٧ اختبارات البيانات العددية: مربع كاى (χ^2)

Enumeration data tests: Chi-Square (χ^2)

١- مقدمة

٢- توزيع مربع كاى χ^2

٣- حساب χ^2 من البيانات العددية

٤- العلاقة بين χ^2 و t

٥- استخدامات χ^2 على البيانات المستمرة

٦- استخدامات χ^2 على البيانات غير المستمرة

٧-١ مقدمة

يستخدم توزيع "ذو الحدين" لمعالجة البيانات غير المستمرة أو المتقطعة discontinuous or discrete data إحصائياً إذا كان عدد الفئات classes محدوداً باثنين، وقد يكون توزيع "بواسون" أكثر موافقة فى أحيان أخرى. أما إذا زاد عدد الفئات عن اثنين (حالة متعددة الحدود multinomial) فإنه فى هذه الحالة يستخدم المفكوك $(p+q+r+\cdots)^n$ بدلاً من $(p+q)^n$ كما فى حالة توزيع "ذو الحدين". ويكون تقدير المتوسط، والتباين ... الخ، من تقديرات المعالم الإحصائية، والتى تلزم لتحديد ما إذا كانت هناك فروق معنوية للانحرافات عن التكرارات المتوقعة expected frequencies أكثر تعقيداً، وعلى ذلك فإنه يفضل استخدام اختبارات المعنوية المعتمدة على توزيع مربع كاى فى مثل هذه البيانات غير المستمرة.

٧-٢ توزيع مربع كاى Chi-Square distribution

إذا كان X متغيراً عشوائياً يتوزع طبيعياً بمتوسط μ وتباين σ^2 بحيث إن σ^2 أكبر من الصفر فإن $Z=(X-\mu)/\sigma$ تتبع توزيعاً طبيعياً متوسطه الصفر وتباينه يساوى الواحد الصحيح أى أن $Z \sim N(0,1)$ و $Z^2=(X-\mu)^2/\sigma^2$ تتوزع طبقاً لتوزيع مربع كاى بدرجة حرية واحدة أى أن:

$$Z^2 \sim \chi^2 \text{ , df} = 1$$

ومعنى ذلك أنه إذا أخذت مشاهدة كانحراف من متوسط العشيرة مقسومة على الانحراف المعيارى للعشيرة لينتج ما يسمى بالانحراف الطبيعى القياسى standard normal deviate فإن مربع تلك الكمية $(X-\mu)^2/\sigma^2$ يتوزع حسب توزيع مربع كاى بدرجة حرية واحدة.

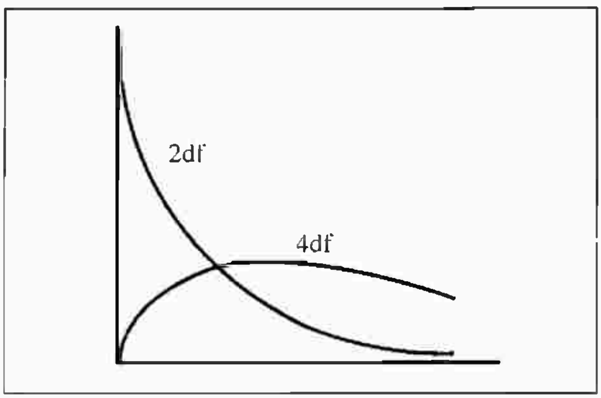
وإذا كان هناك متغير Y يتبع توزيع مربع كاى بدرجات حرية m، ومتغير آخر Z يتبع توزيع مربع كاى أيضا بدرجات حرية n فإن مجموع المتغيرين $Y+Z=W$ يتبع توزيع مربع كاى بدرجات حرية مقدارها $m+n$ على أن يكون المتغيران مستقلين.

وعلى ذلك إذا كانت $X_1, X_2, \cdots, X_n$ تمثل عينة عشوائية حجمها n مأخوذة من عشيرة تتوزع طبيعياً بمتوسط μ وتباين σ^2 فإن المتغير $Y=\sum\frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2}$ له توزيع مربع كاى بدرجات حرية مقدارها n.

وحيث إن $\sigma^2 = \frac{\Sigma (X-\mu)^2}{df}$ كما سبق ذكره فى الباب الثالث فإن $df = \frac{\Sigma (X-\mu)^2}{\sigma^2}$ والتى تساوى أيضاً $\chi^2_{(n)}$ المتوقعة أى أن $df = \chi^2_{(n)}$

ويتضح أن هذا التوزيع له علاقة وثيقة جداً وتامة بدرجات الحرية، ومعلم هذا parameter التوزيع هو درجات الحرية حيث متوسط توزيع مربع كاى = n والتباين لهذا التوزيع ضعف متوسطة أى 2n، وقيمة χ^2 تتراوح بين الصفر وما لا نهاية (∞) فهى دائما موجبة حيث تحتوى على مجموع مربعات.

ويلاحظ أنه لكل عدد من درجات الحرية يوجد توزيع لمربع كاى بعضها مبين فى شكل ٧-١.



شكل ٧-١ توزيع مربع كاى لدرجات حرية مختلفة 2 و 4

ويلاحظ من شكل ٧-١ أن توزيع مربع كاى يقترب من التماثل كلما زادت درجات الحرية وجدول ٦ ملحق أ يبين قيم χ^2 لعدة توليفات من الاحتمالات ودرجات الحرية.

وحيث إن تباين العشيرة يكون عادة غير معروف، ويستخدم تقدير له بالنقطة هو $S^2 = \frac{\Sigma (X-\overline{X})^2}{n-1}$ فإن $\Sigma(X-\overline{X})^2 = (n-1)\, S^2$ حيث $\Sigma(X-\overline{X})^2$ هى مجموع مربع الانحرافات عن المتوسط، والتى تتكون من $(n-1)$ من الانحرافات المستقلة متوسطاتها تساوى الصفر، وبقسمة هذه الانحرافات على σ حتى تكون تبايناتها مساوية للوحدة فإن $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ تتبع توزيع χ^2 وتستخدم فى حساب فترة الثقة لتباين

العشيرة σ^2. وتوزيع χ^2 بدرجة حرية واحدة له علاقة مباشرة بالتوزيع الطبيعى فقيمة χ^2 بدرجة حرية واحدة ومستوى معنوية 5% هى 3.24 (جدول ٦ ملحق أ). أى أن $\Pr(\chi^2 \geq 3.84) = 0.05$.

ومن تعريف χ^2 أنها عبارة عن مربع انحراف متغير عشوائى يتوزع طبيعياً بمتوسط صفر وتباين يساوى الواحد الصحيح أى أن $Z = \sqrt{3.84} = 1.96$، واحتمال أن Z أكبر من أو تساوى 1.96 (جدول ٣ ملحق أ) عبارة عن

$$0.05 - 0.4750 = 0.025 = (0.5)(0.05)$$

(حيث إن توزيع χ^2 فى الجهة الموجبة فقط بينما توزيع Z من الجهتين). وعلى ذلك فإن جدول التوزيع الطبيعى القياسى مركز فى سطر واحد فى جدول χ^2 لدرجة حرية واحدة، والتوزيع الطبيعى القياسى يمتد من $-\infty$ إلى $+\infty$ أما توزيع χ^2 فهو مربع Z، ولذا فإنه يمتد من صفر إلى ∞.

٧-٣ حساب χ^2 من البيانات العددية

تستخدم المعادلة التالية لإيجاد قيمة χ^2 فى حالة البيانات العدية count data

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \qquad (٧-١)$$

حيث

O_i تمثل العدد المشاهد observed number للفئة i،

E_i تمثل العدد المتوقع expected number للفئة i،

k تمثل عدد الفئات classes

والتى اشتقت فى حالة توزيع "ذو الحدين" كما يلى:

إذا ما أخذ عدد الولادات فى أحد المستشفيات، فإنه من السهل معرفة عدد المواليد الذكور X من عدد المواليد الكلى n، والمتوقع أن يكون np بتباين قدره npq (كما ذكر فى الباب الرابع)، وإذا ما رمز للعدد المشاهد بالرمز O والعدد المتوقع بالرمز E فإن

$$\chi^2 = \frac{(X-\mu)^2}{\sigma^2} = \frac{(X-np)^2}{npq} = \frac{(O-E)^2}{np(1-p)} = \frac{(O-E)^2}{np} + \frac{(O-E)^2}{n(1-p)}$$

حيث إن $p + q = 1$،

و

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{1-p} = \frac{(1-p)+p}{p\,(1-p)} = \frac{1}{p\,(1-p)}$$

وبالتالى فإن:

$$\chi^2 = \frac{(O_A - E_A)^2}{E_A} + \frac{(O_B - E_B)^2}{E_B}$$

وحيث إن E_A و E_B هما العدد المتوقع فى الفئتين فإن $\chi^2 = \Sigma \frac{(0-E)^2}{E}$ وهى الصورة المستخدمة عادة فى الحسابات.

ودرجات الحرية مقدارها $(k-1)$، وتفقد درجة حرية من عدد الفئات k حيث

$$E_i = np_i$$

$$\sum_i E_i = \sum_i np_i = n\sum_i p_i = n$$

حيث إن $\sum P_i = 1$

فإذا كان $k = 2$ فيكون هناك حرية اختيار فئة واحدة أما الفئة الأخرى فهى غير مستقلة إذا علم أن n تمثل مجموع الفئتين.

مثال ٧-١

فى عينة من 1000 كتكوت وجد 470 كتكوتاً ذكراً، احسب قيمة χ^2 إذا كانت النسبة الجنسية 1:1.

حيث إن عدد الذكور المشاهد 470

فإن عدد الإناث المشاهد $530 = 470 - 1000$ وبالتالى فإن:

	العدد المشاهد O_i	العدد المتوقع E_i	$(O_i - E_i)$	$(O_i - E_i)^2$
ذكور	470	$(1000)(.05) = 500$	$470 - 500 = -30$	900
إناث	530	500	$530 - 500 = 50$	900
المجموع	1000	1000	0	

وبالتالى فإن

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)}{E_i} = \frac{900}{500} + \frac{900}{500} = 3.6$$

بدرجة حرية واحدة.

٧-٤ العلاقة بين χ^2 و t

كما سيأتى فيما بعد (الباب الثامن) فإن اختبار t يمثل النسبة بين الانحراف عن المتوسط إلى الانحراف المعيارى للفرق، ومن الفصل السابق فإنه إذا كان هناك فئتان A و B والعدد المشاهد فى كل x_1 و x_2 والعدد المتوقع np و nq على التوالى فإن

$$\chi^2 = \frac{(x_1 - np)^2}{np} + \frac{(x_2 - nq)^2}{nq} = \frac{(x_1 - np)^2}{npq}$$

حيث إن $p + q = 1$ وإن $(x_2 - nq)^2 = (x_1 - np)^2$

وبأخذ الجذر التربيعى للطرفين فإن

$$\sqrt{\chi^2} = \sqrt{\frac{(x_1 - np)^2}{npq}} = \frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}$$

وهى عبارة عن الفرق مقسوما على الانحراف المعيارى للفرق أى أن:

$$\sqrt{\chi^2} = t$$

وبالتالى فإن

$$t^2 = \chi^2 \qquad (٧-٢)$$

أى أن χ^2 تساوى مربع t.

مثال ٧-٢

إذا كان عدد النباتات الطويلة 150، والقصيرة 30 فهل الانحرافات عن النسبة المتوقعة 3:1 معنوية ؟

طبقاً لتوزيع "ذو الحدين" فإن:

العدد المتوقع للنباتات الطويلة: $np = \frac{3}{4}(150+30) = 135$

الانحراف المعيارى: $\sqrt{npq} = \sqrt{180 \text{ x } \frac{3}{4} \text{ x } \frac{1}{4}} = 5.81$

$$t = \frac{150-135}{5.81} = \frac{15}{5.81} = 2.582^{*} > 1.96$$

حيث 1.96 هى قيمة t الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجات حرية ∞ (جدول ٤ ملحق أ). استخدمت t مجازاً بدلاً من التوزيع الطبيعى حيث إن $t = Z$ عند درجات حرية ∞.

أما إذا استخدمت χ^2 فإن:

الفئة	O_i	E_i	$(O_i - E_i)$	$(O_i - E_i)^2$
النباتات الطويلة	150	135	15	225
النباتات القصيرة	30	45	-15	225
إجمالى	180	180	zero	450

وقيمة $\chi^2 = \frac{225}{135} + \frac{225}{45} = 6.667^{*} > 3.84$ حيث 3.84 هى قيمة χ^2 عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية واحدة (جدول ٦ ملحق أ). لاحظ أن $t^2 = \chi^2$ أى أن $(2.582)^2 = 6.667$.

٧-٥ استخدامات χ^2 على البيانات المستمرة

من أهم استخدامات χ^2 على البيانات المستمرة:

١- يستخدم χ^2 فى اختبار تجانس معاملات الارتباط لعدد من العينات كما سيأتى ذكره فى الباب العاشر.

٢- يستخدم أيضاً فى حساب فترة أو حدود ثقة confidence interval لتباين العشيرة كما ذكر فى الباب السادس وهى طريقة دقيقة تماماً.

٣- فى اختبار تجانس التباين كما سيأتى ذكره فى الباب الثانى عشر.

٤- فى مدى ملائمة توزيع ما للتوزيعات المستمرة Goodness of fit for continuous distribution لمعرفة ما إذا كانت مجموعة من البيانات تتوزع حسب توزيع معين، وليكن التوزيع الطبيعى، وللمقارنة بين التوزيعين فإن التكرارات المتوقعة يلزم حسابها، ولحساب التكرارات المتوقعة فإنه يلزم إيجاد احتمال الحصول على كل فترة والتى يمكن الحصول عليها من جدول التوزيع الطبيعى القياسى (جدول ٣ ملحق أ). أما التباين والمتوسط فيقدران من البيانات المتاحة، ويعتبران تقديرين غير متحيزين (μ, σ^2) ويتضح ذلك من المثال التالى.

مثال ٧-٣

هل البيانات التى فى مثال ٣-١٩ تتفق والتوزيع الطبيعى ؟

حدود الفئات	التكرارات (العدد المشاهد) O_i	الاحتمال	العدد المتوقع E_i	$(O_i - E_i)$	$(O_i - E_i)^2$
أقل من 20.5	6	0.0154	14.81	-8.81	77.62
20.5-23.5	20	0.0581	55.89	-35.89	1288.09
23.5-26.5	187	0.1531	147.28	39.72	1577.68
26.5-29.5	340	0.2574	247.62	92.38	8534.06
29.5-32.5	181	0.2646	254.55	-73.55	5409.60
32.5-35.5	129	0.1676	161.23	-32.23	1038.77
35.5-38.5	65	0.0655	63.01	1.99	3.96
أكثر من 38.5	34	0.0183	17.60	16.40	268.96
المجموع	962	1.0000	961.99	0.01	

ويجب ألا يختلف مجموع الاحتمالات عن الواحد الصحيح، وأيضاً ألا يختلف مجموع الأعداد المتوقعة عن مجموع الأعداد المشاهدة، وألا يختلف مجموع

الانحرافات $\sum(O_i - E_i)$ عن الصفر إلا فى حدود خطأ التقريب. ولقد استخدم المتوسط $\overline{X} = 29.66$ كتقدير لمتوسط العشيرة. واستخدم $S^2 = (4.236)^2$ كتقدير لتباين العشيرة أى أن $S = 4.236$ مع ملاحظة أنه لحساب الاحتمال للخلية الأولى اعتبر أن حدودها من $-\infty$ إلى أقل من 20.5، أما احتمال القيمة الأخيرة، فتم حسابه على أساس حدود الفئة أكبر من 38.5 وبالتالى:

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{77.62}{14.81} + \frac{1288.09}{55.89} + \cdots + \frac{268.96}{17.6} = 116.5^{**}$$

درجات الحرية= عدد الفئات – 1 – عدد الثوابت المقدرة أى $5 = 2 - 1 - 8$

χ^2 الجدولية بمستوى معنوية 5% ودرجات حرية 5 = 11.07

χ^2 الجدولية بمستوى معنوية 1% ودرجات حرية 5 = 15.09

وحيث إن χ^2 المحسوبة أكبر من χ^2 الجدولية عند مستوى معنوية 1% فإن البيانات لا تتفق والتوزيع الطبيعى بخطأ من النوع الأول مقداره 1%.

ويجب ملاحظة أنه إذا كان العدد المتوقع للفئات الأولى قليلاً فتدمج فى فئة واحدة، وكذلك الفئات الثلاث أو الأربع الأخيرة فتدمج فى فئة واحدة أخيرة بحيث لا يقل عدد التكرارات المتوقعة فى الفئة عن 10–5 كحد أدنى، وبالتالى ففى المثال السابق تم دمج الفئتين الأخيرتين فى فئة واحدة أخيرة حيث إن العدد المتوقع للفئة الأخيرة قبل الدمج كان 2.5 (ويرجع السبب فى ألا يقل العدد عن 5، ويفضل ألا يقل عن 10، إلى أن توزيع χ^2 يعتمد أساساً على التوزيع الطبيعى ولكن χ^2 مشتق هنا من توزيع "ذو الحدين" والذى يقترب من التوزيع الطبيعى كلما زادت n).

٧–٦ استخدامات χ^2 على البيانات غير المستمرة

قد يستخدم أيضاً χ^2 فى حالة البيانات العددية enumeration data وهى تلك البيانات التى تحتوى على أعداد تقع فى فئات معرفة جيداً well-defined classes كعدد الذكور، وعدد الإناث فى مدينة ما مثلاً.

وعندما يستخدم توزيع χ^2 فى مثل تلك البيانات فإنه يكون عادة مرتبط باختبار جودة الملائمة goodness of fit، وتستخدم أيضاً المعادلة (٧–١)، وفيها العدد المشاهد يشير إلى العدد الملاحظ فى الخلية أما العدد المتوقع فيشير إلى العدد المتوقع طبقاً لفرض العدم، وهو القيمة النظرية، ومجموع الانحرافات $\sum(O_i - E_i)$ تساوى الصفر فى حدود خطأ التقريب أما درجات الحرية فتختلف حسب الحالة.

مثال ٧-٤

فى المثال ٧-١ اختبر الفرض القائل بأن النسبة الجنسية 1:1

فرض العدم:

الذكور : الإناث = 1:1

الفرض البديل:

الذكور : الإناث ≠ 1:1

وحيث إن $\chi^2 = 3.6$ ودرجات الحرية $2 - 1 = 1$

وقيمة χ^2 الجدولية بدرجة حرية واحدة و 5% مستوى معنوية = 3.84 وهى أكبر من قيمة χ^2 المحسوبة، وبالتالى لا يمكن رفض فرض العدم، وبالتالى فإن النسبة الجنسية هى 1:1 والانحراف عنها إنما يرجع إلى الأخطاء العشوائية أو الصدفة.

ويمكن الحصول على χ^2 بطريقة مباشرة دون الحاجة إلى حساب العدد المتوقع المقابل لكل عدد مشاهد فى حالة قسمين اثنين حيث:

$$\chi^2 = \frac{(r_2 n_1 - r_1 n_2)^2}{r_1 r_2 \, (n_1 + n_2)}$$

وذلك إذا كان هناك فئتين A و B والعدد المشاهد n_1، n_2 على التوالى، ونسبة B : A هى $r_2 : r_1$

وحيث إن χ^2 توزيع مستمر فإنه يتم التصحيح للاستمرارية correction for continuity حتى يكون أكثر ملائمة، وهذا يتيح الحصول على احتمالات أكثر دقة من جداول χ^2 وعلى ذلك فإن Yates اقترح تصحيحاً للاستمرارية يطبق فى حالة ما إذا كانت هناك درجة حرية واحدة، وهذا التصحيح يجعل التوزيع الفعلى للبيانات المتقطعة قريباً جداً من توزيع χ^2 والذى أساسه انحرافات معتدلة طبيعية normal deviates، ويكون التقريب للقيم المطلقة للانحرافات حيث يخفض بمقدار نصف أى أن:

$$\text{Adjusted } \chi^2 = \Sigma \frac{\left(|O_i - E_i| - \frac{1}{2}\right)^2}{E_i} \qquad (٧-٣)$$

وهذا التعديل يؤدى إلى خفض قيمة χ^2 المحسوبة، وعلى ذلك ففى اختبارات الفروض الإحصائية يكون لهذا التعديل فائدة عندما تكون χ^2 الغير معدلة كبيرة عن χ^2 الجدولية عند مستوى المعنوية المرغوب.

إذا كان عدد الخلايا أكثر من اثنين يتبع أيضاً نفس المفهوم فى إيجاد قيمة χ^2 وتكون درجات الحرية هى عدد الفئات أى k مطروحاً منها واحد.

مثال ٧-٥

من تزاوج AaBb مع aabb كانت الأعداد المشاهدة للنسل الناتج كما يلى:

التركيب الوراثى	aabb	aaBb	Aabb	AaBb
العدد الملاحظ	65	30	25	70

فإذا كانت النسبة المتوقعة للتراكيب الوراثية المختلفة هى 1:1:1:1 فهل تختلف الأعداد المشاهدة عن الأعداد المتوقعة ؟ اختبر ذلك إحصائياً.

التركيب الوراثى	**العدد الملاحظ**	**العدد المتوقع E_i**	$(O_i - E_i)$	$(O_i - E_i)^2$
AaBb	70	47.5	22.5	506.25
Aabb	25	47.5	-22.5	506.25
aaBb	30	47.5	-17.5	306.25
aabb	65	47.5	17.5	306.25
المجموع	**190**	**190**	**zero**	

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} = \frac{506.25}{47.5} + \frac{506.25}{47.5} + \frac{306.25}{47.5} + \frac{306.25}{47.5} = 34.2^{**}$$

وحيث إن فرض العدم هو أن نسب التراكيب الوراثية الأربعة 1:1:1:1 ودرجات الحرية $3 = 1 - 4$ و χ^2 من الجدول عند 1% ودرجات حرية 3 تساوى 11.3 وبالتالى يرفض فرض العدم، أى أن التراكيب الوراثية لا تتفق والنسبة 1:1:1:1 .

٧-٦-١ اختبار التجانس لعينات من خليتين Test of homogeneity

كثير من البيانات العددية يختص بوجود أو عدم وجود صفة أو ملاحظة معينة وبالتالى فإن الجداول التى بها الأعداد الملاحظة فى خليتين هى الأكثر عرضا

للبيانات، وقد يكون هناك عدة عينات بنفس القدر من المعلومات، وقد يكون من المرغوب فيه معرفة ما إذا كانت هذه العينات متجانسة حتى إذا كان الأمر كذلك فإنه يمكن تجميعهم، والحصول على تقدير موحد لنسبة العشيرة كتقدير النسبة الجنسية فى مفرخة باستخدام عدة عينات، وقد يكون من المرغوب فيه اختبار نسبة عامة common ratio ولتكن 1:3 مثلاً.

مثال: ٧-٦

إذا كانت البيانات التالية تمثل عدد بذور البسلة الملساء والمجعدة الناتجة فى الجيل الأول من تزاوج فردين خليطين.

	العائلة						
	١	٢	٣	٤	٥	٦	المجموع
عدد البذور الملساء	240	38	264	125	95	44	**804**
عدد البذور المجعدة	70	20	72	35	35	20	**252**

اختبر الفرض القائل بأن نسبة البذور الملساء إلى المجعدة هى 1:3 .

الجدول التالى يبين العدد المشاهد والمتوقع لكل عائلة والفروق بينهما لكل من البذور الملساء والمجعدة

العائلة	البذور الملساء			البذور المجعده		
	العدد المشاهد	العدد المتوقع	الفرق	العدد المشاهد	العدد المتوقع	الفرق
١	240	232.5	7.5	70	77.5	-7.5
٢	38	43.5	-5.5	20	14.5	5.5
٣	264	252.0	12.0	72	84.0	-12.0
٤	125	120.0	5.0	35	40.0	-5.0
٥	95	97.5	-2.5	35	32.5	2.5
٦	44	48.0	-4.0	20	16.0	4.0
	806	**793.5**	**12.5**	**252**	**264.5**	**-12.5**

وتحسب χ^2 الكلية $(\text{Total}\,\chi^2)$ كالتالى:

$$\text{Total}\,\chi^2 = \frac{(7.5)^2}{232.5} + \frac{(-7.5)^2}{77.5} + \cdots + \frac{(-4)^2}{48} + \frac{(4)^2}{16} = 8.458$$

بدرجات حرية $6 = (6)(2-1)$

وإذا اعتبر أن كل البذور الملساء معاً، وكل البذور المجعدة كوحدة فإن χ^2 المجمعة ($\text{pooled}\,\chi^2$) يمكن الحصول عليها كالتالى:

$$\text{pooled}\,\chi^2 = \frac{(12.5)^2}{793.5} + \frac{(-12.5)^2}{264.5} = 0.7876$$

بدرجات حرية $1 = 2 - 1$ وهى غير معنوية.

وبطرح χ^2 المجمعة من χ^2 الكلية يمكن الحصول على χ^2 لعدم التجانس heterogeneity أى $8.458 - 0.7876 = 7.67$ بدرجات حرية $5 = 6 - 1$ وهى غير معنوية حيث إن χ^2 الجدولية عند درجات حرية 5 ومستوى معنوية $5\% = 11.07$. ويتضح أن العينات متجانسة وتنطبق النسبة 1:3 عليها.

ملحوظة: إذا كانت χ^2 لعدم التجانس معنوية فإنه من المنطقى الرجوع إلى χ^2 لكل عينة منفردة $\text{individual}\,\chi^2$.

٧-٦-٢ اختبار التداخل باستخدام مربع كاى χ^2 Interaction

قد تقسم البيانات العددية تبعاً لعدة متغيرات فمثلا قد يكون الفرد ذكراً أو أنثى، وقد يكون مدخناً أو غير مدخن، وقد يكون مثقفاً أو غير مثقف وهكذا، أى يوجد متغيران فى كل تقسيم فى كل حالة. وتوضع البيانات العددية المقسمة تبعاً لأكثر من متغير فى جدول يسمى contingency table فإذا كان هناك متغيران، ويراد اختبار استقلالية المتغيرين عن بعضهما، أى مثلاً معرفة ما إذا كانت نسبة المتعلمين إلى غير المتعلمين فى الذكور هى نفس نسبة المتعلمات إلى غير المتعلمات فى الإناث (مع وجود بعض الأخطاء العشوائية). وإذا كان لا يوجد استقلال، يطلق على الاختبار، اختبار χ^2 للتداخل وتكون البيانات على هيئة جدول عدد صفوفه r وعدد أعمدته c أى r x c.

فإذا كانت $r = 3$ و $c = 4$ فإن الجدول سيكون 3x4 أى أنه يوجد متغيران، بالمتغير الأول 3 أقسام والثانى 4 أقسام، ومن المرغوب فيه اختبار استقلالية المتغيرين. فإذا كان المتغير A له 3 أقسام A_1, A_2, A_3 ومتغير آخر B أقسامه B_1, B_2, B_3, B_4 فإن درجات الحرية الكلية $(3)(4) - 1 = 11$. وهذا يتضح من الجدول التالى:

	المتغير الثانى B				المتغير الأول
	B_4	B_3	B_2	B_1	A
x	.	x	x	x	A_1
x	.	x	x	x	A_2
.	.	.	.	.	A_3
	.	x	x	x	

وقد فقدت درجة حرية نتيجة أن المجموع الكلى لابد وأن يساوى العدد الكلى للأفراد، وأيضاً أخذ المجموع الهامشى لأعداد كل من B_1, B_2, B_3, B_4 فإنه يمكن تحديد 3 منها اختيارياً، ولهذا أيضاً 3 درجات حرية، وإذا أخذ المجموع الهامشى للأعداد فى كل A_1, A_2, A_3 فإنه يمكن اختيار 2 منها أى درجات الحرية هنا تساوى 2، وبالتالى فإنه بالنسبة للجدول ككل فإنه يمكن اختيار أى فئتين داخل الصفوف، وأى 3 فئات داخل الأعمدة لتنتج درجات الحرية التى مجموعها 6 أى 3x2 وعلى ذلك فإن درجات الحرية للتداخل = (عدد الصفوف – 1) (عدد الأعمدة – 1) أى 3x2 بمعنى أن:

$$df = (r-1)(c-1) \qquad (٧-٤)$$

وهذا ناتج من:

درجات الحرية للتداخل = (درجات الحرية الكلية) – (درجات الحرية للصفوف) – (درجات الحرية للأعمدة)

بمعنى أن:

$$\begin{aligned} df &= (rc-1)-(r-1)-(c-1) \\ &= rc-1-r+1-c+1 \\ &= rc-r-c-1 \\ &= (r-1)(c-1) \end{aligned}$$

ويجب ملاحظة أن اختبار الاستقلالية اختبار متماثل، فإذا كان هناك متعلمون وغير متعلمين فى العامل الأول وذكور وإناث فى العامل الثانى وهو الجنس فإن نسبة الذكور إلى الإناث فى المتعلمين إلى نسبة الذكور إلى الإناث فى غير المتعلمين تعطى نفس النتيجة كما لو كان فرض العدم هو اختبار ما إذا كانت نسبة المتعلمين إلى غير المتعلمين فى الذكور تساوى نسبة المتعلمين إلى غير المتعلمين فى الإناث وتستخدم الكمية التالية أيضاً:

$$\sum_{i}\frac{(0_i - E_i)^2}{E_i} = \sum_{i.j}\frac{(n_{ij} - E_{ij})^2}{E_{ij}} \qquad (٥-٧)$$

والتى تتوزع تقريباً كتوزيع χ^2 بدرجات حرية = (عدد الصفوف − 1) (عدد الأعمدة − 1). وتحسب القيم المتوقعة E_{ij} لكل قيمة مشاهدة n_{ij} بافتراض أن فرض العدم صحيح وهو استقلالية المتغيرين كما يلى:

$$E_{ij} = \frac{n_{i.}\, n_{.j}}{n_{..}} = \frac{\text{(مجموع الصف) (مجموع العامود)}}{\text{المجموع الكلي}}$$

حيث $n_{i.}$ مجموع الصف الذى تقع فيه الخلية و $n_{.j}$ مجموع العمود الذى تقع فيه أيضاً الخلية و $n_{..}$ يمثل العدد الكلى.

أما إذا كانت هناك نسب متوقعة مسبقة فيحسب على أساسها العدد المتوقع لكل خلية.

مثال ٧-٧

فى المثال ٧-٦ هل نسبة البذور الملساء إلى المجعدة هو نفسه بفرض عدم وجود نسبة متوقعة عن طريق حساب الأعداد المتوقعة فى كل خلية أولاً.

العائلة	ملساء		مجعده		المجموع
	مشاهد	متوقع	مشاهد	متوقع	
١	240	236.16	70	73.84	310
٢	38	44.19	20	13.81	58
٣	264	255.97	72	80.03	336
٤	125	121.89	35	38.11	160
٥	95	99.03	35	30.96	130
٦	44	48.76	20	15.24	64
المجموع	**806**		**252**		**1058**

حيث

العدد المشاهد فى العائلة الأولى وبذوره ملساء = 240

والعدد المتوقع المقابل له $236.16 = \frac{806 \text{ x } 310}{1058}$ ... وهكذا

فرض العدم:

البذور الملساء : المجعدة فى العائلة الأولى= البذور الملساء : المجعدة فى العائلة الثانية ... وهكذا. وقيمة χ^2 بدرجات حرية $5 = (2-1)(6-1)$ تكون

$$\chi^2 = \frac{(240-236.16)^2}{236.16} + \frac{(70-73.84)^2}{73.84} + \cdots + \frac{(20-15.24)^2}{15.24} = 7.795$$

وهى غير معنوية وبالتالى لا يرفض فرض العدم، وبالتالى ليس هناك سبب للاعتقاد بأن النسبة من عائلة إلى أخرى تختلف باختلاف العائلة، أى أن كلاً من العائلة وحالة البذور مستقلان.

وإذا كانت χ^2 معنوية فإن الطريقة الشائعة لمعرفة منبع المعنوية هو حذف الصف (الصفوف) أو العمود (الأعمدة) التى يعتقد أنها السبب فى المعنوية (أى التى تكون فيها الأعداد شاذة نتيجة لسبب ما مثل الوفيات أو جين مميت ... الخ) ثم يجرى الاختبار مرة أخرى ... وهكذا.

توجد حالات خاصة من الجدول الذى عدد صفوفه r وعدد أعمدته c منها: عندما يكون عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة (c) أى جدول c x c فإذا كانت الأفراد تقسم تبعاً لخاصية A ولها (A_1, A_2) و B ولها (B_1, B_2) وكانت الأعداد المشاهدة كما يلى:

الخاصية B	الخاصية A: A_1	A_2	المجموع
B_1	n_{11}	n_{21}	$n_{.1}$
B_2	n_{12}	n_{22}	$n_{.2}$
المجموع	$n_{1.}$	$n_{2.}$	$n_{..}$

فإن درجات الحرية $1 = (2-1)(2-1)$ و χ^2 فى هذه الحالة الخاصة عبارة عن

$$\chi^2 = \frac{[(n_{11})(n_{22}) - (n_{12})(n_{21})]^2 (n_{..})}{(n_{1.})(n_{2.})(n_{.1})(n_{.2})} \qquad (٧-٦)$$

وهى معادلة شائعة الاستعمال وتختصر كثيراً من الوقت.

وفى حالة جدول $2 x 2$ فإنه يوجد درجة حرية واحدة؛ ولذا فإن χ^2 المعدلة يمكن الحصول عليها من المعادلة التالية

$$\text{Adjusted}\,\chi^2 = \frac{[|(n_{11})(n_{22}) - (n_{12})(n_{21})| - n_{..}/2]^2 (n_{..})}{(n_{1.})(n_{2.})(n_{.1})(n_{.2})} \qquad (٧-٧)$$

ملاحظة هامة:

χ^2 فى جميع الحالات يجب أن تحسب على أساس الأعداد الفعلية actual numbers ولا تحسب مطلقاً على أساس نسب مئوية ... الخ.

هذا وقد استحدثت طرق لتحليل χ^2 بشكل يماثل تحليل التباين، أى أنه توجد عدة مصادر للاختلافات وتقسم χ^2 الكلية طبقاً لهذه المصادر آنياً. والطرق المتاحة الآن لتحليل linear log models تشترط تساوى الأعداد واتزان تركيب البيانات وليس فى هذا المؤلف مجال للخوض فيها.

صندوق ٧-١

تستخدم χ^2 فى تحليل البيانات واختبار النظريات الفرضية الخاصة بالبيانات العددية (أى العدية أى التى تُعد).

لإجراء اختبارات χ^2 لابد أن يكون هناك أعداد فعلية ولا يجوز إجراء هذا الاختبار على نسب أو نسب مئوية.

بجانب وجود الأعداد المشاهدة يجب أن يكون هناك أعداد متوقعة تحسب طبقاً لفرض العدم كنسبة 3:1 أو 1:1 أو توزيع الأعداد طبقاً للتوزيع الطبيعى مثلاً، إن لم يوجد مثل هذه الأعداد المتوقعة فهناك نوع واحد من χ^2 يمكن حسابه وهو الذى يختبر الفرض أن نسب الأعداد فى المستويات المختلفة لمتغير ما هى نسب واحدة.

يستخدم توزيع χ^2 في اختبار الفروض الخاصة بالتباين وحساب حدود ثقته.

تمارين الباب السابع

٧-١ فئتان A و B والعدد المشاهد n_1 و n_2 على الترتيب. أثبت أن:

(أ) $\chi^2 = \dfrac{(n_2 - r n_1)^2}{r(n_1 + n_2)}$ إذا كانت النسبة المتوقعة للفئات A : B هى r : 1

(ب) $\chi^2 = \dfrac{(s n_1 - r n_2)^2}{rs(n_1 + n_2)}$ إذا كانت النسبة المتوقعة هى s : r

(ج) $\chi^2 = \dfrac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)}$ إذا كانت النسبة المتوقعة هى 1 : 1

٧-٢ إذا توافرت البيانات التالية فى جدول 2 x 2 والتى تمثل الأعداد المشاهدة

	الخاصية الأولى		
الخاصية الثانية	A_1	A_2	المجموع
B_1	n_{11}	n_{21}	$n_{.1}$
B_2	n_{12}	n_{22}	$n_{.2}$
المجموع	$n_{1.}$	$n_{2.}$	$n_{..}$

أثبت أن

$$\chi^2 = \frac{[(n_{11})(n_{22}) - (n_{12})(n_{21})]^2 (n_{..})}{(n_{1.})(n_{2.})(n_{.1})(n_{.2})}$$

٧-٣ فى قطيع كانت أعداد الذكور والإناث كالتالى:

العائلة	ذكور	إناث
١	50	50
٢	48	54
٣	21	20
٤	18	18
٥	40	40
٦	40	42
٧	8	8
٨	24	22

احسب:

١- χ^2 فى حالة غياب نسب فرضية

٢- χ^2 إذا كانت النسبة الجنسية 1 : 1 واختبر تجانس البيانات

٣- ناقش النتائج المتحصل عليها فى ١- ، ٢-

٧-٤ إذا كان عدد الذكور إلى الإناث فى كليتين جامعيتين A و B كالمبين فى الجدول التالى

	الكلية الجامعية	
	A	B
عدد الذكور	300	122
عدد الإناث	40	500

فهل نسبة الذكور إلى الإناث متساوية فى الكليتين ؟

٧-٥ A ، B طريقتان لحفظ السائل المنوى، لقحت 40 بقرة بواسطة السائل المنوى المحفوظ بالطريقة A فأخصبت 26 بقرة بينما لقحت 60 بقرة بالسائل المنوى المحفوظ بالطريقة الثانية فأخصبت 54 بقرة. هل هناك تأثير لطريقة الحفظ على الخصوبة؟ اختبر ذلك إحصائياً مع بيان الفروض المختبرة والبديلة.