الفصل الرابع عشر

الطرق غير البارامترية

NONPARAMETRIC METHODS

إن معظم اختبارات الفروض التي جاءت في الفصول السابقة كانت تتطلب افتراض أن للمجتمع الذى نعاين منه توزيعاً معتدلا أو يمكن تقريبه بتوزيع معتدل ، كما أن بعضها كان يتطلب افتراضات أخرى مثل تساوى التباينات أو استقلال العينات . وجدير بالذكر أن هذه الاختبارات يمكن الاطمئنان إليها حتي لو وجدت انحرافات بسيطة عن هذه الافتراضات غير أن هناك مواقف يستحيل فيها قبول مثل هذه الافتراضات ولهذا كان من الضرورى أن تنشأ أساليب أخرى تبني على افتراضات أقل صرامة . وقد عرفت هذه الأساليب بالطرق غير البارامترية أو بالطرق حرة التوزيع distribution-free methods وهى طرق يمكن تطبيقها على مدى واسع من التوزيعات دون أن تفترض توزيعاً محدداً لما تتناوله من مجتمعات . وتوصف هذه الطرق بأنها غير بارامترية لأن أغلبها لا يهتم باختبار أو تقدير بارامترات (أدلة) المجتمع .

وفضلا عن أن الطرق والاختبارات غير البارامترية تستخدم تحت شروط عامة للغاية وتعفيناً من القلق عن صحة الافتراضات فهى تتميز بعدة أمور منها :

(١) أنها عادة ما تكون أسهل في الفهم والتفسير من تلك الطرق القياسية التي تعمل كبديل لها .

(٢) أن ما تتطلبه من عمليات حسابية تكون عادة سهلة وسريعة .
(٣) أنها لا تشترط أن تكون البيانات كمية (عددية) بل يمكن أن تكون نوعية أو ترتيبية .

ولهذا شاع استخدام الطرق غير البارامترية بالرغم من أنها لا تعطى نفس القدر من المعلومات أو الدقة التي تعطيها الطرق البارامترية المناظرة لها فهى بصفة عامة أقل كفاءة منها . وإذا وجد موقف يمكن فيه تطبيق كلا الأسلوبين فينبغى دائماً استخدام الأسلوب البارامترى فهو الأكثر كفاءة .

وقد مر بنا مثالان للاختبارات غير البارامترية جاء أحدهما بالبند (٦ -- ٧) عند استخدام اختبار χ^2 ، وجاء الآخر في البندين (١٠ – ٧) و(١٠ -- ٨) عند دراسة معامل ارتباط الرتب (سبيرمان) ودلالته ، ونقدم فيما يلى ستة من الاختبارات الأخرى الشهيرة .

(١٤ – ١) اختبار التلاحقات (للكشف عن عشوائية العينة) : RUNS TEST

إن جميع طرق الاستدلال الإحصائي التي نوقشت في الفصول السابقة بنيت على افتراض أن العينات عشوائية وعلى أن التجارب التي نحصل منها على البيانات صممت على هذا الأساس . غير أن هناك حالات يصعب فيها تحديد مدى تحقق هذا الافتراض وينبغى حينئذ اختبار عشوائية العينة قبل التصدى لتحليل البيانات .

وتظهر هذه الحالات بصفة خاصة عندما نكون عاجزين كلياً أو جزئياً عن التحكم في اختيار العينة . فمثلا في تقدير معدل الوفاة من مرض معين لا مفر من الاعتماد على سجلات سابقة وهذه لا تشكل عينة عشوائية بالمعني الدقيق . كذلك الحال حين لا يكون لنا خيار إلا الاعتماد على أى سجلات متاحة لإعطاء تنبؤات عن الأحوال الجوية أو دراسة حوادث المرور أو حين نأخذ وحدات صناعية بحسب ترتيب إنتاجها .

ويعتمد اختبار عشوائية العينة الذى نقدمه هنا على نظرية تسمى بنظرية التلاحقات theory of runs التى تعتمد بدورها على الترتيب الذى سحبت به عناصر العينة . ويهدف الاختبار إلى الكشف عما إذا كان هذا الترتيب عشوائيا أو يتخذ نمطاً معيناً لا يمكن أن نعزوه إلى الصدفة .

اعتبر متتابعة تنقسم عناصرها إلى صنفين فقط . إن أى متتابعة جزئية تتألف من حد أقصي لعناصر متتالية من أحد هذين الصنفين تسمى **تلاحقة** . فمثلا إذا اخترنا ١٢ شخصاً وكان الحرف «ك» يرمز إلى أن الشخص « ذكر » والحرف «ث» يرمز إلى أن الشخص أنثي فإن المتتابعة .

ك ك ث ث ث ك ث ث ك ك ك ك

تشتمل على ٥ تلاحقات ، تتألف الأولى من اثنين من الكافات ونقول إن طولها اثنان،وتتألف الثانية من ثلاثة من الثاءات ونقول إن طولها ثلاثة ، وتتألف الثالثة من كاف واحدة .. .. وهكذا .

وسواء كانت البيانات نوعية أو كمية فإن اختبار التلاحقات يقسمها إلى صنفين متنافيين : ذكور أو إناث – وحدة معيبة أو غير معيبة – مريض أو غير مريض – فوق الوسيط أو تحت الوسيط .. وهكذا .

ليكن ن = حجم العينة ، س = عدد التلاحقات

، $ن_1$ = عدد المرات التي يظهر فيها الحرف الذى يرمز إلى أحد الصنفين .

، $ن_2$ = عدد المرات التي يظهر فيها الحرف الذى يرمز إلى الصنف الآخر .

فمثلا في متتابعة التلاحقات المذكورة : لدينا ن = ١٢ ، س = ٥ ، $ن_1$ = ٧ ، $ن_2$ = ٥

إن اختبار التلاحقات مؤسس على الفكرة الآتية . إذا كان بالعينة عدد قليل جداً من التلاحقات ، مثلا :

ك ك ك ك ك ك ك ك ث ث ث ث ث ث ث ث

فإننا نشك في وجود تجمعات معينة أو نمط معين pattern في عملية الاختيار إذ تشير هذه الحالة إلى أن عملية اختيار العينة لم تكن عشوائية بل تبدأ بالذكور ثم بالإناث .

كذلك إذا كان هناك عدد كبير جداً من التلاحقات ، مثلا

ك ث ك ث ك ث ك ث ك ث ك ث

فإننا نشك في وجود نوع من النمط الذى يتكرر دورياً وتشير هذه الحالة أيضاً إلى أن الاختيار لم يكن عشوائياً .

ولذلك يبني اختبار التلاحقات على المتغير العشوائي س الذى يعبر عن عدد التلاحقات في المتتابعة التي نتجت في عملية الاختيار . ولهذا المتغير توزيع معروف ، وسطه الحسابي وتباينه كالآتي :

$$\mu_{س} = \frac{٢ ن_١ ن_٢}{ن_١ + ن_٢} + ١ \qquad (١)$$

$$\sigma^{٢}_{س} = \frac{٢ ن_١ ن_٢ (٢ ن_١ ن_٢ - ن_١ - ن_٢)}{(ن_١ + ن_٢)^{٢} (ن_١ + ن_٢ - ١)} \qquad (٢)$$

ويمكن إثبات أنه إذا كانت كل من ن١ ، ن٢ لا تقل عن ١٠ فإن الإحصاءة

$$ص = \frac{س - \mu_{س}}{\sigma_{س}} \qquad (٣)$$

يكون توزيعها قريباً من التوزيع المعتدل المعيارى .

ونظرا لأن البيانات التي نحصل عليها تكون بيانات عن متغير وثاب س بينما

التوزيع المعتدل هو توزيع لمتغير متصل فإن الصيغة (٣) تصحح كالآتي تعويضاً عن هذا الاختلاف .

$$ص_{-} = \frac{(س_{-} \pm (\frac{1}{2})) - \mu_{س}}{\sigma_{س}} \qquad (٤)$$

وتؤخذ العلامة السالبة إذا كان عدد التلاحقات (س) في العينة يزيد عن الوسط الحسابي μ_{-} المحسوب من الصيغة (١) ، وتؤخذ العلامة الموجبة إذا كانت س تقل عن μ_{-} . هذا ويمكن الاستغناء عن هذا التصحيح وإهمال النصف إذا كانت العينة كبيرة .

وحين تكون كل من $ن_{١}$ ، $ن_{٢}$ أكبر أو تساوى عشرة نكون أمام واحد من الحالات الثلاثة الآتية :

(أ) إذا كان الفرض الصفرى هو أن العينة عشوائية والفرض الآخر هو العكس فإننا نستخدم اختباراً ذا جانبين ونرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ إذا وقعت القيمة المشاهدة للإحصاءة (٤) خارج المنطقة :

$$(١,٩٦ > ص > -١,٩٦) \qquad (٥)$$

ونرفضه عند المستوى ٠,٠١ إذا وقعت خارج المنطقة :

$$(٢,٥٨ > ص > -٢,٥٨) \qquad (٦)$$

وهذا بحسب ما جاء بالمثال (٤ – ٣) في الفصل الرابع . ويمكن أن نوجد المناطق المناظرة لأى مستوى دلالة آخر من جدول المساحات أسفل المنحني المعتدل المعيارى .

(ب) أما إذا كان عدد التلاحقات صغيراً وأردنا اختبار الفرض عن وجود نمط يفسر قلة هذه التلاحقات فإن الاختبار في هذه الحالة يكون ذا جانب واحد هو الجانب الأيسر ونرفض الفرض الصفرى عن عشوائية العينة لصالح هذا الفرض عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ إذا كانت القيمة المشاهدة للإحصاءة (٤) أقل من ــ ١,٦٤ ونرفضه عند مستوى الدلالة ٠,٠١ إذا كانت تقل عن ــ ٢,٣٣ . راجع المثال (٤ ــ ٣) .

(جـ) كذلك إذا كان عدد التلاحقات كبيراً وأردنا اختبار الفرض عن وجود نمط دورى فإن الاختبار يكون أيضاً ذا جانب واحد هو الجانب الأيمن ونرفض الفرض الصفرى عن عشوائية العينة لصالح هذا الفرض عند المستوى ٠,٠٥ (أو ٠,٠١) إذا كانت القيمة المشاهدة للإحصاءة (٤) تزيد عن ١,٦٤ (أو ٢,٣٣) .

مثال (١٤ ــ ١) :

أخذت عينة من ٣٠ شجرة دَرْداء كانت قد زرعت من عدة سنوات على طريق زراعى فوجدت المتتابعة الآتية ، حيث ص تعبر عن أن الشجرة مصابة بمرض معين ، ح تعبر عن أنها غير مصابة . اختبر عند مستوى الدلالة ٠,٠١ الفرض بوجود تجمعات أى أن الأشجار المصابة تتجمع معاً .

ح ح ح ح ح ص ص ص ح ح ح ح ح ح ح ح ح ح ح ص ص ح ح ص ص ص ص ص ح ح ح ح

الحل :

لدينا س = ٧ (عدد التلاحقات) ، $ن_1$ = ٢٠ (عدد الأشجار السليمة) ،

$ن_2$ = ١٠ (عدد الأشجار المصابة) .

نظراً لأن كلا من $ن_1$ ، $ن_2$ لا تقل عن عشرة ، يمكن اعتبار توزيع الإحصاءة (٤) معتدلا معيارياً .

من (١) : $\mu_{س} = \frac{٢ \times ٢٠ \times ١٠}{٢٠ + ١٠} + ١ = ١٤,٣٣$

من (٢) : $\sigma_{س} = \sqrt{\frac{٢ \times ٢٠ \times ١٠ (٢ \times ٢٠ \times ١٠ - ٢٠ - ١٠)}{(١ - ١٠ + ٢٠) \times ٣٠^{٢}}} = ٢,٣٨$

بالتعويض في (٤) : ص $= \frac{(٧ + \frac{١}{٢}) - ١٤,٣٣}{٢,٣٨} = -٢,٨٧$

الفرض الصفرى : العينة عشوائية .

الفرض الآخر : يوجد تجمعات . (وإذن الاختبار ذو جانب واحد هو الجانب الأيسر)

بما أن $-٢,٨٧ < -٢,٣٣$ نرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠١ عن عشوائية العينة ويكون لدينا دليل قوى على أن الأشجار المصابة تقع في تجمعات غير عشوائية .

حالة البيانات الكمية .

لاختبار عشوائية العينة في حالة البيانات الكمية كأن يكون لدينا متتابعة تعبر عن أوزان حيوان ينمو سجلت فى فترات يومية أو أسبوعية ، نستخدم نفس الأسلوب السابق إلا أننا في هذه الحالة نقسم ما لدينا من قيم إلى صنفين بحسب وقوعها **فوق الوسيط أو تحت الوسيط** فنضع حرفاً ا مثلا (أو علامة +) لكل قيمة تزيد عن الوسيط وحرفاً ب (أو العلامة -) لكل قيمة تقل عن الوسيط مع الاحتفاظ بترتيب هذه القيم . وإذا وجدت قيم تساوى الوسيط فإنها تهمل وكأنها لم تكن .

(نذكر أنه لإيجاد الوسيط لمجموعة من الأعداد نرتب هذه الأعداد تصاعدياً أو تنازلياً ثم نأخذ العدد الذى في الوسط إذا كان عدد هذه الأعداد فردياً ، أو متوسط العددين الأوسطين إذا كان عدد الأعداد زوجياً) .

إن طريقة التلاحقات أعلى وأسفل الوسيط تفيد على وجه الخصوص في حالتين رئيسيتين أولهما اختبار الاتجاهات وثانيهما اختبار الأنماط الدورية . فإذا بدأت متتابعة التلاحقات بحروف أغلبها ا ثم بحروف أغلبها ب فإن هناك اتجاهاً إلى أسفل ، وإذا بدأت بحروف أغلبها ب ثم بحروف أغلبها ا فإن هناك ميلا إلى أعلى . أما إذا كان الحرفان ا ، ب يتبادلان بشكل منتظم فإن هذا يشير إلى وجود نمط دورى .

مثال (١٤ - ٢) :

أخذ قطاع على أرض متملحة ، وعند نقط محددة منه قدرت نسب الغطاء النباتي لنوع من النبات بعرض ٥ سم من القطاع . سجلت ٤٠ من هذه النسب بالترتيب كما يلى :

٢٤	٢٧	٢٧	٣٣	٢٨	٢١	١٨	٣٠	٣٥	٢٦	٢٧
٢٤	٢٩	٣٢	٢٣	١٩	٣١	٢٨	٢٨	٢٦	٢٤	١٩
١٤	٢٢	٢٣	٢٢	٢٣	٢٨	١٧	٢١	٢٣	١٣	٢٤
٢٨	٢٠	١٨	٢١	٢١	١٠	١٧				

اختبر ما إذا كان هناك نمط تجمع للغطاء النباتي .

الحل :

الوسيط في هذه العينة = $\frac{١}{٢}$(٢٣ + ٢٤) = ٢٣,٥

(يلاحظ أن إيجاد الوسيط يستلزم أولا ترتيب الأعداد المعطاة تصاعديا أو

تنازليا.) بوضع الرمز ا بدلا من أى عدد يزيد عن ٢٣,٥ والرمز ب بدلا من أى عدد يقل عن ٢٣,٥ نحصل على المتتابعة الآتية :

أ أ أ أ أ ب ب أ أ أ أ أ أ أ ب ب أ أ أ أ أ ب ب ب ب ب ب
أ ب ب ب ب أ أ ب ب ب ب ب ب

يبدو أن القيم الأكبر من الوسيط تميل إلى التجمع في أحد جانبي المتتابعة كما تميل القيم الأصغر من الوسيط إلى التجمع في الجانب الآخر غير أن الحكم الموضوعى على ذلك يبني على اختبار التلاحقات كما يلى :

عدد التلاحقات س = ١٠ ، ن$_{١}$ = ٢٠ ، ن$_{٢}$ = ٢٠

من (١) $\mu_{س}$ = $\frac{٢ \times ٢٠ \times ٢٠}{٢٠ + ٢٠}$ + ١ = ٢١

من (٢) $\sigma^{٢}_{س}$ = $\frac{٢ \times ٢٠ \times ٢٠ (٢ \times ٢٠ \times ٢٠ - ٢٠ - ٢٠)}{٤٠ \times ٤٠ (٤٠ - ١)}$ = ٩,٧٤٣٦

∴ $\sigma_{س}$ = ٣,١٢

من (٤) : ص = $\frac{١٠ + ٠,٥ - ٢١}{٣,١٢}$ = −٣,٣٦٥

الفرض الصفرى : العينة عشوائية (لا يوجد أى نمط)
الفرض الآخر : هناك نمط تجمع ، وإذن الاختبار ذو جانب واحد .
بما أن − ٣,٣٦٥ أصغر من − ٢,٣٣ نرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠١ ونحكم بأن هناك نمط تجمع للغطاء النباتي .

حالة العينات الصغيرة :

إذا كان أحد العددين $ن_1$ ، $ن_2$ أو كلاهما أصغر من ١٠ فلا يجوز التقريب بالتوزيع المعتدل المعيارى . وفي هذه الحالة نستخدم جداول خاصة كالجدول (١٣) بملحق هذا الكتاب الذى يعطى احتمال أن تقل عدد التلاحقات عن عدد معين $س$ (على أساس صحة الفرض الصفرى عن عشوائية العينة) عند زوج مرتب من الأعداد ($ن_1$ ، $ن_2$) أى يعطى الاحتمال :

$ل (س \leq س_ف | صحيح)$ عند ($ن_1$ ، $ن_2$) وحيث $ن_1 < ن_2$

وقد أعد هذا الجدول بحيث يكون الإحداثي الأول $ن_1$ في الزوج المرتب ($ن_1$ ، $ن_2$) أصغر من الإحداثي الثاني $ن_2$ ، أى أننا نرمز بالرمز $ن_1$ لعدد مرات ظهور الحرف الذى يتكرر أقل سواء كان هذا الحرف هو ا أو ب . أما إذا كان $ن_1 = ن_2$ فلا يوجد أى شرط . ونرفض الفرض الصفرى عن عشوائية العينة عند المستوى α (٠,٠٥ مثلا) إذا كان الاحتمال الناتج يقل عن α وإلا نقبل الفرض الصفرى .

مثال (١٤ - ٣) :

ضبطت آلة لكى تصب مقداراً معيناً من سائل ما في كل وعاء يمر تحتها . وجد أنه في ١٥ وعاء متتالياً كانت مقادير السائل باللترات كالآتي :

٣,٦	٣,٩	٤,١	٣,٦	٣,٨	٣,٧	٣,٤	٤,٠
٣,٨	٤,١	٣,٩	٤,٠	٣,٨	٤,٢	٤,١	

هل نستطيع القول بأن المقادير التي توزعها الآلة تتغير عشوائياً ؟

الحل :

الوسيط = ٣,٩

بوضع ا بدلا من كل عدد يزيد عن ٣,٩ ، ب بدلا من كل عدد يقل عن ٣,٩ وإهمال العددين المساويين للعدد ٣,٩ نحصل على المتتابعة الآتية :

ب أ ب ب ب ب أ ب أ أ ب أ أ

لدينا س = ٨ (عدد التلاحقات) ، $ن_{١}$ = ٦ ، $ن_{٢}$ = ٧

مع ملاحظة أن $ن_{١}$ أصغر من $ن_{٢}$ وأن كلا منهما أصغر من ١٠

من الجدول (١٣) عند ($ن_{١}$ ، $ن_{٢}$) = (٦ ، ٧) ، س = ٨ نجد أن :

ل (س $\geqslant$ ٨ | ف صحيح) = ٠,٧٣٣

وهذا الاحتمال يزيد عن ٠,٠٥ ولذلك نقبل الفرض الصفرى أن حدود المتتابعة تتغير عشوائياً .

(١٤ - ١ - ١) تطبيق آخر لاختبار التلاحقات :

يستخدم اختبار التلاحقات في الكشف عن دلالة تأثير معالجة ما على متغير ما كما يتبين من المثال الآتي .

مثال (١٤ - ٤) :

لمعرفة تأثير هورمون ما على أطوال براعم أحد النباتات أخذت عينة عشوائية من ٢٢ من هذا النبات وقسمت عشوائيا إلى قسمين بكل منهما ١١ نباتا ووضعت النباتات تحت نفس الظروف فيما عدا أن نباتات أحد القسمين عولجت بالهورمون وتركت نباتات القسم الآخر دون معالجة (مجموعة مراقبة) . وبعد أسبوعين وجد أن أطوال البراعم بالملليمترات كالآتي :

المجموعة المعالجة : ٢٦ ٢٨ ٣٧ ٤١ ٥٧ ٥٨ ٦٧ ٧٨ ٨٠ ١٢١ ١٢٢

مجموعة المراقبة : ١٥ ٣٠ ٣٠ ٦٥ ٩١ ١٠٣ ١٣٢ ١٣٥ ١٣٧ ١٤١ ١٩٨

ابحث ما إذا كان الهورمون يعيق نمو براعم هذا النبات .

الحل :

نضم جميع القيم المشاهدة في المجموعتين في متتابعة واحدة ونكتب عناصر هذه المتتابعة بعد ترتيبها ترتيبا تصاعديا ثم نضع الحرف ا تحت كل عنصر من عناصر المجموعة المعالجة والحرف ب تحت كل عنصر من عناصر مجموعة المراقبة كما يلى :

١٥ ٢٦ ٢٨ ٣٠ ٣٠ ٣٧ ٤١ ٥٧ ٥٨ ٦٥ ٦٧ ٧٨
ب أ أ ب ب أ أ أ أ ب أ أ

٨٠ ٩١ ١٠٣ ١٢١ ١٢٢ ١٣٢ ١٣٥ ١٣٧ ١٤١ ١٩٨
أ ب ب أ أ ب ب ب ب ب ب

الفرض الصفرى : المعالجة ليس لها تأثير في نمو البراعم . أى أن البيانات مأخوذة من مجتمع واحد وبالتالى تتتابع الرموز ا ، ب عشوائيا .

الفرض الآخر : المعالجة تعيق نمو البراعم ، وإذن الاختبار ذو جانب واحد .

إذا كان الفرض الصفرى صحيحا فإن جميع المتتابعات من الرمزين ا ، ب التي يمكن أن تسفر عنها التجربة تكون متساوية الاحتمال ويتوزع هذان الرمزان عشوائيا . أما إذا كانت المجموعتان هما عينتان من مجتمعين مختلفين نتيجة لتأثير المعالجة بالهورمون فإن عناصر كل من المجموعتين تميل إلى التجمع معا ويكون عدد التلاحقات قليلا . وعلى ذلك يمكن استخدام اختبار التلاحقات بالأسلوب السابق بيانه في الأمثلة الثلاثة السابقة .

عدد التلاحقات س = ٩ ، $ن_١$ = ١١ ، $ن_٢$ = ١١

من (١) : $\mu_س$ $= \frac{٢ \times ١١ \times ١١}{٢٢} + ١ = ١٢$

من (٢) : $\sigma_{س}^{٢}$ $= \frac{٢ \times ١١ \times ١١ \ (٢٢ - ٢٤٢)}{٢١ \times ٢٢ \times ٢٢} = ٥,٢٣٨$

ومنها $\sigma_{س}$ $= ٢,٢٨٨٧$

من (٤) : ص $= \frac{٩ + ٠,٥ - ١٢}{٢,٢٨٨٧} = -٠,٨٦٦$

بما أن – ٠,٨٦٦ أكبر من – ١,٦٤ لا يكون لدينا دليل ضد الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ وإذن لا نستطيع القول من واقع هذه التجربة أن الهرمون يعيق نمو براعم النبات .

تمارين (١٤ – ١)

(١) المتتابعة الآتية تعبر عن الوحدات المعيبة أ والوحدات غير المعيبة ب التي صنعتها آلة ما بالترتيب :

ب ب أ أ أ ب ب ب أ أ ب ب ب ب ب ب أ أ أ ب ب ب أ
ب ب ب ب ب أ أ أ

اختبر عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ ما إذا كان بالإمكان النظر إلى هذه البيانات على أنها عينة عشوائية .

(٢) الأعداد الآتية هى أعداد الطلاب الذين تغيبوا عن مدرسة في ٢٤ يوماً متتالياً

٢٩ ٢٥ ٣١ ٢٨ ٣٠ ٢٨ ٣٣ ٣١ ٣٥ ٢٩ ٣١ ٣٣
٣٥ ٢٨ ٣٦ ٣٠ ٣٣ ٢٦ ٣٠ ٢٨ ٣٢ ٣١ ٣٨ ٢٧

اختبر العشوائية عند مستوى الدلالة ٠,٠١

(٣) اختبر عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ ما إذا كانت قيم العينة الآتية مرتبة ترتيباً عشوائياً :

٥٧	٣٣	٦٣	٨٤	١٦	٥٥	١٢	١٦	٣	٩٧
٣١	١٦	٩٩	٥٦	٧٠	٣٧	٥٢	٢٣	٢٦	١٨

(١٤ - ٢) اختبار الإشارة : SIGN TEST

حين نستخدم اختبار ت لاختبار فرض عن الوسط الحسابي لمجتمع (البند ٦ - ٦ - ١) وعند اختبار فرض تساوى متوسطى مجتمعين (البند ٦ - ٦ - ٣) نشترط أن تكون المجتمعات معتدلة . أما إذا كان هذا الشرط غير متحقق ولا يمكن الدفاع عنه فلا مفر من الالتجاء إلى الاختبارات غير البارامترية . ولعل أسهل وأسرع اختبار لذلك هو الاختبار المعروف باختبار الإشارة ، وهو يبنى على توزيع ذى الحدين .

(١٤ - ٢ - ١) اختبار فرض عن متوسط مجتمع :

نفرض أننا حصلنا على عينة عشوائية من مجتمع متصل ونريد أن نختبر ما إذا كان لهذا المجتمع وسط حسابي معين $\mu = ا$. يبدأ اختبار الإشارة بوضع الإشارة + بدلا من كل قيمة في العينة تزيد عن ا ووضع الاشارة - بدلا من كل قيمة تقل عن ا وإهمال القيم التي تساوى ا . إذا كان الفرض الصفرى $\mu = ا$ صحيحاً وكان المجتمع متماثلا نتوقع أن يكون عدد الإشارات الموجبة مساوياً على وجه التقريب لعدد الإشارات السالبة . أما إذا بدا أن أحدهما أكبر مما ينبغى فإننا نرفض ذلك الفرض الصفرى .

ليكن $ن_+$ ، $ن_-$ رمزين لعددى الإشارات الموجبة والسالبة على الترتيب . إذا كان الفرض صحيحاً فإن احتمال أن تزيد أى قيمة مشاهدة عن العدد ا يساوى

احتمال أن تقل عن ا وعلى ذلك فإن كلا الاحتمالين يساوى $\frac{1}{2}$ ولذلك فإن اختبار الإشارة يعرف متغيراً عشوائياً س يعبر عن عدد الإشارات الموجبة (أو السالبة) في ن من العناصر . وإذا كانت القياسات مستقلة يكون لهذا المتغير توزيع ذى الحدين دليلاه ن ، $\frac{1}{2}$ حيث ن هو حجم العينة بعد استبعاد القيم التي أهملت . ولوضع قاعدة روتينية لهذا الاختبار نرمز إلى قيم هذا المتغير بالرمز س. حيث س. أصغر العددين ن+ ، ن- أى أن :

$$س. = \text{أصغر } (ن_+ ، ن_-)$$

ثم نحسب احتمال أن يأخذ المتغير س قيماً تساوى أو تقل عن القيمة المشاهدة س. أى نحسب الاحتمال :

$$ل (س \leqslant س.) \qquad (٧)$$

على أساس صحة الفرض الصفرى أن ح = $\frac{1}{2}$ ن (وبالتالى μ = ا) . وإذا كانت α هى مستوى الدلالة الذى اخترناه فإننا نرفض الفرض الصفرى عند هذا المستوى في حالة الاختبار ذى الجانب الواحد إذا كان :

$$ل (س \leqslant س.) < \alpha \qquad (٨)$$

ونقبله إذا زاد هذا الاحتمال عن α أو كان مساوياً لها . وفي حالة الاختبار ذى الجانبين نرفض الفرض الصفرى إذا كان :

$$٢ ل (س \leqslant س.) < \alpha \qquad (٩)$$

وحين يكون حجم العينة صغيراً (ن ⩽ ١٥) نوجد الاحتمال (٧) مباشرة من أحد جداول احتمالات توزيع ذى الحدين كالجدول (٣) بملحق هذا الكتاب ، أما إذا كانت ن أكبر من ١٥ ولا يتسع لها هذا الجدول فإننا نستخدم تقريب التوزيع المعتدل لتوزيع ذى الحدين الذي مر بنا بالبند (٤ - ٦) إذا توفرت شروطه ، ونستخدم نفس مناطق الرفض كما في البند (١٤ - ١) الأخير .

مثال (١٤ - ٥) :

الأعداد الآتية هى ١٥ قياساً لمعدلات الأوكتين في نوع من الجاسولين :

٩٧ ٩٤,٧ ٩٦,٨ ٩٥,٥ ٩٦,٣ ٩٩,٨ ٩٦,٩ ٩٤,٨ ٩٢,٧
٨٦,٦ ٩٥,٦ ٩٧,١ ٩٧,٧ ٩٨,٠ ٩٤,٤

اختبر عند مستوى الدلالة ٠,٠١ الفرض الصفرى أن متوسط معدل الأوكتين هو μ = ٩٨ ضد الفرض الآخر أن μ < ٩٨ .

الحـــل :

باستخدام قاعدة الإشارات سابقة الذكر نحصل على الإشارات الآتية وعددها ١٤ إشارة بعد إهمال العدد الذى يساوى ٩٨ .

- - - - + - - - + - - - - -

إذن $ن_+$ = ٢ ، $ن_-$ = ١٢ من ١٤ إشارة .
نأخذ س = ٢ (أصغر العددين ٢ ، ١٢) .

نختبر الفرض أن توزيع عدد الإشارات الموجبة هو توزيع ذى الحدين دليلاه ١٤ ، ٠,٥ . إذا كان هذا الفرض صحيحاً نجد من الجدول (٣) عند ن = ١٤ ، ح = $\frac{١}{٢}$ أن :

ل (س $\leq$ ٢) = ٠,٠٠١ + ٠,٠٠٦ = ٠,٠٠٧

وهذا الاحتمال أصغر من مستوى الدلالة ٠,٠١ ولهذا نرفض الصفرى ونستنتج أن متوسط معدل الأوكتين يقل عن ٩٨ .

ملاحظة (١) :

استخدام تقريب التوزيع المعتدل :

في هذا المثال نظراً لأن ن ح = ن (١ − ح) = ١٤ × $\frac{١}{٢}$ = ٧ وهذا العدد أكبر من خمسة ، وحسب الإحصاءة (٦) بالبند (٦ − ٤) يمكن تقريب توزيع ذى الحدين الذى لدينا بالتوزيع المعتدل عن طريق الإحصاءة :

$$ص = \frac{(س \pm \frac{١}{٢}) - \mu}{\sigma}$$

حيث μ = ن ح = ٧

$$\sigma = \sqrt{\text{ن ح (١ − ح)}} = \sqrt{١٤ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}} = ١,٨٧١$$

وعلى أساس صحة الفرض نجد أن :

$$ص = \frac{(٢ + \frac{١}{٢}) - ٧}{١,٨٧١} = -٢,٤٠٦$$

وهذا العدد يقل عن − ٢,٣٣ وإذن نرفض الفرض الصفرى عند المستوى ٠,٠١

ملاحظة (٢) :

الواقع أن الذى يختبره اختبار الإشارة هو الوسيط ولكن نظرا لأننا افترضنا أن المجتمع متماثل فإن الوسيط يكون هو نفسه الوسط الحسابى ، أما إذا لم يكن المجتمع متماثلا فإن اختبار الإشارة يكون اختباراً عن **الوسيط** وليس عن الوسط الحسابي .

(١٤ − ٢ − ٢) مقارنة متوسطى مجتمعين غير معتدلين :

نفرض أن لدينا مجموعة من أزواج المشاهدات (س$_{ر}$ ، ص$_{ر}$) من مجتمعين

متصلين غير معتدلين ونريد اختبار ما إذا كان لهذين المجتمعين وسطان حسابيان متساويان ($\mu_1 = \mu_2$). بنفس أسلوب البند السابق ، يبدأ اختبار الإشارة بوضع الإشارة + أو الإشارة − لكل فرق $ف_ر = س_ر - ص_ر$ بحسب كون هذا الفرق موجباً أو سالباً ، وإهمال الحالات التى ينعدم فيها هذا الفرق .

إذا كان الفرض الصفرى $\mu_1 = \mu_2$ صحيحاً وكان كل من المجتمعين **متماثلا** ينبغى أن يكون مجموع الإشارات الموجبة في العينة مساوياً بالتقريب لمجموع الإشارات السالبة ويكون احتمال أن يكون الفرق ف موجباً يساوى احتمال أن يكون هذا الفرق سالباً ويكون كلا الاحتمالين مساوياً للعد ح = $\frac{1}{2}$ ولذلك فإن الاختبار يعرف متغيراً عشوائياً له توزيع ذى الحدين دليله ح = $\frac{1}{2}$ بشرط صحة الفرض الصفرى . ويسير الاختبار بنفس الأسلوب المذكور في البند السابق .

مثال (١٤ − ٦) :

في دراسة لمعرفة تأثير نظام جديد في المرور جمعت البيانات الآتية عن عدد الحوادث التي وقعت في ١٢ تقاطعاً من التقاطعات الخطرة (على فرض أنها عينة عشوائية) خلال ٣ شهور قبل النظام الجديد و٣ شهور بعده :

قبل النظام الجديد : ٣ ٥ ٢ ٣ ٣ ٠ ٤ ١ ٥ ٤ ١

بعد النظام الجديد : ١ ٢ ٠ ٢ ٢ ١ ٢ ٣ ٣ ٣ ٢ ٠

ابحث عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ ما إذا كان النظام الجديد له أثر في تقليل الحوادث عند تلك التقاطعات .

الحل :

باستخدام قاعدة الإشارات للفروق نحصل على الإشارات الآتية وعددها ١٢

+ + + + − + − + + + + +

$ن_+ = ١٠$ ، $ن_- = ٢$ من ١٢ إشارة

الفرض الصفرى ف$_{0}$: $\mu_{1} = \mu_{2}$ متوسط عدد الحوادث واحد في الحالتين

ف$_{1}$: $\mu_{1} > \mu_{2}$

نأخذ س$_{0}$ = ٢ (أصغر العددين ١٠ ، ٢)

نختبر الفرض أن توزيع عدد الإشارات السالبة هو توزيع ذى الحدين دليلاه ١٢ ، $\frac{1}{2}$. إذا كان هذا الفرض صحيحاً نجد من الجدول (٢) عند ن = ١٢ ، ح = $\frac{1}{2}$ أن :

ل (س $\leq$ ٢) = ٠,٠٠٣ + ٠,٠١٦ = ٠,٠١٩

وهذا الاحتمال أقل من ٠,٠٥ وإذن نرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ لصالح الفرض الآخر ونحكم بأن النظام الجديد قد أثر في تقليل عدد الحوادث عند التقاطعات الخطرة .

تمارين (١٤ - ٢)

(١) في إحدى التجارب المعملية نتجت ١٨ قيمة لمعامل الاحتكاك بين الجلد وأحد المعادن وكانت هذه القيم كالآتي :

٠,٥٩ ٠,٤٨ ٠,٥٣ ٠,٥٧ ٠,٥٥ ٠,٦١ ٠,٥٦ ٠,٦٠ ٠,٥٥

٠,٥٨ ٠,٥٢ ٠,٥٥ ٠,٥٦ ٠,٥١ ٠,٥٧ ٠,٥٦ ٠,٥٩ ٠,٥٨

استخدام اختبار الإشارة عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ لاختبار الفرض الصفرى أن متوسط معامل الاحتكاك μ = ٠,٥٥ ضد الفرض الآخر أن $\mu \neq$ ٠,٥٥

(٢) الآتي هى أعداد الحفريات التي وجدها اثنان من علماء الآثار في بقايا مساكن أثرية على سفح جبل في ٣٠ يوماً :

العالم الأول : ١ ٠ ٢ ٣ ١ ٠ ٢ ٢ ٣ ٠ ١ ١ ٤ ١ ٢

العالم الثانى : ٠ ٠ ١ ٠ ٢ ٠ ٠ ١ ١ ٢ ١ ٠ ٢ ١ ١

العالم الأول : ١ ٣ ٥ ٢ ١ ٣ ٢ ٤ ١ ٣ ٢ ٠ ٢ ٤ ٢

العالم الثانى : ٠ ٢ ٢ ٦ ٠ ٢ ٣ ٠ ٢ ١ ٠ ١ ٠ ١ ٠

استخدم اختبار الإشارة عند مستوى الدلالة ٠,٠١ لاختبار الفرض الصفرى أن العالمين على نفس الكفاءة في العثور على الحفريات ضد الفرض الآخر أن العالم الأول أفضل .

(٣) أعطى كل من ١٠ مرضي نوعان من المهدئات ا ، ب والجدول الآتي يعرض الزيادة في مدة النوم بالساعات . هل الفرق بين نوعى المهدئات ذو دلالة ؟

أ : ١,٩ ٠,٨ ١,١ ٠,١ -٠,١ ٤,٤ ٥,٥ ١,٦ ٤,٦ ٣,٤

ب : ٠,٧ -١,٦ -٠,٢ -١,٢ -٠,١ ٣,٤ ٣,٧ ٠,٨ ٠,٠ ٢,٠

(١٤ - ٣) اختبار ويلكوكسن للمقارنات التزاوجية :

WILCOXON TEST FOR PAIRED COMPARISONS

إن اختبار الإشارة الذى ورد بالبند (١٤ - ٢ - ٢) يحدد أياً من المجتمعين المأخوذة منهما العينات هو الأكبر في المتوسط ولكنه لا يحدد مقدار الفرق بينهما . والاختبار الذى يحدد كلا الاتجاه والمقدار هو ذلك المعروف باختبار ويلكوكسن للمقارنات التزاوجية ، وهو فضلا عن هذا أكثر حساسية من اختبار الإشارة في الكشف عن وجود فرق بين متوسطى مجتمعين توزيعاهما مجهولان . وتتضح أهمية هذا الاختبار في الحالات التي لا تنطبق فيها شروط الاختبار المقدم في البند (٨ - ٧) .

نفرض أننا حصلنا على ن من أزواج القيم ($س_ر$ ، $ص_ر$) . وليكن $ف_ر = س_ر - ص_ر$ هى الفروق بين هذه الأزواج . لاختبار الفرض الصفرى $\mu_1 = \mu_2$ عن تساوى متوسطى المجتمعين يبدأ اختبار ويلكوكسن بإهمال الفروق المساوية للصفر

ثم ترتيب الفروق الباقية بصرف النظر عن إشاراتها أى بحسب القيم المطلقة لهذه الفروق ، فتعطى الرتبة ١ لأصغر فرق في القيمة المطلقة وتعطى الرتبة ٢ للفرق التالى في الصغر وهكذا . وحين تتساوى القيم المطلقة لاثنين أو أكثر من هذه الفروق يعطى لكل منهما متوسط الرتب التي كانت ستعطى لو كانت هذه الفروق متميزة .

إذا كان الفرض الصفرى $\mu_1 = \mu_2$ صحيحا نتوقع أن يكون مجموع الرتب المناظرة للفروق الموجبة في العينة مساويا بالتقريب لمجموع الرتب المناظرة للفروق السالبة . لنرمز إلى هذين المجموعين بالرمزين $م_+$ ، $م_-$ على الترتيب ، وليكن

$$س = \text{أصغر } (م_+ ، م_-)$$

نظراً لأن $س$ تتغير من عينة إلى أخرى فإننا ننظر إليها على أنها قيمة مشاهدة من متغير عشوائي $س$. إن هذا المتغير له توزيع معروف متوسطه وتباينه كالآتي :

$$\mu_س = \frac{ن}{٤} (ن + ١) \qquad (١٠)$$

$$، \sigma^2_س = \frac{ن}{٢٤} (ن + ١) (٢ ن + ١) \qquad (١١)$$

وعلى ذلك تبني قاعدة الاختبار على إيجاد احتمال الحصول بالصدفة وحدها على قيمة تساوى أو تقل عن قيمة $س$ المشاهدة أى على إيجاد الاحتمال ل ($س \leq س$) . ونظراً لصعوبة إيجاد هذا الاحتمال فقد أعدت جداول لإعطاء القيم الحرجة لتوزيع المتغير $س$ ومنها الجدول (١٤) بملحق هذا الكتاب وهو يعطى القيمة الحرجة عند $ن = ٥ ، ٦ ، ... ، ٣٠$ عند كل من مستويات الدلالة ٠,٠١ ، ٠,٠٢٥ ، ٠,٠٥ للاختبارات ذات الجانب الواحد وعند كل من مستويات الدلالة ٠,٠٢ ، ٠,٠٥ ، ٠,١٠ للاختبارات ذات الجانبين ، وأى قيمة مشاهدة $س$ تقل عن القيمة المذكورة في الجدول تكون ذات دلالة عند المستوى المذكور وتدعو إلى رفض الفرض الصفرى وذلك لأن هذا الجدول يعطى قيم $س$ حيث الاحتمال ل ($س \leq س$) يكون أصغر من مستوى الدلالة المذكور .

وفي الحالة التي تزيد فيها ن عن ٣٠ ولا يتسع لها الجدول (١٤) نستخدم الإحصاءة .

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - \frac{\text{ن}}{٤}(\text{ن} + ١)}{\sqrt{\frac{\text{ن}}{٢٤}(\text{ن} + ١)(٢\,\text{ن} + ١)}} \qquad (١٢)$$

التي يقترب توزيعها من التوزيع المعتدل المعيارى .

مثال (١٤ - ٧) :

الأعداد المدونة بالعمودين الثاني والثالث من الجدول الآتي هى متوسطات أعداد المواليد في المرة الواحدة لسلالتين من فيران التجارب كانتا محفوظتين في مستعمرات كبيرة في الولايات المتحدة ، وذلك في الأعوام التسعة من ١٩١٦ إلى ١٩٢٤ :

السنة	السلالة (أ)	السلالة (ب)	ف	الرتب (مع إهمال الإشارة)
١٩١٦	٢,٦٨	٢,٣٦	+ ٠,٣٢	٩
١٩١٧	٢,٦٠	٢,٤١	+ ٠,١٩	٨
١٩١٨	٢,٤٣	٢,٣٩	+ ٠,٠٤	٢
١٩١٩	٢,٩٠	٢,٨٥	+ ٠,٠٥	٣
١٩٢٠	٢,٩٤	٢,٨٢	+ ٠,١٢	٧
١٩٢١	٢,٧٠	٢,٧٣	− ٠,٠٣	١
١٩٢٢	٢,٦٨	٢,٥٨	+ ٠,١٠	٦
١٩٢٣	٢,٩٨	٢,٨٩	+ ٠,٠٩	٥
١٩٢٤	٢,٨٥	٢,٧٨	+ ٠,٠٧	٤

اختبر عند مستوى الدلالة ٠,٠١ ما إذا كان متوسط الخلفة للسلالة ا يزيد عنه في السلالة ب .

الحل :

نحسب الفروق ف$_{ر}$ بين كل زوج من المشاهدات (السلالة ا – السلالة ب) مع الاحتفاظ بالإشارة الموجبة أو السالبة كما هو مبين بالعمود الرابع . نرتب الفروق من الأصغر إلى الأكبر بصرف النظر عن الإشارة كما هو مبين بالعمود الأخير .

لدينا ن = ٩ (عدد أزواج القيم في العينة)

م$_{+}$ = ٤٤ (مجموع الرتب المناظرة للفروق الموجبة)

م$_{-}$ = ١ (مجموع الرتب المناظرة للفروق السالبة)

نأخذ س = ١ (أصغر العددين ٤٤ ، ١)

من الجدول (١٤) وعند ن = ٩ ، α = ٠,٠١ نجد القيمة الحرجة ٣ وأى قيمة س تساوى أو تقل عن هذه القيمة تكون ذات دلالة عند المستوى ٠,٠١ وبما أن س = ١ ≤ ٣ فإنها تكون ذات دلالة وتدعو إلى رفض الفرض الصفرى ونستنتج أن متوسط الخلفة في السلالة (ا) أكبر منه في السلالة (ب) .

ملاحظة (١) :

في هذا المثال يحق لنا اعتبار أننا بصدد مقارنات تزاوجية وذلك بملاحظة توازى التغيرات في السلالتين معاً خلال السنوات التسع . ففي السنتين ١٩١٧ ، ١٩١٨ وهما سنتا حرب في الولايات المتحدة وفى العالم كله ، أدى النقص في الرعاية وفي الغذاء إلى قلة عدد الذرية في السلالتين ثم تحسن هذا العدد بمجرد تحسن الظروف . كذلك نلاحظ أنه في العام ١٩٢٢ كان هناك هبوط في الذرية في كلا السلالتين ، مما يشير إلى أن التغيرات ترجع إلى أسباب بيئية . ولهذا يكون من المناسب تناول هذه البيانات على أنها مقارنات تزاجية العامل الثابت فيها هو عامل السلالة أما السنوات فهى عامل التكرارات .

ملاحظة (٢) :

يمكن استخدام اختبار ويلكوكسن للمقارنات التزاوجية لاختبار الفرض

الصفرى أن الفرق بين متوسطى مجتمعين يأخذ قيمة معينة ، مثلا $\mu_1 - \mu_2 = ا$. ولا يختلف الإجراء المطلوب عن الإجراء السابق إلا في أننا نطرح العدد ا من كل فرق ف قبل إعطاء الرتب كما في المثال الآتى .

مثال (١٤ – ٨) :

كان هناك ادعاء بأنه إذا أعطى طالب في المستوى الرابع عينات من امتحانات سابقة فإن درجاته عند التخرج تزيد بمقدار ٥٠ نقطة . اختير ٢٠ طالباً عشوائياً في هذا المستوى وقسموا إلى ١٠ أزواج بحيث كان الطالبان في كل زوج متساويين تقريباً في معدلهما التراكمى عن السنوات الثلاثة السابقة ، وأعطيت عينات من امتحانات سابقة لواحد فقط من كل زوج (اختير بطريقة عشوائية) قبل الامتحان بأسبوع وسجلت درجات الامتحان النهائي في العمودين الثاني والثالث من الجدول الآتي . اختبر عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ الفرض الصفرى أن $\mu_1 - \mu_2 = ٥٠$ ضد الفرض الآخر أن $\mu_1 - \mu_2 < ٥٠$

الزوج	بامتحانات سابقة	بغير امتحانات سابقة	ف	ف – ٥٠	الرتب (مع إهمال الاشارة)
١	٥٣١	٥٠٩	٢٢	–٢٨	٥
٢	٦٢١	٥٤٠	٨١	٣١	٦
٣	٦٣٣	٦٨٨	–٢٥	–٧٥	٩
٤	٥٧٩	٥٠٢	٧٧	٢٧	٣,٥
٥	٤٥١	٤٢٤	٢٧	–٢٣	٢
٦	٦٦٠	٦٨٣	–٢٣	–٧٣	٨
٧	٥٩١	٥٦٨	٢٣	–٢٧	٣,٥
٨	٧١٩	٧٤٨	–٢٩	–٧٩	١٠
٩	٥٤٣	٥٣٠	١٣	–٣٧	٧
١٠	٥٧٥	٥٢٤	٥١	١	١

٥٥٢

لدينا ن = ١٠ (حجم العينة) .

، $ر_+$ = ٦ + ٣,٥ + ١ = ١٠,٥

، $ر_-$ = ٥ + ٩ + ٢ + ٨ + ٣,٥ + ١٠ + ٧ = ٤٤,٥

نأخذ س = ١٠,٥ (أصغر العددين ١٠,٥ ، ٤٤,٥)

من الجدول (١٤) وعند ن = ١٠ ، α = ٠,٠٥ نجد القيمة الحرجة ١١.

بما أن س = ١٠,٥ ⩽ ١١ نرفض الفرض الصفرى ونستنتج أنه (في المتوسط) إعطاء الامتحانات السابقة لا يجعل درجة التخرج تزيد بمقدار يصل إلى ٥٠ نقطة .

تمارين (١٤ - ٣)

(١) بالجدول الآتي الأوزان بالكيلو جرامات لخمسة أشخاص قبل أن يمتنعوا عن التدخين وبعد ٥ أسابيع من امتناعهم عنه :

	(١)	(٢)	(٣)	(٤)	(٥)
قبل	٦٦	٨٠	٦٩	٥٢	٥٤
بعد	٧١	٨٢	٦٨	٥٦	٥٩

استخدم اختبار ويلكوكسن للمقارنات التزاوجية عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ لاختبار أن الامتناع عن التدخين ليس له تأثير في زيادة الوزن ضد الفرض الآخر أنه يزيد الوزن .

(١٤ - ٤) اختبار الاتجاه : TEST FOR TREND

ليكن صـ متغيراً عشوائياً ، سـ متغيراً رياضياً (كما في الفصل التاسع عن الانحدار الخطى البسيط) . كثيراً ما نتساءل : إذا ازدادت قيم سـ فهل تزداد معها قيم صـ (اتجاه موجب) أم تنقص قيم صـ (اتجاه سالب) ؟ أى أننا نريد اختبار الفرض الصفرى أنه لا يوجد اتجاه ، ضد الفرض الآخر بوجود اتجاه موجب أو سالب أو بوجود اتجاه بصفة عامة .

إذا توفرت الافتراضات المذكورة في الفصل التاسع (خطية العلاقة بين س ، ص واعتدالية توزيع المتغير العشوائي ص) فإننا نتبع الأسلوب المبين بذلك الفصل ، أما إذا لم تكن متوفرة فيمكننا أن نستخدم اختباراً بسيطاً يعرف باختبار الاتجاه .

وعلى فرض أن لدينا ن من أزواج القيم ($س_ر$ ، $ص_ر$) ناتجة من عينة عشوائية فإن هذا الاختبار يبدأ بترتيب قيم س ترتيباً تصاعدياً ثم ملاحظة قيم ص المناظرة . في حالة وجود اتجاه موجب ينبغي أن تزداد قيم ص مع ازدياد س . أما إذا لم يوجد اتجاه فإن قيم ص تسلك سلوكاً عشوائياً دون أى رتابه أى دون أن يكون هناك نسق معين . والمؤشر لذلك هو عدد الاستبدالات transpositions في المتغير ص أى عدد المرات التي لا تكون فيها قيم ص في مكانها الطبيعى من التزايد أى حين تسبق بعض هذه القيم قيماً أصغر منها . ولذلك فإن الاختبار يعرف متغيراً عشوائياً س يعبر عن عدد الاستبدالات ثم يحسب الاحتمال :

$$ل\ (س \geqslant س_{.}) \qquad (١٣)$$

على أساس صحة الفرض الصفرى بعدم وجود اتجاه وحيث $س_{.}$ هى عدد الاستبدالات المشاهدة في العينة . فإذا كان هذا الاحتمال أقل من مستوى الدلالة الذى نختاره فإننا نرفض الفرض الصفرى عند هذا المستوى لصالح الفرض الآخر . وقد أعدت جداول للاحتمالات المتجمعة المبينة بالصيغة (١٣) ومنها الجدول (١٥) بملحق هذا الكتاب الذى يعطى هذه الاحتمالات لقيم ن = ٣ ، ٤ ، ... ، ٢٠ بالنسبة للمتغيرات المتصلة .

مثال (١٤ - ٩) :

في بحث لمعرفة تأثير تعرض بذور الشعير لنوع من الأشعة على المحصول الناتج وجدت البيانات الآتية مع ملاحظة أن س وضعت مرتبة ترتيباً تصاعدياً وأن ص مقاسة بالجرامات في الجوال .

مقدار الأشعـة (س) : ٠ ٢ أ ٤ أ ٤٠ أ ٤٠٠ أ

مقدار المحصول (ص) : ٢٩,٢ ٣٠,٢ ٢٨,٢ ٢٩,٧ ٣٠,٤

اختبر عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ ما إذا كان مقدار المحصول يزداد بازدياد مقدار الأشعة .

الحل :

الفرض الصفرى ف$_{٠}$: تعريض البذور للأشعة لا يؤثر في المحصول .

الفرض الآخر ف$_{١}$: يوجد اتجاه موجب (ص تزداد بازدياد س) .

نحسب عدد الاستبدالات كالآتي :

العدد ٢٩,٢ يسبق العدد ٢٨,٢ (استبدال واحد) .

العدد ٣٠,٢ يسبق العددين ٢٨,٢ ، ٢٩,٧ (استبدالين اثنين) .

إذن عدد الاستبدالات س = ٣ في ن = ٥ من القيم الصادية .

من الجدول (١٥) عند ن = ٥ ، س = ٣ وعلى أساس صحة الفرض الصفرى نجد أن : ل (س $\leqslant$ ٣) = ٠,٢٤٢

وهذا الاحتمال أكبر من مستوى الدلالة ٠,٠٥ وعلى ذلك لا نستطيع رفض الفرض الصفرى ونستنتج أنه في حدود هذه التجربة ليس للأشعة تأثير جوهرى على محصول الشعير .

ملاحظة :

إذا اشتملت العينة على م من القيم المتساوية للمتغير ص نحسب عدد الاستبدالات كما سبق ثم نضيف إليه العدد $\frac{١}{٤}$م (م − ١) وهو متوسط الاستبدالات في حالة تباديل م من الأشياء . فمثلا إذا وجدت قيمتان متساويتان أى م = ٢ نضيف العدد $\frac{١}{٤} \times ٢ \times ١ = \frac{١}{٢}$ وإذا كانت م = ٣ نضيف العدد $\frac{١}{٤} \times ٣ \times ٢ = \frac{٣}{٢}$ لكل ثلاثة قيم متساوية وهكذا .

تمارين (١٤ - ٤)

استخدم اختبار الاتجاه لكل من العينات الآتية :

(١) س : ١٥ ٢٠ ٣٠ ٤٠ ٥٠ ٦٠ ٧٠

ص : ٦,٥ ٥,٦ ٥,٤ ٦,٠ ٤,٦ ١,٤ ٠,١

حيث ص هى محتوى الأكسجين (ملليجرام / لتر) في أحد البحيرات عند العمق س بالأمتار .

(٢) س : ١٠ ١٥ ٣٠ ٤٠ ٥٠ ٥٥ ٨٠ ١٠٠

ص : ٥٠ ٤٦ ٤٣ ٤٣ ٣٦ ٣٩ ٣٧ ٣٣

حيث س هى محتوى الدسلفيد في ميثيل الصوف ،

، ص نسبة تركيز محتوى الماء .

(٣) س : ١٢١ ١٢٠ ٩٥ ١٢٣ ١٤٠ ١١٢ ٩٢ ١٠٠ ١٠٢ ٩١

ص : ٥٢١ ٤٦٥ ٣٥٢ ٤٥٥ ٤٩٠ ٣٨٨ ٣٠١ ٣٩٥ ٣٧٥ ٤١٨

حيث س تعبر عن ضغط الدم بوحدات معينة ، ص وزن القلب بالجرامات لعينة من ١٠ مرضي ذكور ماتوا بأحد أمراض المخ .

(١٤ - ٥) اختبار كروسكال - واليس KRUSKAL-WALLIS TEST

يستخدم هذا الاختبار كبديل لطريقة تحليل التباين للتجارب ذوات العامل الواحد حين لا تتوفر شروطها .

وتتلخص المشكلة التى نتناولها هنا فيما يلى :

« لدينا ك من العينات العشوائية أحجامها $ن_1$ ، $ن_2$ ، ... ، $ن_ك$ مأخوذة

من ك من المجتمعات ، ونرغب فى اختبار الفرض الصفرى ف أن لهذه المجتمعات متوسطات متساوية » . إذا كان هذا الفرض صحيحا يمكن النظر إلى هذه العينات على أنها عينة عشوائية واحدة حجمها ن (هو مجموع أحجام العينات) مأخوذة من مجتمع مشترك . نرتب قيم هذه العينة من الأصغر إلى الأكبر – من ١ إلى ن – ونستعيض عن كل قيمة مشاهدة بالترتيب المناظر لها . نجمع تراتيب وحدات كل عينة على حدة ، ولتكن $ت_1$ ، $ت_2$ ، ... ، $ت_ك$ هى مجاميع هذه التراتيب . إذا كان الفرض الصفرى ف صحيحا فإن هذه المجاميع تكون ذات قيم متقاربة ، أما إذا لم يكن ف صحيحا فإن التراتيب الكبرى تميل إلى أن تقع فى العينات المأخوذة من المجتمعات التى لها أكبر المتوسطات . وعلى هذا نكون فى حاجة إلى إحصاءة اختبار تكشف عن وجود أو عدم وجود واحد أو أكثر من المجاميع الترتيبية $ت_ك$ تكون كبيرة بدرجة لا نتوقع حدوثها عن طريق الصدفة .

وقد وجد أن أحد الاحصاءات التى تصلح لذلك هي تلك التى قدمها كروسكال ووالیس وهى تأخذ الصيغة الآتية :

$$صـ = \frac{١٢}{ن\,(ن+١)} \sum \frac{ت_ك^2}{ن_ك} - ٣\,(ن+١) \qquad (١٤)$$

حيث ن مجموع حجوم العينات ، $ت_ك$ مجموع تراتيب وحدات العينة ك ، (ك = ١ ، ٢ ، ... ، ك) . ولهذه الإحصاءة توزيع قريب من توزيع χ^2 بدرجات حرية ك – ١ وبالتالى يمكن استخدام جدول χ^2 لاختبار الفرض الصفرى عن تساوى متوسطات المجتمعات ، فنرفض ف . إذا كانت القيمة المشاهدة للإحصاءة (١٤) أكبر من القيمة الحرجة فى توزيع χ^2 عند مستوى الدلالة الذى نختاره .

مثال (١٤ - ١٠) :

أراد أحد رجال التربية الرياضية اختبار أفضلية ثلاثة طرق جديدة فى تعليم لعبة كرة السلة فأخذ عينة عشوائية من عشرين من المبتدئين فى هذه اللعبة وقسمها عشوائيا إلى أربع مجموعات بكل منها خمسة لاعبين . دربت إحدى المجموعات بالطريقة المعتادة بينما دربت كل من المجموعات الثلاث الأخرى بإحدى الطرق الجديدة . وبعد فترة التدريب قيست مهارات اللاعبين وسجلت درجاتهم فى الجدول الآتى الذى سجلت فيه أيضا التراتيب المناظرة للدرجات (وهى تلك الموضوعة بين الأقواس) . المطلوب اختبار ما إذا كانت هناك فروق ذات دلالة بين مهارات اللاعبين الناتجة عن الطرق الأربع .

الطرق الجديدة للتدريب			الطريقة المعتادة
ا	ب	حـ	د
٦٣,٠ (٨)	٨٥,٠ (١٨)	٩٠,٢ (٢٠)	٦٥,٠ (٩)
٤٧,٠ (٢)	٨٠,١ (١٦)	٧٠,٧ (١١)	٤٥,٢ (١)
٥١,٠ (٤)	٧٩,٠ (١٥)	٨٦,٠ (١٩)	٥٠,٩ (٣)
٧٤,٠ (١٣)	٦٧,٠ (١٠)	٦٢,٣ (٧)	٧٥,٠ (١٤)
٦٠,٠ (٦)	٨٢,٣ (١٧)	٧٢,٣ (١٢)	٥٨,٨ (٥)
ت$_و$: (٣٣)	(٧٦)	(٦٩)	(٣٢)

الحل :

الفرض الصفرى ف$_0$: الطرق الأربع تؤدى فى المتوسط إلى نفس الدرجة من المهارات .

من الاحصاءة (١٤) ومع ملاحظة أن ن = ٢٠ ، ك = ٤ نجد أن :

$$\text{ص}_{\text{و}} = \frac{١٢}{٢٠ \times ٢١} \left(\frac{٣٣^{٢} + ٧٦^{٢} + ٦٩^{٢} + ٣٢^{٢}}{٥} \right) - ٣ \times ٢١$$

$$= ٠,٠٢٨٥٧ \times ٢٥٣٠ - ٦٣$$

$$= ٩,٢٨٢١$$ بدرجات حرية ك − ١ = ٣

ولكن $\chi^{٢}_{[٣]٠,٠٥}$ = ٧,٨١٥ ، إذن نرفض ف$_{٠}$ عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ ونحكم بأن المهارات تختلف باختلاف طرق التدريب . ويبدو أن الطريقة ب هى الأفضل .

(١٤ − ٦) اختبار فريدمان FRIEDMAN TEST

يستخدم هذا الاختبار كبديل لطريقة تحليل التباين للتجارب التى تصمم على هيئة قطاعات كاملة التعشية أو للتجارب ذوات العاملين غير المتفاعلين ، حين لا تتوفر شروطها .

نفرض أن لدينا ك من المعالجات ونرغب فى اختبار ما إذا كان لهذه المعالجات تأثيرات مختلفة على وحدات متغير ما ، ونفرض أنه عند تطبيق هذه المعالجات على وحدات التجريب يدخل عامل خارجى له هـ من المستويات قد يؤثر فى النتائج التى نحصل عليها وينبغى إذن استبعاد أثر هذا العامل . لتحقيق هذا الغرض نقوم بتعشية هذا العامل بحيث يكون لكل مستوى من مستويات العامل الذى ندرسه نفس الفرصة للتعرض له . فنسحب ك من الوحدات من كل من الـ هـ مجتمعات التى تمثل مستويات هذا العامل لنحصل على هـ من القطاعات حجم كل منها ك ، ثم نقوم بتطبيق الـ ك معالجات عشوائيا على وحدات كل قطاع ثم نسجل المشاهدات فى جدول ذى ك من الأعمدة تمثل المعالجات ، هـ من الصفوف تمثل القطاعات .

تبدأ طريقة فريدمان بترتيب المشاهدات فى كل قطاع (صف) **على حدة** من

١ إلى ك بحيث يعطى الترتيب ١ للمشاهدة الأصغر ويعطى الترتيب ك للمشاهدة الأكبر . إذا كان الفرض الصفرى ف صحيحا أى كانت المعالجات لها تأثيرات واحدة على المتغير ، ومع ملاحظة أن المشاهدات فى كل قطاع يمكن اعتبارها عينة عشوائية حجمها ك من مجتمع واحد ، فإن التراتيب العالية تتوزع بين مختلف الأعمدة فى مختلف الصفوف . أما إذا كان ف غير صحيح فإن التراتيب العالية تميل إلى التجمع فى العمود الذى يمثل المعالجة ذات المتوسط الأكبر .

مجمع التراتيب فى كل عمود ولنرمز بالرمز ت$_و$ لمجموع تراتيب العمود و (و = ١ ، ٢ ، ... ، ك) . نريد احصاءة اختبار تكشف عن وجود أو عدم وجود واحد أو أكثر من المجاميع الترتيبية تكون كبيرة بدرجة لا تحدث بالصدفة . وقد وجد أن أحدى الاحصاءات الصالحة لهذا الغرض هى تلك التى قدمها فريدمان وهى تأخذ الصيغة الآتية :

$$\text{ح}_{\text{ر}} = \frac{١٢}{\text{هـ ك (ك + ١)}} \sum_{١}^{\text{ك}} \left[\text{ت}_{\text{و}} - \frac{\text{هـ (ك + ١)}}{٢}\right]^{٢} \qquad (١٥)$$

حيث ك عدد الأعمدة ، هـ عدد الصفوف ، ت$_و$ مجموع التراتيب فى العمود و . وتوزيع هذه الاحصاءة قريب من توزيع $\chi^{٢}$ بدرجات حرية ك − ١ وبالتالى تستطيع استخدام جدول $\chi^{٢}$ فنرفض الفرض الصفرى ف إذا كانت القيمة المشاهدة لهذه الاحصاءة أكبر من القيمة الحرجة لتوزيع $\chi^{٢}$ عند مستوى الدلالة الذى نختاره .

مثال (١٤ − ١١) :

أراد فريق أبحاث المستهلك فى أحد مصانع فرامل الدراجات مقارنة ثلاثة أنواع من الفرامل التى ينتجها . ولما كان نوع الدراجة التى تستخدم فى التجربة قد يؤثر

فى نتائج الدراسة فقد رؤى استبعاد أثر هذا العامل باستخدام تصميم القطاعات كاملة التعشية . اختير ٦ أنواع من الدراجات لتكوين ٦ قطاعات بكل منها ٣ دراجات ووزعت الأنواع الثلاثة من الفرامل عشوائيا على كل قطاع . المتغير الذى تقارن به الفرامل هو الزمن بالأسابيع الذى يمضى حتى يتطلب الأمر اصلاحا أساسيا فيها . وقد سجلت هذه الأزمان فى الجدول الآتى ، كما رتبت هذه الأزمان فى كل قطاع على حدة ووضعت التراتيب المناظرة بين الأقواس فى نفس الجدول .

نوع الدراجة القطاعات	نوع الفرامل ا	ب	حـ
(١)	٥,٢ (٢)	٧,٣ (٣)	٣,٠ (١)
(٢)	٦,٨ (١)	٨,٩ (٣)	٧,٥ (٢)
(٣)	٦,٣ (٢,٥)	٦,٣ (٢,٥)	٦,٠ (١)
(٤)	١٣,٠ (١,٥)	١٤,٨ (٣)	١٣,٠ (١,٥)
(٥)	١٢,٨ (٢,٥)	١٢,٨ (٢,٥)	١١,٠ (١)
(٦)	١٥,٠ (٢)	١٥,٢ (٣)	١٤,٥ (١)
ت$_{و}$	(١١,٥)	(١٧)	(٧,٥)

الحل :

الفرض الصفرى ف$_{ا}$: الأنواع الثلاثة من الفرامل ذات عمر واحد .

من (١٥) ، لدينا ك = ٣ ، هـ = ٦ .

$$ص_{ى} = \frac{١٢}{٦ \times ٣ \times ٤} \sum [ت_{ى} - \frac{٦ \times ٤}{٢}]^{٢}$$

$$= \frac{١}{٦} [(١٢ - ١١,٥)^{٢} + (١٢ - ١٧)^{٢} + (١٢ - ٧,٥)^{٢}]$$

$$= \frac{١}{٦} \times ٤٥,٥ = ٧,٥٨$$

ولكن $\chi^{٢}_{[٢]٠,٠٥}$ = ٥,٩٩١, إذن نرفض الفرض الصفرى عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ ونحكم بأن عمر الفرامل يختلف باختلاف نوعها ، ويبدو أن النوع ب هو الأفضل .

تمارين (١٤ - ٥)

١ - أخذت عينات عشوائية من الحجم خمسة من ثلاثة أنهار كبيرة فنتجت عنها البيانات الآتية عن مستوى التلوث . استخدم طريقة كروسكال - واليس لبحث ما إذا كانت مستويات التلوث واحدة فى الأنهار الثلاثة . استخدم مستوى الدلالة ٠,١٠ .

النهر الأول	النهر الثانى	النهر الثالث
٢,٧	٢,٩	٠,٦
١,٤	٢,٤	١,٢
٢,٠	٣,٧	١,٥
١,٢	١,٦	١,٧
٢,١	٢,٤	٢,١

٢ – لدراسة تأثير لون الإعلان فى جذب الزبائن قامت إحدى الشركات بتصميم خمسة عروض اعلانية متشابهة فى كل شيء ما عدا اللون المستخدم ، ثم اختارت عشرة أشخاص عشوائيا وطلب إلى كل منهم ترتيب هذه العروض بحسب مدى جاذبيتها للعين بحيث يعطى الترتيب ١ لأكثر العروض جاذبية والترتيب ٥ لأقلها جاذبية ، فجاءت النتائج كما فى الجدول الآتى . هل هناك دليل (عند المستوى ٠,١٠) على أن للون تأثير فى جذب الزبائن ؟

الأشخاص (القطاعات)	اللون السائد				
	(١) بدون ألوان	(٢) الأحمر	(٣) الأصفر	(٤) الأزرق	(٥) خليط
(١)	١	٢	٤	٣	٥
(٢)	١	٢	٥	٣	٤
(٣)	٣	٤	٥	١	٢
(٤)	١	٢	٣	٥	٤
(٥)	٤	٥	١	٣	٢
(٦)	١	٢	٣	٤	٥
(٧)	٢	١	٥	٤	٣
(٨)	١	٢	٤	٥	٣
(٩)	٣	٥	١	٢	٤
(١٠)	١	٢	٥	٤	٣