# الفصل الثانى

## التوزيعات التكرارية

## FREQUENCY DISTRIBUTIONS

إن البيانات التي نحصل عليها من عينة ما عن متغير ما تكون عبارة عن عدد من القيم أو القراءات مسجلة كيفما اتفق ، ولذلك تسمى عادة بالبيانات الخام raw data . وأول ما نفعله بهذه البيانات هو تنظيمها وتلخيصها في صورة مركزة عادة ما تكون على هيئة توزيعات تكرارية موضوعة فى جداول مناسبة ، وكثيراً ما نقوم بتمثيلها بيانياً . إن هذا التنظيم يجعل البيانات أكثر طواعية للدراسة والتحليل وقد يكشف عن بعض الصفات البارزة أو الخصائص العامة التي لا تظهر في القراءات قبل تنظيمها . ولا مفر لأى دارس للإحصاء من أن يكون على دراية بأمور أساسية ثلاثة هى :

( أ ) كيفية إنشاء الجداول التكرارية .
(ب) كيفية تمثيل التوزيعات بيانيا .
(جـ) كيفية وصف التوزيعات وصفاً موضوعياً .

وهذا ما نتناوله هنا بالتلخيص المركز عن طريق الأمثلة ، على أساس أن القارىء سبق له دراستها .

### (٢ -١) الجداول التكرارية : FREQUENCY TABLES

### (٢ - ١ - ١) جدول التوزيع التكرارى البسيط :

**مثال (٢ - ١) :**

الأعداد الآتية تعبر عن النسب المئوية للكاربون الذى وجد في عينة عشوائية حجمها ٢٥ في نوع من الفحم .

٨٠ ٨١ ٨٦ ٨٧ ٨٥ ٨٦ ٨٧ ٧٧ ٨٢ ٨٠ ٨٣ ٨٤ ٨٦
٨٣ ٨٥ ٨٤ ٨٦ ٨٥ ٧٨ ٨٢ ٧٩ ٧٩ ٨٦ ٧٧ ٨٧

كون الجدول التكرارى البسيط وجدول التكرارات المتجمعة المئوية .

**الحـل :**

ننشيء جدولا كالجدول (٢ – ١) التالى حيث يشتمل العمود الأول منه على القيم المختلفة للمتغير مرتبة ترتيباً تصاعدياً ( أو تنازلياً ) ويشتمل العمود الثاني منه على عدد من الشرط أمام كل قيمة بالعمود الأول تحصي عدد مرات وجود هذه القيمة بالبيانات الخام . أما العمودان الثالث والرابع فأمرهما واضح وكذلك بالنسبة للجدول (٢ – ٢) .

**الجدول (٢ – ١)**
**التكرارات والتكرارات النسبية للنسب المئوية للكاربون في عينة من الفحم**

| س ر | الشرط | ك ر | ح ر |
|---|---|---|---|
| ٧٧ | // | ٢ | ٠,٠٨ |
| ٧٨ | / | ١ | ٠,٠٤ |
| ٧٩ | // | ٢ | ٠,٠٨ |
| ٨٠ | // | ٢ | ٠,٠٨ |
| ٨١ | / | ١ | ٠,٠٤ |
| ٨٢ | // | ٢ | ٠,٠٨ |
| ٨٣ | // | ٢ | ٠,٠٨ |
| ٨٤ | // | ٢ | ٠,٠٨ |
| ٨٥ | /// | ٣ | ٠,١٢ |
| ٨٦ | //// | ٥ | ٠,٢٠ |
| ٨٧ | /// | ٣ | ٠,١٢ |
| المجموع | | ٢٥ | ١,٠٠ |

**الجدول (٢ – ٢)**
**التكرارات المتجمعة والمتجمعة المئوية**

| الحدود العليا | التكرار المتجمع | التكرار المتجمع ٪ |
|---|---|---|
| ≤ ٧٧ | ٢ | ٨ |
| ≤ ٧٨ | ٣ | ١٢ |
| ≤ ٧٩ | ٥ | ٢٠ |
| ≤ ٨٠ | ٧ | ٢٨ |
| ≤ ٨١ | ٨ | ٣٢ |
| ≤ ٨٢ | ١٠ | ٤٠ |
| ≤ ٨٣ | ١٢ | ٤٨ |
| ≤ ٨٤ | ١٤ | ٥٦ |
| ≤ ٨٥ | ١٧ | ٦٨ |
| ≤ ٨٦ | ٢٢ | ٨٨ |
| ≤ ٨٧ | ٢٥ | ١٠٠ |

**ملاحظات :**

(١) س$_{ر}$ ترمز إلى القيم المختلفة للمتغير .

(٢) ك$_{ر}$ ترمز إلى تكرار القيمة س$_{ر}$ أى إلى عدد مرات وجود هذه القيمة بالبيانات الخام .

(٣) ح$_{ر}$ ترمز إلى التكرار النسبي للقيمة س$_{ر}$ أى خارج قسمة العدد ك$_{ر}$ على حجم التوزيع وهو هنا ٢٥ . وهذه التكرارات النسبية تؤخذ كتقديرات للاحتمالات تحت شروط معينة منها عشوائية العينة وكبر حجمها .

(٤) تسمى مجموعة الأزواج المرتبة

{ (٧٧ ، ٢) ، (٧٨ ، ١) ، ... ، (٨٧ ، ٣) }

بالتوزيع التكرارى للمتغير س في العينة ، وهذه المجموعة تشكل العمودين الأول والثالث من الجدول (٢ - ١) .

**(٢ - ١ - ٢) جدول التوزيع التكرارى المجمع في فئات :**

حين تشتمل البيانات على عدد كبير من قيم متغير عددى ، يفضل تجميع هذه القيم في فئات فتوضع كل مجموعة من القيم المتقاربة في فئة خاصة ، ويراعى هنا ألا يكون عدد هذه الفئات كبيراً فتنتفي الحكمة أو الفائدة من عملية التجميع ، وألا يكون عددها صغيراً فتضيع معالم التوزيع ويفقد الكثير من تفاصيله .

**مثال (٢ - ٢ ) :**

قيست أطوال محيطات الرؤوس بالمليمترات لعينة حجمها ٤٠ من الحمام المنزلى فوجدت كما يلى :

١٢,٢ ١٢,٩ ١١,٨ ١١,٩ ١١,١ ١٢,٣ ١٢,٢ ١١,٨ ١١,٨ ١١,٦

١٠,٧ ١١,٥ ١١,٣ ١١,٢ ١١,٦ ١١,٩ ١٣,٣ ١١,٢ ١٠,٥ ١١,١

١٢,١ ١١,٩ ١٠,٤ ١٠,٧ ١٠,٨ ١١,٠ ١١,٩ ١٠,٢ ١٠,٩ ١١,٦

١٠,٨ ١١,٦ ١٠,٤ ١٠,٧ ١٢,٠ ١٢,٤ ١١,٧ ١١,٨ ١١,٣ ١١,١

جمع هذه البيانات في توزيع تكرارى ذى فئات وأوجد توزيع التكرارات المتجمعة النسبية المئوية .

**الحـل :**

المدى = أكبر قيمة للمتغير – أصغر قيمة للمتغير

= ١٣,٣ – ١٠,٢ = ٣,١

إذا رأينا أن نأخذ حوالى ١٠ فئات يكون طول كل فئة ٣,١ ÷ ١٠ = ٠,٣٠ تقريباً .

وعلى أساس أن الأطوال قيست لأقرب جزء من عشرة من المليمتر سنعتبر أنه إذا كان س هو العدد الذى سجلناه لطول محيط رأس حمامة فإن الطول الحقيقي لهذا الرأس يقع بين العددين س ± ٠,٠٥ فمثلا أصغر عدد مسجل هو ١٠,٢ وإذن الطول الحقيقي لمحيط رأس أصغر حمامة في العينة يقع بين العددين ١٠,٢ ± ٠,٠٥ أى بين العددين ١٠,١٥ ، ١٠,٢٥ .

نأخذ العدد ١٠,١٥ كحد أدني للفئة الأولى . وحيث أننا اخترنا أن يكون طول الفئة ٠,٣٠ فإن الحد الأعلى لهذه الفئة يكون ١٠,١٥ + ٠,٣٠ = ١٠,٤٥ ويكون هذا العدد نفسه هو الحد الأدنى للفئة الثانية التي ينبغى أن يكون حدها الأعلى ١٠,٤٥ + ٠,٣٠ = ١٠,٧٥ ونستمر في إنشاء الفئات التالية بنفس الطريقة حتي نصل إلى فئة تغطى أكبر عدد في البيانات المعطاة وهو ١٣,٣ ــ انظر العمود الأول من الجدول (٢ – ٣) الآتي . ويلاحظ أن هذا الأسلوب في تكوين الفئات للقياسات المقربة يسمح بأن يكون لكل عدد في البيانات المعطاة مكان وحيد في إحدى هذه الفئات . وبالنسبة لملأ العمود الثالث نمر على الأعداد المعطاة واحداً واحداً ونضع شرطة أمام الفئة التي يدخل فيها .

الجدول (٢ - ٣)

التكرارات والتكرارات النسبية لمحيطات الرؤوس

بالمليمترات لعينة الحمام المنزلى

| الفئات | س ر | الشرط | ك ر | ح ر |
|---|---|---|---|---|
| ١٠,١٥-١٠,٤٥ | ١٠,٣ | /// | ٣ | ٠,٠٧٥ |
| ١٠,٤٥-١٠,٧٥ | ١٠,٦ | //// | ٤ | ٠,١١٠ |
| ١٠,٧٥-١١,٠٥ | ١٠,٩ | //// | ٤ | ٠,١٠٠ |
| ١١,٠٥-١١,٣٥ | ١١,٢ | // ### | ٧ | ٠,١٧٥ |
| ١١,٣٥-١١,٦٥ | ١١,٥ | ~~////~~ | ٥ | ٠,١٢٥ |
| ١١,٦٥-١١,٩٥ | ١١,٨ | ////~~###~~ | ٩ | ٠,٢٢٥ |
| ١١,٩٥-١٢,٢٥ | ١٢,١ | //// | ٤ | ٠,١٠٠ |
| ١٢,٢٥-١٢,٥٥ | ١٢,٤ | // | ٢ | ٠,٠٥٠ |
| ١٢,٥٥-١٢,٨٥ | ١٢,٧ | — | ٠ | ٠,٠٠٠ |
| ١٢,٨٥-١٣,١٥ | ١٣,٠ | - / | ١ | ٠,٠٢٥ |
| ١٣,١٥-١٣,٤٥ | ١٣,٣ | - / | ١ | ٠,٠٢٥ |
| المجموع | | | ٤٠ | ١,٠٠ |

الجدول ( ٢ - ٤ )

التكرارات المتجمعة

والمتجمعة المئوية

| الحدود العليا | التكرار المتجمع | التكرار المتجمع ٪ |
|---|---|---|
| ≤ ١٠,٤٥ | ٣ | ٧,٥ |
| ≤ ١٠,٧٥ | ٧ | ١٧,٥ |
| ≤ ١١,٠٥ | ١١ | ٢٧,٥ |
| ≤ ١١,٣٥ | ١٨ | ٤٥,٥ |
| ≤ ١١,٦٥ | ٢٣ | ٥٧,٥ |
| ≤ ١١,٩٥ | ٣٢ | ٨٠,٠ |
| ≤ ١٢,٢٥ | ٣٦ | ٩٠,٠ |
| ≤ ١٢,٥٥ | ٣٨ | ٩٥,٠ |
| ≤ ١٢,٨٥ | ٣٨ | ٩٥,٠ |
| ≤ ١٣,١٥ | ٣٩ | ٩٧,٥ |
| ≤ ١٣,٤٥ | ٤٠ | ١٠٠,٠ |

**ملاحظات :**

١ - س ر ترمز إلى مركز الفئة class mark وهو الوسط الحسابي لحدى الفئة ، فمثلا مركز الفئة الأولى هو $\frac{١}{٢}$ (١٠,١٥ + ١٠,٤٥) = ١٠,٣ .

ويؤخذ مركز الفئة ممثلا لها بمعني أننا نعتبر أن جميع القيم التي دخلت الفئة مساوية لهذا المركز ، فمثلا تضم الفئة الأولى (١٠,١٥ - ١٠,٤٥) ثلاثة من الأعداد المعطاة هى ١٠,٤ ، ١٠,٢ ، ١٠,٤ غير أننا في عملية التجميع نلغى هذه الأعداد ونعتبر أن بهذه الفئة ثلاثة أعداد كل منها يساوى مركز الفئة وهو ١٠,٣ .

كذلك تضم الفئة الثانية أربعة أعداد هى ١٠,٧ ، ١٠,٥ ، ١٠,٧ ، ١٠,٧ غير أننا نعتبر أن بهذه الفئة أربعة أعداد كل منها يساوى مركز الفئة وهو ١٠,٦ . وفي اعتبارنا هذا شيء من التجاوز يسمى بخطأ التجميع ، إلا أن هذه الأخطاء عادة ما يلغى بعضها البعض لأن بعضها بالزيادة والبعض الآخر بالنقصان ، ولاسيما إذا كان حجم التوزيع كبيراً .

٢ – في تكوين الفئات في هذا المثال راعينا أن المتغير هو متغير عددى من النوع المتصل وأن القياس كان إلى أقرب جزء من عشرة من المليمتر . أما إذا اعتبرنا أن القياس مضبوط فيمكن أن نضع الفئات كالآتي :

١٠,٢ – لتعني الفئة التي تشمل الأعداد بدءاً من ١٠,٢ إلى أقل من ١٠,٥
١٠,٥ – لتعني الفئة التي تشمل الأعداد بدءاً من ١٠,٥ إلى أقل من ١٠,٨
١٠,٨ – لتعني الفئة التي تشمل الأعداد بدءاً من ١٠,٨ إلى أقل من ١١,١
وهكذا .. .. ..

وتستخدم هذه الطريقة أيضاً حين يكون المتغير من النوع الوثاب . ولبيان أن هذه الطريقة لا تصلح فى الحالة التى تكون فيها البيانات مسجلة بمقياس تقريبى ، اعتبر الحمامة التى سجل طولها على أنه ١٠,٥ ملليمترا ( تقريبا ) . نعلم أن الطول الحقيقى لهذه الحمامة يقع بين العددين ١٠,٤٥ ، ١٠,٥٥ وعلى ذلك فإن الطول الحقيقى قد يكون أصغر من الطول المسجل ١٠,٥ ، مثلا ١٠,٤٨ ، وفى هذه الحالة ينبغى وضعه فى الفئة ١٠,٢ – أو قد يكون أكبر من ١٠,٥ ، مثلا ١٠,٥٤ ، وفى هذه الحالة ينبغى وضعه فى الفئة ١٠,٥ ــ وما دمنا لا نعرف الطول الحقيقى لهذه الحمامة فإننا نكون فى حيرة من استخدام أى من هاتين الفئتين . ونقع فى هذه الحيرة أيضا فى تناول كثير من الأطوال الأخرى مثل ١٠,٨ ، ١١,١ ، ١١,٤ ، ... ومن هذا نرى أن هذه الطريقة لا تضمن أن يكون لكل قيمة ( من القيم المقربة ) مكان فى واحدة وواحدة فقط من الفئات .

### (٢ - ١ - ٣) الجدول التكرارى المزدوج ( أو جدول الاقتران ) :

كل من المثالين السابقين يتناول توزيعاً تكرارياً لمتغير واحد ، وفيما يلى مثالان يتناول كل منهما التوزيع التكرارى المشترك لمتغيرين . joint distribution

**مثال (٢ - ٣) :**

الجدول (٢ - ٥) الآتي يعطى التكرارات المشاهدة لطول محيط الرأس وطول الطفل ساعة الولادة في عينة من ٩٩ مولوداً .

**الجدول (٢ - ٥)**

| محيط الرأس | طول الجسم | | | المجموع |
|---|---|---|---|---|
| | ٤٧ - | ٥٠ - | ٥٣ - | |
| ٣٢ - | ٤٠ | ٣٦ | ٢ | ٧٨ |
| ٣٦ - | صفر | ١٤ | ٧ | ٢١ |
| المجموع | ٤٠ | ٥٠ | ٩ | ٩٩ |

لدينا متغيران هما ( ١ ) طول محيط الرأس وقد قسمت الأطوال إلى فئتين (٢) طول الجسم وقد قسمت الأطوال إلى ثلاث فئات ، ولهذا يسمى مثل هذا الجدول بجدول اقتران ٢ × ٣ 2 x 3 contingency table لأن المتغيرين يقترنان فيه في توزيع مشترك .

من هذا الجدول نستطيع استخراج الجدولين (٢ – ٦) ، (٢ – ٧) الآتيين :

**الجدول (٢ – ٦)**
**التوزيع الهامشى لطول محيط الرأس**

| محيط الرأس | ك ر |
|---|---|
| – ٣٢ | ٧٨ |
| – ٣٦ | ٢١ |
| المجموع | ٩٩ |

**الجدول (٢ – ٧)**
**التوزيع الهامشي لطول الطفل**

| طول الجسم | ك ر |
|---|---|
| – ٤٧ | ٤٠ |
| – ٥٠ | ٥٠ |
| – ٥٣ | ٩ |
| المجموع | ٩٩ |

يعطى الجدول (٢ – ٦) ما يسمى بالتوزيع الهامشى للمتغير الأول ( طول محيط الرأس ) وهو يعني التوزيع التكرارى لهذا المتغير بصرف النظر عن المتغير الثاني . وبالمثل يعطى الجدول (٢ – ٧) التوزيع الهامشي للمتغير الثاني ( طول الجسم ) .

**مثال (٢ – ٤) :**

في إحدى التجارب قسم ١٤٦٩ من الرجال في الأعمار ما بين ٦٠ ، ٦٤ عاماً من حيث عادة التدخين إلى قسمين : يدخن ولا يدخن . وبعد ٦ سنوات من بدء التجربة حسب عدد الوفيات للقسمين فنتج التوزيع التكرارى المزدوج المبين بالجدول (٢ – ٨) وهو يعطى التوزيع التكرارى المشترك لمتغيرين من النوع الوصفي هما الوفاة وعادة التدخين .

مثل هذا الجدول يسمى بجدول اقتران ٢ × ٢ لأن كلا من المتغيرين مقسم إلى قسمين . استخرج التوزيع الهامشي لكل من المتغيرين .

الجدول (٢ – ٨)

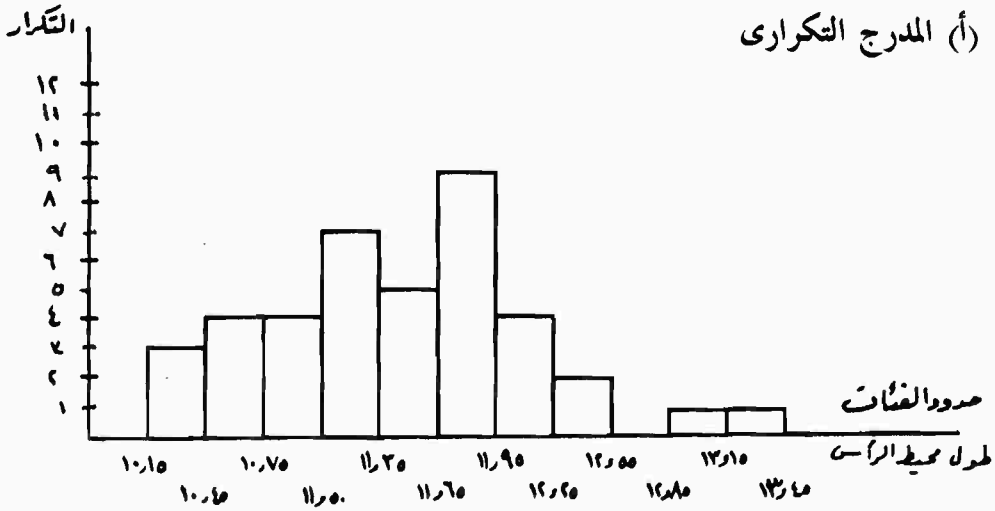
التوزيع المشترك لحالتي الوفاة والتدخين لعينة من كبار السن

| الوفاة | التدخين | | المجموع |
|---|---|---|---|
| | يدخن | لا يدخن | |
| توفي | ٥٤ | ١١٧ | ١٧١ |
| حي | ٣٤٨ | ٩٥٠ | ١٢٩٨ |
| المجموع | ٤٠٢ | ١٠٦٧ | ١٤٦٩ |

## (٢ – ٢) التمثيل البياني للتوزيعات التكرارية :

المعتاد في تمثيل التوزيعات بيانيا إنشاء محورين متعامدين في المستوى يجزأ كل منهما بمقياس رسم مناسب بحسب الصورة البيانية التي نرغب في تقديمها ، والأشكال الثلاثة الآتية تعرض أشهر هذه الصور وهى تمثل البيانات الواردة بالمثال (٢ – ٢) السابق .

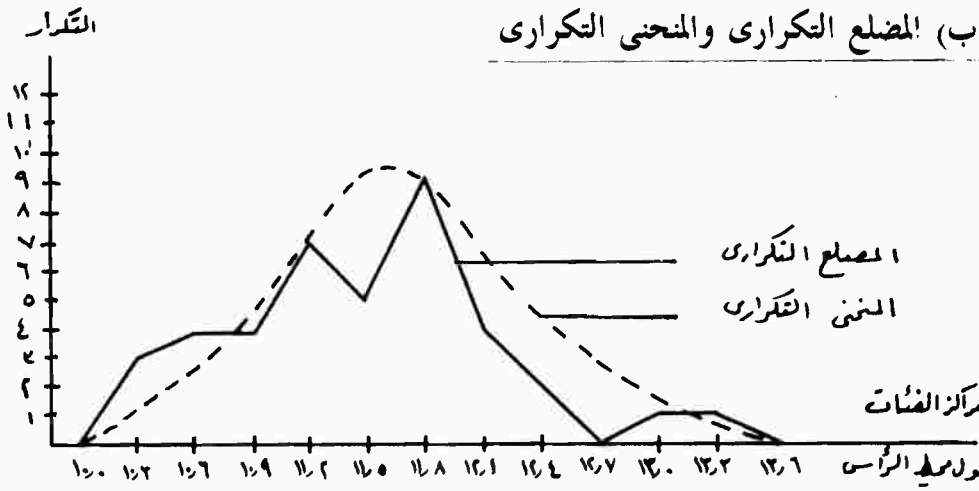
(أ) المدرج التكرارى




الشكل (٢ – ١) المدرج التكرارى لأطوال محيطات الرؤوس لعينه من ٤٠ من الحمام المنزلى

هذا الشكل يعطى ما يسمى بالمدرج التكرارى ( هستوجرام ) histogram وهو يؤخذ من العمودين الأول والرابع من الجدول (٢ – ٣) ويتألف من عدد من المستطيلات المتلاصقة قواعدها فئات التوزيع وارتفاعاتها تتناسب مع التكرارات المناظرة .

(ب) المضلع التكرارى والمنحنى التكرارى



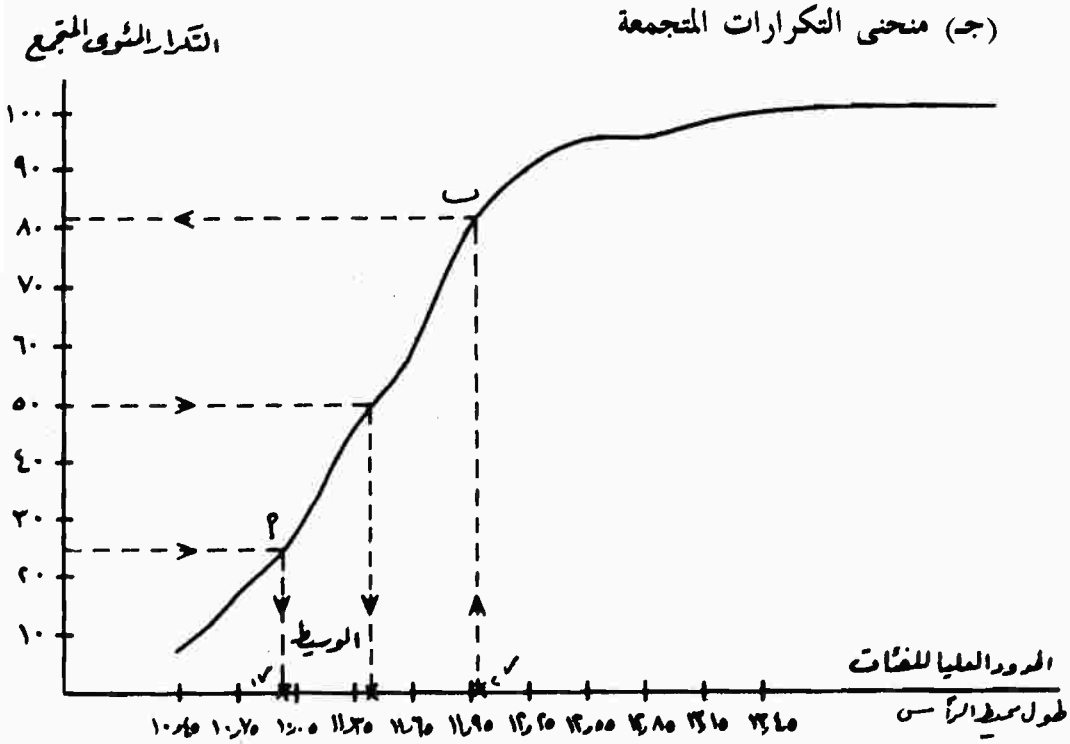

**الشكل (٢ – ٢) المضلع التكرارى والمنحني التكرارى لأطوال محيطات الرؤوس لعينة من ٤٠ من الحمام المنزلى**

هذا الشكل يعطى ما يسمى بالمضلع التكرارى frequency polygon وهو يؤخذ من العمودين الثاني والرابع من الجدول (٢ – ٣) . يمثل المحور الأفقي **مراكز الفئات** ويمثل المحور الرأسي التكرارات وينتج المضلع من توصيل عدد من النقط (١١ نقطة ) إحداثياتها الأفقية مراكز الفئات وإحداثياتها الرأسية التكرارات المناظرة ثم يغلق المضلع من الطرفين وذلك بتصور وجود فئة إضافية في بداية التوزيع وفئة إضافية في آخره التكرار في كل منهما هو بطبيعة الحال صفر .

كما يعطى هذا الشكل ما يسمى بالمنحني التكرارى frequency curve وهو منحني ناعم يمهد باليد ماراً ببعض هذه النقط وقريباً من البعض الآخر ، أى ليس

من الضرورى أن يمر بها جميعاً لأن الهدف من رسمه هو محاولة استكشاف الاتجاه العام لتوزيع المتغير في المجتمع الذى أخذت منه العينة ومن الواضح أن عملية التمهيد هذه تعتمد على ذاتية الراسم وتختلف من شخص إلى آخر ، وهى تجرى على أساس أن التوزيع التكرارى الذى لدينا هو توزيع لعينة مأخوذة من مجتمع متصل ، وكلما كبر حجم العينة وصغرت أطوال الفئات كلما اقترب المضلع التكرارى من المنحني التكرارى .

(جـ) منحنى التكرارات المتجمعة




الشكل (٢ – ٣) منحني التكرارات المتجمعة المئوية لأطوال محيطات الرؤوس لعينة من الحمام المنزل .

هذا الشكل يعطى منحني التكرارات المتجمعة المئوية percentage cumulative frequency curve . وهو يؤخذ من العمودين الأول والثالث من الجدول (٢ – ٤) أى أن الإحداثيات الأفقية للنقط هى الحدود العليا للفئات والإحداثيات الرأسية هى التكرارات المتجمعة المئوية المناظرة . وكان من الممكن أن نرسم المنحني نفسه من

العمودين الأول والثاني إلا أن هذا يحتاج إلى التفكير في مقياس رسم مناسب لكل توزيع على حدة ، أما استخدام التكرارات المتجمعة المئوية فمن شأنه أن يكون تقسيم المحور الرأسي ثابت لأى توزيع .

ومن هذا المنحنى نستطيع الإجابة إجابة تقريبية عن نوعين من الأسئلة يتمثلان فيما يلى :

( أ ) ما طول محيط رأس الحمامة الذى يقل عنه أو يساويه ٢٥٪ من أطوال محيطات رؤوس الحمام ؟

(ب) ما النسبة المئوية لعدد الحمام الذى تقل أو تساوى أطوال محيطات رؤوسها عن ١٢ ملليمترا ؟

وللإجابة عن السؤال الأول نرسم من النقطة التي تمثل التكرار المتجمع المئوى ٢٥٪ على المحور الرأسي خطا مستقيما يوازى المحور الأفقي ويقطع المنحني في نقطة ( أ ) ثم نرسم من ( أ ) خطا مستقيما يوازى المحور الرأسي يلقي المحور الأفقي عند النقطة $س_1$ . وبعملية حسابية بسيطة نجد أن $س_1$ = ١٠,٩٨ تقريبا فيكون الطول المطلوب هو ١٠,٩٨ ملليمترا تقريبا . أما الإجابة عن السؤال الثاني فتسير بعكس خطوات الإجابة عن السؤال الأول فنرسم من النقطة التي تمثل العدد ١٢ على المحور الأفقي مستقيما يوازى المحور الرأسي ويقطع المنحني في نقطة ب ثم نرسم من ب مستقيما يوازى المحور الأفقي ليلقي المحور الرأسي عند النقطة ٨٢ تقريبا فتكون النسبة المطلوبة هى ٨٢٪ تقريبا .

ومن منحني التكرارات المتجمعة المئوية نستطيع بنفس الطريقة أن نوجد تقريبيا ما يسمى بالمئينات والربيعات وهى أعداد تستخدم في وصف التوزيعات كما سنرى بعد . وهى من المقاييس المسماة بمقاييس الموضع لتمييزها عن مقاييس المقدار التى سنقدمها فى البند (٢ – ٤) .

## (٢ – ٣) المئينات والربيعات CENTILES AND QUARTILES

إذا كان لدينا توزيع تكرارى لمتغير كمى رتبت قيمه تصاعديا فإن المئينات $م_1$ ، $م_2$ ، .... ، $م_{99}$ لهذا التوزيع تعرف بأنها تلك الأعداد التي تقسمه إلى ١٠٠ قسم يشتمل كل منها على عدد متساوى من قيم المتغير أى على ١٪ من هذه القيم . وعلى ذلك فالمئين $م_{10}$ هو العدد الذى يقل عنه أو يساويه ١٠٪ من قيم المتغير والمئين $م_{80}$ هو العدد الذى يقل عنه أو يساويه ٨٠٪ من قيم المتغير وهكذا .

وبالمثل الربيعات $ر_1$ ، $ر_2$ ، $ر_3$ للتوزيع تعرف بأنها تلك الأعداد التي تقسمه إلى أربعة أقسام يشتمل كل منها على ربع قيم المتغير . ويلاحظ أن :

الربيع الأول $ر_1$ = المئين $م_{25}$ = العدد الذى يقل عنه أو يساويه ٢٥٪ من قيم المتغير

= ١٠,٩٨ مليمترا تقريبا في هذا المثال .

الربيع الثاني $ر_2$ = المئين $م_{50}$ = العدد الذى يقل عنه أو يساويه ٥٠٪ من قيم المتغير .

= ١١,٥ مليمترا تقريبا في هذا المثال .

ويسمى هذا المقياس أيضا **بالوسيط** لأنه يتوسط التوزيع ويقسمه إلى قسمين متساويين في عدد قيم المتغير .

الربيع الثالث $ر_3$ = المئين $م_{75}$ = العدد الذى يقل عنه أو يساويه ٧٥٪ من قيم المتغير .

= ١١,٨٨ ملليمترا تقريبا في هذا المثال .

وفي المثال (٢ – ٢) حيث ن = ٤٠ حمامة نجد أن الربيع الأول وهو ١٠,٩٨ يسبقه عشرة أعداد تقع قيمها من ١٠,٢ إلى ١٠,٩ ، كما نجد أن الوسيط وهو

١١,٥ يسبقة عشرون عددا تقع قيمها من ١٠,٢ إلى ١١,٥ ، ونجد أن الربيع الثالث وهو ١١,٨٨ يسبقه ثلاثون عددا تقع قيمها من ١٠,٢ إلى ١١,٨ .

ونستطيع إيجاد المئينات والربيعات بطريقة حسابية وهى طريقة أكثر دقة نوضحها عن طريق التوزيع الذى بالمثال (٢ - ٢) والذى يمكن تلخيصه بالجدول (٢ - ٩) الآتي :

**الجدول(٢ - ٩)**

**التوزيع التكرارى والتوزيع المتجمع لأطوال محيطات الرؤوس بالمليمترات لعينة من الحمام المنزلى**

| الفئـــة | التكرار | التكرار المتجمع | |
|---|---|---|---|
| ١٠,١٥ ــ ١٠,٤٥ | ٣ | ٣ | |
| ١٠,٤٥ ــ ١٠,٧٥ | ٤ | ٧ | |
| ١٠,٧٥ ــ ١١,٠٥ | ٤ | ١١ | $ر_1$ |
| ١١,٠٥ ــ ١١,٣٥ | ٧ | ١٨ | |
| ١١,٣٥ ــ ١١,٦٥ | ٥ | ٢٣ | $ر_2$ |
| ١١,٦٥ ــ ١١,٩٥ | ٩ | ٣٢ | $ر_3$ |
| ١١,٩٥ ــ ١٢,٢٥ | ٤ | ٣٦ | |
| ١٢,٢٥ ــ ١٢,٥٥ | ٢ | ٣٨ | |
| ١٢,٥٥ ــ ١٢,٨٥ | ٠ | ٣٨ | |
| ١٢,٨٥ ــ ١٣,١٥ | ١ | ٣٩ | |
| ١٣,١٥ ــ ١٣,٤٥ | ١ | ٤٠ | |

لايجاد الوسيط $ق_2$ والربيعين $ق_1$ ، $ق_3$ :

ترتيب الوسيط = $\frac{ن}{2}$ ( هذه قاعدة عامة لتوزيعات المتغيرات المتصلة )

= $\frac{40}{2}$ = ٢٠

إذن الوسيط هو الطول الذى يقل عنه أو يساويه أطوال ٢٠ حمامة .

نلاحظ من الجدول أن هناك ١٨ حمامة تقل أطوالها عن ١١,٣٥ مليمترا .

وأن هناك ٢٣ حمامة تقل أطوالها عن ١١,٦٥ مليمترا .

وعلى ذلك يجب أن يقع الوسيط في الفئة ١١,٣٥ – ١١,٦٥ وتسمى هذه الفئة حينئذ **بالفئة الوسيطية** . إن هذه الفئة تشتمل على ٥ وحدات ( حمامات )نريد أن ناخذ منها اثنين فقط لنستكمل العدد المطلوب ( من ١٨ حمامة إلى ٢٠ حمامة ) وعلى فرض أن الوحدات الخمسة موزعة بانتظام داخل الفئة بمعني أنها تبعد عن بعضها بمسافات متساوية فإن العدد ٢ يمثل طولا قدره $\frac{2}{5}$ طول الفئة أى طولا قدره $\frac{2}{5}$ × ٠,٣ = ٠,١٢ مم ولما كانت بداية الفئة ١١,٣٥ مم فإن :

الوسيط = $ق_2$ = ١١,٣٥ + ٠,١٢ = ١١,٤٧ مليمترا .

وبصفة عامة نوجد الوسيط من الصيغة الآتية :

الوسيط = الحد الأدني للفئة الوسيطية +

$$\frac{\text{ترتيب الوسيط – التكرار المتجمع للفئة السابقة للفئة الوسيطية}}{\text{التكرار في الفئة الوسيطية}} \times \text{طول الفئة}$$

وبنفس المنطق السابق نوجد الربيعين الأول والثالث بالصيغتين الآتيتين مع ملاحظة أن ترتيب الربيع الأول هو $\frac{ن}{4}$ وترتيب الربيع الثالث هو $\frac{3ن}{4}$ وذلك بالنسبة للتوزيعات التكرارية للمتغيرات المتصلة .

$ق_1$ = الحد الأدني لفئة الربيع الأول +

$$\frac{\text{ترتيب } ق_1 - \text{التكرار المتجمع للفئة السابقة لفئة الربيع الأول}}{\text{التكرار في فئة الربيع الأول}} \times \text{طول الفئة}$$

$ق_3$ = الحد الأدني لفئة الربيع الثالث +

$$\frac{\text{ترتيب } ق_3 - \text{التكرار المتجمع للفئة السابقة لفئة الربيع الثالث}}{\text{التكرار في فئة الربيع الثالث}} \times \text{طول الفئة}$$

فى المثال (٢ – ٢) نجد ما يلى :

ترتيب الربيع الأول = $\frac{٤٠}{٤}$ = ١٠

$ق_1$ = ١٠,٧٥ + $\frac{١٠-٧}{٤}$ × ٠,٣ = ١٠,٧٥ + ٠,٢٢٥

= ١٠,٩٧٥ مليمترا .

، ترتيب الربيع الثالث = $\frac{٣ \times ٤٠}{٤}$ = ٣٠

$ق_3$ = ١١,٦٥ + $\frac{٣٠-٢٣}{٩}$ × ٠,٣ = ١١,٦٥ + ٠,٢٣٣

= ١١,٨٨٣ مليمترا .

وتطبق هذه الصيغ أيضا في حالة التوزيعات التكرارية البسيطة وفي حالة التوزيعات غير التكرارية أى التي على صورة مجموعة من القيم $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، $س_ن$ ( تكرار كل منها الواحد الصحيح ) ، بشرط أن يكون المتغير من النوع المتصل فتعتبر أى قيمة س من قيم المتغير كأنها فترة تبدأ بنصف وحدة خطوة أسفل العدد س وتنتهى بنصف وحدة خطوة أعلاه وبذلك يكون طول الفترة مساويا الواحد إذا كانت س مقدرة بالوحدات الصحيحة ويساوى ٠,١ إذا كانت مقدرة إلى خانة عشرية واحدة ويساوى ٠,٠١ إذا كانت مقدرة إلى خانتين عشريتين وهكذا . ونوضح ذلك بأخذ المثال (٢ – ١) الذى نلخصه بالجدول (٢ – ١٠) الآتي :

الجدول ( ٢ – ١٠ )

| س | ك | ≤ س |
|---|---|---|
| ٧٧ | ٢ | ٢ |
| ٧٨ | ١ | ٣ |
| ٧٩ | ٢ | ٥ |
| ٨٠ | ٢ | ٧ |
| ٨١ | ١ | ٨ |
| ٨٢ | ٢ | ١٠ |
| ٨٣ | ٢ | ١٢ |
| ٨٤ | ٢ | ١٤ |
| ٨٥ | ٣ | ١٧ |
| ٨٦ | ٥ | ٢٢ |
| ٨٧ | ٣ | ٢٥ |

ترتيب الربيع الأول = $\frac{٢٥}{٤}$ = ٦,٢٥

الربيع الأول يقع في الفئة التي تعبر عن العدد ٨٠ التي تمتد من ٧٩,٥ إلى ٨٠,٥ والتكرار فيها ٢

$ر_١ = ٧٩,٥ + \frac{٦,٢٥ - ٥}{٢} \times ١ = ٨٠,١٢٥$

، ترتيب الوسيط = $\frac{٢٥}{٢}$ = ١٢,٥

الوسيط يقع في الفئة التي تعبر عن العدد ٨٤ التي تمتد من ٨٣,٥ إلى ٨٤,٥ والتكرار فيها ٢

$ر_٢ = ٨٣,٥ + \frac{١٢,٥ - ١٢}{٢} \times ١ = ٨٣,٧٥$

، ترتيب الربيع الثالث = $\frac{٣ \times ٢٥}{٤}$ = ١٨,٧٥

$ر_٣ = ٨٥,٥ + \frac{١٨,٧٥ - ١٧}{٥} \times ١ = ٨٥,٨٥$

**ملاحظـــة** : لا تصلح هذه الطريقة ولا طريقة المنحني المتجمع في حالة توزيعات المتغيرات غير المتصلة ( الوثابة ) ، على أنه في حالة التوزيعات غير التكرارية من الواضح أن الوسيط هو القيمة التي تقع في وسط التوزيع إذا كان عدد قيم المتغير فردياً أو هو متوسط القيمتين الوسطيتين إذا كان عدد القيم زوجياً . فمثلا للمجموعة .

٤ ٥ ٥ ٦ ٧ ٧ ٩ ١١ ١٢ ١٢ ١٤ ١٥ ١٥ ٤٠ ٥٠

التي عدد قيمها ١٥ يكون الوسيط هو العدد ١١ إذ أن هذا العدد يقسم المجموعة إلى قسمين متساويين في عدد القيم سبعة منها قبله وسبعة منها بعده .

أما بالنسبة للمجموعة

٤ ٥ ٥ ٦ ٧ ٧ ٩ ١١ ١٢ ١٢ ١٤ ١٥ ١٥ ٤٠

التي عدد قيمها ١٤ فيكون الوسيط هو العدد $\frac{٩+١١}{٢}$ = ١٠ إذ أنه يقسم المجموعة إلى قسمين متساويين في عدد القيم سبعة منها قبله وسبعة منها بعده مع ملاحظة أن الوسيط هنا ليس أحد قيم المجموعة المعاطاة .

بصفة عامة إذا رتبت قائمة من الأعداد حجمها ن **لمتغير وثاب** ترتيبا تصاعديا فإن :

( أ ) ترتيب الوسيط هو $\frac{١}{٢}$ ( ن + ١ )

ففى القائمة الأولى لدينا ن = ١٥ ∴ ترتيب الوسيط ٨ وعلى ذلك فالوسيط هو العدد الثامن فى القائمة أى العدد ١١ .

وفى القائمة الثانية لدينا ن = ١٤ ∴ ترتيب الوسيط ٧,٥ وهذا العدد يعنى أن الوسيط هو متوسط العددين السابع والثامن فى القائمة أى العدد ١٠ .

(ب) يحسب ترتيب الربيع الأول من ترتيب الوسيط كالآتى :

ترتيب $ر_١$ هو $\frac{١}{٢}$ (ترتيب الوسيط بعد حذف الكسر إذا وجد + ١ ) .

(ج)من التماثل يكون ترتيب الربيع الثالث هو نفس ترتيب الربيع الأول حين تقرأ قائمة الأعداد عكسيا من النهاية إلى البداية .

ففى القائمة الأولى لدينا ن = ١٥ ، ترتيب الوسيط هو ٨

∴ ترتيب $ر_١$ هو $\frac{١}{٢}$ (٨ + ١) = ٤,٥

وهذا يعنى أن الربيع الأول هو متوسط العددين الرابع والخامس فى القائمة

أى أن $ر_١ = \frac{١}{٢}$ (٦+٧) = ٦,٥

من التماثل $ر_٣ = \frac{١}{٢}$ (١٤+١٥) = ١٤,٥

وفى المجموعة الثانية لدينا ن = ١٤، ترتيب الوسيط هو ٧,٥

∴ ترتيب $ر_٢$ هو $\frac{١}{٢}$ (١+٧) = ٤

∴ $ر_١ = ٦$

من التماثل $ر_٣ = ٤٦$

## ( ٢ -٤ ) الوصف العددي للتوزيعات التكرارية :

حين يكون لدينا توزيع لمتغير **عددي** وحين يكون لهذا التوزيع قمة واحدة كما يبدو مثلا من المنحني التكراري ، فإننا نستطيع وصفه موضوعياً من حيث عدة جوانب أهمها :

| | |
|---|---|
| ( أ ) النزعة المركزية | **Central Tendency** |
| (ب) التشتت | **Dispersion** |
| (جـ) الإلتواء | **Skewness** |
| ( د) التفرطح | **Kurtosis** |

ففي أغلب التوزيعات ذات القمة الواحدة يتراكم عدد كبير من قيم المتغير حول قيمة معينة ويقل هذا التراكم تدريجياً على وجه العموم كلما ابتعدت القيم عن هذه القيمة من الجانبين . هذا التراكم أو التجمع حول قيمة مايسمى بالنزعة المركزية للتوزيع أو بالقيمة المتوسطة وتسمى القيمة التي يحدث حولها التجمع بمقياس النزعة المركزية . ويهمنا في دراسة التوزيعات الحصول على هذا المقياس . ولما كان هذا المقياس يختلف في تركيبه بحسب طبيعة البيانات والهدف من دراستها فقد وضعت عدة مقاييس للنزعة المركزية نختار منها مانرى أنه يلائم ما بأيدينا من توزيعات . ومن أشهر هذه المقاييس ما يلي :

الوسط الحسابي – الوسيط – المنوال – الوسط الهندسي – الوسط التوافقي .

وسنهتم هنا بصفة خاصة بالوسط الحسابي لأسباب عدة منها أنه أقوى مقاييس النزعة المركزية استجابة للمعالجة الرياضية ، وهو المقياس الذي نستخدمه عادة مالم يتضح لنا أنه لا يعبر تعبيراً صادقاً عن هذه النزعة كما هو الحال مثلا عندما يكون التوزيع مشتملا على قيم متطرفة تشذ عن بقية القيم .

كما يهمنا كذلك قياس تشتت التوزيع أي قياس مدى انحراف قيم المتغير بالنسبة إلى بعضها وبالنسبة إلى القيمة المتوسطة ، أو بمعنى معكوس ، مدى تجانس التوزيع . ومن أشهر مقاييس التشتت مايلي :

المدى – الانحراف الربيعي – الانحراف المتوسط – الانحراف المعياري – معامل الاختلاف .

وسنهتم هنا بصفة خاصة بالانحراف المعياري لأنه كمقياس للتشتت يتمشى مع الوسط الحسابي كمقياس للنزعة المركزية وهما يؤخذان معاً أو يتركان معاً .

## ( ٢ -٤ -١ ) الوسط الحسابي والانحراف المعياري :

**MEAN AND STNDARD DEVIATION**

**مثال ( ٢ -٥ ) :**

اعتبر الأعداد السبعة الآتية : ٥ ٨ ٧ ١٠ ١١ ٤ ٩

نعلم أن الوسط الحسابي لعدد من القيم هو مجموع هذه القيم مقسوماً على عددها وهذا تعريف عام للوسط الحسابي ويمكن صياغته رمزياً في حالتنا هذه كالآتي ·

(١)

$$\text{الوسط الحسابي} = \bar{س} = \frac{\text{مجـ} س_ر}{ن}$$

حيث $س_ر$ تعبر عن قيم المتغير ، ن تعبر عن عدد هذه القيم .

ويعرف التباين Variance بأنه متوسط مجموع مربعات انحرافات قيم المتغير عن الوسط الحسابي وهذا ما نستطيع كتابته رمزياً كالآتي ( على أساس أن التوزيع التكراري هو توزيع عينة ) :

$$\text{التباين} = ع^٢ = \frac{١}{ن - ١} \text{مجـ} (س_ر - \bar{س})^٢ \qquad (٢-أ)$$

يلاحظ أن هذا العدد يساوي صفراً إذا وإذا فقط تساوت جميع القيم $س_ر$ لأن كلا منها في هذه الحالة يساوي $\bar{س}$ ، وهناك صورة أخرى للتباين تشتق من هذه الصورة بعمليات جبرية بسيطة ، وهذه الصورة هي :

$$ع^٢ = \frac{١}{ن - ١} \left[ \text{مجـ} س_ر^٢ - \frac{(\text{مجـ} س_ر)^٢}{ن} \right] \qquad (٢ - ب)$$

وبالرغم من أن هاتين الصورتين متطابقتان رياضياً ، إلا أننا في حساب التباين نستخدم الصورة الثانية لأن الخطأ الذي ينتج فيها من تقريب الأعداد أقل من ذلك

الذي ينتج من الصورة الأولى ، كما أنها أكثر طواعية لحاسبات الجيب والحاسبات الإلكترونية .

أما **الانحراف المعياري** فيعرف بأنه الجذر التربيعي الموجب للتباين ويرمز له بالرمز ع . وهو عدد موجب دائماً بالتعريف .

من الصيغتين ( ١ ) ، ( ٢ –ب ) نرى أن حساب الوسط الحسابي والتباين يعتمد على حساب المجموعين مجـ س$_{ر}$ ، مجـ س$_{ر}^{٢}$ وهذان المجموعان يمكن إيجادهما مباشرة من حاسبات الجيب أو من الجدول ( ٢ –١١ ) الآتي وهو يخص المثال ( ٢ –٥ ) .

**الجدول ( ٢ –١١ )**

**لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لمجموعة من القيم**

| س $_{ر}$ | س $_{ر}^{٢}$ |
|---|---|
| ٥ | ٢٥ |
| ٨ | ٦٤ |
| ٧ | ٤٩ |
| ١٠ | ١٠٠ |
| ١١ | ١٢١ |
| ٤ | ١٦ |
| ٩ | ٨١ |
| ٥٤ | ٤٥٦ |

الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{مجـ س_ر}{ن} = \frac{٥٤}{٧} = ٧,٧١$ تقريباً

التباين $ع^٢ = \frac{١}{ن - ١} [مجـ س_ر^٢ - \frac{(مجـ س)^٢}{ن}] = \frac{١}{٦} [٤٥٦ - \frac{(٥٤)^٢}{٧}]$

$= ٦,٥٧١$ تقريباً

الانحراف المعياري $ع = \sqrt{٦,٥٧١} = ٢,٥٦$ تقريباً

**مثال ( ٢ -٦ ) :**

أوجد الوسط الحسابي والإنحراف المعياري للتوزيع التكراري البسيط المعطي بالمثال ( ٢ -١ ) السابق .

نظراً لأن كل قيمة $س_ر$ من قيم المتغير مكررة $ك_ر$ من المرات فإن مجموع القيم يكون $مجـ ك_ر س_ر$ وعلى ذلك فإن التعريف العام للوسط الحسابي يمكن صياغته في هذه الحالة كالآتي :

الوسط الحسابي $\overline{س} = \frac{مجـ ك_ر س_ر}{ن}$ (٣)

حيث $ن = مجـ ك_ر$

وبالمثل نعرف التباين كالآتي :

التباين $= ع^٢ = \frac{١}{ن - ١} مجـ ك_ر (س_ر - \overline{س})^٢$ (٤ - أ)

أو $= \frac{١}{ن - ١} [مجـ ك_ر س_ر^٢ - \frac{(مجـ ك_ر س_ر)^٢}{ن}]$ (٤ - ب)

يلاحظ أن التعريفين ( ١ ) ، ( ٢ ) ما هما إلا حالة خاصة من التعريفين ( ٣ ) ، ( ٤ ) تكون فيها جميع التكرارات ك$_ر$ مساوية للواحد .

لإيجاد المجموعين مجـ ك$_ر$ س$_ر$ ، مجـ ك$_ر$ س$_ر^2$ توطئة لحساب الوسط الحسابي والتباين نستخدم جدولا كالجدول ( ٢ -١٢ ) الآتي :

الجدول ( ٢ -١٢ )

لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع تكراري بسيط

| س$_ر$ | ك | ك$_ر$ س$_ر$ | ك$_ر$ س$_ر^2$ |
|---|---|---|---|
| ٧٧ | ٢ | ١٥٤ | ١١٨٥٨ |
| ٧٨ | ١ | ٧٨ | ٦٠٨٤ |
| ٧٩ | ٢ | ١٥٨ | ١٢٤٨٢ |
| ٨٠ | ٢ | ١٦٠ | ١٢٨٠٠ |
| ٨١ | ١ | ٨١ | ٦٥٦١ |
| ٨٢ | ٢ | ١٦٤ | ١٣٤٤٨ |
| ٨٣ | ٢ | ١٦٦ | ١٣٧٧٨ |
| ٨٤ | ٢ | ١٦٨ | ١٤١١٢ |
| ٨٥ | ٣ | ٢٥٥ | ٢١٦٧٥ |
| ٨٦ | ٥ | ٤٣٠ | ٣٦٩٨٠ |
| ٨٧ | ٣ | ٢٦١ | ٢٢٧٠٧ |
| | ٢٥ | ٢٠٧٥ | ١٧٢٤٨٥ |

$$\text{الوسط الحسابي} = \bar{س} = \frac{\text{مجـ} ك_ر س_ر}{ن} = \frac{٢٠٧٥}{٢٥} = ٨٣$$

$$\text{التباين} = ع^٢ = \frac{١}{ن - ١} \left[ \text{مجـ} ك_ر س_ر^٢ - \frac{(\text{مجـ} ك_ر س_ر)^٢}{ن} \right]$$

$$= \frac{١}{٢٤} \left[ ١٧٢٤٨٥ - \frac{(٢٠٧٥)^٢}{٢٥} \right] = ١٠,٨٣$$

الانحراف المعياري = ع = ٣,٢٩١

**مثال ( ٢ -٧ ) :**

أوجد الوسط الحسابي والانحراف المعياري للتوزيع التكراري ذي الفئات المعطى بالمثال ( ٢ -٢ ) السابق .

في حالة التوزيع التكراري ذي الفئات نعتبر كما سبق الذكر أن جميع القيم الواقعة في فئة ما مساوية لمركز الفئة . وعلى ذلك يكون مجموع هذه القيم مجـ $ك_ر س_ر$ حيث $س_ر$ هنا ترمز إلى مركز الفئة ، وتكون التعاريف ( ٣ ) ، ( ٤ -أ ) ، ( ٤ -ب ) صالحة للاستخدام هنا لإيجاد الوسط الحسابي والتباين مع فارق واحد وهو أن $س_ر$ ترمز إلى مراكز الفئات في حالة التوزيعات التكرارية ذوات الفئات ، بينما ترمز إلى قيم المتغير في حالة التوزيعات التكرارية البسيطة . ويجري الحساب كما في الجدول ( ٢ - ١٣ ) الآتي :

الجدول ( ٢ -١٣ )

لإيجاد الوسط الحسابي والانحراف المعياري لتوزيع تكراري ذي فئات

| الفئات | س ر | ك ر | ك ر س ر | ك ر س ر٢ |
|---|---|---|---|---|
| ١٠,١٥ – ١٠,٤٥ | ١٠,٣ | ٣ | ٣٠,٩ | ٣١٨,٢٧ |
| ١٠,٤٥ – ١٠,٧٥ | ١٠,٦ | ٤ | ٤٢,٤ | ٤٤٩,٤٤ |
| ١٠,٧٥ – ١١,٠٥ | ١٠,٩ | ٤ | ٤٣,٦ | ٤٧٥,٢٤ |
| ١١,٠٥ – ١١,٣٥ | ١١,٢ | ٧ | ٧٨,٤ | ٨٧٨,٠٨ |
| ١١,٣٥ – ١١,٦٥ | ١١,٥ | ٥ | ٥٧,٥ | ٦٦١,٢٥ |
| ١١,٦٥ – ١١,٩٥ | ١١,٨ | ٩ | ١٠٦,٢ | ١٢٥٣,١٦ |
| ١١,٩٥ – ١٢,٢٥ | ١٢,١ | ٤ | ٤٨,٤ | ٥٨٥,٦٤ |
| ١٢,٢٥ – ١٢,٥٥ | ١٢,٤ | ٢ | ٢٤,٨ | ٣٠٧,٥٢ |
| ١٢,٥٥ – ١٢,٨٥ | ١٢,٧ | ٠ | ٠ | ٠ |
| ١٢,٨٥ – ١٣,١٥ | ١٣,٠ | ١ | ١٣,٠ | ١٦٩,٠٠ |
| ١٣,١٥ – ١٣,٤٥ | ١٣,٣ | ١ | ١٣,٣ | ١٧٦,٨٩ |
| المجموع | | ٤٠ | ٤٥٨,٥ | ٥٢٧٤,٤٩ |

الوسط الحسابي لمحيط رأس الحمامة = $\overline{س} = \frac{٤٥٨,٥}{٤٠} = ١١,٤٦٢٥$ مليمترا

التباين $= ع^{٢} = \frac{١}{٣٩} \left[ ٥٢٧٤,٤٩ - \frac{(٤٥٨,٥)^{٢}}{٤٠} \right]$

$= ٠,٤٨٥٥$

الانحراف المعياري = $\sqrt{٠,٤٨٥٥} = ٠,٦٩٦٨$ مليمترا

**ملاحظات :**

( ١ ) الأصل في تعريف التباين هو $\frac{١}{ن}$ مـ ك$_{س}$ $(س_{س} - \bar{س})^{٢}$ ولكن حين نستخدم تباين عينة حجمها ن ووسطها الحسابي $\bar{س}$ لتقدير تباين مجتمع تقديرا غير متحيز نضع $\frac{١}{ن - ١}$ بدلا من $\frac{١}{ن}$ لأن تباين العينة يكون عادة أصغر من تباين المجتمع وهذا التعديل يجعل تباين العينة أكثر ملاءمة لتقدير تباين المجتمع ، وهناك من النظريات الرياضية ما يؤيد ذلك . وفيما عدا هذه الحالة نستخدم الصيغة الأصلية للتباين أي نحتفظ بالعدد ن .

( ٢ ) لا تتغير قيمة التباين إذا طرح ( أو أضيف ) أي عدد من جميع قيم المتغير .

**( ٢ -٤ -٢ ) معامل الاختلاف :**

يعرف معامل الاختلاف م . خ . لتوزيع ما كالآتي :

$$\text{م . خ} = \frac{\text{ع}}{\bar{س}} \times ١٠٠ \qquad (٥)$$

حيث ع هو الانحراف المعياري للتوزيع ، $\bar{س}$ وسطه الحسابي .

فمثلا ، للتوزيع الذي بالمثال ( ٢ -٦ ) :

$$\text{م . خ} = \frac{٣,٢٩١}{٨٣} \times ١٠٠ = ٣,٩٦٥$$

وللتوزيع الذي بالمثال ( ٢ -٧ ) :

$$\text{م . خ .} = \frac{٠,٦٩٦٨}{١١,٤٦٢٥} \times ١٠٠ = ٦,٠٧٩$$

إن معامل الاختلاف هو مقياس مطلق للتشتت وهو يستخدم **لمقارنة** تشتتات التوزيعات خاصة في الحالتين الآتيتين :

( أ ) حين تختلف متوسطات التوزيعات اختلافاً كبيراً كما هو الحال عند مقارنة تشتت أطوال أذيال الأفيال وتشتت أطوال أذيال الفيران .

( ب ) حين تختلف الوحدات التي تقاس بها المتغيرات كما هو الحال عند مقارنة تشتت أطوال مجتمع ما بأوزان هذا المجتمع .

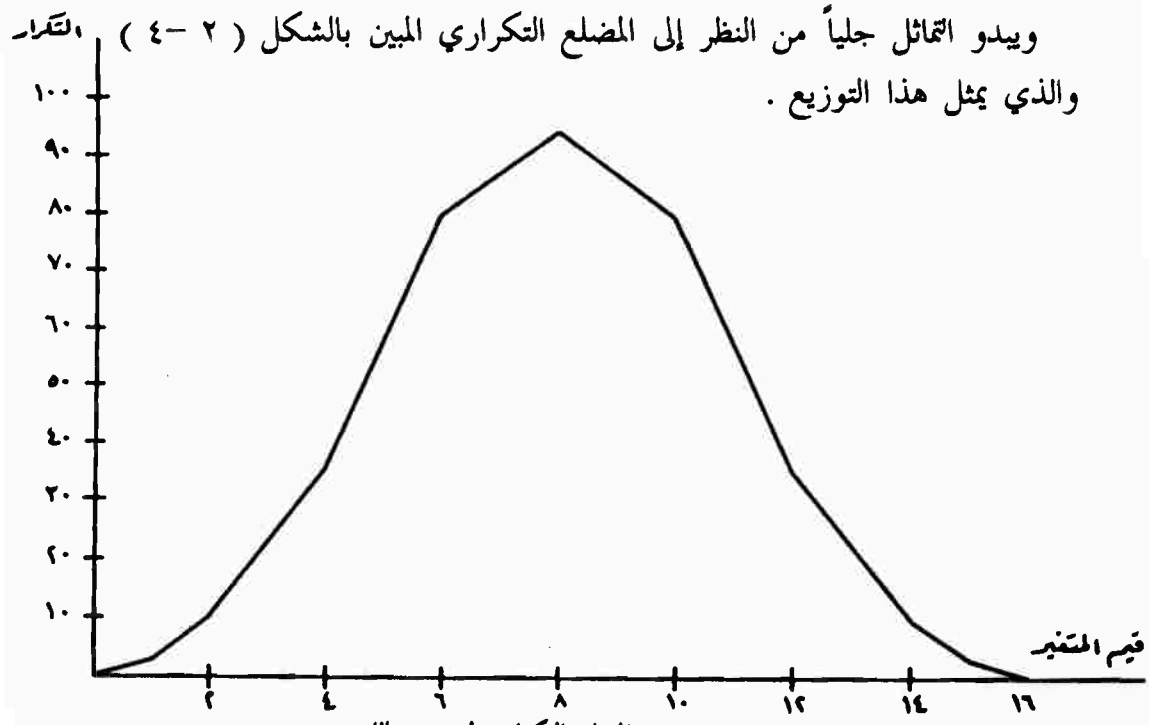
## ( ٢ -٤ -٣ ) الالتواء : SKEWNESS

التواء توزيع ما يعني مدى بعده عن التماثل . ويكون التوزيع التكراري متماثلا إذا كانت التكرارات موزعة توزيعاً متماثلا حول الوسط الحسابي ، بمعنى أن تكون لقيم المتغير المتساوية البعد عن الوسط الحسابي نفس التكرارات . والتوزيع الآتي مثال لذلك :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| س | ١ | ٢ | ٤ | ٦ | ٨ | ١٠ | ١٢ | ١٤ | ١٥ |
| ك | ٣ | ١٠ | ٣٥ | ٨٠ | ٩٥ | ٨٠ | ٣٥ | ١٠ | ٣ |

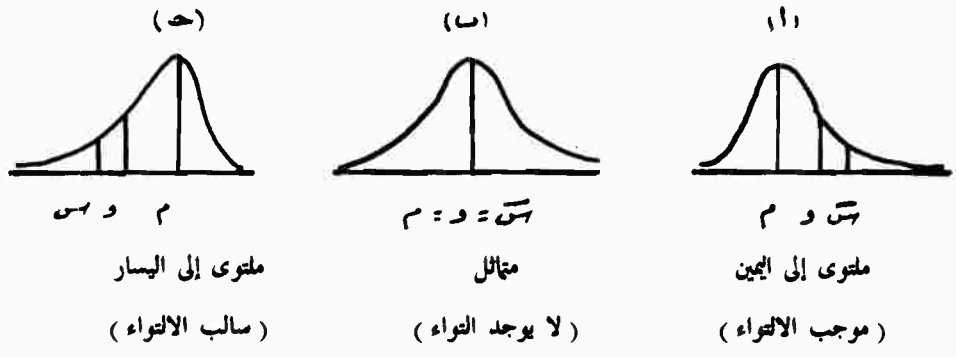
فهذا توزيع متماثل حول وسطه الحسابي $\bar{س} = ٨$

ويبدو التماثل جلياً من النظر إلى المضلع التكراري المبين بالشكل ( ٢ -٤ ) والذي يمثل هذا التوزيع .




الشكل ( ٢ -٤ ) المضلع التكراري لتوزيع متماثل

وتقسم المنحنيات التكرارية من حيث الالتواء إلى ثلاثة أنواع تتبين من الشكل ( ٢ –٥ ) الآتي حيث $\bar{س}$ ترمز إلى الوسط الحسابي ، و ترمز إلى الوسيط ، م ترمز إلى المنوال وهو القيمة الأكثر تكرارا في التوزيع .




الشكل ( ٢ –٥ ) : أنواع الالتواء

إذا كانت هذه الأشكال تمثل توزيعا لدرجات طلاب في امتحان ما فالشكل ( أ ) يشير إلى أن عددا كبيرا من الطلاب حصلوا على درجات أقل من المتوسط مما قد يعنى أن مستوى الطلاب أقل من مستوى الامتحان . . . ، والشكل ( حـ ) يشير إلى عكس ذلك . وهناك حقيقة هامة مثلت بوضوح في هذه الأشكال نقدمها كما يلي :

إذا كان التوزيع ملتويا إلى اليمين فإن $\bar{س}$ > و > م والعكس بالعكس .

وإذا كان التوزيع متماثلا فإن $\bar{س}$ = و = م والعكس بالعكس

وإذا كان التوزيع ملتويا إلى اليسار فإن م > و > $\bar{س}$ والعكس بالعكس .

ويقاس الالتواء عادة بأحد المقياسين الآتيين :

(١) مقياس الالتواء = $\frac{٣ \text{ (الوسط الحسابى – الوسيط)}}{\text{الانحراف المعيارى}} = \frac{٣ (\bar{س} - و)}{ع}$ (٦)

وهذا المقياس مبنى على الحقيقة سابقة الذكر .

(٢) معامل الالتواء = $\frac{١}{ن - ١}$ مـ ك$_{ر}$ (س$_{ر}$ - س)$^{٣}$ / ع$^{٣}$ (٧)

وهذا المقياس يتمشى مع الوسط الحسابي كمقياس للنزعة المركزية والانحراف المعياري كمقياس للتشتت .

من المهم أن نلاحظ مايلي :

( أ ) كل من المقياسين ( ٦ ) و( ٧ ) هو مقياس نسبي خالي من وحدات القياس وبالتالى يمكن استخدامه للمقارنة بين التواءات التوزيعات .

(ب) كل من المقياسين تقع قيمه بين العددين -٣ ، + ٣ .

(حـ) في كل من هذين المقياسين حين تكون القيمة موجبة نقول إن الالتواء موجب أو إنه التواء إلى اليمين ، وحين تكون سالبة نقول إن الالتواء سالب أو إنه التواء إلى اليسار . أما إذا كانت القيمة الناتجة صفرا فنقول إنه لا يوجد التواء أو إن التوزيع متماثل .

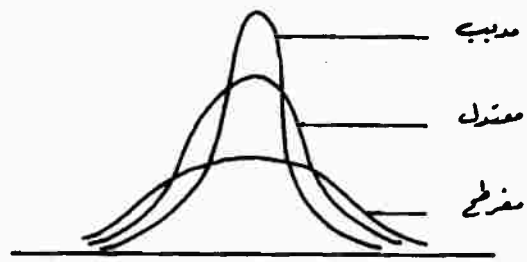
## ( ٢ -٤ -٤ ) التفرطح : KURTOSIS (OR PEAKEDNESS)

تقسم المنحنيات التكرارية من حيث تفرطح قمتها إلى ثلاثة أنواع هي :

( أ ) معتدلة ( متوسطة التفرطح ) . Mesokurtic (Normal)

(ب) مدببة . Leptokurtic

(ج) مفرطحة . Platykurtic




الشكل ( ٢ -٦ ) أنواع التفرطح

إن وصف المنحنيات بأنها مدببة أو مفرطحة يكون بالمقارنة مع المنحنيات المعتدلة التي سنتناولها بالدراسة في فصل قادم . وحين نقول إن المنحني مدبب فنحن نعني أن عدداً كبيراً من المفردات يتراكم بالقرب من الوسط الحسابي وعند الذيلين ولا يكون بالمواضع الأخرى إلا عدداً قليلا منها ، وذلك بالمقارنة مع المنحنيات المعتدلة . كذلك حين نقول إن المنحني مفرطح فنحن نعني أن عدداً قليلاً من المفردات يتراكم بالقرب من الوسط الحسابي وعند الذيلين ويكون هناك عدد كبير منها بالمواقع الأخرى ، وذلك بالمقارنة مع المنحنيات المعتدلة .

ويعرف المقياس الذي سنأخذه للتفرطح كالآتي وهو يتمشي مع الوسط الحسابي والتباين ومعامل الالتواء السابق تعريفها وجميعها من فصيلة تسمى بفصيلة العزوم :

$$\text{معامل التفرطح} = \frac{1}{\text{ن} - 1} \text{ مح ك}_{\text{ر}} (\text{س}_{\text{ر}} - \overline{\text{س}})^4 / \text{ع}^4 \qquad (8)$$

حيث ع ترمز إلى الانحراف المعياري . وإذا وجد أن قيمة هذا المعامل في عينة ما قريبة من العدد ٣ قيل إن المنحني معتدل التفرطح ، وإذا زادت عن هذا العدد قيل إن المنحني مدبب ، وإذا قلت قيل إنه مفرطح .

**ملاحظة :**

إن الوسط الحسابي والانحراف المعياري ومعامل الالتواء ومعامل التفرطح ، بالإضافة إلى حجم التوزيع هي جل مانحتاج إليه في التحليل الوصفي للتوزيعات ذات القمة الواحدة ، وإذا كان التوزيع يمثل عينة لمجتمع ما فإن هذه القيم تتخذ أساساً لتقدير المعالم الإحصائية لهذا المجتمع باستخدام الطرق الإحصائية كما سنرى بعد . على أن هناك توزيعات لا تصلح هذه المقاييس لوصفها ويستلزم الأمر حينئذ اختيار مقاييس أخرى تناسب هذه التوزيعات . فمثلاً حين يكون التوزيع شديد الالتواء أو محتوياً على قيم متطرفة تشذ عن بقية القيم لا يكون الوسط الحسابي معبراً تعبيراً صادقاً عن النزعة المركزية ولا يكون الانحراف المعياري معبراً تعبيراً صادقاً عن التشتت ويتضح هذا من المثال الآتي :

**مثال ( ٢ -٨ ) :**

القيم الآتية هي أعمار ١٥ مريضاً بالسنوات دخلوا أحد أقسام إحدى المستشفيات في يوم ما ، وذلك بعد ترتيب هذه القيم تصاعدياً :

٣ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ١٠ ١١ ١١ ١٢ ١٣ ١٤ ٥٠ ٦٠

نلاحظ أن هناك قيمتين تشذان عن بقية القيم وهما ٥٠ ، ٦٠ وإذا حسبنا الوسط الحسابي لهذه المجموعة نجده يساوي $\frac{٢١٧}{١٥}$ = ١٤,٥ سنة ولا يعقل أخذ هذه القيمة للتعبير عن متوسط أعمار المرضى فهي تزيد عن جميع قيم المجموعة المعطاة ماعدا قيمتين وفي الوقت ذاته تقل كثيراً عن هاتين القيمتين .

ويفضل في هذه الحال استخدام الوسيط كمقياس للنزعة المركزية لأنه لا يتأثر بالقيم المتطرفة . والوسيط هنا هو العدد ١٠ ومن الواضح أن هذا العدد يتوسط التوزيع وهو أصدق تعبيراً عن متوسط الأعمار من الوسط الحسابي .

في مثل هذه الحالات يستخدم مايسمى بنصف المدى الربيعي لقياس التشتت ومايسمى بمعامل الالتواء الربيعي لقياس الالتواء وهما مقياسان يتمشيان مع الوسيط ويعرفان بدلالة الربيعات كالآتي :

نصف المدى الربيعي = $\frac{١}{٢}$ ( ر٣ − ر١ ) **Semi-interquartile range** (٩)

معامل الالتواء الربيعي = $\frac{(ر٣ - ر٢) - (ر٢ - ر١)}{(ر٣ - ر٢) + (ر٢ - ر١)}$ (١٠)

$$= \frac{ر٣ - ٢ ر٢ + ر١}{ر٣ - ر١}$$

ويلاحظ أن هذا المقياس للالتواء هو مقياس مطلق لا يتوقف على وحدات القياس وبالتالي يمكن استخدامه للمقارنة بين التواءات التوزيعات . وهو يساوي صفراً للتوزيعات المتماثلة حيث يقع الربيعان الأول والثالث على بعدين متساوين من الوسيط $ر_٢$ . كما يلاحظ أن قيمة هذا المقياس تقع بين العددين −١ ، +١ وكلما ابتعدت قيمته عن الصفر من اليمين أو اليسار كلما دل ذلك على التواء التوزيع . كذلك :

$$\text{معامل الاختلاف الربيعي} = \frac{\text{نصف المدى الربيعي}}{\text{الوسيط}} \times ١٠٠ \qquad (١١)$$

وللمثال ( ٢ −٨ ) الأخير نجد − كما في البند ( ٢ −٣ −١ ) ومع ملاحظة أن المتغير متصل − مايلي :

$ر_١ = ٥,٢٥$ ، $ر_٢ = ١٠$ ، $ر_٣ = ١٢,٧٥$

$$\text{نصف المدى الربيعي} = \frac{١}{٢}(١٢,٧٥ - ٥,٢٥) = ٣,٧٥$$

، $$\text{معامل الالتواء الربيعي} = \frac{٥,٢٥ + ٢٠ - ١٢,٧٥}{٥,٢٥ - ١٢,٧٥} = -٠,٢٧$$

## تمارين ( ٢ −١ )

( ١ ) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف للأعداد الآتية

١٠٥ ٩٨ ١٢٠ ٩٥ ١١٥ ١١٠ ١٠٠ ١٢٥ ٩٢ ١٣٠

( ٢ ) رصدت أعمار عينة من ٢٧ شخصا بالسنوات المختلفة عند إصابتهم بمرض ما فوجدت كالآتي :

٣٩ ٥٠ ٢٦ ٤٥ ٤٧ ٧١ ٥١ ٣٣ ٤٠ ٤٠ ٥١ ٥٩ ٤٨ ٤٤ ٤٧ ٦١
٤١ ٥٧ ٣٦ ٥٥ ٦٣ ٦٦ ٤٢ ٥٤ ٤٧ ٥٣ ٥٤

أوجد مـ س ، مـ س$^{٢}$ ومنها احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري للعمر عند الإصابة بذلك المرض . ( لا داعي لتكوين توزيع تكراري ) .

( ٣ ) فحص ١٢٢ قرنا من قرون شجرة السرقم ( الأبانوس الكاذب **laburnum**) فوجد مايلي :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| عدد البذور في القرن | ١ | ٢ | ٣ | ٤ | ٥ | ٦ | ٧ | ٨ |
| عدد القرون | ٢٧ | ٣٢ | ٢١ | ١٥ | ١٣ | ٩ | ٤ | ١ |

( أ ) احسب الوسط الحسابي والانحراف المعياري لعدد البذور في القرن .

(ب) ارسم المدرج التكراري للتوزيع .

( ٤ ) قيست أطوال ٢٥ عظمة فخذ نوع من الحشرات ( م م $\times ١٠^{-١}$ ) فوجدت كما يلي :

٣,٨ ٣,٦ ٤,٣ ٣,٥ ٤,٣ ٣,٣ ٤,٣ ٤,٣ ٣,٩ ٤,٢ ٣,٩ ٣,٨ ٣,٩ ٤,٤
٣,٨ ٤,٧ ٣,٦ ٤,١ ٣,٦ ٤,٤ ٤,٥ ٣,٦ ٤,٤ ٤,١

( أولا ) كون جدولا تكراريا ذا فئات طول فئته ٠,٣٠ ومثله بيانيا بمضلع تكراري .

( ثانيا ) احسب كلا من الوسط الحسابي $\bar{س}$ والانحراف المعياري ع لطول عظمة الفخذ .

( ثالثا ) ارسم منحني التكرارات المتجمعة المئوية ومنه احسب مايلي :

( أ ) النسبة المئوية لعدد الحشرات التي تقل أطوالها عن ٤ م م$^{-١٠}$

(ب) النسبة المئوية لعدد الحشرات التي تقع أطوالها بين العددين س$\pm$ع

(ج) الوسيط أي طول عظمة الفخذ الذي تقل عنه أطوال ٥٠٪ من الحشرات .

( ٥ ) التوزيعات الثلاثة الآتية هي توزيعات درجات مجموعة من ٢٤ طالبا في ثلاثة اختبارات . ارسم المضلع التكراري لكل منها واذكر تعليقاً عن التواء كل توزيع .

التوزيع الأول س$_ر$ : ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠

ك$_ر$ : ٤ ٦ ٥ ٢ ٢ ١ ١ ١ ١ ١

التوزيع الثاني س$_ر$ : ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠

ك$_ر$ : ١ ١ ٢ ٣ ٥ ٥ ٣ ٢ ١ ١

التوزيع الثالث س$_ر$ : ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠

ك$_ر$ : ١ ١ ١ ١ ١ ٢ ٢ ١ ٦ ٤

( ٦ ) الأعداد الآتية هي الزيادة في الوزن بالكيلوجرامات لمجموعة من ١٣ بقرة بعد فترة من نظام غذائي معين :

٢,٤ ٢,٩ ٢,٤ ٢,٣ ٢,١ ٢,٥ ٢,١ ٢,٧ ٥ ٢,٩ ٢,٢ ٢,٨ ٢,٩

أوجد الوسيط ونصف المدى الربيعي ومعامل الالتواء الربيعي .

**ملاحظة** : استخدام الحاسبات :

تستطيع الحاسبات الالكترونية القيام بكل دقة وسرعة بالعمليات التي تتطلبها دراسة البيانات الاحصائية بدءا من تكوين الجداول والتوزيعات التكرارية من واقع البيانات الخام إلى حساب مقاييس النزعة المركزية والتشتت والالتواء والتفرطح .

## (٢ - ٥) شكل الساق والورقة : Stem - and - Leaf Diagram

إن أسلوب الأشكال المسماه بأشكال الساق والورقة هو تنويع لأسلوب التوزيعات التكرارية ، فهو يؤدي إلى تجميع أو تكثيف البيانات في عدد مناسب من الأقسام مثله في ذلك مثل التوزيعات التكرارية ، إلا أنه يتميز عنها بأمرين رئيسيين أولهما أنه يحتفظ بفردية كل عنصر من عناصر البيانات وثانيهما أنه يسهل لنا التعرف على البيانات وتكوين فكرة عن توزيع المتغير الذي تعبر عنه هذه البيانات . ولهذا يعتبر هذا الأسلوب من الأدوات الأولية المفيدة في عملية التحليل الاستطلاعي للبيانات .

وإنشاء شكل ساق وورقة هو أمر غاية في السهولة ، ولا يتطلب إلا فصل أرقام كل عدد في البيانات إلى جزءين أحدهما يسمى ساق والآخر يسمى ورقة . والمعتاد أن تؤخذ الورقة على أنها الرقم الأخير في العدد أي الرقم الذي في أقصى يمينه ، أما الساق فهي بقية الأرقام . وتوضع الأرقام التي ترمز إلى السيقان رأسيا ثم توضع الأوراق المصاحبة لكل ساق أفقيا كما في الأمثلة الآتية .

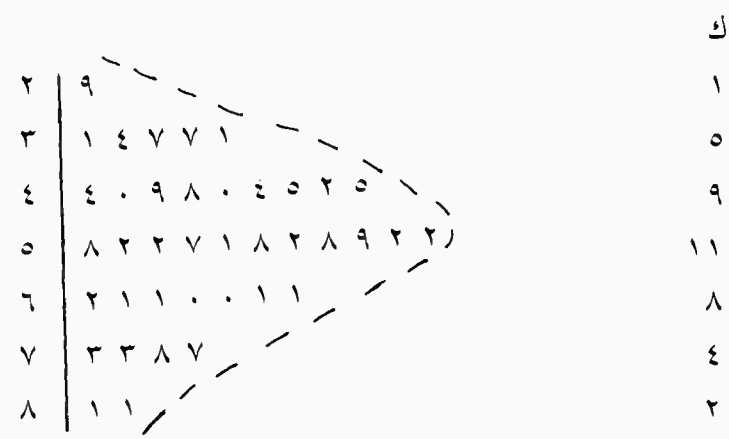
**مثال ( ٢ -٩ )**

الأعداد الآتية هي الأعمار عند حدوث صدمة قلبية لعينة من أربعين مريضا . أنشىء شكل ساق وورقة واذكر ملاحظاتك عنه .

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٣١ | ٥٨ | ٤٠ | ٣٧ | ٧٣ | ٧٨ | ٥٨ | ٤٢ | ٦٩ | ٨١ |
| ٦٢ | ٨١ | ٤٩ | ٤٨ | ٣١ | ٢٩ | ٦٠ | ٦١ | ٦٠ | ٥٢ |
| ٦١ | ٥٢ | ٣٤ | ٥٧ | ٧٣ | ٦١ | ٦٠ | ٥٢ | ٥٨ | ٥٢ |
| ٤٤ | ٥٢ | ٣٧ | ٥١ | ٤٠ | ٤٤ | ٤٥ | ٤٥ | ٥٩ | ٧٧ |

**الحل :**

في هذا المثال الورقة هي الرقم الأخير في العدد وهو رقم الآحاد أما الساق فهي رقم العشرات . فمثلا للعدد ٣١ الواحد هو الورقة والثلاثة هي الساق ، وللعدد ٦٢ الاثنين هي الورقة والستة هي الساق وهكذا .




الشكل ( ٢ -٧ )

شكل ساق وورقة للأعمار التي حدثت عندها صدمات قلبية

لعينة من ٤٠ مريضا

لإنشاء الشكل نبدأ بتحديد السيقان وهى أرقام العشرات فنجد أنها تتراوح بين ٨،٢ . نرسم خطاً رأسيا ثم نكتب الأرقام الممثلة للسيقان على يساره مرتبة ترتيبا تصاعديا وتكون بذلك قد كتبنا جميع أرقام العشرات الممكنة ، ثم نمر على البيانات واحدا واحدا

لنكتب الرقم الممثل للورقة ( أي رقم الآحاد ) في كل منها في الصف الذي يناسبه أي على يمين الساق التي ترمز إلى رقم العشرات فيه . انظر الشكل ( ٢ –٧ ) . نلاحظ أنه في الصف الأول من الشكل يوجد عدد واحد فقط وهو يمثل العمر ٢٩ ، وفي الصف الثاني توجد خمسة أعداد هي الأعمار ٣١ ، ٣٤ ، ٣٧ ، ٣٧ ، ٣١ وهكذا . وإذا جمعنا الأعداد التي بالصفوف جميعها لوجدناها مساوية للعدد ٤٠ وهو حجم العينة .

**ملاحظات :**

١ – في بناء شكل الساق والورقة ينبغي أن نختار عددا مناسبا من السيقان ، وذلك لكي نستطيع الإفادة من الشكل ، والمعتاد ألا يقل هذا العدد عن خمسة وألا يزيد عن عشرين . هذا مع ملاحظة أن شكل الساق والورقة لا تكون له فائدة كبيرة إذا كان عدد البيانات كبيرا جدا أو كان المدى الذي يتغير فيه المتغير كبيرا .

٢ – يمكننا دائما استعادة البيانات الأصلية من الشكل المرسوم وذلك بضم الساق مع كل ورقة من أوراقه ، وهذا مانعنيه بقولنا أن الشكل يحتفظ بفردية البيانات .

٣ – لتسهيل التعرف على خصائص توزيع البيانات ، ندير الشكل بحيث يصبح الخط الرأسي أفقيا وتكون الأرقام الممثلة للسيقان أسفل هذا الخط ، ويساعدنا في ذلك أيضا أن نرسم خطا ناعما حول نهايات الأوراق ، ثم نحاول الإجابة عن تساؤلات كالآتية :

( أ ) هل تميل البيانات إلى التجمع حول ساق أو سيقان معينة أم تتوزع على كل السيقان بشكل متعادل ؟

(ب) هل تتشتت البيانات تشتتا واسعا أم ضيقا ؟

( ج ) هل هناك تماثل في توزيع البيانات ؟ هل تميل البيانات إلى التناقص تدريجيا نحو أحد طرفي التوزيع ؟ هل هناك مميزات خاصة يشير إليها المنحنى المرسوم حول نهايات الأوراق ؟

ففي المثال (٢ – ٩) نجد أن عددا كبيرا من البيانات (١١ عمرا) يتجمع حول الساق (٥) ونلاحظ أن الشكل يكاد يكون متماثلا حول هذه الساق ، كما نلاحظ أن الصدمات القلبية في هذه العينة يحدث أغلبها في الخمسينات ثم في الأربعينات والستينات ، وأن هذه الصدمات لا تحدث تقريبا قبل سن الثلاثين أو بعد سن الثمانين .

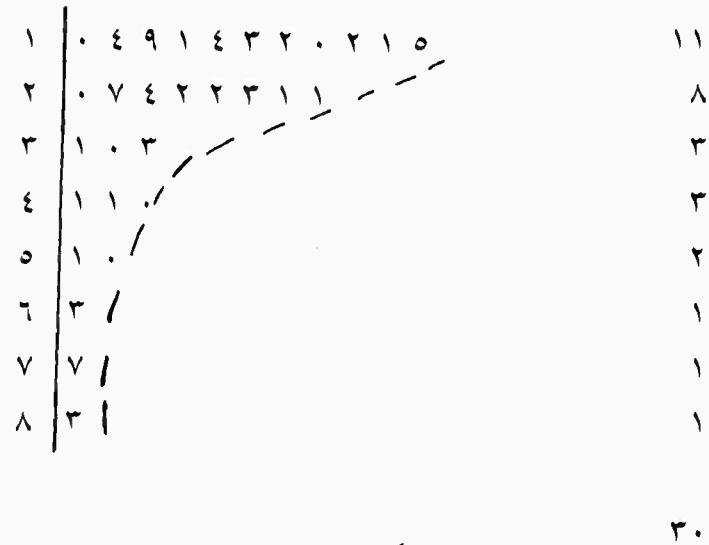
**مثال ( ٢ –١٠ )**

ارسم شكل ساق وورقة للبيانات الآتية التي هي مشاهدات عن المتغير العشوائي الذي يعبر عن شدة الزلازل التي حدثت في أحد المناطق مقاسة بمقياس ريختر Richter. علق على الشكل .

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١,٠ | ٨,٣ | ٣,١ | ١,١ | ٥,١ | ١,٢ | ١,٠ | ٤,١ | ١,١ | ٤,٠ |
| ٢,٠ | ١,٩ | ٦,٣ | ١,٤ | ١,٣ | ٣,٣ | ٢,٢ | ٢,٣ | ٢,١ | ٢,١ |
| ١,٤ | ٢,٧ | ٢,٤ | ٣,٠ | ٤,١ | ٥,٠ | ٢,٢ | ١,٢ | ٧,٧ | ١,٥ |

**الحل :**

في أي عدد في هذه البيانات الورقة هي الرقم الذي في خانة الجزء من عشرة ، والساق هي رقم الآحاد . تتراوح السيقان بين ١ ، ٨ وإذن نكتب الأرقام ١ ، ٢ ، ... ، ٨ على يسار الخط الرأسي ثم نسجل الأوراق كل أمام الساق المناسبة فنحصل على الشكل ( ٢ –٨ ) الآتي حيث نلاحظ أن هناك ١١ عددا في الصف الأول هي : ١,٠ ، ١,٤ ، ١,٩ ، ١,١ ، ١,٤ ، ١,٣ ، ١,٢ ، ١,٠ ، ١,٢ ، ١,١ ، ١,٥ ، وثمانية أعداد في الصف الثاني هي : ٢,٠ ، ٢,٧ ، ٢,٤ ، ٢,٢ ، ٢,٢ ، ٢,٣ ، ٢,١ ، ٢,١ ، وهكذا .




**الشكل ( ٢ -٨ )**

**شكل ساق وورقة لشدة الزلازل مقاسة بمقياس ريختر في عينة مأخوذة من أحد المناطق**

**التعليق :**

تتشتت شدة الزلازل بين القيمتين ١,٠ ، ٨,٣ غير أن البيانات تميل إلى التجمع حول القيم الصغرى وتقل تدريجيا في اتجاه القيم الكبرى ( هناك التواء إلى اليمين ) وهذا يعنى أن معظم الزلازل في هذه العينة كانت خفيفة . وإذا كانت هذه العينة تعبر عن المجتمع ككل ، فإن وقوع زلازل شديدة في هذه المنطقة يكون أمرا بعيد الاحتمال .

**مثال ( ٢ -١١ )**

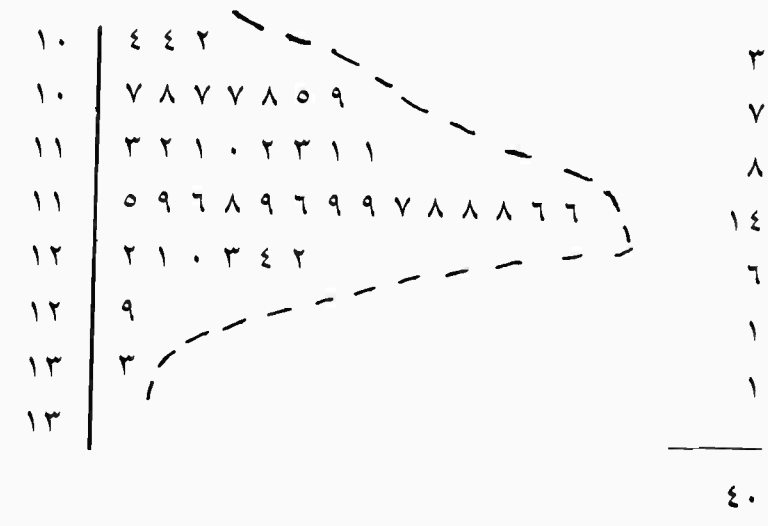
ارسم شكل ساق وورقة مع التعليق لبيانات المثال ( ٢ -٢ ) السابق عن أطوال محيطات رؤوس عينة من ٤٠ من الحمام المنزلي وهي :

١٢,٢ ١٢,٩ ١١,٨ ١١,٩ ١١,١ ١٢,٣ ١٢,٢ ١١,٨ ١١,٨ ١١,٦
١٠,٧ ١١,٥ ١١,٣ ١١,٢ ١١,٦ ١١,٩ ١٣,٣ ١١,٢ ١٠,٥ ١١,١

١٢,١ ١١,٩ ١٠,٤ ١٠,٧ ١٠,٨ ١١,٠ ١١,٩ ١٠,٢ ١٠,٩ ١١,٦
١٠,٨ ١١,٦ ١٠,٤ ١٠,٧ ١٢,٠ ١٢,٤ ١١,٧ ١١,٨ ١١,٣ ١١,١

**الحل :**

في هذا المثال الورقة هي الرقم الذي بخانة الجزء من عشرة ، والساق هي العدد المكون من رقمي الآحاد والعشرات ، فمثلا للعدد ١٢,٢ الورقة هي ٢ والساق هي ١٢ . إذا استخدمنا الطريقة التي استخدمناها في المثالين السابقين نجد أن لدينا أربعة سيقان فقط هي ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ويكون من الصعب تكوين فكرة عن التوزيع بهذا العدد القليل من السيقان . وللتغلب على هذه الصعوبة نأخذ كل رمز يرمز إلى ساق مرتين وبذلك نكون قد قسمنا البيانات إلى ٨ أقسام وهذا عدد مناسب ، على أن نكتب أمام الرمز في المرة الأولى الأوراق ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ونكتب أمام الرمز في المرة الثانية الأوراق ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ كما في الشكل ( ٢ -٩ ) الآتي :




**الشكل ( ٢ -٩ )**

**شكل ساق وورقة لأطوال محيطات رؤوس عينة من ٤٠ من الحمام المنزلي**

**التعليق :**

تتشتت أطوال محيطات رؤوس الحمام بين القيمتين ١٠,٢ ، ١٣,٣ من المليمترات ، إلا أن عددا كبيرا منها يتجمع حول الساق ١١ ويقل هذا التجمع تدريجيا من الناحيتين بمقادير متوازنة تكاد تجعل الشكل متماثلا .

## تمارين ( ٢ -٢ )

١ - الآتي هي أعداد النقط التي حاز عليها ٤٠ لاعبا في فرق كرة القدم بإحدى المدارس الثانوية . انشىء شكل ساق وورقة مستخدما السيقان ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ثم علق على الشكل .

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٠ | ٥٧ | ٠ | ١٨ | ١ | ٠ | ٤٥ | ٥٩ | ٢ | ٠ |
| ٣ | ٣ | ٩ | ٤٢ | ٠ | ١ | ٤ | ٧ | ٦٠ | ٢ |
| ٤ | ١٧ | ٣٥ | ٣٧ | ٦ | ٣ | ٨ | ٤٦ | ٣ | ٤٨ |
| ٢ | ١٨ | ٠ | ٢ | ٢١ | ٦ | ٢١ | ٢ | ٧٥ | ٧٥ |

٢ - أجريت دراسة لمدى تأثير التدخين على نمط النوم . المتغير العشوائي س الذي يدرس هو الزمن بالدقائق الذي يمضي حتى ينام الشخص ، وقد وجدت البيانات الآتية في عينتين عشوائيتين إحداهما من المدخنين والأخرى من غير المدخنين . المطلوب رسم شكل ساق وورقة لكل عينة باستخدام الأعداد من ١٥ إلى ٢٥ كسيقان ثم بيان ما إذا كان هناك فرق بين توزيع المتغير س في العيّنتين .

| المدخنون | | | | | | غير المدخنين | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٢٤,٨ | ١٦,٠ | ٢١,٣ | ١٧,٧ | ٢٠,٥ | ١٥,١ | ١٧,٦ | ١٨,٣ | ١٥,١ | ١٨,١ | ١٩,٧ | ١٧,٢ |
| ٢٥,٢ | ١٥,٩ | ٢٢,١ | ١٨,١ | ٢١,٢ | ١٦,٨ | ٢٠,١ | ٢٤,٩ | ٢٣,٦ | ١٩,٨ | ١٩,٩ | ١٦,٢ |
| ٢٥,٠ | ١٨,٣ | ٢٥,٢ | ١٩,٤ | ٢٢,٤ | ٢٢,٨ | ٢١,٤ | ٢٥,٠ | ٢٤,١ | ٢٠,٠ | ٢٢,٦ | ١٩,٨ |
| ١٦,٣ | ٢١,٦ | ٢٤,١ | ١٥,٠ | ٢٤,١ | ٢٥,٨ | ٢٠,٢ | ٢٣,٣ | ٢٠,٦ | ٢٢,١ | ١٨,٩ | ٢١,٢ |
| ١٧,٩ | ٢٣,٨ | ١٨,٠ | ١٥,٢ | ٢٥,٧ | ٢٤,٣ | ٢١,٣ | ١٧,٥ | ٢٠,١ | ٢٣,٠ | ١٦,٩ | ٢١,١ |
| ١٩,٩ | ٢٤,٩ | ١٧,٢ | ١٦,١ | ٢٥,١ | ٢٣,٢ | ٢٠,٧ | ٢٠,٤ | ٢٠,٥ | ٢١,١ | ٢٢,١ | ٢١,٨ |
| ٢٥,١ | ٢٣,٠ | ٢٣,١ | ١٩,٩ | ١٥,٣ | ١٥,٧ | ١٧,٤ | ٩١,٣ | ٢٢,٤ | ١٩,٢ | ١٨,٨ | ١٩,٥ |

٣ – في تجربة نفسية عن التعلم استخدم ٤٠ فأرا قسموا عشوائيا إلى قسمين متساويين في العدد وأتيح لكل فأر أن يجري في متاهة وسجل الوقت الذي يستغرقه في اتمامها بالثواني . دربت واحدة فقط من المجموعتين على الجري في المتاهة ، ثم أتيح لكل فأر أن يجري في المتاهة مرة ثانية وسجل الوقت الذي يستغرقه في هذه المرة الثانية . المتغير الذي يدرس هو الفرق في الوقت بين المرتين ( الوقت في المرة الأولى – الوقت في المرة الثانية ) . دونت هذه الفروق في الجدول الآتي :

| الفئران المدربة | | | | الفئران غير المدربة | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ٤,٩ | ٤,١ | ٣,٢ | ٤,٠ | ٢,٥– | ١,١– | ٢,٢– | ٢,١– |
| ٤,٢ | ٤,٣ | ٣,٧ | ٤,٢ | ٠,٦– | ٢,٤– | ٢,٠ | ١,٢– |
| ٤,٩ | ٣,٥ | ٣,٦ | ٤,٤ | ٢,٧– | ٠,٢– | ١,٣– | ١,٣ |
| ٥,٠ | ٤,٧ | ٤,٥ | ٥,١ | ٢,١ | ٢,٢ | ٠,٩ | ١,٤ |
| ٥,٥ | ٥,٢ | ٤,٦ | ٥,٦ | ٢,٦ | ١,١ | ٢,١ | ١,٨ |

انشىء شكل ساق وورقة لكل من المجموعتين ( استخدم السيقان ٣ ، ٣ ، ٤ ، ٤ ، ٥ ، ٥ للفئران المدربة؟ −٢ ، −١ ، −٠ ، ١،٠ ، ٢ للفئران غير المدربة ) ثم حاول الاجابة عما يأتي :

( أ ) متى تنتج القيم الموجبة وماذا تعنى هذه القيم ؟

( ب ) من الواضح أن متوسط الفروق في عينة الفئران المدربة ( وجميعها موجبة ) أكبر منه في عينة الفئران غير المدربة ، فهل هذا يعنى أن الفئران تتعلم من التدريب ؟

( جـ) قارن بين التوزيعين مستخدما شكلى الساق والورقة .