض إذا ما اتخذ الباحث قيمة هذا الخطأ بقدر 0.11 أى كأنه يقول فقط إذا كانت العينة بدرجة انحراف قدره $(2-8)$ أو أكثر (أى $1-9$ أو $0-10$) فإن فرض العدم سوف يرفض. أما إذا كان الانحراف أقل من هذا أى ($3-7$، $4-6$ أو $5-5$) فإن فرض العدم لا يرفض، ويسمى هذا النوع من الخطأ "خطأ من النوع الأول type I error " ويعرف بأنه احتمال رفض فرض العدم وهو صحيح. كما جرت العادة علي تسميته مستوى المعنوية significance level ويرمز له أيضاً بالرمز $\alpha$. وغالباً ما يستخدم فى المجالات البيولوجية مستويان

للمعنوية هما 0.05 ، 0.01، ويطلق على الفروق التى تزيد قيمتها عن المستوى الأول (0.05) بأنها معنوية بينما تلك التى تزيد عن قيم المستوى الثانى (0.01) يطلق عليها معنوية جداً، وإن كانت تستخدم مستويات أخرى طبقاً لمقتضيات الدراسة. ونظراً للتوسع فى استخدام الحزم الجاهزة من البرامج الإحصائية مع أجهزة الحاسب فإنه يكتفى بكتابة كلمة معنوى يتلوها مباشرة مستوى المعنوية بين قوسين.

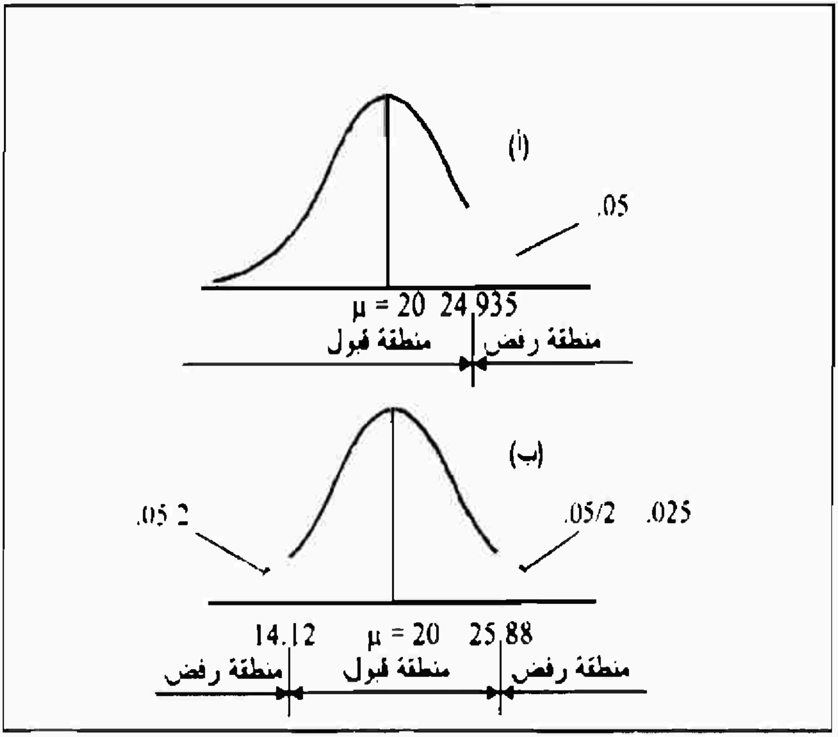



**شكل ٦-٢** مناطق الرفض (الحرجة) والقبول فى حالة $\alpha = 0.11$

**مثال ٦-٥**

افترض وجود متغير يتبع توزيعاً متصلاً (وليس متقطعاً كما فى المثال السابق) فى عينة من 4 حملان قدر منها المتوسط بمقدار 25 kg وكان تباين العشيرة الحقيقى $\sigma_Y^2 = 36\,kg^2$. وكان فرض العدم أن $H_0 : 20\ kg$.

تباين المتوسط $\sigma_{\bar{Y}}^2 = 36/4 = 9\ kg^2$، وبالتالى $\sigma_{\bar{Y}} = 3\ kg$. وإذا فرض أن توزيع الأوزان يتبع توزيعاً طبيعياً فإنه يمكن تمثيل الحالة بالشكل ٦-٣ (أ) للاختبار من طرف واحد و ٦-٣ (ب) للاختبار من طرفين كالتالى:




**شكل ٦-٣** المناطق الحرجة على التوزيع الطبيعى $(\alpha = 0.05)$

(أ) اختبار من طرف واحد

(ب)اختبار من طرفين

احتمال الحصول على متوسط 25 kg أو أعلى من عشيرة متوسطها 20 kg يمكن استخراجها من جدول التوزيع الطبيعى (جدول ٣ ملحق أ) حيث $Z = (25 - 20)/3 = 1.67$ والمساحة التى تحدها القيمة وما بعدها هى 0.0475، أى أنه إذا كان فعلاً المتوسط يتبع هذه العشيرة فإن احتمال ذلك هو 0.0475، وبعبارة أخرى فإن هناك هذا القدر من الاحتمال ليكون المتوسط لعينة من نفس العشيرة وعليه إذا قرر الباحث رفض فرض العدم القائل بأن متوسط العشيرة 20 kg أو $H_0 : \mu_0 = 20$ أو $H_0 : \mu_0 = \mu$ ومنها $H_0 : \mu_0 - \mu = 0$ (من هنا جاء لفظ العدم null) فيكون قد ارتكب خطأً من النوع الأول $\alpha = 0.0475$.

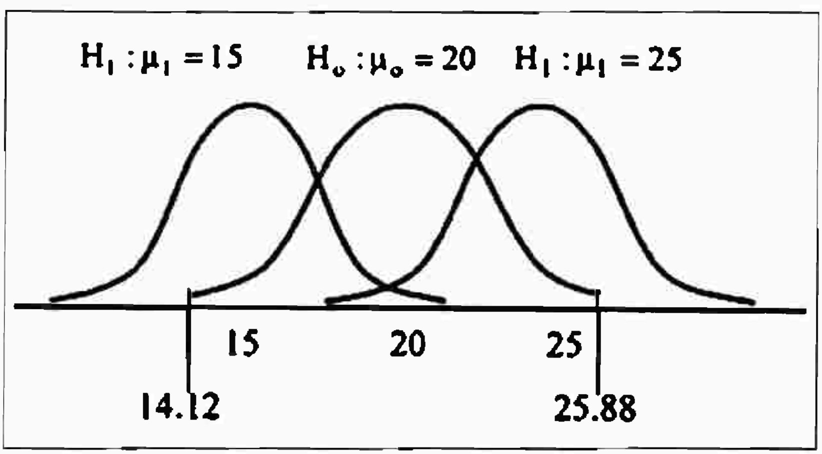
وإذا كان الباحث قد حدد لنفسه خطأً من النوع الأول بمقدار 5% على جانب واحد من المتوسط أى أنها 5% من المساحة الكلية، فيكون حد المنطقة الحرجة هو $(1.645)\sigma_{\bar{Y}} = (1.645)(3) = 4.935$ kg أكبر من المتوسط أى:

$20 + 4.935 = 24.935$ kg

أما إذا حدد مساحة 5% على جانبى المتوسط فيكون الحد الأدنى $20 - (3)(1.96) = 14.12$ kg والحد الأقصى $20 + (3)(1.96) = 25.88$ kg، أى أنه سيقرر رفض فرض العدم إذا قل المتوسط عن 14.12 kg أو زاد عن 25.88 kg وما بين هاتين القيمتين فإنه لن يستطيع رفض فرض العدم أن $\mu = \mu_0$.

والذى يحدد ما إذا كان اختبار المعنوية من جهة واحدة one–tail أو من جهتين two–tail هو مدى توافر المعلومات المسبقة لدى الباحث، فإذا كان لدى الباحث من المعلومات المسبقة ما يجعله يعتقد أنه إن لم يكن الفرق $\mu - \mu_0 = 0$، فإنه يتوقع أن يكون أكبر من صفر فهذا يؤدى إلى اختبار من جهة واحدة ولكن فى غياب مثل هذا الاعتقاد (أى قد يكون $\mu$ أكبر من $\mu_0$ أو $\mu_0$ أكبر من $\mu$) فإن هذا يؤدى إلى اختبار من الجهتين.

بديهى أنه إذا رفض فرض العدم $H_0$ أن يكون هناك فرض بديل alternative hypothesis يمكن قبوله. مثلاً فى مثال ٦–٥ فرض العدم $H_0$ كان $\mu_0 = 20$ وإذا رفض الباحث هذا الفرض فإنه سيكون على استعداد لقبول فرض بديل $H_1$ أن المتوسط الحقيقى يبعد 5 kg عن هذا المتوسط أى إما 15 kg أو 25 kg شكل ٦–٤، وإذا حدد الباحث أيضا المنطقة الحرجة $\alpha$ بالقيمة 5% كما هو فى الشكل ٦–٣ وتحدها القيمتان 14.12، 25.88 وكما هو موضح أيضاً بشكل ٦–٤.




**شكل ٦–٤** فرض العدم والفروض البديلة تحت $\alpha = .05$ (.025 على كل جانب)

تمثل المساحة المظللة على المنحنى قيمة $\alpha = 5\%$ من مجموع المساحة الكلية (2.5% على كل من جانبى المنحنى) وبالتالى فإن الباحث إذا لم يفرض فرض العدم لقيم بين 20، 25.88، قد يقع فى خطأ وهو أن هناك احتمال أن هذه القيم تتبع المنحنى $H_1 : \mu = 25$ ، ويمكن صياغة السؤال بطريقة أخرى إذا فرض أن $\mu = 25$ ما احتمال الحصول على قيمة 25.88 أو أقل (وهى القيمة التى عندها لا يرفض الفرض $H_0 : \mu = 20$ ؟ هذا الاحتمال عبارة عن:

$$= 0.5 + \Pr\left(Z = \frac{25.88 - 25}{\sigma_{\bar{y}}}\right) = 0.5 + \Pr\left(Z = \frac{25.88 - 25}{3}\right)$$

$$= 0.5 + \Pr(Z = 0.29) = 0.5 + 0.114 = 0.614$$

وذلك باستخدام جداول المساحات تحت التوزيع الطبيعى. معني ذلك أنه إذا قبل الفرض $H_0 : \mu = 20$ ، فإنه سوف يكون هناك خطأ قدره 0.614 أن تنتمى العينة للعشيرة التى متوسطها 25 kg. ويسمى هذا النوع من الخطأ (خطأ من النوع الثانى type II error) ويرمز له بالرمز $\beta$ وهو أيضا يحدده الباحث بالقيمة التى يريدها وذلك عند إجراء التجربة واختيار العينة. وعليه يمكن تمثيل احتمال خطأ النوع الأول $\alpha$ من عدمه واحتمال خطأ النوع الثانى $\beta$ من عدمه بالشكل التالى:

| | | فرض العدم $H_0$ | |
|---|---|---|---|
| | | **صحيح** | **خاطئ** |
| **القرار** | **يرفض** | خطأ النوع الأول Type I Error ($\alpha$) | صحيح $(1-\beta)$ |
| | **لا يرفض** | صحيح $(1-\alpha)$ | خطأ النوع الثانى Type II Error ($\beta$) |

وتمثل القيمة $(1-\beta)$ احتمال أن يرفض الباحث فرض العدم $H_0$ عندما يكون خاطئا. وهذا التعبير يطلق عليه قوة الاختبار power of the test، وكلما كان الاختبار قوياً كلما تمكن الباحث من رفض فرض العدم عندما يكون غير صحيح وفى حالة العكس أن الاختبار الضعيف يكلف الباحث الكثير للبحث عن الفروق أو الاختلافات التى قد تكون فعلا موجودة ولكن لضعف الاختبار فإنه لا يتمكن من رفض فرض

العدم والإعلان عن معنوية هذه الفروق ويكون فى هذا إهدار للإمكانيات البحثية. وفى المثال السابق حسبت قيمة $\beta$ على منحنى $H_1: \mu = 25$ وحيث أن كلا من المنحنيين $\mu = 15$، $\mu = 25$ متماثلين فإن $\beta$ تحت المنحنى $H_1: \mu = 15$ هى نفسها 0.61 .

فرض فى المعالجة السابقة اختبار من جهتين two–tail ولكن إذا كان لدى الباحث ما يجعله يعتقد أنه إن لم يكن $\mu = 20$ فإنه سوف يكون 25 (أى أنه يعتقد أن المعاملة سوف تؤدى إلى زيادة المتوسط) ففى هذه الحالة يصبح الاختبار ممثلا لجانب واحد وتكون $\alpha$ كلها خاصة بالاختبار على جانب واحد من المتوسط ويكون حدها $(1.645)(\sigma_{\bar{Y}})$ من المتوسط الفرضى أى $20 + (1.645)(3) = 24.935$ kg ويكون احتمال الحصول على مثل هذه القيمة أو أقل على منحنى $H_1: \mu = 25$ هو:

$$= 0.5 - \Pr\left(Z = \frac{24.935 - 25}{3}\right) = 0.5 - \Pr(Z = 0.022) = 0.5 - 0.0088 = 0.4912$$

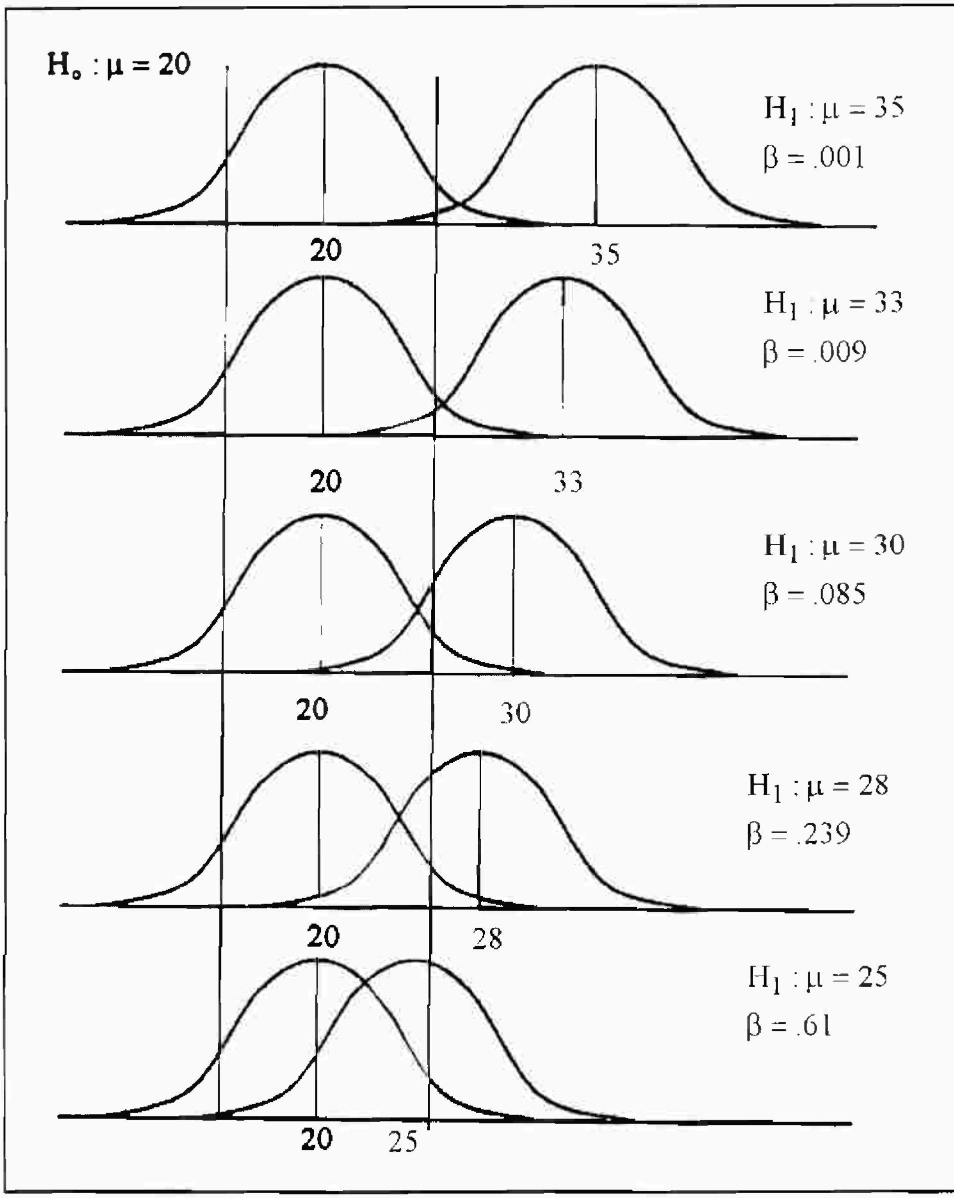
وهذه هى قيمة $\beta$، وتكون قوة الاختبار عبارة عن: $1 - 0.491 = 0.509$

وهناك علاقة وثيقة بين قيمة $H_1$ وقوة الاختبار فكلما كانت القيمة البديلة التى يمكن أن تقبل فى حالة رفض فرض العدم بعيدة عن $Ho: \mu_o = \mu$ (أى المتوسط الفرضى) كلما قلت $\beta$ وزادت قوة الاختبار أى كلما تمكن الباحث من أن يرفض هذا الفرض ويعلن أن المتوسط $\mu_1$ يختلف عن $\mu_o$ الفرضى وهذا منطقى ويبين شكل ٦–٥ هذه العلاقة بوضوح. فعند $\alpha = 5\%$ (2.5% على كل جانب) وفى حالة ما إذا كان $H_o: \mu = 20$ فإن $H_1: \mu = 25$ أعطت $\beta = 0.61$، بينما إذا كانت $H_1: \mu = 28$ فإن $\beta$ تصبح 0.239 وإذا بلغت $H_1: \mu = 35$ فإن $\beta$ تصبح 0.001 أى أن قوة الاختبار فى هذه الحالة تصبح $(1 - 0.001 = 0.999)$، والشكل ٦–٥ يبين أنه كلما زاد بعد $H_1$ عن $H_o$ ازاد المنحنيان انفصالا عن بعضها، وأمكن التمييز بوضوح بين $H_o$ ، $H_1$ وبالتالى زادت قوة الاختبار والعكس صحيح لدرجة أنه إذا تطابقت $H_o$ ، $H_1$ تصبح قوة الاختبار مساوية لقيمة $\alpha$.

وبدراسة شكلى ٦–٤، ٦–٥ تتضح العلاقة العكسية بين كل من $\alpha$ ، $\beta$ فإذا زيدت قيمة $\alpha$ أى تحرك الخط الرأسى 25.88 يساراً ويؤدى هذا إلى انكماش المساحة المظللة الممثلة لقيمة $\beta$ والعكس صحيح.

من المعلوم أن تفرطح المنحنى الطبيعى يرجع إلى التباين فإذا زاد التباين زاد التفرطح والعكس صحيح. ومن شكل ٦–٥ يبدو أنه كلما زاد التفرطح كلما ازداد تداخل منحنيا $H_o$ ، $H_1$ وبالتالى كلما زادت قيمة $\beta$. ومن هذا يمكن استنباط القاعدة المهمة فى التجريب الإحصائى أنه كلما قل التباين كلما أمكن اختبار الفروض بقوة

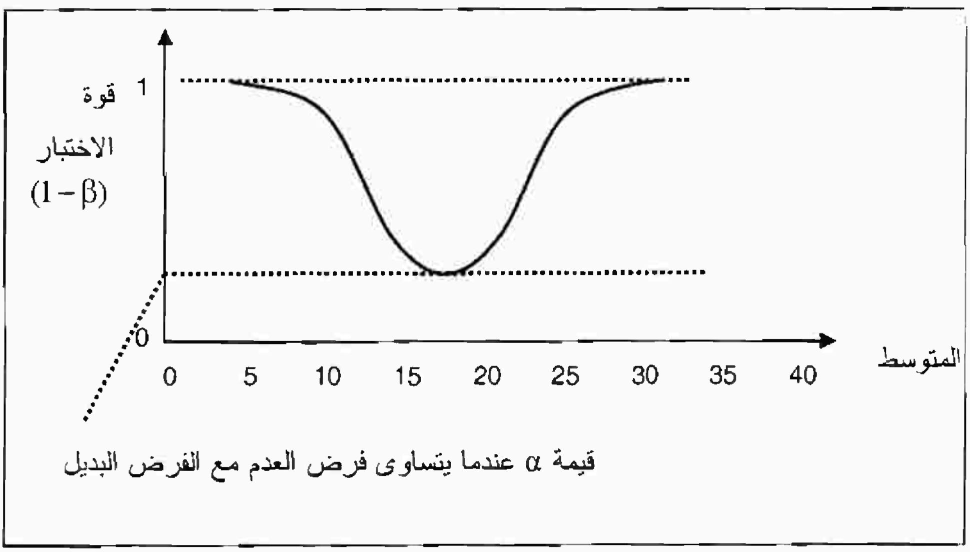
أكبر وزادت مقدرة المجرب على فصل $H_0$ من $H_1$. ولتقليل قيمة $\sigma^2_{\bar{Y}}$ هناك عدة طرق منها زيادة الوحدات التجريبية حيث إن $\sigma^2_{\bar{Y}} = \sigma^2_Y / n$، وأيضاً عن طريق اتباع التصميمات الإحصائية المناسبة.




شكل ٦-٥ علاقة قيمة الفرض البديل بخطأ النوع الثانى β، الخطوط الرئيسية تمثل 5% (2.5% على كل جانب)

ويلاحظ أنه عند حساب خطأ النوع الأول $\alpha$ (مثلاً شكل ٦-٤) حسب احتمال أن تكون القيمة 25.88 أو أقل وهى المساحة المحددة بين القيمة الحرجة 25.88 إلى نهاية المنحنى يساراً، والتى افترض أنها تقع كلها فى منطقة القبول. وهذا ليس صحيحا تماما لأنه من المعلوم أن حدود التوزيع الطبيعى النظرية هى $\pm\infty$ وبالتالى فإن الطرف الأيسر سيستمر نظريا ليعبر منطقة القبول إلى المنطقة الحرجة عن يسار $H_0 : \mu = 20$. ولكن هذه المساحة متناهية فى الصغر ويمكن تجاهلها.

قد يتساءل البعض لماذا حددنا بالذات أن $H_1 : \mu_1$ يبعد 5 kg عن المتوسط فى كلا الاتجاهين عند حساب خطأ النوع الثانى؟ وهذا سؤال فى محله إذ إنه نادراً ما يعلم المجرب بالضبط أن يحدد متوسطات الفروض البديلة ولكن هنا قد افترضت لترسيخ مفهوم خطأ النوع الثانى وقوة الاختبار. والقول الأعم أن المجرب يود اختبار بحيث تكون قوته أكبر ما يكون على مختلف فروض بديله ممكنة، فمثلاً إذا رسمت منحنيات شكل ٦-٥ على هيئة رسم بيانى (شكل ٦-٦) مع وضع القوة $(1-\beta)$ على الإحداثى الصادى ينتج ما يسمى بمنحنى قوة الاختبار power curve ومنه يمكن القول إن قوة الاختبار تكاد تقترب من الواحد الصحيح إذا ما زاد الفرق بين $\mu$ فى $H_0$، $H_1$ عن 7، وعند فرق أقل من هذا تنخفض القوة إلى أن تصبح مساوية لقيمة $\alpha$ عندما تنطبق قيمة $\mu$ عند كل من $H_0$، $H_1$. ويقل اتساع الوادى الناشئ لها من المنحنى فى هذا الشكل كلما قلت قيمة $\sigma^2_Y$.




**شكل ٦-٦** منحنى قوة الاختبار

افترض فى المعالجات السابقة أن التباين الحقيقى $\sigma_Y^2$ للعشيرة معلوماً، وهذا افتراض نادراً ما يتحقق ولكن عادة $\sigma_Y^2$ غير معلوم ويستخدم بدلا منه تقديراً له هو $S_Y^2$ المقدرة من العينة وكل ما قيل عن الحالة حيث $\sigma_Y^2$ معلوماً يقال أيضاً فى حالة استخدام $S_Y^2$ بخلاف واحد ألا وهو استخدام جدول t بدلا من جدول التوزيع الطبيعى Z ويكون المدخل إلى القيم فى الجدول مقابلاً لعدد درجات الحرية فى العينة التى قدر على أساسها $S_Y^2$.

**صندوق ٦-٢**

**الخطأ من النوع الأول α:** احتمال أن يرفض فرض العدم وهو صحيح

**الخطأ من النوع الثاني β:** احتمال ألا يرفض فرض العدم وهو خطأ

**قوة الاختبار** $(1-\beta)$: 1 – خطأ النوع الثانى

## ٦-٤ تحديد العدد الأمثل للمشاهدات فى التجربة (حجم العينة)

العدد الأمثل للتجربة هو أقل عدد ممكن من الوحدات التجريبية (حيوانات مثلاً) الذى يحقق للمجرب اختبار فروق معينة تحت احتمال لكل من α، β محددتين. والسؤال الذى كثيراً ما يوجهه المجرب إلى الإحصائى هو كم حيوانا أو قطعة زراعية أو وحدة تجريبية يجب أن تتناوله التجربة حتى تنتج هذه التجربة المعلومات التى يريدها المجرب ؟ ولإجابة موضعية عن السؤال يجب توافر كل المعلومات التالية:

١- تباين الخطأ $\sigma_e^2$ فى التجربة أو فى مثل هذا النوع من التجارب. وإن لم يكن يعلمها المجرب فعليه البحث عنها فى المراجع للحصول على قيمتها المتوقعة فى مثل هذه التجارب. إذا تعذر عليه ذلك أيضا، يمكن توقع قيمتها من معرفة معامل الاختلاف .C.V فى مثل هذه التجارب والمتوسط الذى يتوقعه.

٢- قيمة احتمال خطأ النوع الأول α الذى يكون المجرب على استعداد لتقبله.

٣- قوة الاختبار أى $(1-\beta)$ التى يريد المجرب أن تحققها التجربة.

٤- الفرق بين المعاملات أو الأقسام الذى يود أن يعلنه الباحث معنويا.

مثلا هل يود الباحث أن يعلن فرقاً معنوياً بقدر 5 kg فى وزن فطام الحملان؟ أم أنه يريد أن يزيد من حساسية اختباره ليتمكن من أن يعلن الفرق 0.5 kg معنوياً؟ هذا هو قرار المجرب نفسه يقرره طبقاً لخبرته وما يريده من وراء التجربة المقامة. ويعبر عن الفرق هذا فى صورة مجموع مربعات انحرافات المتوسطات المتوقعة عن متوسطها. فمثلا إذا شاء المجرب أن يعلن الفرق بين معاملة متوسطها 30 kg وأخرى متوسطها 35 kg معنوياً فيكون متوسط المعاملتين 32.5 ويكون مجموع مربعات انحرافات المعاملات عن متوسطها $12.5 = (35-32.5)^2 + (30-32.5)^2$. وإذا زاد عدد المعاملات عن اثنتين أصبح من الصعب تخيل مجموع المربعات هذا وعلاقته بالفرق بين متوسطى أى معاملتين. فإذا رمز لمتوسط المعاملة بالرمز $\mu_j$ والمتوسط العام بالرمز $\mu$ فإن مجموع مربعات انحرافات المتوسطات عن متوسطها هو $\sum(\mu_j-\mu)^2$ ويمكن كتابته $(k-1)(d^2)/2$ حيث k هى عدد المعاملات، d هو الفرق المراد اختباره ففى المثال السابق $k = 2$ ، $d = 5$ وتكون:

$$(k-1)((d^2)/2 = (2-1)(5)^2/2 = 12.5$$

وإذا كان هناك 4 معاملات مثلا وقدر الفرق المراد اختباره أيضا 5 فيكون هذا التعبير:

$$(4-1)(5)^2/2 = 37.5$$

وقد وصف Tang (1938) طريقة تحديد حجم العينة. وتفترض هذه الطريقة أن الوحدات التجريبية تتوزع طبيعيا بتباين واحد هو $\sigma_e^2$، وفى هذه الحالة يمكن تعريف القيمة $\varphi$ (فاى):

$$\varphi = \sqrt{\frac{\sum(\mu_j-\mu)^2/k}{\sigma_e^2/n}} \qquad (٦-٦)$$

حيث k هى عدد المعاملات، $\sum(\mu_j-\mu)^2$ هو مجموع مربعات انحرافات المتوسطات عن متوسطها، $\sigma_e^2$ هى تباين الخطأ، n هى العدد الوحدات التجريبية فى كل معاملة. ويجب معرفة تصميم التجربة بالتقريب حتى يمكن منه حساب درجات الحرية للخطأ تحت أى n. وكل محددات هذه القيمة هى معطيات يعلمها الباحث إلا n. فهو يفترض قيمة لها ثم يحسب $\varphi$ ، ومن الرسوم البيانية (١ إلى ٩ ملحق ب) يحدد إذا كانت التجربة تحت $\alpha$ معينة ستحقق له قوة الاختبار المطلوبة، فإذا كانت قوة الاختبار أقل مما حدده المجرب عليه أن يجرب n أكبر وإذا كانت أكبر مما حدد فيجرب n أصغر وهكذا بالتذبذب بين قيم n يحدد العدد الذى يجب أن يكون فى كل معاملة. ومدخل هذه المنحنيات هو $v_1$ أى درجات الحرية بين المعاملات وهى $(k-1)$.

### مثال ٦-٦

مجرب لديه ٤ معاملات ويود أن يعلن فروقاً مثل تلك التى بين المتوسطات 26, 21, 16, 17 معنوية عند $\alpha = 0.05$، $(1-\beta) = 0.9$، وأن تقدير تباين الخطأ $\sigma_e^2 = 49$. ما عدد الحيوانات الأمثل فى كل معاملة، إذا علم أن التصميم هو كامل العشوائية؟

### المحاولة الأولى:

$n = 5$ ومنها سيكون العدد الكلى للحيوانات $20 = (4)(5)$ أى 19 درجة حرية منها 3 بين المعاملات (إذاً $v_1 = 3$) والباقى 16 داخل المعاملات أو الخطأ أى أن $(v_2 = 16)$، ذلك طبقا للتصميم التجريبى الموضوع. متوسط المعاملات كلها 20 بالتعويض فى المعادلة (٦-٦)

$$\varphi = \sqrt{\frac{\left[(26-20)^2 + (21-20)^2 + (16-20)^2 + (17-20)^2\right]/4}{49/5}} = \frac{3.94}{3.13} = 1.26$$

وبدخول رسم بيانى (٣ ملحق ب) عند $v_1 = 3$، $v_2 = 16$، $\alpha = 0.05$ يتضح أن هذا العدد يحقق قوة اختبار أقل من 0.5 وعليه لابد من زيادة n، عدد الحيوانات فى كل معاملة.

### المحاولة الثانية:

$n = 15$ منها $v_2 = 56$، $\varphi = 2.18$ وطبيعى فإن $v_1$ ثابتة. وهذا يحقق قوة اختبار أعلى من 0.9 فيتم اختيار n أقل.

### المحاولة الثالثة:

$n = 15$ ومنها $v_2 = 48$، $\varphi = 2.03$، وهذه أيضاً تحقق قوة اختبار أعلى من 0.9 فتختار n أقل.

### المحاولة الرابعة:

$n = 12$ ومنها $v_2 = 44$ ، $\varphi = 1.9$ وهذه تعطى قوة اختبار مساوية 0.9 تقريباً فيكون العدد الأمثل هو 12 فى كل معاملة.

والقيمة $\sum(\mu_j - \mu)^2 = 26$ يمكن الحصول عليها لو أن المجرب قام بها بصورة أسهل تخيلا وهى أنه إذا أراد أن يختبر فرقاً قدره 6.43 بين متوسطات المعاملات وهذا ينتج مجموع مربعات انحرافات قدره $(3)(6.43)^2 \div 2 = 62.02$

ويجب أن يستوضح القارئ لنفسه أن حجم العينة يزداد إذا انخفضت $\alpha$، إذا انخفضت $\beta$، إذا قل الفرق المراد اختباره و إذا زادت $\sigma_e^2$ والعكس صحيح. وعند استخدام الرسوم البيانية يمكن تقريب $v_2$ إلى أقرب قيمة لها فى المنحنى.

وإن كانت الطريقة السابقة والتى تستخدم المنحنيات مفيدة جدا فى حساب قوة الاختبار عند كل توليفة من $\sigma^2$ و $\alpha$ وفروق بين المتوسطات، إلا أنه توجد جداول تسهل هذه العملية إذا كان الهدف فقط هو حساب العدد الأمثل من الوحدات التجريبية. ففى جدول ١٨ ملحق أ لكى يمكن تحديد العدد الأمثل يجب معرفة:

١- عدد المعاملات.

٢- أقصى فرق بين متوسطى معاملتين.

٣- $\sigma_e$، $\alpha$، $\beta$

ففى المثال السابق عدد المعاملات $r = 4$ وأقصى فرق هو $26 - 10 = 16$ و $\sigma_e = 7$ و $\alpha = 0.05$ و $\beta = 0.9$، ومنه يمكن تحديد القيمة

$$\frac{\Delta}{\sigma} = \frac{10}{7} = 1.43$$

وإذا فرض أن هذه القيمة هى 1.5 (لتواجدها فى الجدول) فإن العدد الأمثل يكون 14 وهو رقم قريب إلى حد ما من الرقم 12 المحسوب بالطريقة المطولة. أيضا فى هذه الطريقة يمكن التعبير عن الفروق فى صورة انحرافات قياسية وليست مطلقة وفى هذه الحالة لا يتطلب معرفة تقدير للانحراف المعيارى (Neter et al 1996).

# تمارين الباب السادس

٦-١ البيانات التالية تمثل محصول لبن الموسم الأول لمجموعة الأبقار بالكيلوجرام والذى يفترض أنه يتوزع طبيعياً. فإذا علمت أن $\sigma_Y^2 = 384400\ kg^2$ فى العشيرة ، احسب حدى ثقة 95%، 99% للمتوسط

3564, 3684, 3624, 3213, 3534,

4515, 3647, 2943, 3700, 2568

٦-٢ أعد التمرين (٦-١) مع استخدام $S_Y^2$ بدلا من $\sigma_Y^2$.

٦-٣ البيانات التالية تمثل المتوسط اليومى لإنتاج اللبن بالكيلوجرام لمجموعة من الأبقار، احسب تقدير التباين $\sigma_Y^2$ واحسب حدى الثقة له عند 95% و99% مع افتراض التوزيع الطبيعى لهذه الصفة

10.4, 15.6, 19.8, 17.6, 14.3, 12.6,

14.2, 12.2, 14.5, 17.2, 14.9, 13.2

٦-٤ قدر متوسط درجات الطلبة فى مادة الإحصاء فكان 73.2 درجة وذلك لعينة عشوائية عددها 144 طالبا. فإذا كان الانحراف القياسى لعشيرة الطلبة بالكلية فى هذه المادة 8 درجات، احسب حدى الثقة عند 95% و 99% لهذا المتوسط.

٦-٥ قدر طول الجسم فى عينة عشوائية عدد 200 سمكة من أسماك البلطى فكان 17.5 سم، فإذا كان الانحراف القياسى لطول الأسماك $\sigma_Y = 2.75\ cm$ فى عشيرة البلطى، احسب حدى الثقة عند 95% و 99% لهذا المتوسط.

٦-٦ فى عشيرة من الجاموس كان تباين وزن الميلاد بها $\sigma_Y^2 = 25\ kg^2$. تم أخذ عينة عشوائية وكانت أوزانها كالتالى:

34.1, 33.1, 30.1, 32, 28.1, 32.4, 32.5, 31.2, 34.4,

32.4, 25.6, 35.5, 31.5, 31.4, 38.4

حدد الباحث قيمة $\alpha = 5\%$ (2.5% على كل جانب)، وأن فرض العدم $H_0 : \mu = 35$

(أ) احسب قيمة $\beta$ للفرض البديل $H_1 : \mu_1 = 27$ ، والفرض البديل $H_1 : \mu_1 = 38$ .

(ب) إذا فرض الباحث $\alpha = 0.01$ (0.005 على كل جانب) أعد حساب $\beta$

(ج) أعد حسابات $\beta$ إذا كانت $\sigma_Y^2$ غير معلومة واستخدم الباحث مكانها $S_Y^2$ المقدرة من العينة.

(د) قدر قوة الاختبار فى كل الأحوال السابقة.

٦-٧ مجرب يود أن يعلن فرقاً معنوياً قدره 2 kg بين متوسطات 4 معاملات عند $\alpha = 0.05$ ، $\beta = 0.2$ فإذا علم أن $\sigma_e^2 = 36$ وأن التصميم التجريبى هو تام العشوائية completely random، ما هو العدد الأمثل من الحيوانات فى كل معاملة؟

٦-٨ مجرب يود أن يعلن فرقاً معنويا بين معاملتين متوسطهما 40, 30 kg عند $\alpha = 0.05$ فإذا علم أن تباين هذه الصفة $\sigma^2 = 64\ kg^2$ وأن بكل معاملة 10 حيوانات، ما هو احتمال أن يتمكن المجرب من إعلان ما يريد إعلانه؟