الفصل العاشر

الارتباط الخطى البسيط

SIMPLE LINEAR CORRELATION

(١٠ - ١) الانحدار الخطى والارتباط الخطى :

في دراسة الانحدار الخطى لمتغير حقيقي صـ على متغير آخر سـ فرضنا أن العلاقة بينهما على الصورة $\mu_{ص/س} = \alpha + \beta$ سـ واستخرجنا من العينة أحسن تقديرين ا ، ب للبارامترين المجهولين α ، β في ضوء مبدأ المربعات الصغرى ، ومن ثم أوجدنا معادلة $\hat{ص} = ا + ب$ سـ تمكننا من التنبؤ بأحسن قيمة للمتغير صـ عند قيمة معطاة للمتغير سـ ، واستخدمنا تحليل التباين لتفسير الانحدار ، كما خرجنا ببعض الاستنتاجات الإحصائية في صورة اختبارات دلالة وفترات ثقة . وهذا كله يدخل تحت الموضوع المسمى **بتحليل الانحدار** . ويقترن بهذا الموضوع موضوع آخر يسمى **تحليل الارتباط** وهو يهتم بالبحث عن عدد نقيس به درجة الاعتماد المتبادل بين المتغيرين ودقة العلاقة المفروضة بينهما ، فإذا فرضنا أن العلاقة بين المتغيرين خطية يكون اهتمامنا منصباً على إيجاد عدد أو مقياس يعبر عن درجة جودة العلاقة الخطية في وصف العلاقة الحقيقية بين المتغيرين واختبار دلالة هذا المقياس .

(١٠ - ٢) افتراضات الارتباط الخطى البسيط :

تقتضي دراسة الارتباط بين متغيرين حقيقيين سـ ، صـ وضع افتراضات يختلف بعضها عن تلك التي وضعت لدراسة الانحدار . وسنضع هنا الافتراضات الآتية :

الافتراض الأول :

« كل من المتغيرين س ، ص هو متغير عشوائي » .

فمثلا قد يعبر المتغيران عن طول ذراع الإنسان وطول رجله ، أو عن عمر الزوج وعمر الزوجة عند الزواج ، أو عن وزن الدجاجة وعدد البيض الذى تنتجه أو عن درجة الرياضيات ودرجة الفيزياء لمجموعة من الطلاب ..

الافتراض الثانى :

« إن العلاقة بين المتغيرين س ، ص هى علاقة خطية » بمعنى أن متوسط قيم ص المناظرة لقيمة معينة س يأخذ الصورة

$$\mu_{ص|س} = \alpha + \beta\, س \qquad (١)$$

حيث α ، β بارامتران مجهولان .

الافتراض الثالث :

(أ) للمتغير س توزيع معتدل

(ب) عند أى قيمة ثابتة س يكون للمتغير ص توزيع معتدل متوسطه $\alpha + \beta$ س وتباينه عدد ثابت مجهول σ^2 لا يتوقف على س .

وقد يكون من المفيد أن نشير إلى أن هذه الافتراضات تكافىء رياضيا القول بأن التوزيع المشترك للمتغيرين س ، ص هو ذلك المسمى بالتوزيع المعتدل ذى المتغيرين

bivariate normal distribution

(١٠ - ٣) معامل الارتباط العزمى (بيرسون) :

PRODUCT MOMENT CORRELATION COEFFICENT (PEARSON 1900)

تعريف :

إذا كان س ، ص متغيرين عشوائيين ورمزنا بالرمز $\sigma_{س}$ للانحراف المعيارى

للمتغير سـ وبالرمز $\sigma_{ص}$ للانحراف المعيارى للمتغير صـ وبالرمز $\sigma_{سص}$ لتغاير (سـ ، صـ) فإن العدد ر المعرف بالصيغة :

$$ر = \frac{\sigma_{سص}}{\sigma_{س} . \sigma_{ص}}$$

يسمى بمعامل الارتباط العزمى بين سـ ، صـ .

يمكن رياضيا إثبات ما يلى :

(١) لا تزيد القيمة المطلقة للعدد ر عن الواحد الصحيح ، أى أن

$$١ - \leqslant ر \leqslant ١$$

(٢) إذا كان المتغيران سـ ، صـ مستقلين فإن ر = صفر غير أن العكس ليس من الضرورى أن يكون صحيحا ، أى أنه إذا كان ر = ٠ فليس من الضرورى أن يكون المتغيران مستقلين بل قد يكون بينهما علاقة **غير خطية** . أما إذا كان التوزيع المشترك للمتغيرين سـ ، صـ هو التوزيع المعتدل ذو المتغيرين فإن انعدام معامل الارتباط يستلزم استقلال المتغيرين .

(٣) تكون هناك علاقة دالية خطية بين المتغرين سـ ، صـ :

$$صـ = أ + ب سـ \quad و \quad سـ = أَ + بَ صـ$$

إذا وإذا فقط كان معامل الارتباط ر يساوى ١ أو - ١ .

وهذه الخاصة تعنى أنه إذا كان هناك علاقة خطية بين سـ ، صـ فإن ذلك ينعكس على قيمة ر فيجعلها مساوية للعدد ١ (ونقول حينئذ أن هناك ارتباط تام موجب بين المتغيرين) أو مساوية للعدد - ١ (ونقول حينئذ أن هناك ارتباط تام سالب) ، والعكس صحيح .

من هذا نرى أن معامل الارتباط العزمى ليس مقياسا للاعتماد المتبادل بين

المتغيرين بشكل عام وإنما هو مقياس لدرجة **الاعتماد الخطى** بينهما ، وينبغى أن نتذكر ذلك دائما .

ولتقدير قيمة ص من عينة عشوائية :

{(س$_1$ ، ص$_1$) ، (س$_2$ ، ص$_2$) ، ... ، (س$_ن$ ، ص$_ن$)} نستخدم المقياس الآتى الذى يتركب بكل بساطة من التقديرات غير المتحيزة للقيم التى يتركب منها ص :

$$ر = \frac{ع_{سص}}{ع_س \, ع_ص} \qquad (٢)$$

حيث $ع_{سص} = \frac{١}{ن - ١}$ مح (س − $\bar{س}$) (ص − $\bar{ص}$) تغاير (س ، ص)

$$= \frac{١٠}{ن - ١} [مح\ س\ ص - (مح\ س)(مح\ ص) / ن] \qquad (٣)$$

، $ع_س^2 = \frac{١}{ن - ١}$ مح (س − $\bar{س}$)^2 تباين (س)

$$= \frac{١}{ن - ١} [مح\ س^2 - (مح\ س)^2 / ن] \qquad (٤)$$

، $ع_ص^2$ = تباين (ص)

ملاحظة (١)

من السهل إثبات أن (٢) يمكن أن تكتب على الصورة

$$ر = \frac{ن\ مح\ س\ ص - (مح\ س)(مح\ ص)}{\sqrt{[ن\ مح\ س^2 - (مح\ س)^2]\ [ن\ مح\ ص^2 - (مح\ ص)^2]}} \qquad (٥)$$

وهذه الصيغة أفضل من الصيغة (٢) من الناحية الحسابية .

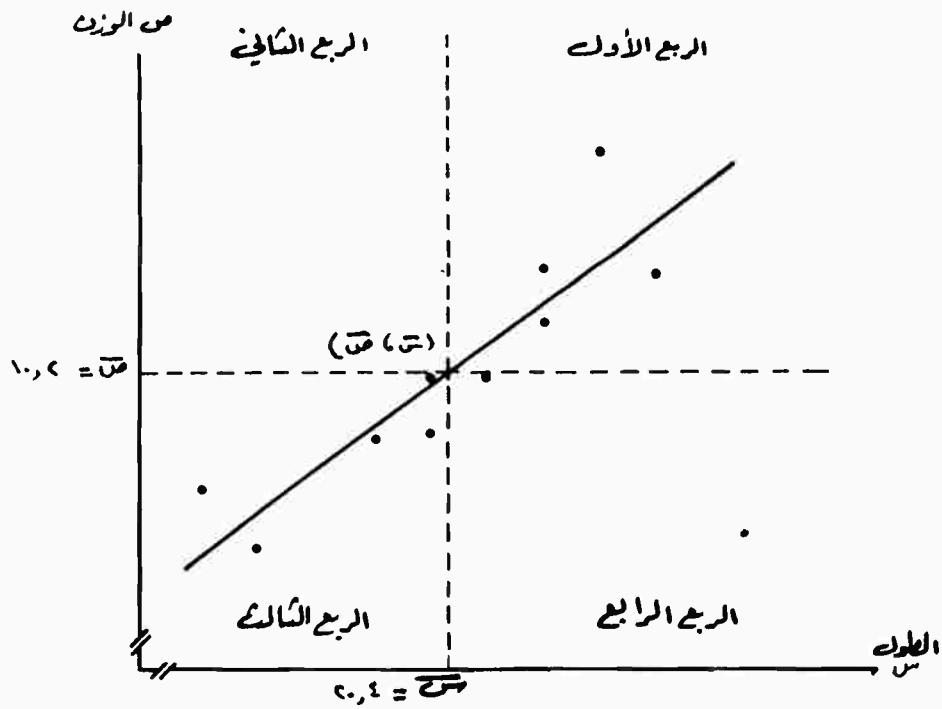
وقبل أن نوضح خصائص معامل الارتباط ، والحكمة في أخذه كمقياس للارتباط الخطى نتناول المثال الآتي :

مثال (١٠ - ١) :

أخذت عينة عشوائية من نوع معين من نبات البسلة وقيست أطوالها بالمليمتر (س) وأوزانها بالمليجرام (ص) فوجد ما يلى :

س :	١٧	٢٢	٢٠	٢٣	٢٤	٢٢	٢٠	١٩	٢١	١٦
ص :	٧	١٢	٩	١٤	١٢	١١	١٠	٩	١٠	٨

ارسم شكل الانتشار لاستيضاح خطية العلاقة بين المتغيرين ثم أوجد معامل الارتباط العزمى .



الشكل (١٠ - ١) شكل الانتشار لأطوال وأوزان عينة من ١٠ نباتات بسلة

يوحى شكل الانتشار بأن النقط تميل إلى أن تقع على خط مستقيم موجب الميل ، وهذا يشير مبدئيا إلى خطية العلاقة بين المتغيرين .

الجدول (١٠ - ١)

إيجاد معامل الارتباط العزمى من بيانات المثال (١٠ - ١)

س	ص	س ص	س^{٢}	ص^{٢}
١٧	٧	١١٩	٢٨٩	٤٩
٢٢	١٢	٢٦٤	٤٨٤	١٤٤
٢٠	٩	١٨٠	٤٠٠	٨١
٢٣	١٤	٣٢٢	٥٢٩	١٩٦
٢٤	١٢	٢٨٨	٥٧٦	١٤٤
٢٢	١١	٢٤٢	٤٨٤	١٢١
٢٠	١٠	٢٠٠	٤٠٠	١٠٠
١٩	٩	١٧١	٣٦١	٨١
٢١	١٠	٢١٠	٤٤١	١٠٠
١٦	٨	١٢٨	٢٥٦	٦٤
٢٠٤	١٠٢	٢١٢٤	٤٢٢٠	١٠٨٠

معامل الارتباط العزمى هو (بالتعويض في ٥)

$$ر = \frac{(١٠ \times ٢١٢٤) - (٢٠٤ \times ١٠٢)}{\sqrt{[١٠ \times ٤٢٢٠ - (٢٠٤)^{٢}][١٠ \times ١٠٨٠ - (١٠٢)^{٢}]}}$$

$$= \frac{٤٣٢}{\sqrt{٥٨٤ \times ٣٩٦}} = \frac{٤٣٢}{٤٨٠٫٨٩٩}$$

= ٠٫٨٩٨ تقريبا .

(١٠ - ٤) مميزات معامل الارتباط العزمى .

(أ) تركيب معامل الارتباط :

إن قدرة معامل الارتباط المعرف في (٢) على تقدير درجة العلاقة الخطية بين المتغيرين سـ ، صـ تتبين من الدراسة الرياضية للنموذج الذى وضعت له الافتراضات المذكورة آنفاً . غير أننا نستطيع أن نرى ذلك بطريقة بسيطة كالآتي .

إذا تأملنا نقط مستقيم موجب الميل ، لاحظنا أنه كلما كان الإحداثي السيني لنقطة كبيراً كلما كان إحداثيها الصادى كبيراً أيضاً . أما إذا كان المستقيم سالب الميل فإنه كلما زاد الإحداثي السيني كلما نقص الإحداثي الصادى . وعلى ذلك فإن قياس خطية العلاقة بين المتغيرين تتطلب مقياساً حساساً لدرجة اقتران القيم الكبيرة للمتغير سـ بالقيم الكبيرة للمتغير صـ إذا كانت العلاقة موجبة ، ولدرجة اقتران القيم الكبيرة للمتغير س بالقيم الصغيرة للمتغير ص إذا كانت العلاقة سالبة وهذه الحساسية نجدها في التغاير ع$_{س ص}$ ففي المثال (١٠ - ١) السابق ، إذا رسمنا الخط الرأسي س = $\bar{س}$ = ٢٠,٤ والخط الأفقي ص = $\bar{ص}$ = ١٠,٢ في شكل الانتشار لاحظنا أنه في أغلب الحالات بل في جميع الحالات ما عدا حالة واحدة هى حالة النقطة (٢١ ، ١٠) الواقعة في الربع الرابع ما يلى :

حين تكون س كبيرة (أكبر من الوسط الحسابى $\bar{س}$) فإن ص المناظرة تكون كبيرة أيضاً (أكبر من الوسط الحسابى $\bar{ص}$) وحين تكون س صغيرة (أصغر من $\bar{س}$) فإن ص المناظرة تكون صغيرة أيضاً (أصغر من $\bar{ص}$) . أى أن :

حين (س - $\bar{س}$) موجبة تكون (ص - $\bar{ص}$) موجبة وحين (س - $\bar{س}$) سالبة تكون (ص - $\bar{ص}$) سالبة وفي كلتا الحالتين تكون (س - $\bar{س}$) (ص - $\bar{ص}$) موجبة ويكون المجموع مـ (س - $\bar{س}$) (ص - $\bar{ص}$) موجب .

وبالتالى يكون التغاير $ع_{س ص}$ موجبا (إلا إذا كانت قيمة $(س - \bar{س})$ $(ص - \bar{ص})$ للنقطة (٢١ ، ١٠) كبيرة جداً وهذا لم يحدث) .

ويلاحظ أن قيمة $ع_{س ص}$ في هذا المثال كبيرة لأنها متوسط مجموع ٩ أعداد موجبة وعدد واحد سالب . ولو كانت النقطة التي في الربع الرابع قد وقعت في الربع الأول أو الثالث لزادت قيمة $ع_{س ص}$ وبالعكس لو كانت إحدى النقط الواقعة في الربعين الأول أو الثالث قد وقعت في الربع الثاني أو الرابع لنقصت قيمة $ع_{س ص}$

وعلى ذلك فإن التغاير يعكس أمرين هما : درجة جودة العلاقة الخطية واتجاه هذه العلاقة . ولهذا يرتكز معامل الارتباط $ر$ المعرف في (٢) على التغاير $ع_{س ص}$. هذا مع ملاحظة أن هذا المعامل يكون موجباً أو سالباً بحسب كون العلاقة الخطية موجبة أو سالبة .

غير أن قيمة التغاير تعتمد على حجم العينة $ن$ كما هو واضح من التعريف (٣) ، كما أنها تعتمد على وحدات القياس . ولكى يكون مقياس الارتباط عاماً ينبغى أن يكون مستقلا عن حجم العينة وعن وحدات القياس . ولذلك ينبغى تعديل التغاير ليحقق هذين الشرطين قبل أخذه كمقياس للارتباط ، وهذا ما يحققه قسمة التغاير $ع_{س ص}$ على حاصل ضرب الانحراف المعيارى $ع_س$ للمتغير $س$ والانحراف المعيارى $ع_ص$ للمتغير ص . وهذا الإجراء يكافىء إيجاد تغاير $س$ ، ص بعد وضع القيم في الصورة المعيارية $\frac{س - \bar{س}}{ع_س}$ ، $\frac{ص - \bar{ص}}{ع_ص}$

بهذا الإجراء يكون المقياس .

$ر = \frac{ع_{س ص}}{ع_س . ع_ص}$ هو مقياس مطلق (لا يعتمد على وحدات القياس) ولا يعتمد على حجم العينة .

(ب) من مزايا معامل الارتباط أنه **متماثل في** س ، **ص** بمعني أن قيمته لا تتغير بوضع س ، ص كل مكان الآخر .

(حـ) قيمة معامل الارتباط ر مستقلة عن اختيار نقطة الأصل لأن كلا من التغاير والانحراف المعيارى يتمتع بهذه الصفة ، وهذا يعني أن قيمة ر لا تتغير بإضافة أو طرح عدد ثابت من جميع قيم س أو بإضافة أو طرح عدد ثابت من جميع قيم ص . ونستفيد من هذه الخاصية أحياناً في تبسيط حساب قيمة ر .

(ى) يمكن إثبات أن القيمة المطلقة للمقياس ر لا تزيد عن الواحد الصحيح . أى أن .

$$-1 \leq ر \leq 1 \qquad (٦)$$

ولما كانت ر مقياساً لدرجة الارتباط الخطى بين متغيرين فإننا نقول إن المتغيرين غير مرتبطين خطياً إذا كانت ر = ٠ (وهذا لا يمنع من وجود ارتباط من نوع آخر) . وكلما اقتربت ر من الواحد كلما أوحى ذلك بوجود علاقة خطية (موجبة أو سالبة) بين المتغيرين .

ملاحظة (٢)

هناك علاقة مفيدة بين الخطأ المعيارى $ع_{ص.س}$ المعرف بالمعادلة (٨) بالبند (٩ - ٤) في موضوع الانحدار الخطى البسيط ومعامل الارتباط ر وهى :

$$ع^{٢}_{ص.س} = \frac{ن - ١}{ن - ٢} ع^{٢}_{ص} (١ - ر^{٢}) \qquad (٧)$$

ففي المثال (١٠ - ١) نستطيع إيجاد الخطأ المعيارى كالآتي :

$$ع^{٢}_{ص} = \frac{١}{ن - ١} [مجـ ص^{٢} - \frac{(مجـ ص)^{٢}}{ن}] = \frac{١}{٩} (١٠٨٠ - \frac{١٠٢^{٢}}{١٠}) = ٤,٤$$

إذن $ع^{٢}_{ص.س}$ = $\frac{٩}{٨}$ × ٤,٤ (١ − ٠,٨٩٨^{٢}) = ٠,٩٥٨٣

إذن $ع_{ص.س}$ = ٠,٩٧٨٩ تقريبا .

(١٠ − ٥) دلالة معامل الارتباط العزمى :

ليكن ص هو معامل الارتباط الخطى بين المتغيرين سـ ، صـ في المجتمع ، ر هى معامل الارتباط الناتج من العينة . تحت الافتراضات الثلاثة المذكورة نستطيع اختبار أى فرض عن القيمة الحقيقية للمعامل ص ووضع حدود ثقة لهذا المعامل .

(أولا) اختبار الفرض ص = صفر .

لاختبار الفرض الصفرى ف$_{٠}$: ص = صفر (المتغيران غير مرتبطين خطياً)
ضد الفرض الآخر ف$_{١}$: ص ≠ صفر
نستخدم الإحصاءة

$$ت_{٠} = \frac{ر\sqrt{ن - ٢}}{\sqrt{١ - ر^{٢}}} \qquad (٨)$$

التي لها توزيع ت بدرجات حرية ن − ٢ بشرط صحة الفرض الصفرى .

مثال (١٠ − ٢) :

في المثال (١٠ − ١) اختبر ما إذا كان المتغيران سـ ، صـ غير مرتبطين خطياً مستخدماً مستوى الدلالة ٠,٠١ .

الحل :

لدينا ن = ١٠ ، ر = ٠,٨٩٨

ف$_{.}$: ρ = ٠ ، ف$_{١}$: ρ ≠ ٠ (اختبار ذو جانبين)

من (٨) : ت$_{ى}$ = $\frac{\sqrt{٠,٨٩٨} \times \sqrt{١٠ - ٢}}{\sqrt{١ - ٠,٨٩٨^{٢}}}$ = ٥,٧٧٣

من الجدول ت$_{[٨]٠,٠١}$ = ٣,٣٥٥

بما أن ٥,٧٧٣ > ٣,٣٥٥ نرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠١ ونحكم بوجود ارتباط خطى بين المتغيرين .

ملاحظة (٣)

الإحصاءة (٨) التى تختبر الفرض ρ = ٠ ضد الفرض ρ ≠ ٠ تكافىء الإحصاءة (١٠) بالبند (٩ - ٥) فى موضوع الانحدار الخطى البسيط عند استخدامها لاختبار الفرض β = ٠ ضد الفرض β ≠ ٠ وذلك لأن كلاهما يقيس وجود أو عدم وجود علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص . وقد يبدو ذلك غريبا لأن الإحصاءة (٨) تتطلب أن يكون كلا المتغيرين معتدلا بينما الإحصاءة (١٠) تتطلب أن يكون المتغير ص فقط معتدلا . وتزول هذه الغرابة إذا علمنا أن فيشر قد أثبت أنه فى الحالة الخاصة التى يكون فيها ρ = ٠ فإن توزيع المعاينة لمعامل الارتباط ر لا يتغير سواء كان المتغير س معتدلا أو غير معتدل طالما كان المتغير ص معتدلا .

ولذلك فإن الإحصاءة (٨) تصلح فقط لاختبار الفرض الصفرى ρ = ٠ ولا تصلح لاختبار أى فرض صفرى آخر مثل ρ = ٠,٥ أو لايجاد فترات الثقة لمعامل الارتباط ρ فى المجتمع ، وذلك لأنه حين يكون المتغيران مرتبطين ، أى حين ρ ≠ ٠ يكون توزيع ر ملتويا وبعيدا عن الاعتدالية . فكيف نختبر الفرض ρ = ك حيث ك ≠ ٠؟

(ثانيا) اختبار الفرض $\rho = \rho_0$ حيث $\rho_0 \neq 0$.

وجد فيشر أنه عندما $\rho \neq 0$ ، فإن التحويل

$$ع = \frac{1}{2} \text{لو}_م \frac{1 + ر}{1 - ر} \text{ ، } ع_ر = \frac{1}{2} \text{لو}_م \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \qquad (٩)$$

يعرف متغيرا عشوائيا ع له توزيع معتدل على وجه التقريب متوسطه $ع_ر$ وتباينه

$$\sigma^2_ع = \frac{1}{ن - ٣} \qquad (١٠)$$

وأن هذا التوزيع يقترب بسرعة من التوزيع المعتدل بزيادة حجم العينة . وبذلك يكون للمتغير

$$ص = \frac{ع - ع_ر}{\sigma_ع} \qquad (١١)$$

توزيع معتدل قياسى على وجه التقريب، وبالتالى يجوز تناوله باستخدام جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل القياسى . كما أن الفترة

$$(ع - \sigma_ع \times \text{معم}_{\frac{\alpha}{2}} \text{ ، } ع + \sigma_ع \times \text{معم}_{\frac{\alpha}{2}}) \qquad (١٢)$$

تكون فترة ثقة بدرجة $(1 - \alpha)$ للبارامتر $ع_ر$ ، حيث $\text{معم}_{\frac{\alpha}{2}}$ هى قيمة المتغير المعتدل القياسي ص التى تحقق المعادلة

$$\text{ل} (\text{معم}_{\frac{\alpha}{2}} < ص < - \text{معم}_{\frac{\alpha}{2}}) = 1 - \alpha$$

ومن الفترة (١٢) نستطيع إيجاد فترة الثقة لمعامل الارتباط ρ للمجتمع من التحويل (٩) .

ولتجنب مشقة حساب التحويل (٩) وُضع جدول يحول ر إلى ع (بصرف النظر عن الإشارة) هو الجدول (١١) بملحق هذا الكتاب كما وضع جدول يحول ع إلى ر هو الجدول (١٢) .

مثال (١٠ - ٣) :

فى عينة عشوائية من ٢٨ زوجا من مجتمع معتدل ذى متغيرين وجد أن معامل الارتباط ٠,٧ هل هذه القيمة تتمشى مع الفرض القائل أن معامل الارتباط فى المجتمع هو ٠,٥ ؟ أوجد فترة ثقة بدرجة ٩٥٪ لهذا المعامل .

الحل :

الفرض الصفرى : ρ = ٠,٥ الفرض الآخر ρ ≠ ٠,٥

نحول كلا من معامل الارتباط فى العينة ومعامل الارتباط المفروض للمجتمع إلى القيمتين المناظرتين لهما باستخدام الجدول (١١) .

ر = ٠,٧ تنتج ع = ٠,٨٦٧

ρ = ٠,٥ تنتج ع = ٠,٥٤٩

$$\text{الخطأ المعيارى} = \frac{1}{\sqrt{ن - 3}} = \frac{1}{\sqrt{25}} = ٠,٢$$

على أساس صحة الفرض الصفرى نجد أن :

$$\therefore ص = \frac{٠,٨٦٧ - ٠,٥٤٩}{٠,٢} = ١,٥٩$$

وبما أن ١,٥٩ أقل من القيمة الحرجة ١,٩٦ لا يكون لدينا دليل يدعونا لرفض الفرض الصفرى ، ونحكم بأن معامل الارتباط فى المجتمع يمكن أن يكون ٠,٥ من الصيغة (١٢) ، نوجد فترة الثقة بدرجة ٩٥٪ للبارامتر ع كالآتى :

الحد الأدنى للفترة = ٠,٨٦٧ - ٠,٢ × ١,٩٦ = ٠,٤٧٥ = ٠,٤٨ تقريبا

الحد الأعلى للفترة = ٠,٨٦٧ + ٠,٢ × ١,٩٦ = ١,٢٥٩ = ١,٢٦ تقريبا

∴ فترة الثقة للبارامتر ρ هى (٠,٤٨ ، ١,٢٦) .

من الجدول (١٢) نجد أن (٠,٤٤٦ ، ٠,٨٥١) هى فترة الثقة بدرجة ٩٥٪ لمعامل الارتباط .

مثال (١٠ - ٤) :

فى عينة من ٩ أزواج من المشاهدات وجد أن معامل الارتباط = ٠,٨٨٩ أوجد فترة ثقة بدرجة ٩٩٪ لمعامل الارتباط فى المجتمع .

الحل :

من الجدول (١١) : ر = - ٠,٨٨٩ وإذن ع = ١,٤١٧ (مع إهمال إشارة ر)

$$\text{الخطأ المعيارى} = \frac{١}{\sqrt{ن - ٣}} = \frac{١}{\sqrt{٦}} = ٠,٤٠٨$$

الحد الأدنى للفترة للبارامتر ع = ١,٤١٧ - ٠,٤٠٨ × ٢,٥٨ = ٠,٣٦٦ .

الحد الأعلى للفترة للبارامتر ρ = ١,٤١٧ + ٠,٤٠٨ × ٢,٥٨ = ٢,٤٦٨

∴ الفترة (٠,٣٧ ، ٢,٤٧) هى فترة ثقة بدرجة ٩٩٪ للبارامتر ρ . من الجدول (١٢) ومع استرجاع إشارة ر تكون الفترة (-٠,٩٨٦ ، -٠,٣٥٤) هى فترة ثقة بدرجة ٩٩٪ لمعامل الارتباط ρ.

(ثالثا) اختبار دلالة الفرق بين معاملى ارتباط عينتين مستقلتين :

نفرض أن لدينا عينتين مستقلتين حجماهما $ن_1$ ، $ن_2$ من الأزواج أعطيتا معاملى ارتباط $ر_1$ ، $ر_2$. نريد أن نختبر ما إذا كان من الممكن اعتبار هاتين العينتين مأخوذتين من نفس المجتمع (أو من مجتمعين لهما نفس معامل الارتباط) ، أى نريد أن نختبر ما إذا كان الفرق بين $ر_1$ ، $ر_2$ ذا دلالة .

نحول القيمتين $ر_1$ ، $ر_2$ إلى القيمتين المناظرتين $ع_1$ ، $ع_2$ باستخدام الجدول (١١) . إذا كانت العينتان مستقلتين ومأخوذتين من نفس المجتمع المعتدل فإن الفرق بين $ع_1$ ، $ع_2$ يكون له توزيع معتدل تباينه يساوى مجموع تباينهما ، أى

$$\sigma^2_{ع_1 - ع_2} = \frac{1}{ن_1 - 3} + \frac{1}{ن_2 - 3} \qquad (١٣)$$

ويكون الخطأ المعيارى للفرق $|ع_1 - ع_2|$ هو الجذر التربيعى لهذا المقدار .

وعلى ذلك نستطيع اختبار دلالة الفرق بين $ع_1$ ، $ع_2$ (أى بين $ر_1$ ، $ر_2$) بواسطة التوزيع المعتدل .

مثال (١٠ - ٥) :

فى عينة عشوائية من ٥ أبقار وجد أن معامل الارتباط بين الزيادة فى الوزن ومقدار الغذاء المأكول ٠,٨٧ وفى عينة عشوائية مستقلة حجمها ١٢ بقرة وجد أن معامل الارتباط ٠,٥٦ فهل هذان المعاملان مختلفان اختلافا جوهريا ؟ استخدم مستوى الدلالة ٥٪ .

الحل :

الفرض الصفرى $ص_1 = ص_2$ والفرض الآخر $ص_1 \neq ص_2$

من الجدول (١١) نجد أن $ر_1 = ٠,٨٧$ ومنها $ع_1 = ١,٣٣٣$

، $ر_2 = ٠,٥٦$ ومنها $ع_2 = ٠,٦٣٣$

تباين الفرق $ع_1 - ع_2$ يساوى مجموع التباينين

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{9} = ٠,٦١١$

∴ الخطأ المعيارى للفرق $= \sqrt{٠,٦١١} = ٠,٧٨٢$

على أساس صحة الفرض الصفرى $ص_1 = ص_2$ (أى $ع_1 = ع_2$)

$$ص = \frac{(١,٣٣٣ - ٠,٦٣٣) - صفر}{٠,٧٨٢} = ٠,٨٩٥$$

وهذه القيمة تقل عن ١,٩٦ فهى ليست ذات دلالة ولا يسعنا ألا أن نحكم بأن $ص_1 = ص_2$.

(١٠ - ٦) التمييز بين الانحدار والارتباط فى دراسة المشكلات :

كل من الانحدار والارتباط الخطى البسيط يتناول العلاقة الخطية بين متغيرين كميين س ، ص . إلا أن هناك مواقف تستدعى استخدام أسلوب الانحدار ولا يجوز أن تُدرس بأسلوب الارتباط ، كما أن هناك مواقف تستدعى استخدام أسلوب الارتباط ولا يجوز أن تدرس بأسلوب الانحدار . ذلك أن الافتراضات التى يبنى عليها التحليل تختلف فى الانحدار عنها فى الارتباط خاصة فيما يتعلق بنوعية المتغير س ، حيث نفترض فى الانحدار أن س متغير رياضى لا يتأثر بالعوامل العشوائية بينما نفترض فى الارتباط أنه عشوائى . وهذا الاختلاف فى النظر إلى المتغير س يعنى من الناحية العملية اختلافا فى طريقة المعاينة . وعلى ذلك فان اختيار الأسلوب الذى يناسب مشكلة ما – انحدار أو ارتباط – يتوقف على الطريقة التى تتبع فى عملية المعاينة أى فى عملية جمع البيانات .

فلاستخدام أسلوب الانحدار يتطلب الأمر أن يختار الباحث قيما ثابتة من المتغير س يحددها قبل إجراء التجربة ثم يقوم بملاحظة ما يظهر من القيم المناظرة للمتغير

ص عند إجراء التجربة . فمثلا فى دراسة العلاقة بين جرعات دواء مهدىء وقدرة الانسان على حل المشاكل المنطقية يبدأ الباحث بتحديد بضعة جرعات مختلفة التركيب من هذا الدواء (قيم المتغير س) ثم يختار عينة عشوائية من الأفراد يقسمها عشوائيا إلى مجموعات عددها هو عدد الجرعات المختلفة ويعطى لأفراد كل مجموعة واحدة من تلك الجرعات ، ثم يستخدم أحد الاختبارات لقياس القدرة المنطقية لكل فرد فيحصل على قيم للمتغير ص . كذلك فى دراسة العلاقة بين طول نبات ومحتوى النيتروجين فى التربة يبدأ الباحث بتحديد عدة أحواض زراعية تختلف فى محتوى النيتروجين (قيم س) ويزرع النبات فى كل منها ثم يقيس أطوال النباتات بعد فترة من الزمن ليحصل على قيم المتغير ص . فى مثل هاتين الحالتين تكون قيم ص فقط خاضعة للمؤثرات العشوائية ، أما قيم س فتكون قيما ثابتة . وينبغى هنا تناول البيانات بأسلوب الانحدار حيث نقوم بإيجاد معادلة تشير إلى مدى اعتماد المتغير ص على المتغير س ، ويحق لنا أن نصف س بأنه المتغير **المستقل** وأن نصف ص بأنه المتغير **التابع** .

أما فى أسلوب الارتباط فيتطلب الأمر أن يبدأ الباحث باختيار عينة عشوائية من المجتمع ثم يقوم بقياس كل من قيم س ، ص لكل وحدة من وحدات العينة وبذلك تكون جميع القيم السينية والصادية خاضعة للمؤثرات العشوائية إذ يكون لكل منها حرية تامة فى اتخاذ أى قيمة من القيم الممكنة فى المجتمع . فمثلا فى دراسة العلاقة بين طول الذراع وطول الرجل لمجتمع من الأطفال ، يختار الباحث عينة عشوائية من الأطفال ثم يقوم بقياس كل من المتغيرين . كذلك فى دراسة العلاقة بين محتوى الكلسترول فى الدم ووزن الجسم فى مجتمع من المرضى بمرض معين نأخذ عينة عشوائية من هؤلاء المرضى ثم نقيس كلا من هذين المتغيرين . فى مثل هاتين الحالتين تكون قيم كل من المتغيرين س ، ص عشوائية . وينبغى هنا استخدام أسلوب الارتباط حيث نقوم بإيجاد عدد نقدر به الدرجة التى يتغير بها المتغيران معا دون تمييز بين متغير مستقل وآخر تابع .

وفى الحالات التى تتطلب دراستها استخدام أسلوب الانحدار يمكن من الناحية الحسابية إيجاد معامل الارتباط ، ولكن المعامل الناتج يكون مجرد عدد لا معنى له ولا يجوز أن يؤخذ كتقدير للارتباط بين المتغيرين . (وهذا لا يتناقض مع استخدامنا لمربع معامل الارتباط وهو ما سميناه بمعامل التحديد ، فى تحليل الانحدار كما رأينا فى الفصل السابق) .

كذلك ، فى الحالات التى تتطلب دراستها استخدام أسلوب الارتباط يمكن من الناحية الحسابية ايجاد معادلة الانحدار ، ولكن المعادلة الناتجة لا تحقق الهدف منها كمعادلة تنبؤ أو لبيان العلاقة الخطية بين المتغيرين لأن التقديرين أ ، ب يكونان فى هذه الحالة تقديرين متحيزين للبارامترين α ، β. ويتضح ذلك عندما نتذكر أننا فى قياس دقة المقدار ب فى تقدير البارامتر β نستخدم الخطأ المعيارى ع$_{ص.س}$ / $\sqrt{م_{٢}(س)}$ الذى يعتمد على قيمة م$_{٢}$ (س) = مـ (س − س̄)^{٢} − راجع البند (٩ − ٥ − أولا) فإذا لم تكن قيم سـ ثابتة فإن قيمة هذا الخطأ المعيارى تختلف من عينة إلى أخرى وبالتالى تختلف درجة دقة التقدير من عينة إلى أخرى .

إن التمييز بين الحالات التى تدرس بأسلوب الانحدار وتلك التى تدرس بأسلوب الارتباط هو أمر على درجة كبيرة من الأهمية . وقد لوحظ أن الأمر يختلط فى كثير من الحالات فتعامل مشكلات الانحدار على أنها ارتباط وتعامل مشكلات الارتباط على أنها انحدار ، بل ويصل الأمر أحيانا إلى معاملة المشكلة الواحدة على أنها انحدار وارتباط فى آن واحد ، رغم أن طريقة المعاينة لا تسمح إلا باستخدام واحد فقط من هذين الأسلوبين . ويبدو أن السبب فى هذا اللبس يرجع إلى وجود علاقات رياضية كثيرة بين المعاملات فى هذين النوعين من التحليل ، غير أن العلاقات الرياضية شىء والتحليل الإحصائى شىء آخر .

وجدير بالذكر أنه من الممكن دراسة الانحدار حين يكون كل من المتغيرين سـ

ص عشوائيا ، ولكن ذلك يتطلب استخدام نموذج إحصائى يختلف عن النموذج الذى استخدمناه فى الفصل السابق بحيث يسمح بوجود خطأ عشوائى فى المتغير س . وسوف لا نتعرض لدراسة هذا النموذج خاصة وأنه يفضل دراسة مثل هذه الحالة بأسلوب الارتباط .

(١٠ - ٧) معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) :

RANK CORRELATION COEFFICIENT

بالرغم من أن معامل ارتباط بيرسون يستخدم أساسا فى حالة المتغيرات المتصلة إلا أنه يستخدم أيضا فى حالات أخرى . ومن هذه الحالات الحالة التى يتعذر فيها قياس المفردات بالمقياس العددى المعتاد وإنما يمكن قياسها بميزان الترتيب حيث تأخذ كل مفردة ترتيبين س ، ص تعبر الأولى عن ترتيب المفردة بالنسبة للمتغير الأول وتعبر الثانية عن ترتيبها بالنسبة للمتغير الثانى ويكون المطلوب قياس الارتباط بين الترتيبين . ومثال ذلك قيام اثنين من الحكام بترتيب عدد من المتقدمين لشغل وظيفة بحسب أفضليتهم لهذه الوظيفة ثم قياس مدى الاتفاق بين الحكمين . فى هذه الحالة يمكن إثبات أن معامل الارتباط العزمى يأخذ الصيغة البسيطة الآتية التى تعزى إلى سبيرمان ويرمز له بالرمز $ر_س$ حيث

$$ر_س = ١ - \frac{٦ \sum ف_ر^٢}{ن (ن^٢ - ١)} \quad \text{وحيث } ف_ر = س_ر - ص_ر \qquad (١٤)$$

مثال (١٠ - ٣) :

كانت تراتيب ١٢ طالباً في مادتي الفيزياء س والرياضيات ص كما يلي :

س	١١	٧	٩	١٢	١	٤	١٠	٣	٨	٥	٢	٦
ص	١٠	٥	٨	١١	١	٦	١٢	٣	٧	٤	٢	٩

أوجد معامل الارتباط الخطي .

الحل :

بما أن المتغيرين مقاسان بميزان الترتيب فمن الأسهل استخدام معامل ارتباط الرتب كما في الجدول الآتى ، الذى يستخدم الصيغة (١٤) .

الجدول (١٠ - ٢)

إيجاد معامل ارتباط الرتب من بيانات المثال (١٠ - ٣)

س	ص	ف	ف^{٢}
١١	١٠	١	١
٧	٥	٢	٤
٩	٨	١	١
١٢	١١	١	١
١	١	٠	٠
٤	٦	-٢	٤
١٠	١٢	-٢	٤
٣	٣	٠	٠
٨	٧	١	١
٥	٤	١	١
٢	٢	٠	٠
٦	٩	-٣	٩
		صفر	٢٦

بالتعويض في (١٤) نجد أن :

$$ر_س = ١ - \frac{٦ \times ٢٦}{١٢ \times ١٤٣} = ٠,٩١$$

ونحصل على هذه النتيجة بالضبط إذا استخدمنا معامل ارتباط بيرسون المعرف في (٥) ، مع ملاحظة أنه قد يوجد فرق طفيف يعود إلى عمليات تقريب الأعداد .

(١٠ - ٨) مميزات معامل ارتباط الرتب :

كما سبق القول ، يصلح معامل ارتباط الرتب المعرف في (١٤) لقياس الارتباط بين المتغيرات التى تقاس بميزان الترتيب وهو يصلح أيضاً للمتغيرات التي تقاس بالمقياس العددى المعتاد ولكن يكون من المرغوب فيه تعيين رتب لكل مفردة بدلا من قيمها العددية . ومن أهم مميزات هذا المعامل أنه لا يشترط فرض اعتدالية المتغيرين س ، ص ، بل لا يشترط فرض وجود علاقة خطية بينهما ومن هنا فهو يفضل معامل الارتباط العزمى في الحالة التي لا يتوفر فيها هذان الشرطان ، وقياس الارتباط بواسطة معامل الرتب يعتبر من فصيلة المقاييس غير البارامترية أى التي لا تستلزم وضع فروض معينة على توزيعات المجتمعات .

ومن الأمثلة التي يستخدم فيها هذا المعامل في العلوم البيولوجية قياس الارتباط بين ترتيب انبثاق يرقات مجموعة من الحشرات وترتيب حجومها ، أو بين ترتيب استنبات مجموعة من النباتات وترتيب تزهيرها ، أو لقياس الاتفاق بين اثنين من البيولوجيين في ترتيبهما لمجموعة من الكائنات العضوية من حيث أكثرها شبهاً لصيغة معينة إلى أقلها شبها بها .

مثال (١٠ - ٤) :

في عشرة أنواع من السجائر وجدت المقادير الآتية بالمليجرام من القار والنيكوتين . حول هذه المقادير إلى رتب ثم أوجد معامل ارتباط الرتب لقياس درجة العلاقة بين محتويات القار والنيكوتين .

النـــــــــــوع :	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)	(٦)	(٧)	(٨)	(٩)	(١٠)
محتـــوى القـــــار :	١٤	١٧	٢٨	١٧	١٦	١٣	٢٤	٢٥	١٨	٣١
محتـــوى النيكـــوتين :	٠,٩	١,١	١,٦	١,٣	١,٠	٠,٨	١,٥	١,٤	١,٢	٢,٠

الحل :

نرتب كلا من مفردات المجموعتين بحسب الأصغر فالأكبر (أو العكس) كما في الجدول الآتي ، حيث وضعت التراتيب بدلا من القيم المعطاة .

الجدول (١٠ - ٣)

النوع	س	ص	ف	ف^{٢}
(١)	٢	٢	٠	٠
(٢)	٤,٥	٤	٠,٥	٠,٢٥
(٣)	٩	٩	٠	٠
(٤)	٤,٥	٦	١,٥-	٢,٢٥
(٥)	٣	٣	٠	٠
(٦)	١	١	٠	٠
(٧)	٧	٨	١-	١
(٨)	٨	٧	١	١
(٩)	٦	٥	١	١
(١٠)	١٠	١٠	٠	٠
			صفر	٥,٥

بالتعويض فى (١٤) نجد أن $ر_س = ١ - \frac{٦ \times ٥,٥}{١٠ \times ٩٩} = ٠,٩٦٦٧$

ملاحظة (٤) :

إذا كان لمفردتين أو أكثر نفس القيمة العددية ، تعطى لكل منها رتبة تساوى الوسط الحسابي للرتب التي كانت ستأخذها هذه المفردات لو أنها كانت مختلفة القيم ، فمثلا في محتوى القار لدينا عددان متساويان ١٧ ، ١٧ والمفروض أن أحدهما الرابع والآخر الخامس ولذلك أعطى لكل منهما الترتيب $\frac{١}{٢}$ (٤ + ٥) = ٤,٥ .

ملاحظة (٥) :

إذا كانت البيانات أصلا على هيئة أزواج من التراتيب كما فى المثال (١٠ ــ ٣) فإن معامل الارتباط العزمى يساوى بالضبط معامل ارتباط الرتب . أما إذا كانت البيانات أصلا على هيئة أزواج من القيم العددية كما فى المثال (١٠ ــ ٤) ، فإن معامل الارتباط العزمى لها لا يساوى معامل ارتباط الرتب الناتج من تحويل هذه القيم إلى رتب .

(١٠ - ٩) دلالة معامل ارتباط الرتب :

إن الإحصاءة التي يعبر عنها معامل ارتباط الرتب $ر_س$ المعرف بالصيغة (١٤) توزيعها متماثل حول الصفر . ويمكن إثبات أنه إذا كان المتغيران سـ ، صـ مستقلين فإن هذا التوزيع يقترب من توزيع معتدل وسطه الحسابي صفر وتباينه $\frac{١}{ن - ١}$ حين تقترب نـ من اللانهاية . وعلى ذلك عندما يكون حجم العينة كبيراً (نـ > ٣٠) نستطيع أن نختبر ما إذا كان هناك ارتباط ذو دلالة بين المتغيرين وذلك بحساب القيمة .

$$ع = \frac{ر_س - ٠}{\sqrt{١/(ن - ١)}} = ر_س \sqrt{ن - ١}$$

ومقارنتها بالقيم الحرجة للتوزيع المعتدل المعيارى ، مع ملاحظة أن الفرض الصفرى هو $ر = ٠$. والفرض الآخر هو $ر \neq ٠$.

-راجع المسألة (١ - حـ) من تمارين (٤) .

فمثلا إذا كانت ن = ٥٠ ، $ر_س$ = ٠,٤١ ، α = ٠,٠١ فإن :

ع = ٠,٤١ $\sqrt{٤٩}$ = ٢,٨٧

∵ ٢,٨٧ > ٢,٥٨ نرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠١ ونحكم بوجود ارتباط بين المتغيرين .

أما إذا كانت ن ≤ ٣٠ وعلى فرض استقلال المتغيرين أيضاً نستخدم الجدول (١٠) بملحق هذا الكتاب الذى يعطى القيم الحرجة اليمني عند مستويات الدلالة ٠,٠٥ ، ٠,٠٢٥ ، ٠,٠١ ، ٠,٠٠٥ وحيث ن = ٥ ، ٦ ، ... ، ٣٠ لمقارنتها بالقيم الموجبة لمعامل ارتباط الرتب $ر_س$ الناتجة من العينة . وبالنسبة للقيم السالبة لهذا المعامل نستفيد من تماثل التوزيع فى إيجاد القيم الحرجة . ففى المثال (١٠ - ٤) الأخير وجدنا أن $ر_س$ = ٠,٩٦٦٧ ، ن = ١٠

الفرض الصفرى ف$_٠$: $ص_س$ = ٠

الفرض الآخر ف$_١$: $ص_س$ > ٠ اختبار ذو جانب واحد

من الجدول (١٠) القيمة الحرجة اليمني عند ن = ١٠ ، α = ٠,٠١ هى ٠,٧٤٥ وحيث أن هذه القيمة أصغر من ٠,٩٦٦٧ نرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠١ لصالح الفرض الآخر ونستنتج أن هناك ارتباطاً موجباً بين مقادير القار ومقادير النيكوتين .

ملاحظة (٦) ــ الارتباط والسببية :

إذا وجدنا أن هناك ارتباطاً بين متغيرين فلا ينبغى أن نسارع بالقول بوجود علاقة سببية بينهما أو بأن أحدهما يحدث نتيجة للآخر . وهناك حالات يكون

فيها هذا القول صحيحاً ويكون التغير في أحد المتغيرين هو فعلا سبب أو أحد أسباب التغير في الآخر كما هو الحال مثلا بين درجة الحرارة وعدد ضربات القلب ، وهناك حالات لا يصح فيها الاستنتاج حيث يكون الارتباط الذى ظهر بين المتغيرين ناشئاً عن وجود متغير ثالث أو أكثر يؤثر فيهما معاً فيحدث هذا الارتباط ، كما هو الحال مثلا بين النجاح في الرياضيات والنجاح في التاريخ حيث يؤثر في كل منهما الذكاء أو المثابرة أو البيئة المنزلية وما إلى ذلك . إن تفسير وجود الارتباط لا يكون بناء على قيمة معامل الارتباط فقط بل على ما لدينا من معلومات عن المتغيرين اللذين ندرسهما .

تمارين (١٠)

في كل من المسائل الخمسة الآتية أوجد معامل الارتباط العزمى (بيرسون) من العينة المعطاة واختبر ما إذا كان المتغيران س ، ص مرتبطين خطياً .

(١) س : ١٥٩ ١٧٩ ١٠٠ ٤٥ ٣٨٤ ٢٣٠ ١٠٠ ٣٢٠ ٨٠ ٢٢٠ ٣٢٠ ٣١٠

ص : ١٤,٤٠ ١٥,٢٠ ١١,٣٠ ٢,٥٠ ٢٢,٧٠ ١٤,٩٠ ١,٤١ ١٥,٨١ ٤,١٩ ١٥,٣٩ ١٧,٣٥ ٩,٥٢

حيث س وزن الخيشوم بالملجرام ، ص وزن الجسم بالجرامات لعينة حجمها ١٢ من نوع من سرطان البحر (أبو جلمبو) .

(٢) س : ١٧ ٢٢ ٢٠ ٢٣ ٢٤ ٢٢ ٢٠ ١٩ ٢١ ١٦

ص : ٧ ١٢ ٩ ١٤ ١٢ ١١ ١٠ ٩ ١٠ ٨

حيث س طول نوع معين من نبات البسلة بالمليمترات ، ص الوزن بالمليجرام .

(٣) س : ٥٢ ٤٨ ٥٠ ٥١ ٤٧ ٥١ ٥٢ ٥٢ ٥٣ ٤٨ ٥٠ ٥٢

ص : ٣٦ ٣٤ ٣٤ ٣٤ ٣٥ ٣٥ ٣٦ ٣٦ ٣٧ ٣٤ ٣٤ ٣٧

س : ٥٢ ٥٠ ٥٠ ٤٩ ٤٨ ٤٨ ٤٨ ٥٠ ٥٠ ٤٨ ٥١ ٥٤

ص : ٣٦ ٣٥ ٣٤ ٣٤ ٣٤ ٣٣ ٣٥ ٣٥ ٣٣ ٣٤ ٣٦ ٣٨

حيث س طول جسم طفل حديث الولادة ، ص طول محيط رأسه بالسنتيمترات .

(٤) س : ٥٨ ٥٦ ٥٧ ٥٢ ٦٢ ٥٥ ٦٠ ٥٥ ٦١ ٥٨

ص : ٤١ ٤٣ ٤٢ ٤٤ ٤٤ ٤٠ ٤٢ ٤٥ ٤٥ ٤٤

حيث س ، ص هما أكبر وأصغر قطر لبيض الدجاج بالمليمترات .

(٥) س : ٤,٣ ٤,٥ ٥,٩ ٥,٦ ٦,١ ٥,٢ ٣,٨ ٢,١ ٧,٥

ص : ١٢٦ ١٢١ ١١٦ ١١٨ ١١٤ ١١٨ ١٣٢ ١٤١ ١٠٨

حيث س مقدار المطر في اليوم (٠,٠١ من السنتيمتر) ، ص مقدار مازال من تلوث الهواء نتيجة للمطر (ميكروجرام / متر مكعب) . (لتسهيل الحساب اطرح ١٠٠ من قيم ص) .

(٦) طلب من اثنين من المحكمين ترتيب ١٠ أشخاص متقدمين لوظيفة ما فكانت النتيجة كما يلى . أوجد معامل الارتباط (سبيرمان) واختبر ما إذا كان هناك ارتباط موجب بين المحكمين .

المحكـــــم الأول : ٩ ٤ ٦ ٥ ٣ ١ ١٠ ٨ ٢ ٧

المحكـــم الثـــاني : ٨ ٤ ٩ ٦ ١ ٢ ٧ ١٠ ٣ ٥

(٧) الجدول الآتي يبين عدد الساعات (لعينة عشوائية من ١٠ طلاب) التي استذكر فيها هؤلاء الطلاب لاختبار ما وعدد الدرجات التي حصلوا عليها في هذا الاختبار :

عدد ساعات الدراسة : ٨ ٥ ١١ ١٣ ١٠ ٥ ١٨ ١٥ ٢ ٨

درجة الاختبار : ٥٦ ٤٤ ٧٩ ٧٢ ٧٠ ٥٤ ٩٤ ٨٥ ٣٣ ٦٥

حول هذه القيم إلى رتب ثم أوجد معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) .

اختبر ما إذا كان هناك ارتباط موجب بين عدد ساعات الدراسة ودرجة الاختبار .

(٨) فى عينتين مستقلتين حجماهما ٢٣ ، ٢٨ من أزواج القيم وجد أن معاملى الارتباط العزمى بين المتغيرين ٠,٥ ، ٠,٨ على الترتيب . اختبر ما إذا كان هذان المعاملان مختلفين اختلافا ذا دلالة .