الفصل الخامس

توزيعات خاصة

SPECIAL DISTRIBUTIONS

كل من التوزيعات الثلاثة الآتية هو توزيع احتمال لمتغير عشوائى متصل مركب بطريقة معينة من عدد من المتغيرات العشوائية المعتدلة . وهذه التوزيعات لا تستخدم كنماذج احتمال للمجتمعات كما هو الحال في التوزيعات التي عرضت في الفصلين السابقين ، وإنما تبرز من خلال التحليل الإحصائي للعينات وتبني عليها اختبارات إحصائية ذات أهمية قصوى في عملية الاستدلال الإحصائي كما سنرى في الفصل التالى . ومن الناحية التطبيقية يهمنا بصفة خاصة في دراسة هذه التوزيعات أمرين هما :

(١) الشكل الهندسي العام لكل توزيع .

(٢) كيفية استخدام الجداول لإيجاد الاحتمالات والقيم الحرجة .

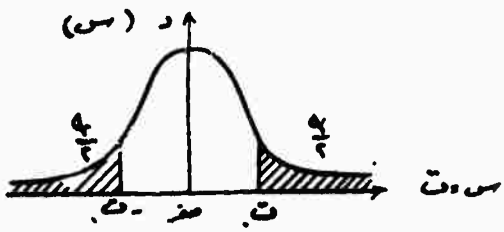
(٥-١) توزيع ت : STUDENT t- DISTRIBUTION

يقال لمتغير عشوائي س إن له توزيع ت إذا وفقط إذا كانت دالة كثافة احتماله معرفة بالقاعدة :

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\left(\frac{1}{2}(\text{ن}+1)\right)!}{\sqrt{\text{ن}\,\text{ط}}\cdot\left(\frac{1}{2}(\text{ن}-2)\right)!}\left(1+\frac{\text{س}^2}{\text{ن}}\right)^{-\frac{1}{2}(\text{ن}+1)} \qquad (1)$$

حيث $\infty > \text{س} > -\infty$ ، ن = ١ ، ٢ ، ٣ ...

وهذا التوزيع له دليل واحد هو ن يسمى بعدد درجات الحرية للتوزيع ، ولهذا فالتوزيع يتحدد تماماً إذا علمت قيمة ن .



الشكل (٥-١) منحني توزيع المتغير ت

والمنحني الممثل للدالة ص = د (س) المعرفة في (١) هو منحني ذو قمة واحدة ومتماثل حول المستقيم س = صفر .

الوسط الحسابي للتوزيع : μ = صفر (٢)

، تباين التوزيع : $\sigma^2 = \frac{\text{ن}}{\text{ن}-2}$ حيث ن >٢ (٣)

وجدير بالذكر أن توزيع ت يقترب من التوزيع المعتدل المعيارى كلما اقتربت درجات الحرية ن من اللانهاية .

جدول القيم الحرجة :

الجدول (٧) بملحق هذا الكتاب يعطى القيمة الحرجة ت. critical value للمتغير ت وهى تلك القيمة الموجبة التي تجعل مساحة المنطقة أسفل المنحني وخارج الفترة

(−ت. ، ت.) مساوية لقيمة معينة α عند درجة الحرية ن . أي أن العدد α يعبر عن المساحة عند ذيلي المنحني ($\frac{\alpha}{2}$ عند كل ذيل) وبالتالى فهو يعبر عن احتمال وقوع قيم المتغير ت خارج الفترة المذكورة . (انظر الشكل ٥−١) . ونكتب هذا رمزياً كالآتي :

$$\text{ل} \left(|\text{ت}| > \text{ت.} \right) = \alpha \qquad (٤)$$

فى هذا الجدول كتبت درجات الحرية في كل من العمودين الهامشيين الواقعين في يمين ويسار الجدول ، وكتبت الاحتمالات α = ٠,٠٠١ ، ٠,٠١ ، ٠,٠٢ ، ٠,٠٥ ، ٠,١ ، ٠,٢ ، ٠,٤ ، ٠,٥ ، ٠,٩ في الهامش الأفقى الذى بأعلى الجدول . أما القيم الحرجة فمدونة في الخلايا التي بقلب الجدول . وحين تكون درجة الحرية ن معلومة لنا ، نستطيع استخراج مايلى :

(١) القيمة الحرجة ت. إذا أعطيت قيمة الاحتمال α . ونجد تلك القيمة عند نقطة التقاء الصف الذى به درجة الحرية ن والعمود الذى به قيمة α .

(٢) قيمة الاحتمال α إذا أعطيت القيمة الحرجة . ولإيجاد تلك القيمة نبحث في الصف الذى به درجة الحرية عن القيمة الحرجة المعطاة فتكون α هى العدد الذى يعلو العمود الذى به هذه القيمة .

مثال (٥−١) :

ليكن س متغيراً له توزيع ت بدرجات حرية عددها ٨ . من الجدول نجد مايلى :

(ا) إذا كانت α = ل (|ت| > ت.)=٠,٠٥ فإن القيمة الحرجة ت. =٢,٣٠٦

(ب) الاحتمال ل (|ت| >٢,٨٩٦) = ٠,٠٢

(حـ) الاحتمال ل (ت > ٢,٨٩٦) = ٠,٠١ مساحة الذيل الأيمن فقط .

تقليــد :

نكتب $ت_{\alpha[ن]}$ (٥)

للتعبير عن القيمة الحرجة ت في توزيع ت عند درجة الحرية ن بحيث يكون مجموع مساحتي المنطقتين عند الذيلين يساوى α ، فمثلا :

$ت_{٠,٠٥[٧]} = ٢,٣٦٥$ ، $ت_{٠,٠١[٣]} = ٥,٨٤١$ ، $ت_{٠,٠٥[\infty]} = ١,٩٦$

(٥-٢) توزيع $\chi^{٢}$: THE CHI-SQUARE DISTRIBUTION

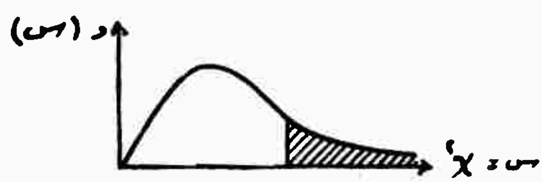
يقال لمتغير عشوائى س إن له توزيع $\chi^{٢}$ (تنطق كاى تربيع) إذا وفقط إذا كانت دالة كثافة احتماله معرفة بالقاعدة :

$$د(س) = \frac{١}{٢^{\frac{ن}{٢}}\,\Gamma(\frac{ن}{٢})}\, س^{\frac{ن}{٢}-١}\, هـ^{-\frac{س}{٢}} \qquad (٦)$$

حيث $\infty > س > ٠$ ، ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ....

وهذا التوزيع له دليل واحد هو ن يسمى بعدد درجات الحرية للتوزيع ، ولهذا فالتوزيع يتحدد تماماً إذا علمت قيمة ن .

والمنحني الممثل للدالة ص = د (س) المعرفة في (٦) وعندما ن >٢ يكون منحنى ذو قمة واحدة وملتوى إلى اليمين .



الشكل (٥-٢) منحني توزيع المتغير $\chi^{٢}$، (ن > ٢)

الوسط الحسابي للتوزيع : $\mu = ن$ (٧)

، تباين التوزيع : $\sigma^{٢} = ٢ ن$ (٨)

جدول القيم الحرجة :

الجدول (٨) بملحق هذا الكتاب يعطى القيمة الحرجة $\chi^{٢}_{.}$ للمتغير $\chi^{٢}$ وهي القيمة التي تجعل مساحة المنطقة أسفل المنحني وفوق الفترة ($\chi^{٢}_{.}$ ، ∞) مساوية لقيمة معينة α عند درجة الحرية ن . أى أن العدد α يعبر عن المساحة عند الذيل الملتوى،وبالتالى فهو يعبر عن احتمال وقوع قيم المتغير $\chi^{٢}$ على يمين العدد $\chi^{٢}$ (انظر الشكل ٥-٢) . ونكتب هذا رمزياً كالآتى :

ل $(\chi^{٢} < \chi^{٢}_{.}) = \alpha$ (٩)

فى هذا الجدول كتبت درجات الحرية والاحتمالات α والقيم الحرجة بنفس الطريقة التى كتبت بها في جدول ت ، غير أن α تأخذ القيم ٠,٠٠٥ ، ٠,٠١،٠,٠٢٥، ٠,٠٥ ، ٠,١ ، ٠,٥ ، ٠,٩ ، ٠,٩٧٥ ، ٠,٩٩٥ .

وحين تكون درجة الحرية ن معلومة لنا،نستطيع من الجدول استخراج القيمة الحرجة $\chi^{٢}_{.}$ إذا أعطيت قيمة الاحتمال αأو استخراج الاحتمالα بمعلومة القيمة الحرجة $\chi^{٢}_{.}$.

مثال (٥-٢) :

ليكن س متغيراً له توزيع $\chi^{٢}$ بدرجات حرية عددها ١٠ . من الجدول نجد مايلى :

(أ) إذا كانت ل $(\chi^{٢}<\chi^{٢}_{.})$=٠,١ فإن القيمة الحرجة $\chi^{٢}$ = ١٥,٩٨٧

(ب) الاحتمال ل ($\chi^{٢}$> ١٨,٣١) = ٠,٠٠٥ .

(حـ) الاحتمال ل (١٨,٣١ > $\chi^{٢}$>٤,٨٧)=٠,٩٠ - ٠,٠٥=٠,٨٥

تقليـد :

نكتب $\chi^{٢}_{\alpha[ن]}$ (١٠)

للتعبير عن القيمة الحرجة $\chi^{٢}$ في توزيع $\chi^{٢}$ عند درجة الحرية ن بحيث تكون مساحة المنطقة التي إلى يمينها مساوية للعدد α ، :

$$\chi^{٢}_{٠,٥[٥]} = ٤,٣٥١ \text{ ، } \chi^{٢}_{٠,٠٥[٥]} = ١١,٠٧٠ \text{ ، } \chi^{٢}_{٠,٠١[٦٠]} = ٨٨,٣٧٩$$

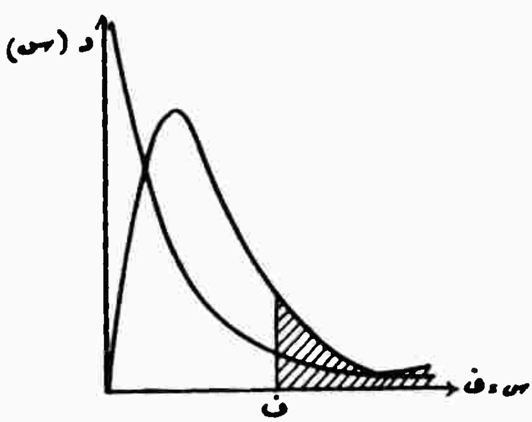
(٥-٣) توزيع ف : THE F-DISTRIBUTION

يقال لمتغير عشوائي س إن له توزيع ف إذا وفقط إذا كانت دالة كثافة احتماله معرفة بالقاعدة :

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\left[\tfrac{١}{٢}(\text{م} + \text{ن} - ٢)\right]!\ \left(\tfrac{\text{م}}{\text{ن}}\right)^{\frac{\text{ن}}{٢}}}{\left[\tfrac{١}{٢}(\text{م} - ٢)\right]!\ \left[\tfrac{١}{٢}(\text{ن} - ٢)\right]!} \times \frac{\text{س}^{\frac{\text{ن}}{٢} - ١}}{\left(١ + \tfrac{\text{م}}{\text{ن}}\right)^{\frac{١}{٢}(\text{م} + \text{ن})}} \qquad (١١)$$

حيث $\infty > \text{س} > ٠$ ، م ، ن عددان صحيحان موجبان .

وهذا التوزيع له دليلان هما م ، ن يسميان بعددى درجات الحرية ، ويتحدد التوزيع تماماً إذا علمت قيمتي هذين الدليلين .



الشكل (٥-٣) منحنى توزيع المتغير ف

والمنحني الممثل للدالة ص = د (س) المعرفة في (١١) يختلف شكله بحسب قيمتي م ، ن فهو يأخذ الشكل إذا كانت م ، ن صغيرتين جداً إلا أنه يصبح محدباً وملتوياً إلتواء شديداً إلى اليمين كلما زادت قيمتا م ، ن .

$$\text{الوسط الحسابي للتوزيع} = \mu = \frac{\text{ن}}{\text{ن}-٢} \qquad \text{حيث ن} >٢ \qquad (١٢)$$

جدول القيم الحرجة :

الجدول (٩) بملحق هذا الكتاب يعطى القيمة الحرجة ف. للمتغير ف وهي تلك القيمة التي تجعل مساحة المنطقة أسفل المنحني وفوق الفترة (ف. ، ∞) مساوية لقيمة معينة α عند درجتي الحرية م ، ن . أى أن العدد α يعبر عن المساحة عند الذيل الملتوى وبالتالى فهو يعبر عن احتمال وقوع قيم ف على يمين العدد ف . (انظر الشكل ٥-٣) ونكتب هذا رمزياً كالآتي :

$$\text{ل(ف} > \text{ف.)} = \alpha \qquad (١٣)$$

ويختلف تركيب هذا الجدول عن جدولى ت و$\chi^٢$ إذ يحمل الهامش الأفقى العلوى درجات الحرية م ويحمل كل من العمودين الهامشيين على جانبى الجدول درجات الحرية ن وعند كل من هذه الدرجات وضعت ثلاث قيم للعدد α هى ٠,٠٥ ، ٠,٠٢٥ ، ٠,٠١ وعند تقاطع كل عمود م مع كل صف ن توجد ٣ قيم حرجة تناظر تلك القيم الثلاث .

وحين تكون درجتا الحرية م ، ن معلومتين نستطيع من الجدول استخراج القيمة الحرجة ف. بمعلومية الاحتمال α أو استخراج قيمة الاحتمال α بمعلومية القيمة الحرجة .

مثال (٥-٣) :

ليكن س متغيراً له توزيع ف بدرجتي حرية ٧ ، ٩ .

(أ) إذا كانت ل (ف >ف.) = ٠,٠٥ فإن ف. = ٣,٢٩

(ب) إذا كانت ل (ف >ف.) = ٠,٠١ فإن ف. = ٥,٦١

(حـ) الاحتمال ل (ف >٤,٢) = ٠,٠٢٥

ملاحظة :

لا يعطى الجدول القيم الحرجة إلا عند ثلاث قيم للاحتمال α هي ٠,٠٥ ، ٠,٠٢٥ ، ٠,٠١ ولكن يمكننا أيضاً إيجاد تلك القيم عند الاحتمالات المكملة ٠,٩٥ ، ٠,٩٧٥ ، ٠,٩٩ باستخدام النظرية الآتية :

« إذا كان س متغيراً عشوائياً له توزيع ف بدرجتي حرية ر ، ن فإن المتغير $\frac{1}{\text{س}}$ يكون له توزيع ف بدرجتي حرية ن ، ر » . ويمكن أن نكتب هذه النظرية كالآتى :

$$\text{ف}_{\alpha[\text{ر}،\text{ن}]} = \frac{1}{\text{ف}_{(1-\alpha)[\text{ن}،\text{ر}]}}$$

مثال (٥-٤) :

ليكن س متغيراً له توزيع ف بدرجتي حرية ٥ ، ٩ أوجد قيمة ف. بحيث ل(ف > ف.) = ٠,٩٥

الحـــل :

نلاحظ أن الاحتمال ٠,٩٥ ليس له وجود بالجدول أما الاحتمال المكمل ٠,٠٥ فموجود به . المتباينة ف > ف. تكافئ المتباينة $\frac{1}{\text{ف}} < \frac{1}{\text{ف.}}$ مع ملاحظة أن ف ، ف. موجبان .

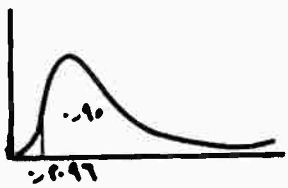
إذن ل(ف > $\text{ف}_{.}$) = ل ($\frac{1}{\text{ف}}$ < $\frac{1}{\text{ف}_{.}}$) = ٠,٩٥ فرضاً .

إذن ل ($\frac{1}{\text{ف}}$ ≤ $\frac{1}{\text{ف}_{.}}$) = ٠,٠٥

من النظرية يكون لدينا متغير له توزيع ف بدرجتي حرية ٩ ، ٥

من الجدول نجد أن $\frac{1}{\text{ف}_{.}}$ = ٤,٧٧

إذن $\text{ف}_{.}$ = ١ ÷ ٤,٧٧ = ٠,٢٠٩٦



الشكل (٥-٤)

تقليد :

نكتب

$$\text{ف}_{\alpha\,[\text{م} ، \text{ن}]} \qquad (١٤)$$

للتعبير عن القيمة الحرجة في توزيع ف عند درجتي الحرية م ، ن بحيث تكون مساحة المنطقة على يمينها مساوية للعدد α ، فمثلا :

$\text{ف}_{٠,٠٥\,[٥ ، ٨]}$ = ٣,٦٩ ، $\text{ف}_{٠,٠٥\,[٨ ، ٥]}$ = ٤,٨٢ ، $\text{ف}_{٠,٠١\,[١٥ ، ٤]}$ = ١٤,٢

لاحظ أن العدد الأول م يحدد العمود والعدد الثاني ن يحدد الصف .

تمارين (٥)

(١) أوجد كلا من القيم الحرجة الآتية :

(أ) $\text{ت}_{٠,٠٥[١٢]}$ ، $\text{ت}_{٠,٠٢[٤٠]}$ ، $\text{ت}_{٠,٠١[١٦]}$ ، $\text{ت}_{٠,٠٥[\infty]}$.

(ب) $\chi^{٢}_{٠,٠٥[٢٠]}$ ، $\chi^{٢}_{٠,٠١[٣٥]}$ ، $\chi^{٢}_{٠,١[٣٦]}$ ، $\chi^{٢}_{٠,٠٥[١]}$.

(حـ) $\text{ف}_{٠,٠٥[٦،٨]}$ ، $\text{ف}_{٠,٠٥[٨،٦]}$ ، $\text{ف}_{٠,٠١[٤٠،١٠٠]}$ ، $\text{ف}_{٠,٠٥[٣٠،١٤]}$.

(٢) أوجد كلا من الاحتمالات الآتية :

(ا) ل (|ت| > ٢,٢٠١) حيث ن = ١١

، ل (ت > ٢,٢٠١) حيث ن = ١١

(ب) ل (χ^2 > ٥٢,١٩) حيث ن = ٣١

، ل (χ^2 > ١٩,٣٤) حيث ن = ٢٠

(حـ) ل (ف > ١٠,٧) حيث م = ٦ ، ن = ٥

، ل (ف > ٨,٥) حيث م = ٣٠ ، ن = ٤