الفصل الحادى عشر

تحليل التغاير

ANALYSIS OF COVARIANCE

(١١ – ١) التغاير :

لعله من المفيد فى مستهل هذا الفصل أن نذكر القارىء بالمقصود حسابيا بكلمة « التغاير » التى سبق أن وردت فى عدة مناسبات فى هذا الكتاب .

إذا كانت س_{1} ، س_{2} ، س_{3} ، .... $\text{س}_{\text{ن}}$

، ص_{1} ، ص_{2} ، ص_{3} ، ... $\text{ص}_{\text{ن}}$

هى ن من أزواج الأعداد فإن تغاير (س ، ص) يعرف بأنه متوسط مجموع حواصل ضرب انحرافات القيم السينية عن متوسطها $\bar{\text{س}}$ وانحرافات القيم الصادية عن متوسطها $\bar{\text{ص}}$. أى أن :

$$\text{تغاير (س ، ص)} = \frac{1}{\text{ن}} \sum_{1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}})$$

$$= \frac{1}{\text{ن}} \left[\sum_{1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}\,\text{ص}_{\text{ر}} - \frac{(\sum \text{س}_{\text{ر}})(\sum \text{ص}_{\text{ر}})}{\text{ن}} \right]$$

والمقدار الذى بين القوسين يسمى مجموع حواصل ضرب الانحرافات السينية والانحرافات الصادية عن متوسطيهما أو اختصارا مجموع حواصل الضرب وسنرمز له بالرمز م صـ (س ، ص) . وهذا المقدار يمكن أن يكون موجبا أو سالبا أو صفرا .

وكما فى التباين ، إذا كانت أزواج القيم ($س_ر$ ، $ص_ر$) هى عينات عشوائية من مجتمع ذى متغيرين وأردنا تقدير التغاير فى هذا المجتمع من التغاير فى العينة فإننا نقسم حواصل الضرب على ن - ١ بدلا من ن وذلك لكى يكون هذا التقدير تقديرا غير متحيز ، أى نكتب :

$$\text{تغاير}\ (س ، ص) = \frac{١}{ن - ١}\left(\text{مج}\ س_ر\ ص_ر - \frac{م\ مَ}{ن}\right) \qquad (٢)$$

حيث م مجموع السينات ، مَ مجموع الصادات .

وكما فى التباين أيضا ، ونظرا لأن قيم الانحرافات عن الوسط الحسابى (أو أى قيمة أخرى) لا تتغير بتغير نقطة الأصل فإن قيمة التغاير لا تتغير إذا جمعنا أو طرحنا عددا ثابتا من جميع السينات ، وجمعنا أو طرحنا عددا ثابتا من جميع الصادات .

(١١ - ٢) العلاقة بين تحليل التغاير وتحليل التباين :

فى تحليل التباين بالنموذج ثابت التأثيرات للتجارب ذوات العامل الواحد يكون لدينا متغير كمى صـ قسمت قيمه فى عينة ما إلى عدد من المجموعات تناظر مستويات عامل تجريب نوعى مستقل عن المتغير صـ . وتهدف الدراسة إلى اختبار دلالة الفروق بين المتوسطات الصادية فى هذه الأقسام لمعرفة مدى تأثير عامل

التجريب عليها . وتتخذ البيانات المشاهدة فى العينة الشكل المبين بالجدول (٨ – ١) بالبند (٨ – ٤) .

إلا أنه فى بعض هذه التجارب يكون المتغير ص واقعا تحت تأثير متغير كمى س يسمى بالمتغير الملازم للمتغير ص **Concomitant variable or covariate** ، فمثلا قد يكون المتغير ص هو درجات الطلاب فى اختبار رياضيات بعد دراسة مقرر ما فيها ويكون عامل التجريب هو طرق تدريس هذا المقرر . ونظرا لأن استيعاب الطلاب للرياضيات يعتمد على ذكائهم فإن درجاتهم فى الاختبار تكون متأثرة بالذكاء ونقول حينئذ إن المتغير س (نسب ذكاء الطلاب) هو متغير ملازم للمتغير ص . وإذا كان اهتمامنا هو قياس أثر اختلاف مستويات عامل التجريب (طرق التدريس) على المتوسطات الصادية (درجات الرياضيات) عن طريق تحليل التباين فإن دقة هذا القياس تستلزم استبعاد أثر المتغير س (الذكاء) من قيم المتغير ص قبل إجراء هذه العملية .

وفى بعض التجارب يمكن استبعاد هذا الأثر قبل عملية التجريب ، وذلك بأخذ عينات الطلاب التى تختار للتجريب بحيث تكون متكافئة فى الذكاء ، وهنا نستطيع اختبار الفروق بين متوسطات الدرجات بالطريقة المعتادة لتحليل التباين على أساس أن هذه المتوسطات تكون متأثرة فقط بعامل التجريب . غير أن ظروف التجريب قد لا تتيح لنا التحكم فى العينات من حيث جعلها متكافئة فى المتغير الملازم (الذكاء) وهنا يكون لهذا المتغير أثر على المتغير ص (درجات الرياضيات) ولا ينبغى القيام بتحليل التباين إلا بعد استبعاد هذا الأثر . وهذا هو الدور الذى يلعبه تحليل التغاير إذ هو يتألف من شقين أولهما تعديل قيم المتغير ص لاستبعاد أثر المتغير الملازم س وثانيهما تحليل التباين للقيم الصادية المعدلة .

ولكن كيف نصحح القيم الصادية المشاهدة لإزالة أثر هذا المتغير ؟ إذا كان لهذا الأثر وجود فعلىّ فإن انحدار المتغير ص على المتغير س يكون له وجود أيضاً ويكون

تصحيح القيم الصادية المشاهدة $ص_{رو}$ عن طريق طرح أثر الانحدار من هذه القيم .
وإذا افترضنا أن الانحدار خطى فإن المقدار الذى نطرحه يكون على الصورة $ب(س_{رو} - \bar{س})$ حيث ب معامل الانحدار محسوبا من العينة كما سنبين بعد وحيث $\bar{س}$ هى المتوسط العام للقيم السينية فى العينة . أى أننا إذا رمزنا للقيم المعدلة بالرمز $\acute{ص}_{رو}$ فإن :

$$\acute{ص}_{رو} = ص_{رو} - ب\ (س_{رو} - \bar{س})$$

وإذا أخذنا أى قسم و على حدة فإن :

$$\acute{ص}_{ر} = ص_{ر} - ب\ (س_{ر} - \bar{س}) \qquad (٢)$$

ويكون علينا بعد ذلك تحليل التباين للقيم الصادية المعدلة .

ومن هنا نرى أن تحليل التغاير لا يعنى تحليل التغاير ذاته كما قد يتبادر إلى الذهن بل يعنى تحليل التباين للمتغير ص بعد عزل أثر المتغير الملازم س مقاسا بمقدار انحدار ص على س .

(١١ - ٣) النموذج الإحصائى :

حين يكون هناك متغير ملازم واحد س لمتغير تابع ص يخضع لعامل واحد من عوامل التجريب له ك من المستويات ، فإن البيانات المشاهدة فى عينة عشوائية تتخذ الشكل المبين بالجدول (١١ - ١) الآتى ، حيث السينات ترمز إلى قيم المتغير الملازم (نسب الذكاء مثلا) والصادات ترمز إلى قيم المتغير التابع (درجات الرياضيات مثلا) ، $ن_{و}$ ترمز إلى عدد القيم فى القسم و (و = ١ ، ٢ ، ... ، ك) ، $ن = \sum ن_{و}$ = حجم العينة . لاحظ أن هناك قياسين لكل وحدة من وحدات التجريب أحدهما للمتغير التابع وهو $ص_{رو}$ والآخر للمتغير الملازم وهو $س_{رو}$.

الجدول (١١ – ١)

بيانات تحليل التغاير

الأقسام (المعالجات)					
(١)	(٢)	...	(و)	...	(ك)
$س_{١}$ $ص_{١}$	$س_{٢}$ $ص_{٢}$	...	$س_{و}$ $ص_{و}$	...	$س_{ك}$ $ص_{ك}$
$س_{١١}$ $ص_{١١}$	$س_{٢١}$ $ص_{٢١}$	...	$س_{١و}$ $ص_{١و}$	...	$س_{١ك}$ $ص_{١ك}$
$س_{١٢}$ $ص_{١٢}$	$س_{٢٢}$ $ص_{٢٢}$	...	$س_{٢و}$ $ص_{٢و}$	...	$س_{٢ك}$ $ص_{٢ك}$
....	....	....	....	...	...
...	...	...	...	...	...
$س_{ر١}$ $ص_{ر١}$	$س_{ر٢}$ $ص_{ر٢}$	...	$س_{رو}$ $ص_{رو}$	...	$س_{رك}$ $ص_{رك}$
...	...	...	...	...	...
...	...	...	...	...	...
$س_{ن_١ ١}$ $ص_{ن_١ ١}$	$س_{ن_٢ ٢}$ $ص_{ن_٢ ٢}$	...	$س_{ن_و و}$ $ص_{ن_و و}$	...	$س_{ن_ك ك}$ $ص_{ن_ك ك}$
$م_{١}$ $مَ_{١}$	$م_{٢}$ $مَ_{٢}$	...	$م_{و}$ $مَ_{و}$	...	$م_{ك}$ $مَ_{ك}$
$\bar{س}_{١}$ $\bar{ص}_{١}$	$\bar{س}_{٢}$ $\bar{ص}_{٢}$	...	$\bar{س}_{و}$ $\bar{ص}_{و}$	...	$\bar{س}_{ك}$ $\bar{ص}_{ك}$

والنموذج الذى نفترضه لتحليل التغاير هو تطوير للنموذج الذى افترضناه فى تحليل التباين بالبند (٨ – ٤ – ١) ، ويتخذ الصيغة الآتية :

$$ص_{رو} = \mu_{و} + \beta\,(س_{رو} - \bar{س}) + خ_{رو} \qquad (٣)$$

حيث β معامل انحدار ص على س ، ر = ١ ، ... ، $ن_{و}$ ، و = ١، ٢ ، ...، ك

وهذا النموذج كما نرى يفسح مكانا لأثر انحدار ص على س بالإضافة إلى أثر مستويات عامل التجريب وأثر الخطأ العشوائى .

فى هذا النموذج نفترض الافتراضات المعتادة فى تحليل التباين – راجع البند (٨ – ٤ – ١) – وكذلك الافتراضات المعتادة لتحليل الانحدار – راجع البندين (٩ – ١) ، (٩ – ٥) . وبالإضافة إلى ذلك نفترض فرضا أساسيا فى تحليل التغاير وهو أن العلاقة الخطية بين س ، ص لها نفس معامل الانحدار β فى جميع الأقسام أى يمكن تمثيل هذه العلاقات فى الأقسام المختلفة بخطوط متوازية ، فإذا كانت $\beta_{١}$ ، $\beta_{٢}$ ، ... ، $\beta_{\text{ك}}$ هى معاملات الانحدار داخل الأقسام ، فإننا نفترض أن $\beta_{١} = \beta_{٢} = ... = \beta_{\text{ك}} = \beta$ وبذلك يمكن ضم البيانات بداخل الأقسام لتعطى تقديرا موحدا للبارامتر β ، وهذا التقدير هو كما نعلم $\frac{\text{م صه (س ، ص)}}{\text{م م (س)}}$ محسوبا من داخل الأقسام .

إذا كتبنا النموذج (٣) على الصورة

$$\text{ص}_{\text{رو}} - \beta\,(\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}) = \mu_{\text{و}} + \text{خ}_{\text{رو}}$$

$$\text{أى} \qquad \text{صَ}_{\text{رو}} \qquad \mu_{\text{و}} + \text{خ}_{\text{رو}} \qquad (٤)$$

يتبين لنا أن تحليل التغاير يتطلب إجراء نوعين من التحليل هما :

١ – تحليل انحدار لتقدير قيمة β ومن ثم تعديل القيم $\text{ص}_{\text{رو}}$ المشاهدة إلى القيم $\text{صَ}_{\text{رو}}$ لإزالة أثر المتغير الملازم س .

٢ – تحليل التباين للقيم المعدلة $\text{صَ}_{\text{رو}}$ لاختبار أثر مستويات التجريب على متوسطاتها . أى أن تحليل التغاير يجمع بين عملية تحليل الانحدار وعملية تتلوها هى عملية تحليل التباين .

(١١ - ٤) خطوات تحليل التغاير :

إن الهدف من تحليل التغاير هو كما سبق القول اختبار دلالة الفروق بين متوسطات المتغير التابع ص بعد تصحيحها لاستبعاد أثر المتغير الملازم س . ومن حقنا أن نتساءل بداية عما إذا كان للمتغير س أثر فعلى على المتغير ص بحيث يستحق عناء عملية الاستبعاد . ولذلك فإن أول ما نهتم به اختبار وجود هذا الأثر أى اختبار وجود علاقة بين س ، ص ، فإذا لم يثبت وجود هذه العلاقة لا يكون هناك ما يدعو لعملية الاستبعاد بل نقوم بتحليل التباين على القيم الصادية المشاهدة دون تعديل . أما إذا ثبت وجودها فينبغى تصحيح هذه القيم قبل إجراء عملية تحليل التباين .

فالخطوة الأولى لتحليل التغاير إذن هى تحليل الانحدار لاختبار أثر المتغير س على المتغير ص ، فإذا ثبتت دلالة الانحدار فإن الخطوة الثانية هى القيام بتحليل التباين للقيم الصادية المعدلة لاختبار أثر عامل التجريب . والمعتاد أن نمهد لهاتين الخطوتين ببعض الحسابات الأولية . وسنوضح ذلك كله بالمثال الآتى .

المثال (١١ - ١) :

فى إحدى التجارب الزراعية الاقتصادية فى قطر ما ، اختيرت ست قرى عشوائيا واختير فى كل منها خمس مزارع عشوائيا . سجلت بالجدول (١١ - ٢) الآتى تكاليف إنتاج محصول الذرة (ص) فى فصل زراعى ما فى كل مزرعة كما سجلت متوسطات المحاصيل (س) التى كانت قد نتجت فى فصول زراعية سابقة فى كل مزرعة . المطلوب استخدام هذه البيانات (أولا) لمعرفة ما إذا كان هناك أثر للمحصول السابق (س) على تكاليف الإنتاج (ص) ، (ثانيا) لمعرفة ما إذا كانت تكاليف الانتاج تختلف من قرية إلى أخرى بعد استبعاد أثر مقدار المحصول السابق إذا كان لهذا الأثر وجود . (لتسهيل الحساب طُرح العدد ١٢ من جميع قيم س والعدد ٣ من جميع قيم ص) .

الجدول (١١ - ٢)

المزارع \ القرى	(١) $س_١$	(١) $ص_١$	(٢) $س_٢$	(٢) $ص_٢$	(٣) $س_٣$	(٣) $ص_٣$	(٤) $س_٤$	(٤) $ص_٤$	(٥) $س_٥$	(٥) $ص_٥$	(٦) $س_٦$	(٦) $ص_٦$
(١)	٣	١,٧	٠	٠,٨	-٣	١,٥	٤	-٠,٢	-٢	١,٧	١	٠,٥
(٢)	-١	٢,١	٥	-٠,٨	٠	٠,٦	١		-٣	٢,٣	-١	١
(٣)	-٣	٣,٠	٧	-١,٠	-٢	١,٠	٣	-٠,٢	-٤	٢,٦	٦	-٠,٥
(٤)	٢	١,٣	-١	١,٦	١	٠,٤	-٢	١,٢		١,٠	٢	٠,٧
(٥)	٥	٠,٩	٢	٠,٤	-٤	٢,٥	٠	٠,٢	-١	١,٤	٠	١,٣
المجاميع	٦	٩	١٣	١	-٨	٦	٦	١	-١٠	٩	٨	٣
المتوسطات	١,٢	١,٨	٢,٦	٠,٢	-١,٦	١,٢	١,٢	٠,٢	-٢	١,٨	١,٦	٠,٦

مجـ مجـ س = ١٥ ، $\overline{س}$ = ٠,٥ ، مجـ مجـ ص = ٢٩ ، $\overline{ص}$ = ٠,٩٦٦٧

مع ملاحظة أن ن = ٣٠

حسابات تمهيدية :

هذه الحسابات تجرى فى بداية التحليل لخدمة الخطوتين الرئيسيتين المذكورتين ، وهى تتألف من ثلاث مجموعات من الحسابات ترمى المجموعة الأولى إلى إيجاد مجموع المربعات م م (س) للمتغير س وسنرمز له بالرمز ا ثم تحليله بالطريقة المعتادة لتحليل التباين إلى مركبتين إحداهما تعبر عن الاختلاف بين الأقسام وسنرمز له بالرمز $ا_١$ والأخرى تعبر عن الاختلاف المتبقى داخل الأقسام وسنرمز له بالرمز

ا$_{٢}$. وبالمثل بالنسبة لمجموع المربعات م م (ص) للمتغير ص الذى سنرمز له بالرمز ب ولمركبتيه بالرمزين ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ ، ثم بالنسبة لمجموع حواصل الضرب م حـ (س ، ص) الذى سنرمز له بالرمز حـ ولمركبتيه بالرمزين حـ$_{١}$ ، حـ$_{٢}$.

وتعتمد هذه الحسابات على المجاميع الآتية التى يحسن إيجادها مقدما .

م$_{١}$ = مجـ س$_{ر١}$ ، م$_{٢}$ = مجـ س$_{ر٢}$ ، ... ، م$_{ك}$ = مجـ س$_{رك}$ ،

م = مجـ مجـ س = مجـ$_{١}^{ك}$ م$_{و}$ ،

مَ$_{١}$ = مجـ ص$_{ر١}$ ، مَ$_{٢}$ = مجـ ص$_{ر٢}$ ، ... ، مَ$_{ك}$ = مجـ ص$_{رك}$ ،

مَ = مجـ مجـ ص = مجـ$_{١}^{ك}$ مَ$_{و}$

، مجـ س^{٢} ، ص^{٢} ، مجـ س ص

(١) **تحليل** م م (س)

ا = م م (الكلى) = مجـ مجـ س^{٢} − م^{٢} / ن   بدرجات حرية ن − ١

ا$_{١}$ = م م (بين الأقسام) = مجـ$_{١}^{ك}$ م$_{و}^{٢}$ / ن$_{و}$ − م^{٢} / ن   بدرجات حرية ك − ١

حيث م$_{و}$ مجموع السينات فى القسم و ، ن$_{و}$ عددها ، ك عدد الأقسام .

ا$_{٢}$ = م م (داخل الأقسام) = ا − ا$_{١}$ بدرجات حرية ن − ك

(٢) تحليل م م (ص)

$\text{ب} = \text{م م (الكلى)} = \text{مج ص}^{٢} - \dfrac{\text{مَ}^{٢}}{\text{ن}}$ بدرجات حرية ن − ١

$\text{ب}_{١} = \text{م م (بين الأقسام)} = \sum\limits_{١}^{\text{ك}} \dfrac{\text{مَ}_{\text{و}}^{٢}}{\text{ن}_{\text{و}}} - \dfrac{\text{مَ}^{٢}}{\text{ن}}$ بدرجات حرية ك − ١

حيث $\text{مَ}_{\text{و}}$ مجموع الصادات فى القسم و ، $\text{ن}_{\text{و}}$ عددها .

$\text{ب}_{٢} = \text{م م (داخل الأقسام)} = \text{ب} - \text{ب}_{١}$ بدرجات حرية ن − ك

(٣) تحليل م صه (س ، ص)

تسير العمليات الجبرية هنا فى خطوط متوازية مع العمليات الجبرية فى (١) ، (٢) كالآتى :

$\text{حـ} = \text{م صه (الكلى)} = \text{مج س ص} - \dfrac{\text{م مَ}}{\text{ن}}$ بدرجات حرية ن − ١

$\text{حـ}_{١} = \text{م صه (بين الأقسام)} = \sum\limits_{١}^{\text{ك}} \dfrac{\text{م}_{\text{و}}\,\text{مَ}_{\text{و}}}{\text{ن}_{\text{و}}} - \dfrac{\text{م مَ}}{\text{ن}}$ بدرجات حرية ك − ١

$\text{حـ}_{٢} = \text{م صه (داخل الأقسام)} = \text{حـ} - \text{حـ}_{١}$ بدرجات حرية ن − ك

بتطبيق هذه الصيغ على بيانات المثال (١١ − ١) نحصل على مايلى :

(١) تحليل م م (س) :

لدينا م = ٦ + ١٣ + (−٨) + ٦ + (−١٠) + ٨ = ١٥

$$\therefore \frac{\text{م}^{٢}}{\text{ن}} = \frac{١٥^{٢}}{٣٠} = ٧{,}٥$$

ا = م م م (الكلى) = [٣^{٢} + (−١)^{٢} + ... + (٢)^{٢} + ٠] − ٧,٥

= ٢٥١,٥ بدرجات حرية ٢٩

ا$_{١}$ = مم (بين الأقسام) = $\frac{١}{٥}$ [٦^{٢} + ١٣^{٢} + (−٨)^{٢} + ٦^{٢} + (−١٠)^{٢} + ٨^{٢}] − ٧,٥

= ٨٦,٣ بدرجات حرية ٥

ا$_{٢}$ = مم (داخل الأقسام) = ٢٥١,٥ − ٨٦,٣ = ١٦٥,٢ بدرجات حرية ٢٤

(٢) تحليل م م (ص) :

لدينا مَ = ٩ + ١ + ٦ + ١ + ٩ + ٣ = ٢٩

∴ $\frac{مَ^{٢}}{ن}$ = $\frac{٢٩^{٢}}{٣٠}$ = ٢٨,٠٣

ب = مم (الكلى) = [١,٧^{٢} + ٢,١^{٢} + ... + (٠,٧)^{٢} + ١,٣^{٢}] − ٢٨,٠٣

= ٢٨,٩٣ بدرجات حرية ٢٩

ب$_{١}$ = مم (بين الأقسام) = $\frac{١}{٥}$ [٩^{٢} + ١^{٢} + ٦^{٢} + ١^{٢} + ٩^{٢} + ٣^{٢}] − ٢٨,٠٣

= ١٣,٧٧ بدرجات حرية ٥

ب$_{٢}$ = مم (داخل الأقسام) = ٢٨,٩٣ − ١٣,٧٧ = ١٥,١٦

بدرجات حرية ٢٤

(٣) **تحليل م صه (س ، ص) :**

لدينا م = ١٥ ، مَ = ٢٩ وإذن $\frac{\text{م مَ}}{\text{ن}}$ = $\frac{١٥ \times ٢٩}{٣٠}$ = ١٤,٥

حـ = م صه (الكلى) = [٣ × ١,٧ + (−١ × ٢,١) + ... + ٢ ×
٠,٧ + ٠] −١٤,٥
= − ٥٤,٨ − ١٤,٥ = −٦٩,٣
بدرجات حرية ٢٩

$\text{حـ}_١$ = م صه (بين الأقسام) = $\frac{١}{٥}$[٦ × ٩ + ١٣ × ١ .. + ٨ × ٣]
− ١٤,٥
= − ٨,٢ − ١٤,٥ = −٢٢,٧بدرجات حرية ٥

$\text{حـ}_٢$ = م صه (داخل الأقسام) = −٦٩,٣ − (−٢٢,٧) =٤٦,٦
بدرجات حرية ٢٤

يحسن تسجيل هذه المجموعات الثلاث من القيم فى جدول واحد كالجدول (١١ − ٣) الآتى ليسهل الرجوع إليها .

الجدول (١١ − ٣)

تحليل مجموعى المربعات ومجموع حواصل الضرب

مصدر التباين	درجات الحرية	م م (س)	م م (ص)	م صه (س ، ص)
بين الأقسام (القرى)	ك − ١ = ٥	$\text{ا}_١$ = ٨٦,٣	$\text{ب}_١$ = ١٣,٧٧	$\text{حـ}_١$ = −٢٢,٧
داخل الأقسام (البواقى) خطأ التجريب	ن − ك=٢٤	$\text{ا}_٢$ = ١٦٥,٢	$\text{ب}_٢$ = ١٥,١٦	$\text{حـ}_٢$ = −٤٦,٦
الكلى	ن −١ = ٢٩	ا = ٢٥١,٥	ب = ٢٨,٩٣	حـ = −٦٩,٣

الخطوة الأولى : اختبار تأثير المتغير س على المتغير ص :

تهدف هذه الخطوة إلى اختبار وجود علاقة خطية بين المتغير الملازم س والمتغير التابع ص ، ويتأتى هذا كما نعلم إما بتقدير معامل الانحدار الموحد β من داخل أقسام العينة ثم اختبار دلالة هذا التقدير باختبار ت ، أو بتقدير التباين المفسر (الناشيء عن الانحدار) واختبار دلالته باختبار ف بالصورة

$$\text{ف} = \frac{\text{التباين المفسر}}{\text{التباين غير المفسر}} \quad \text{بدرجتي حرية ١ ، ن – ك – ١} \quad (٥)$$

على أن تحسب المقادير اللازمة لهذا الاختبار من **داخل الأقسام** أى من السطر الخاص بالبواقى بالجدول (١١ – ٣) .

فى المثال ، وباستخدام الصيغة (١٧) بالبند (٩ – ٧) نجد ما يلى :

$$\text{الاختلاف المفسر} = \frac{[\text{م مج (س ، ص)}]^{٢}}{\text{م م (س)}} = \frac{\text{ح}_{٢}^{٢}}{\text{ا}_{٢}}$$

$$= \frac{(-٤٦,٦)^{٢}}{١٦٥,٢} = ١٣,١٤٥ \quad \text{بدرجة حرية واحدة}$$

∴ الاختلاف غير المفسر = الاختلاف فى ص – الاختلاف المفسر

$$= \text{ب}_{٢} - \frac{\text{ح}_{٢}^{٢}}{\text{ا}_{٢}} = ١٥,١٦ - ١٣,١٤٥$$

$$= ٢,٠١٥ \quad \text{بدرجات حرية ٢٣}$$

$$\text{إذن} \quad \text{ف}_{ى} = \frac{١٣,١٤٥ \div ١}{٢,٠١٥ \div ٢٣} = \frac{١٣,١٤٥}{٠,٠٨٧٦} = ١٥٠,٠٦^{**}$$

وهذه القيمة تزيد كثيرا عن القيمة الحرجة ف$_{٠,٠١[١، ٢٣]}$ فهى ذات دلالة عالية ونحكم بوجود علاقة خطية سالبة بين المتغير الملازم سـ والمتغير التابع صـ ، وهذا يعنى أن مقدار المحصول السابق يؤثر فيما تدفعه القرى من تكاليف لإنتاج المحصول الجديد .

ملاحظات :

(١) استخدمنا نفس الصيغ التى تستخدم فى حالة وجود عينة من أزواج القيم (سـ ، ص) موضوعة فى قسم واحد (ك = ١) لأن هذه الصيغ تظل صالحة عند وجود أكثر من قسم (ك > ١) ، بشرط تعديل درجات الحرية وفقا لذلك أى وضع ن − ك − ١ بدلا من ن − ٢ للاختلاف غير المفسر .

(٢) من الجدول (١١ − ٣) نستطيع إيجاد ثلاثة تقديرات لتباين المتغير صـ بعد التصحيح للانحدار ، غير أن التقدير الذى نحصل عليه من داخل الأقسام وهو تباين البواق حول خط الانحدار يكون هو التقدير غير المتحيز الذى يعكس الخطأ العشوائى فى هذا التحليل ، ونختبر دلالة أى تقدير آخر بالمقارنة به . ولذلك فإن حساب قيمة ف من الصيغة (٥) ينبغى أن يكون من داخل الأقسام كما سبق القول .

الخطوة الثانية : تعديل المتوسطات واختبار دلالة الفروق بينها :

كما سبق القول ، لا تتخذ هذه الخطوة إلا إذا ظهر من الخطوة السابقة وجود أثر فعلى للمتغير الملازم سـ على المتغير صـ . وترمى هذه الخطوة إلى تعديل القيم الصادية المشاهدة بحيث تكون القيم المعدلة مستقلة عن أثر المتغير سـ . ولما كان هذا التعديل من شأنه تعديل تباين القيم الصادية فإن تحليل التباين لاختبار دلالة الفروق بين المتوسطات المعدلة يكون باستخدام اختبار ف بالصيغة المعتادة مع وضع التباينات المعدلة بدلا من التباينات الأصلية ، أى باستخدام الصيغة

$$\text{ف} = \frac{\text{التباين المعدل بين الأقسام}}{\text{التباين المعدل داخل الأقسام}} \qquad (٦)$$

بدرجتي حرية ك − ١ ، ن − ك − ١

فى المثال (١١ − ١) وجدنا أن المتغير الملازم س يؤثر فى المتغير التابع ص وعلى ذلك فإن دقة البحث تقتضى أن نخلص المتغير ص من أثر المتغير س قبل إجراء تحليل التباين ، أى تقتضى استخدام اختبار ف بالصيغة (٦) . ولقد سبق لنا حساب التباين المعدل داخل الأقسام وهو التباين غير المفسر ٢,٠١٥ ÷ ٢٣ = ٠,٠٨٧٦ وهو كما سبق القول تقدير غير متحيز لتباين المتغير ص بعد تعديله .

ومن الصيغة (١٩) بالبند (٩ − ٧) نذكر أن هذا التباين هو مربع الخطأ المعيارى $ع_{ص.س}$ للتقدير من معادلة الانحدار ، أى أن :

$ع^٢_{ص.س}$ = التباين غير المفسر (مأخوذا من داخل الأقسام) (٧)

= ٠,٠٨٧٦ فى هذا المثال .وبدرجات حرية ٢٣

أما التباين المعدل بين الأقسام فنوجده بطريقة غير مباشرة بطرح الاختلاف المعدل داخل الأقسام من الاختلاف الكلى المعدل ثم القسمة على درجات الحرية . أى أن :

الاختلاف المعدل بين الأقسام = الاختلاف الكلى المعدل − الاختلاف المعدل داخل الاقسام (٨)

$$= (ب - \frac{ح^٢}{ا}) - (ب_٢ - \frac{ح^٢_٢}{ا_٢}) \qquad (٨َ)$$

وفى هذا المثال نجد أن

$$\text{الاختلاف المعدل بين الأقسام} = (٢٨,٩٣ - \frac{(-٦٩,٣)^٢}{٢٥١,٥}) - ٢,٠١٥$$

$$= (٢٨,٩٣ - ١٩,٠٩٥) - - ٢,٠١٥$$

= ٧,٨٢٠ بدرجات حرية ٥

من الصيغة (٦) : $ف_ى = \frac{٧,٨٢٠ \div ٥}{٢,٠١٥ \div ٢٣} = \frac{١,٥٦٤}{٠,٠٨٧٦}$

$= ١٧,٨٥^{**}$

وهذه القيمة ذات دلالة عالية لأن $ف_{٠,٠١[٥ ، ٢٣]}$ لا تزيد عن ٣,٩ مما يشير إلى أن متوسط تكاليف الإنتاج – بعد استبعاد أثر مقادير المحاصيل السابقة – ليست متساوية فى القرى الست . ويمكننا إذا أردنا أن نضع هذه النتائج فى الجدول (١١ – ٤) الآتى .

الجدول (١١ – ٤)

اختبار ف للتغاير

مصدر الاختلاف	الاختلاف المشاهد ب	الانحدار حـ٢/أ	الاختلاف المعدل ب – حـ٢/أ	د ح	ط ٢	ف
بين الأقسام (القرى)	—	—	٧,٨٢٠	٥	١,٥٦٤	١٧,٨٥**
داخل الأقسام	١٥,١٦	١٣,١٤٥	٢,٠١٥	٢٣	٠,٠٨٧٦	
الكلى	٢٨,٩٣	١٩,٠٩٥	٩,٨٣٥	٢٨		

ملاحظة :

إذا أهملنا المتغير الملازم س وقمنا بتحليل التباين لقيم ص المشاهدة دون تعديل نجد من بيانات الجدول (١١ – ٣) أن

$$ف_{ى} = \frac{\text{التباين بين الأقسام}}{\text{التباين داخل الأقسام}} = \frac{١٣,٧٧ \div ٥}{١٥,١٦ \div ٢٤} = \frac{٢,٧٥٤}{٠,٦٣١٧}$$

$$= ٤,٣٦^{**} \quad \text{بدرجتى حرية ٥ ، ٢٤}$$

وبالرغم من أن هذه القيمة ذات دلالة عالية أيضا لأن $ف_{٠,٠١[٥ ، ٢٤]} = ٣,٩٠$ إلا أنها تقل كثيرا عن القيمة ١٧,٨٥ . هذا مع تذكر أن تحليل التباين يجزىء الاختلاف الكلى فى ص إلى المركبتين بين وداخل الأقسام ، أما تحليل التغاير فهو يجزىء البواقى من التحليل الشامل للانحدار .

(١١ - ٥) المقارنة بين المتوسطات المعدلة :

بعد تحليل التباين للقيم الصادية المعدلة يبقى أن نتدارس كيفية إجراء المقارنات بين متوسطات هذه القيم فى الأقسام المختلفة ، وهذا يتطلب أن نحسب هذه المتوسطات ثم نختبر دلالة الفروق بينها .

(ا) حساب المتوسطات المعدلة :

من الصيغة (٢) بالبند (١١ - ٢) نجد أن المتوسط المعدل $\overline{صَ_{و}}$ فى أى قسم يساوى المتوسط المشاهد المناظر $\overline{ص_{و}}$ مطروحا منه أثر الانحدار الخطى . أى أن

$$\overline{صَ_{و}} = \overline{ص_{و}} - ب\,(\overline{س_{و}} - \overline{\overline{س}}) \qquad (٩)$$

حيث ب معامل انحدار ص على س ويحسب من **داخل الأقسام** بالصيغة المعتادة للانحدار الخطى البسيط كالآتى - انظر الصيغة (٨) بالبند (٩ - ٣) .

$$ب = \frac{م\ ص\ (س ، ص)}{م\ م\ (س)} = \frac{ح_{٢}}{ا_{٢}} \qquad (١٠)$$

$$\text{ففى المثال : } ب = \frac{-٤٦,٦}{١٦٥,٢} = -٠,٢٨٢$$

من جدول البيانات (١١ – ٢) والصيغة (٩) نجد أن المتوسطات المعدلة هى :

$$\overline{\text{ص}}_{١} = ١,٨ + ٠,٢٨٢ \ (١,٢ - ٠,٥) = ١,٩٩٧٤$$

$$\overline{\text{ص}}_{٢} = ٠,٢ + ٠,٢٨٢ \ (٢,٦ - ٠,٥) = ٠,٧٩٢٢$$

$$\overline{\text{ص}}_{٣} = ١,٢ + ٠,٢٨٢ \ (-١,٦ - ٠,٥) = ٠,٦٠٧٨$$

وبالمثل نجد أن $\overline{\text{ص}}_{٤} = ٠,٣٩٧٤$ ، $\overline{\text{ص}}_{٥} = ١,٠٩٥$ ، $\overline{\text{ص}}_{٦} = ٠,٩١٠٢$

يلاحظ أن المجموع الكلى للقيم الصادية المعدلة يساوى المجموع الكلى للقيم الصادية المشاهدة وكلاهما يساوى ٢٩ . كما يلاحظ أن بعض المتوسطات صغرت والبعض الآخر كبر ، وأن الفرق بين أى متوسطين معدلين يقل عن الفرق بين المتوسطين المشاهدين المناظرين ، مما يشير إلى أن المتغير الملازم كان له تأثير فعلى على هذه المتوسطات .

(ب) اختبار دلالة الفروق بين أزواج المتوسطات المعدلة :

يلزمنا هنا إيجاد تقدير للخطأ المعيارى $\text{ع}_{\text{خ}}$ للفرق بين متوسطين معدلين ، بحيث ندخل فى اعتبارنا الخطأ المعيارى $\text{ع}_{\text{ص.س}}$ للتقدير من معادلة الانحدار . والصيغة التى نشتق منها الخطأ المعيارى المطلوب هى :

$$\text{ع}^{٢}_{\text{خ}} = \text{ع}^{٢}_{\text{ص.س}} \left(١ + \frac{\text{أ}_{١} \div (\text{ك} - ١)}{\text{أ}_{٢}}\right) \ \text{بدرجات حرية ن} - \text{ك} - ١ \qquad (١١)$$

حيث $\text{أ}_{١}$ = مجموع المربعات لقيم س محسوبا من بين أقسام المعالجة

، $\text{أ}_{٢}$ = مجموع المربعات لقيم س محسوبا من داخل أقسام المعالجة

ففى المثال ، وباستخدام الجدول (١١ – ٣) نجد أن

$$\text{ع}^{٢}_{\text{خ}} = ٠,٠٨٧٦ \left(١ + \frac{٨٦,٣ \div ٥}{١٦٥,٢}\right) = ٠,٠٩٦٧٥ \quad \text{بدرجات حرية ٢٣}$$

ونكون الآن مستعدين لإجراء المقارنات بين أزواج المتوسطات الصادية المعدلة باستخدام الأسلوب المبين بالبند (٨ – ٥) أو أى أسلوب مكافىء .

فمثلا للمقارنة بين المتوسطين المعدلين $\overline{ص_١}$ = ١,٩٩٧٤ ، $\overline{ص_٢}$ = ٠,٧٩٢٢ ومع ملاحظة أن مجموعى القيم الصادية فى القسمين (١) ، (٢) هما (بالضرب فى خمسة) ٩,٩٨٧ ، ٣,٩٦١ يمكن أن نستخدم الأسلوب الآتى :

$$م م (١ \text{ ضد } ٢) = \frac{٩,٩٨٧^٢ + ٣,٩٦١^٢}{٥} - \frac{١٣,٩٤٥^٢}{١٠} = ٣,٦٢٩٣$$

$$\therefore ف_ى = \frac{٣,٦٢٩٣ \div ١}{٠,٠٩٦٧٥} = ٣٧,٥١٢^{**} \qquad \text{بدرجتى حرية ١ ، ٢٣}$$

وهذه القيمة ذات دلالة عالية مما يجعلنا نرفض الفرض الصفرى عن تساوى متوسطى التكاليف فى القريتين (١) ، (٢) .

كما يمكننا هنا استخدام اختبار ت بالصيغة

$$ت = \frac{\overline{ص_١} - \overline{ص_٢}}{ع_خ \sqrt{\frac{١}{ن_١} + \frac{١}{ن_٢}}} \qquad \text{بدرجات حرية ٢٣}$$

فنجد أن $ت_ى$ = ٦,١٢٧ وهى أيضا ذات دلالة عالية ، مع ملاحظة أن مربع هذه القيمة وهو ٣٧,٥٤ يساوى قيمة $ف_ى$ = ٣٧,٥١٢ والفرق يرجع إلى أخطاء التقريب .

تمرين (١١ – ١)

فى جزء من تجربة عن تأثير نوعين من الأدوية فى علاج مرض الجذام كان الهدف مقارنة ثلاثة أنواع من المعالجة : $د_١$ ، $د_٢$ دواءان من صنف المضادات الحيوية ،

$د_٣$ دواء داخلى يتخذ كمراقبة . اختير عشرة مرضى للتجريب وحددت على كل منهم ٦ مواقع من الجسم يتراكم فيها ميكروب الجذام وقيست غزارة الجذام باختبارات معملية فى هذه المواقع قبل بداية التجربة (س) ثم بعد عدة شهور من العلاج (ص) ودونت النتائج فى الجدول الآتى .

الجدول (١١ - ٥)

المرضى	الدواء $د_١$ $س_١$	$ص_١$	$د_٢$ $س_٢$	$ص_٢$	$د_٣$ $س_٣$	$ص_٣$
(١)	١١	٦	٦	٠	١٦	١٣
(٢)	٨	٠	٦	٢	١٣	١٠
(٣)	٥	٢	٧	٣	١١	١٨
(٤)	١٤	٨	٨	١	٩	٥
(٥)	١٩	١١	١٨	١٨	٢١	٢٣
(٦)	٦	٤	٨	٤	١٦	١٢
(٧)	١٠	١٣	١٩	١٤	١٢	٥
(٨)	٦	١	٨	٩	١٢	١٦
(٩)	١١	٨	٥	١	٧	١
(١٠)	٣	٠	١٥	٩	١٢	٢٠
المجاميع	٩٣	٥٣	١٠٠	٦١	١٢٩	١٢٣
المتوسطات	٩,٣	٥,٣	١٠	٦,١	١٢,٩	١٢,٣

أجر تحليل التغاير لاختبار دلالة الفروق بين متوسطات غزارة الجذام فى المستويات الثلاثة للمعالجة ، بعد استبعاد أثر الاختلاف فى غزارة المرض قبل بدء المعالجة .

(١١ – ٦) تحليل التغاير فى التجارب ذوات العاملين ومتغير ملازم واحد :

النموذج الإحصائى هنا هو امتداد طبيعى للنموذج الإحصائى (٣) للتجارب ذوات العامل الواحد ، وهو يأخذ الصيغة الآتية :

$$\text{ص}_{\text{رو}} = \mu_{\text{و}} + \mu_{\text{ر}} + \beta(\text{س}_{\text{رو}} - \bar{\text{س}}) + \text{خ}_{\text{رو}} \qquad (\text{١٢})$$

ويسير التحليل بنفس الأسلوب مع بعض الإضافات والتعديلات التى يقتضيها وجود عامل تجريبى ثان .

مثال (١١ – ٢) :

فى تجربة لمقارنة مقادير المحاصيل الناتجة من ٦ أنواع من الذرة أخذت عينة عشوائية من ٢٤ حوضا زراعيا وزرعت عليها أنواع الذرة عشوائيا – أربعة أحواض لكل نوع – وقد نتجت البيانات المدونة بالجدول (١١ – ٦) الآتى حيث ص تعبر عن مقدار المحصول الناتج من الحوض ، س تعبر عن درجة خصوبة الحوض مقدرة بعدد النباتات التى كانت قائمة به . إن مقدار المحصول يكون واقعا تحت تأثير عاملين تجريبيين هما : الأحواض (٤ مستويات) وأنواع الذرة (٦ مستويات) ، غير أن المطلوب هنا اختبار ما إذا كان معدل المحصول يختلف باختلاف نوع الذرة (بعد استبعاد أثر الخصوبة) .

الحسابات التمهيدية :

نقوم بتحليل كل من م م (س) ، م م (ص) ، م ص (س ، ص) إلى ثلاث مركبات : بين الأعمدة وبين الصفوف والخطأ . أى أن هناك خطوة إضافية واحدة فى كل تحليل .

الجدول (١١ - ٦)

أنواع الذرة	الأحواض (١) س١	(١) ص١	(٢) س٢	(٢) ص٢	(٣) س٣	(٣) ص٣	(٤) س٤	(٤) ص٤	المجاميع س	المجاميع ص	المتوسطات س̄	المتوسطات ص̄
ا	٢٨	٢٠٢	٢٢	١٦٥	٢٧	١٩١	١٩	١٣٤	٩٦	٦٩٢	٢٤	١٧٣
ب	٢٣	١٤٥	٢٦	٢٠١	٢٨	٢٠٣	٢٤	١٨٠	١٠١	٧٢٩	٢٥,٥	١٨٢,٢٥
حـ	٢٧	١٨٨	٢٤	١٨٥	٢٧	١٨٥	٢٨	٢٢٠	١٠٦	٧٧٨	٢٦,٥	١٩٤, ٥
د	٢٤	٢١٠	٢٨	٢٣١	٣٠	٢٣٨	٣٠	٢٦١	١١٢	٩٣١	٢٨	٢٣٢,٧٥
هـ	٣٠	٢٠٢	٢٦	١٧٨	٢٦	١٩٨	٢٩	٢٢٦	١١١	٨٠٤	٢٧,٧٥	٢٠١
و	٣٠	٢٢٨	٢٥	٢٢١	٢٧	٢٠٧	٢٤	٢٠٤	١٠٦	٨٦٠	٢٦,٥	٢١٥
المجاميع	١٦٢	١١٦٦	١٥١	١١٨١	١٦٥	١٢٢٢	١٥٤	١٢٢٥	٦٣٢	٤٧٩٤	٢٦,٣٣	١٩٩,٧٥

مجـ مجـ س^{٢} = ١٦٨٢٤ ، مجـ مجـ ص^{٢} = ٩٧٦٢٨٠ ، مجـ مجـ س ص = ١٦٧٧٢٧

تحليل م م (س) :

ا = م م (الكلى) = مجـ مجـ س^{٢} − $\frac{م^{٢}}{ن}$

= ١٦٨٢٤ − $\frac{٦٣٢^{٢}}{٢٤}$ = ١٨١,٣٣٤ بدرجات حرية ن − ١ = ٢٣

ا$_{١}$ = م م (بين الأعمدة) = $\frac{١}{٦}$ (١٦٢^{٢} + ١٥١^{٢} + ١٦٥^{٢} + ١٥٤^{٢}) − $\frac{٦٣٢^{٢}}{٢٤}$

= ٢١,٦٦٧ بدرجات حرية ك − ١ = ٣

$$أ_١' = م م (بين الصفوف) = \frac{١}{٤} (٩٦^٢ + ١٠١^٢ + ... + ١٠٦^٢) - \frac{٦٣٢^٢}{٢٤}$$

$$= ٤٥,٨٣٤ \quad \text{بدرجات حرية } هـ - ١ = ٥$$

$$\therefore أ_٢ = م م (\text{الخطأ}) = ١٨١,٣٣٤ - (٢١,٦٦٧ + ٤٥,٨٣٤)$$

$$= ١١٣,٨٣٣ \text{ بدرجات حرية } (ك - ١)(هـ - ١) = ١٥$$

وبنفس الطريقة نحلل كلا من م م (ص) و م ص (س ، ص) ونضع النتائج فى الجدول الآتى حيث ك ترمز إلى عدد الأعمدة ، هـ ترمز إلى عدد الصفوف .

الجدول (١١ - ٧)

تحليل مجموعى المربعات ومجموع حواصل الضرب

مصدر التباين	درجات الحرية	م م (س)	م م (ص)	م ص (س ، ص)
بين الأعمدة (الأحواض)	ك - ١ = ٣	$أ_١$ = ٢١,٦٧	$ب_١$ = ٤٣٦,١٧	$حـ_١$ = ٨,٥٠
بين الصفوف (الأنواع)	هـ - ١ = ٥	$أ_١'$ = ٤٥,٨٣	$ب_١'$ = ٩٤٩٠,٠٠	$حـ_١'$ = ٥٥٩,٢٥
خطأ التجريب	(ك-١)(هـ-١)=١٥	$أ_٢$ = ١١٣,٨٣	$ب_٢$ = ٨٧٥٢,٣٣	$حـ_٢$ = ٩١٧,٢٥
أنواع + خطأ	٢٠	١٥٩,٦٦	١٨٢٤٢,٣٣	١٤٧٦,٥
الكلى	ن - ١ = ٢٣	أ = ١٨١,٣٣	ب = ١٨٦٧٨,٥٠	حـ = ١٤٨٥,٠٠

وستتبين أهمية السطر الإضافى (أنواع + خطأ) عند تكوين النسبة ف لاختبار المتوسطات المعدلة .

الخطوة الأولى : اختبار تأثير المتغير اللازم س على المتغير ص :

أى اختبار وجود علاقة خطية بين المتغيرين س ، ص ويتأتى هذا عن طريق الصيغة (٥) لاختبار ف مع ملاحظة درجات الحرية .

$$\text{ف} = \frac{\text{التباين المفسر}}{\text{التباين غير المفسر}} \quad \text{بدرجتى حرية ١ ، ن – ك – هـ} \qquad (١٣)$$

على أن يحسب البسط والمقام من **السطر الخاص بخطأ التجريب** . فى المثال نجد ما يأتى :

$$\text{الاختلاف المفسر} = \frac{\text{ح}_{٢}^{٢}}{\text{أ}_{٢}} = \frac{^{٢}٩١٧,٢٥}{١١٣,٨٣} = ٧٣٩١,٢٦٣٨$$

بدرجة حرية واحدة

$$\therefore \text{الاختلاف غير المفسر} = \text{ب}_{٢} - \frac{\text{ح}_{٢}^{٢}}{\text{أ}_{٢}} = ٨٧٥٢,٣٣ - ٧٣٩١,٢٦٣٨$$

$$= ١٣٦١,٠٦٦٢ \qquad \text{بدرجات حرية ١٤}$$

$$\therefore \text{ف}_{\text{ى}} = \frac{٧٣٩١,٢٦٣٨ \div ١}{١٣٦١,٠٦٦٢ \div ١٤} = \frac{٧٣٩١,٢٦٣٨}{٩٧,٢١٩٠}$$

$$= \overset{**}{٧٦,٠٢٧} \qquad \text{بدرجتى حرية ١ ، ١٤}$$

وهذه القيمة ذات دلالة عالية مما يدل على وجود تأثير كبير لخصوبة الأرض على معدل المحصول . ولذلك ينبغى استبعاد هذا الأثر قبل مقارنة متوسطات المحاصيل تحت تأثير أنواع الذرة .

الخطوة الثانية : اختبار دلالة الفروق بين المتوسطات المعدلة :

نستخدم الصيغة (٦) لاختبار ف مع ملاحظة درجات الحرية .

$$ف = \frac{\text{التباين المعدل (بين الأنواع)}}{\text{التباين المعدل للخطأ}} \quad \text{بدرجتى حرية ك-١ ، ن-ك -هـ} \quad (١٤)$$

ولقد سبق أن حسبنا فى الخطوة الأولى التباين المعدل للخطأ فهو التباين غير المفسر
١٣٦١,٠٦٦٢ ÷ ١٤ = ٩٧,٢١٩

أما التباين المعدل بين الأنواع فيحسب كالآتى :

التباين المعدل بين الأنواع = [الاختلاف المعدل (أنواع + خطأ) – الاختلاف المعدل للخطأ] مقسوما على درجات الحرية (١٥)

من السطر الإضافى بالجدول (١١ – ٧) نجد ما يلى

$$\text{الاختلاف المعدل (أنواع + خطأ)} = ١٨٢٤٢,٣٣ - \frac{{١٤٧٦,٥}^{٢}}{١٥٩,٦٦}$$

= ٤٥٨٧,٩٨٩ بدرجات حرية ١٩

ولكن الاختلاف المعدل للخطأ = ١٣٦١,٠٦٦٢ بدرجات حرية ١٤

∴ الاختلاف المعدل بين الأنواع = ٤٥٨٧,٩٨٩ – ١٣٦١,٠٦٦٢

= ٣٢٢٦,٩٢٢٨ بدرجات حرية ٥

∴ التباين المعدل بين الأنواع = ٣٢٢٦,٩٢٢٨ ÷ ٥ = ٦٤٥,٣٨٥

من الصيغة (١٤) ينتج أن :

$$ف_{ى} = \frac{٦٤٥,٣٨٥}{٩٧,٢١٩} = {٦,٦٣٨}^{**} \quad \text{بدرجتى حرية ٥ ، ١٤}$$

وهذه القيمة ذات دلالة عالية لأنها أكبر من $ف_{[١٤ ، ٥] ٠,٠١}$ التى لا تزيد عن ٥,٠٦ مما يشير إلى أن متوسطات المحاصيل (بعد استبعاد أثر الخصوبة) ليست جميعها متساوية عند الأنواع المختلفة من الذرة .

ملاحظة :

يمكن بنفس الطريقة اختبار ما إذا كان معدل المحصول يختلف باختلاف الأحواض (الأعمدة) .

(١١ – ٧) المقارنة بين أزواج المتوسطات المعدلة :

نستخدم نفس الأسلوب المقدم بالبند (١١ – ٥ – ب) ، فتحسب المتوسطات المعدلة من الصيغة (٩) وهى :

$$\overline{ص_{وَ}} = \overline{ص_{و}} - ب (\overline{س_{و}} - \overline{س})$$

حيث معامل الانحدار ب $= \dfrac{م\ ص\ (س ، ص)}{م\ م\ (س)} = \dfrac{ح_٢}{أ_٢} = \dfrac{٩١٧,٢٥}{١١٣,٨٢} = ٨,٠٥٨٨$

ومن هذه القيمة نتوصل إلى المتوسطات المعدلة الآتية :

$\overline{ص_{أ}} = ١٩١,٨$ ، $\overline{ص_{ب}} = ١٩١,٠$ ، $\overline{ص_{ح}} = ١٩٣,١$

$\overline{ص_{ء}} = ٢١٩,٣$ ، $\overline{ص_{هـ}} = ١٨٩,٦$ ، $\overline{ص_{و}} = ٢١٣,٦$

أما الخطأ المعيارى $ع_{خ}$ للفرق بين متوسطين معدلين فيحسب من الصيغة

$$ع^٢_{خ} = ع^٢_{ص.س} [١ + \frac{أ_١ \div (هـ - ١)}{أ_٢}] \text{ بدرجات حرية } ن - ك - هـ \quad (١٦)$$

حيث $أ_١$ = مجموع المربعات لقيم س محسوبا من بين الأنواع

، $ا_{٢}$ = مجموع المربعات لقيم س محسوبا من خطأ التجريب .

$$ع^{٢}_{ح} = ٩٧,٢١٩ \; (١ + \frac{٤٥,٨٣ \div ٥}{١١٣,٨٣})$$

$= ١٠٥,٠٤٨$ بدرجات حرية ١٤

وبهذه القيمة نكون قادرين على مقارنة ما نريد من أزواج المتوسطات الصادية المعدلة كالمعتاد .

يمتد تحليل التغاير إلى المواقف الأكثر تعقيدا . وكمثال لذلك التجارب ذوات العامل الواحد التى تشتمل على متغيرين ملازمين $س_{١}$ ، $س_{٢}$ يرتبطان خطيا بالمتغير الرئيسى ص ، حيث يأخذ النموذج الإحصائى الشكل الآتى :

$$ص_{ر و} = \mu_{و} + \beta_{١} (س_{١ر و} - \bar{س}_{١}) + \beta_{٢} (س_{٢ر و} - \bar{س}_{٢}) + خ_{ر و}$$

ويحتاج الأمر هنا إلى تحليل الانحدار المتعدد قبل القيام بتحليل التباين .

تمرين (١١ - ٢)

بالجدول الآتى مقادير المحاصيل (ص) لنبات فول الصويا فى الفدان ونسبة الإصابة (س) لساق النبات بمرض معين . استخدمت أربعة خطوط ا ، ب ، حـ ، ء للمقارنة وزرع بكل منها ٤ نباتات . المطلوب (١) توضيح أن هناك علاقة خطية سالبة بين الإصابة بالمرض ومقدار المحصول (٢) توضيح أن معدل المحاصيل يختلف من خط إلى آخر بعد استبعاد أثر الإصابة (٣) ايجاد المتوسطات المعدلة للمحاصيل والمقارنة بين كل زوج منها (٤) توضح أنه إذا لم يُستبعد أثر الإصابة فإن معدل المحاصيل لا يختلف من خط إلى آخر .

الجدول (١١ - ٨)

القطاعات	أ		ب		حـ		ى		المجاميع	
	$س_1$	$ص_1$	$س_2$	$ص_2$	$س_3$	$ص_3$	$س_4$	$ص_4$	س	ص
(١)	١٩,٣	٢١,٣	١٠,١	٢٨,٣	٤,٣	٢٦,٧	١٤,٠	٢٥,١	٤٧,٧	١٠١,٤
(٢)	٢٩,٢	١٩,٧	٣٤,٧	٢٠,٧	٤٨,٢	١٤,٧	٣٠,٢	٢٠,١	١٤٢,٣	٧٥,٢
(٣)	١,٠	٢٨,٧	١٤,٠	٢٦,٠	٦,٣	٢٩,٠	٧,٢	٢٤,٩	٢٨,٥	١٠٨,٦
(٤)	٦,٤	٢٧,٣	٥,٦	٣٤,١	٦,٧	٢٩,٠	٨,٩	٢٩,٨	٢٧,٥	١٢٠,٢
المجاميع	٥٥,٩	٩٧,٠	٦٤,٤	١٠٩,١	٦٥,٥	٩٩,٤	٦٠,٣	٩٩,٩	٣٤٦,١	٤٠٥,٤

مجـ مجـ س^{2} = ٦٤٦٥,٩٢٥٦، مجـ مجـ ص^{2} = ١٠٦٣١,٩٢٢ ، مجـ مجـ س ص = ٥٣٥٢,٠٥٨٧