

الفصل السابع

حساسية اختبارات الفروض

SENSITIVITY OF TESTS OF HYPOTHESES

لا يوجد قرار إحصائي منزه عن الخطأ ، فالقرارات الإحصائية هي دائما قرارات احتمالية بمعنى أنه لا مفر من وجود احتمال للخطأ في أى قرار نصدره عن مجتمع عن طريق عينة . ولما كانت هذه القرارات مؤسسة على ما نجره من اختبارات للفروض وتزيد ثقتنا فيها بزيادة حساسية هذه الاختبارات ، وجب علينا أن ندرس كيف نزيد من هذه الحساسية أى من قدرة الاختبارات على تمكيننا من اتخاذ القرار السليم الذى لا يشوبه إلا قدر ضئيل من الخطأ . ويتأتى ذلك عن طريق التحكم ما أمكن فى احتمالات الأخطاء التى تنجم حتما عند استخدام هذه الاختبارات . ومن الطبيعى إذن أن نبدأ بتقديم هذه الأخطاء توطئة لدراسة كيفية التقليل منها ما استطعنا إلى ذلك سبيلا .

(٧ - ١) نوعا الأخطاء الإحصائية :

نعلم حتى الآن أننا حين نكون بصدد اتخاذ قرار برفض أو قبول فرض صفرى F ضد فرض آخر F_1 عند مستوى معين α من الدلالة ، نقوم أولا بتجزئ فضاء العينة إلى منطقتين منفصلتين ومتكاملتين M_1 ، M_2 نسمى إحداهما M_1 بمنطقة الرفض أو بالمنطقة المرجحة ونسمى الأخرى M_2 بمنطقة القبول . وإذا وقعت قيمة مشاهدة من إحصاء الاختبار فى المنطقة M_2 رفضنا الفرض الصفرى عند المستوى

α لصالح الفرض الآخر ، أما إذا وقعت القيمة المشاهدة في المنطقة \bar{A} فإننا نقبل الفرض الصفري .

ونظراً لأننا لا نعرف مسبقاً ما إذا كان الفرض الصفري صحيحاً أو زائفاً فإن القرار الذي نتخذه يكون على إحدى الحالات الآتية :

- (١) أن يكون الفرض الصفري صحيحاً ويكون قرارنا هو رفض هذا الفرض .
- (٢) أن يكون الفرض الصفري صحيحاً ويكون قرارنا هو قبول هذا الفرض .
- (٣) أن يكون الفرض الصفري زائفاً ويكون قرارنا هو رفض هذا الفرض .
- (٤) أن يكون الفرض الصفري زائفاً ويكون قرارنا هو قبول هذا الفرض .

ومن الواضح أن قرارنا يكون صائباً في الحالتين (٢) و(٣) ويكون خاطئاً في الحالتين (١) و(٤) . يقال للخطأ الناشئ عن القرار (١) إنه خطأ من النوع الأول ، كما يقال للخطأ الناشئ عن القرار (٤) إنه خطأ من النوع الثاني . ويعرف هذان النوعان من الخطأ كالتالي :

TYPE I ERROR : الخطأ من النوع الأول :

هو ذلك الخطأ الذي ينشأ حين نتخذ قراراً برفض الفرض الصفري بينما يكون هذا الفرض صحيحاً في الواقع . ويرمز لاحتمال هذا الخطأ بالرمز α .

TYPE II ERROR : الخطأ من النوع الثاني :

هو ذلك الخطأ الذي ينشأ حين نتخذ قراراً بقبول الفرض الصفري بينما يكون هذا الفرض زائفاً في الواقع . ويرمز لاحتمال هذا الخطأ بالرمز β .

وقد اصطلح على تسمية المقدار $1 - \beta$ بقوة الاختبار power of the test وهو يعبر عن احتمال تجنب الخطأ من النوع الثاني . ومن الواضح أن قوة الاختبار تزيد كلما نقص الاحتمال β للخطأ من النوع الثاني والعكس بالعكس .

نلخص المعاني السابقة في الجدول (٧ - ١) الآتي :

الجدول (٧ - ١)

حالات رفض أو قبول الفرض الصفري

الحالة المجهولة للفرض الصفري	القرار
ف. زائف	ف. صحيح
صواب (باحتمال $1 - \beta$)	خطأ I (باحتمال α)
خطأ II (باحتمال β)	صواب (باحتمال $1 - \alpha$)
	رفض ف.
	قبول ف.

يلاحظ أن كلا من الاحتمالين α ، β هو احتمال شرطي ونكتب :

$\alpha = L$ (رفض ف. | ف. صحيح) ، $\beta = L$ (قبول ف. | ف. زائف) .

في الأمثلة التي تناولناها في الفصل السابق كان اهتمامنا منصبا على الخطأ من النوع الأول وحرصنا على أن يكون الاحتمال α لهذا الخطأ عددا صغيرا يسمح لنا بالتجاوز عن هذا الخطأ ، وسمينا هذا العدد مستوى الدلالة واتخذناه كأحد أسس قاعدة اختبار الفروض ، خاصة فيما يتعلق بفصل فضاء العينة إلى منطقتي رفض وقبول الفرض الصفري . وسنهتم الآن بالخطأ من النوع الثاني ، إذ ينبغي عند تصميم التجارب وبناء اختبارات الفروض أن نعمل على أن يكون كل من الاحتمالين α ، β صغيرا على قدر الإمكان .

غير أنه نظرا لأن تصغير أحد هذين الاحتمالين يؤدي إلى كبر الآخر كما سنرى في البند (٧ - ٢ - ٢) ، يكون من العبث البحث عن طريقة عامة تضمن صغر كل من هذين الاحتمالين معا ونكون حينئذ أمام مشكلة يجب أن نجد لها حلا .

والطريقة المعتادة لتناول هذه المشكلة تبدأ بالتحكم في احتمال الخطأ من النوع الأول (وهو الخطأ الأكثر خطورة) وذلك بوضع حد أعلى للاحتمال α فنختار لهذا الحد قيمة صغيرة مثل ٠,٠٥ أو ٠,٠١ ثم نحسب على أساسها كلا من منطقتي قبول ورفض الفرض الصفرى من واقع ما لدينا من بيانات ومن معرفتنا بتوزيع إحصاء الاختبار . بعد ذلك نقوم بحساب الاحتمال β ، فإذا كان هذا الاحتمال صغيرا تكون المشكلة قد حلت تلقائيا ، أما إذا كان كبيرا بدرجة لا نستطيع معها المجازفة به وجب علينا أن نعمل على تخفيض هذا الاحتمال . وهذا ما سنتناوله في البند (٧ - ٥) بعد تقديم طريقة حساب هذا الاحتمال والعوامل المؤثرة عليه .

طريقة إيجاد احتمال الخطأ من النوع الثانى :

نفرض أننا اخترنا مستوى الدلالة α وحددنا عند هذا المستوى كلا من منطقة الرفض \bar{A} ومنطقة القبول A للفرض الصفرى مع ملاحظة أن بارامتر إحصاء الاختبار يتحدد هنا على أساس التسليم بصحة هذا الفرض . بعد ذلك نوجد احتمال وقوع قيم المتغير فى منطقة القبول A على أساس أن الفرض الصفرى زائف وأن الفرض الآخر هو الصحيح فيكون هذا الاحتمال هو احتمال قبول الفرض الصفرى عندما يكون زائفا أى هو الاحتمال β للخطأ من النوع الثانى مع ملاحظة اختلاف بارامتر إحصاء الاختبار . وعلى هذا فحساب الاحتمال β يكون على خطوتين هما :

(أ) تحديد منطقة القبول على أساس صحة الفرض الصفرى ،

(ب) إيجاد احتمال وقوع المتغير فى هذه المنطقة على أساس أن الفرض الآخر هو الصحيح .

سنوضح هذا الأسلوب لحساب قيمة الاحتمال β فى عدة حالات نبدأها فى البند (٧ - ٢) بحالة الاختبار ذى الجانب الواحد لفرض عن متوسط مجتمع معتدل

مع بيان العوامل المؤثرة على قوة الاختبار وكيفية زيادة هذه القوة ، ثم نطبق ذلك كلة على ثلاث حالات أخرى نقدمها في البنود الثلاثة الأخيرة .

(٧ - ٢) حساب قيمة β في اختبار فرض عن متوسط معتدل - حالة الاختبار ذى الجانب الواحد .

مثال (٧ - ١) :

اعتبر مجتمعا معتدلا تباينه $\sigma^2 = 49$ ووسطه الحسابى μ غير معروف . بين كيف تستخدم الوسط الحسابى \bar{x} لعينة عشوائية من الحجم $n = 25$ لاختبار الفرض الصفرى $\mu = 75$ ضد الفرض الآخر $\mu < 75$ عند مستوى الدلالة ٥٪ . ثم أوجد قوة الاختبار عندما $\mu = 76$.

الحل :

نظرا لأن المجتمع معتدل فإن المتغير \bar{x} الذى يعبر عن الوسط الحسابى للعينات من الحجم n يكون ذا توزيع معتدل وسطه الحسابى μ وانحرافه المعيارى $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ - راجع البند (٦ - ٣) - وبالتالي يكون للإحصاءة

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

توزيع معتدل معيارى : مع (٠ ، ١) .

لدينا $\sigma^2 = 49$ ، $n = 25$ ، $\alpha = 0,05$ ، وإذن $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2$ ، $1,4 = \frac{y}{2}$

الفرض الصفرى $\mu = 75$:

الفرض الآخر $\mu < 75$:

نظرا لأن الاختبار ذو جانب واحد هو الجانب الأيمن فإن منطقة الرفض α هى

تلك المنطقة التي يأخذ فيها الوسط الحسابي \bar{x} لعينة من الحجم ٢٥ قيمة أكبر من العدد α حيث :

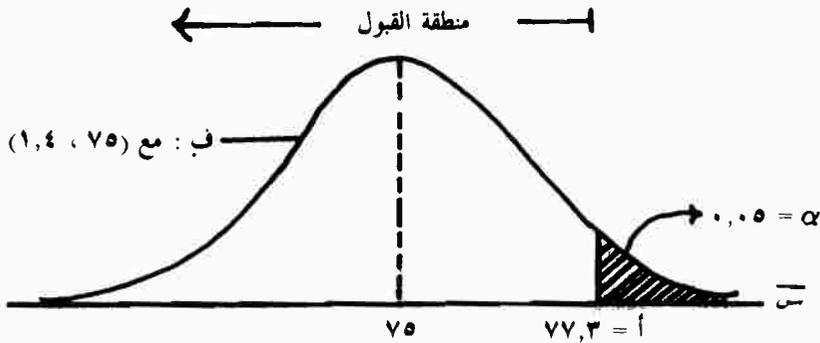
$$\alpha = 0,05 = (\bar{x} < 1) \text{ تحت الفرض الصفري } \mu = 75$$

$$\alpha = 0,05 = \left(\frac{75 - 1}{1,4} < \frac{75 - \bar{x}}{1,4} \right) \text{ ومنها ل}$$

$$\alpha = 0,05 = \left(\frac{75 - 1}{1,4} < \text{أى ل ع} \right)$$

من جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل المعياري نجد أن

$$1,64 = \frac{75 - 1}{1,4} \text{ ومنها } 1 = 77,296 = 77,3 \text{ تقريبا}$$



الشكل (٧ - ١)

منطقتا القبول والرفض في اختبار ذي جانب واحد

وإذن المنطقة التي نرفض فيها الفرض الصفري $\mu = 75$ حين يكون هذا الفرض صحيحا وعند المستوى $\alpha = 0,05$ هي تلك المنطقة التي تأخذ فيها الأوساط الحسابية للعينات ذوات الحجم ٢٥ قيما تزيد عن $77,3$ واحتمال وقوع المتغير

في هذه المنطقة هو ٥٪، وتعبّر عن هذا الاحتمال مساحة الجزء المظلل بالشكل (٧ - ١) . وعلى ذلك تتحدد قاعدة الاختبار كالتالي :

« إذا وقع الوسط الحسابي \bar{x} لعينة عشوائية من الحجم ٢٥ في المنطقة $\bar{x} = \{ \bar{x} : \bar{x} < ٧٧,٣ \}$ نرفض الفرض الصفري H_0 عند مستوى الدلالة ٥٪ . وإلا نقبل H_0 . »

أما منطقة قبول الفرض الصفري فهي بالطبع المنطقة $\bar{x} \geq ٧٧,٣$ المكملة لمنطقة الرفض . أى أننا نقبل الفرض الصفري إذا كان الوسط الحسابي لعينة عشوائية من الحجم ٢٥ مأخوذة من التوزيع الممثل لهذا الفرض يساوى أو يقل عن ٧٧,٣ ونسبة هذه العينات هي ٩٥٪ من العينات التي تؤخذ من هذا التوزيع .

ولكن ماذا لو كان الفرض الصفري راثفا والفرض الآخر هو الصحيح ؟ نرفض مثلا أن القيمة الصحيحة هي $\mu = ٧٦$ (وهذه قيمة تحقق الفرض الآخر $\mu < ٧٥$) .

في هذه الحالة يكون للمتغير \bar{x} توزيع معتدل : مع (٧٦ ، ٤ ، ١) ، وينتج ما يلي :

β = احتمال قبول الفرض الصفري عندما يكون راثفا والفرض الآخر

$\mu = ٧٦$ هو الصحيح

= احتمال وقوع قيم المتغير \bar{x} في منطقة القبول $\bar{x} \geq ٧٧,٣$ حين يكون لهذا المتغير

توزيع معتدل مع (٧٦ ، ٤ ، ١)

= $J(\bar{x} \geq ٧٧,٣)$ حيث $\bar{x} = ٧٦$ مع (٧٦ ، ٤ ، ١)

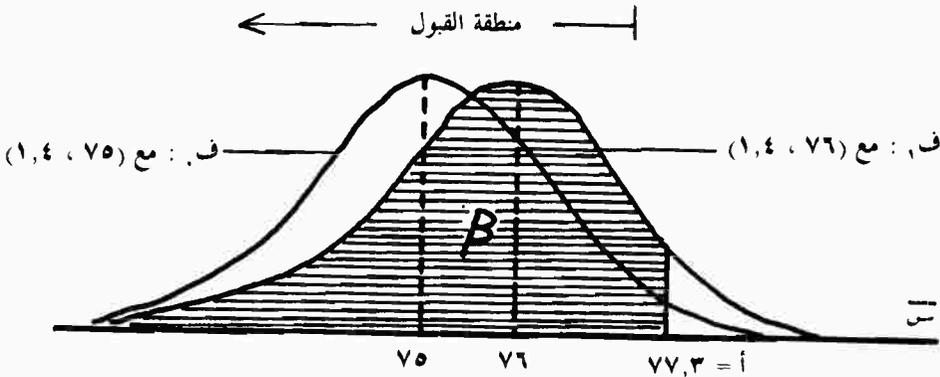
$$J = \left(\frac{٧٦ - ٧٧,٣}{١,٤} \geq \frac{٧٦ - \bar{x}}{١,٤} \right) = J(٤ \geq ٠,٩٣)$$

من جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل المعيارى نجد أن

$$\beta = ٠,٨٢٣٨ = ٠,٨٢ \text{ تقريبا}$$

وهذا هو احتمال الوقوع في الخطأ من النوع الثاني . أما قوة الاختبار عندما تأخذ μ القيمة ٧٦ فهي $\beta - 1 = 0,18$

لتوضح ذلك هندسيا نرسم كما في الشكل (٧ - ٢) توزيع المتغير \bar{x} في حالتين ، أولاهما عندما يكون الفرض الصفري ف صحيحا ويكون التوزيع معتدلا متوسطه ٧٥ وثانيهما عندما يكون الفرض الآخر ف صحيحا ويكون التوزيع معتدلا متوسطه ٧٦ .



الشكل (٧ - ٢)

التوزيع المثل للفرض الصفري والتوزيع المثل للفرض الآخر
(مساحة الجزء المظلل تعبر عن الاحتمال β في اختبار ذي جانب واحد)

من هذا الشكل يتبين أن بعض العينات التي تنتمي إلى توزيع ف تكون متوسطاتها واقعة في منطقة القبول لتوزيع ف . ونسبة هذه العينات هي نسبة الجزء من توزيع ف الذي يشترك مع توزيع ف في منطقة القبول ، وهي تعطى بالاحتمال ل ($\bar{x} \geq 77,3$) محسوبا من توزيع ف . وهذا الاحتمال هو بالضبط احتمال قبول الفرض الصفري عندما يكون الفرض الآخر هو الصحيح ، أي هو الاحتمال β للخطأ من النوع الثاني .

(يلاحظ أننا لا نستطيع حساب قيمة β إلا إذا حددت قيمة معينة مثل $\mu = 76$ للبارامتر μ تحقق الفرض الآخر (وهو $\mu < 75$) وذلك لكي يتحدد التوزيع الممثل للفرض الآخر تحديدا تاما) .

POWER FUNCTION (٧ - ٢ - ١) دالة القوة

في هذا المثال وجدنا أن قوة الاختبار عندما نفترض أن $\mu = 76$ هي $0,18$. وتختلف هذه القوة بحسب قيمة μ فإذا افترضنا أن $\mu = 77$ نجد بنفس المنطق السابق أن

$$\beta = P(\bar{S} \geq 77,3) \quad \text{حيث } \bar{S} : \text{ مع } (77, 1,4)$$

$$= P\left(\frac{77 - 77,3}{1,4} \geq \frac{77 - \bar{S}}{1,4}\right) = P(\bar{S} \geq 77,21)$$

$$= 0,58 \quad \text{وبالتالي يكون قوة الاختبار } 0,58 - 1 = 0,42 =$$

$$\text{وبالمثل : بأخذ } \mu = 78 \text{ نجد أن } \beta = 0,31 \text{ و } 0,69 = 0,31 - 1 =$$

$$\text{وبأخذ } \mu = 79 \text{ نجد أن } \beta = 0,11 \text{ و } 0,89 = 0,11 - 1 =$$

$$\text{وبأخذ } \mu = 80 \text{ نجد أن } \beta = 0,03 \text{ و } 0,97 = 0,03 - 1 = \dots \text{ الخ}$$

ومن هذا نرى أن قوة الاختبار تتوقف على البارامتر μ أى هي دالة د في μ تأخذ الصيغة الآتية :

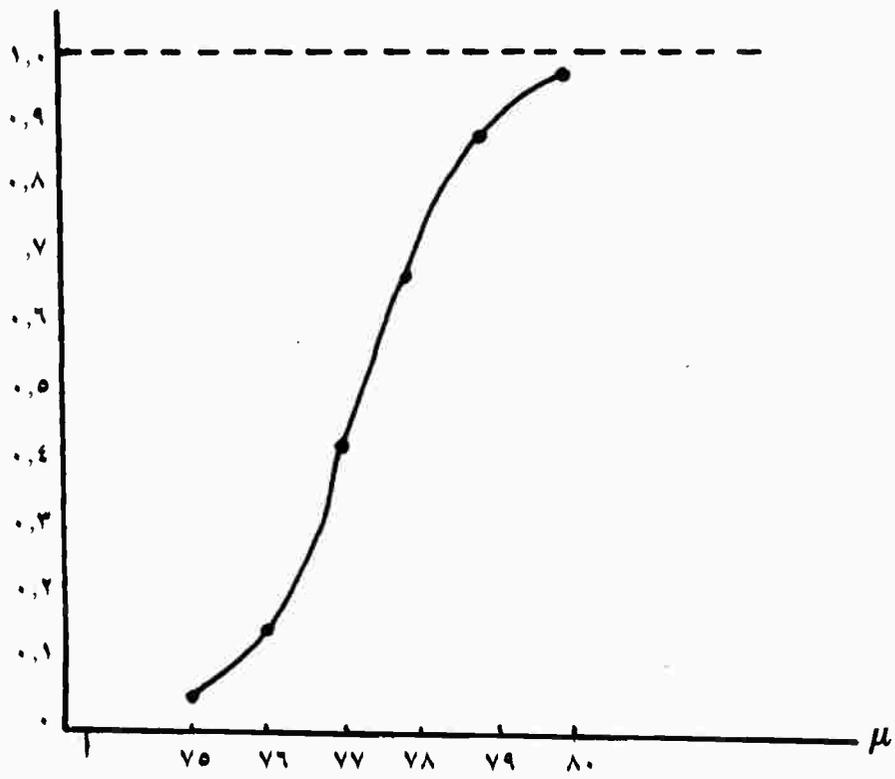
$$\text{دالة قوة الاختبار } = د(\mu) = 0 = 1 - \beta = 1 - P(\bar{S} \geq a)$$

$$= P(\bar{S} < a) \quad \text{حيث } \bar{S} : \text{ مع } (\mu, 1,4)$$

وحيث a هي القيمة الحرجة التي تفصل بين منطقتي القبول والرفض . (قيمة الدالة د عند قيمة معينة μ تسمى قوة الاختبار عند القيمة μ) .

وتمثل دالة القوة بيانيا كما في الشكل (٧ - ٣) الذي يوضح أنها دالة تزايدية ،
تزيد قيمتها كلما بعدت قيمة μ التي يحددها الفرض الآخر عن قيمة μ التي يحددها
الفرض الصفري .

د (μ) = قوة الاختبار



الشكل (٧ - ٣)

منحنى القوة لاختبار المثال (٧ - ١) - اختبار ذو جانب واحد

في هذا المثال وجدنا أن احتمال الخطأ من النوع الثاني $\beta = 0,82$ ومن الواضح
أن هذا الاحتمال هو احتمال كبير لهذا الخطأ لا ينبغي أن نسمح به حين نتخذ قرارا

بشأن رفض أو قبول الفرض الصفري لأنه يجعلنا نشك في حساسية الاختبار ، بمعنى أنه إذا كانت $\alpha = 0,05$ ، $\sigma = 49$ ، وأخذنا عينة من الحجم $n = 25$ فإن هذه العينة لا تكون قادرة على التمييز بين الفرضين بدرجة كافية من الثقة ، إذ بالرغم من أن ٩٥٪ من العينات المأخوذة من التوزيع الذى يفترض صحة الفرض الصفري ($\mu = 75$) تقع في منطقة القبول ، إلا أن ٨٢٪ من العينات المأخوذة من التوزيع الذى يفترض صحة الفرض الآخر ($\mu = 76$) تقع أيضا في المنطقة ذاتها . وهذا التداخل الكبير هو الذى نعنيه بقولنا إن الاختبار ذو قوة ضعيفة أو أنه اختبار غير حساس .

في مثل هذه الحالة يجب أن ندخل تعديلا في تصميم التجربة التى تمدنا بالبيانات التى نتخذ قرارنا على أساسها لتلافي الوقوع في خطأ كبير من النوع الثانى ولإعطاء الاختبار قوة كافية للتمييز بين مختلف الفروض . وفي بحثنا عن التعديل اللازم لتحقيق هذا الغرض نبدأ بتدارس العوامل التى تؤثر في هذا الخطأ .

(٧ - ٢ - ٢) العوامل المؤثرة في الخطأ من النوع الثانى :

بالتأمل في المثال السابق يتبين لنا أن الاحتمال β للخطأ من النوع الثانى وقوة الاختبار ω يتوقفان على القيم الآتية :

(١) القيمة التى تختار للاحتمال α للخطأ من النوع الأول :

ذلك لأن هذه القيمة هى التى تحدد القيمة الحرجة a (تساوى $3,77$ في هذا المثال) التى تفصل بين منطقتى الرفض والقبول . وكلما صغرت قيمة α كلما صغرت منطقة الرفض وأزيمحت a إلى اليمين (في هذا المثال) واتسعت منطقة القبول وبالتالي زاد احتمال هذه المنطقة تحت الفرض الآخر . ومن هنا يمكننا تقبل الحقيقة الآتية :

كلما صغر الاحتمال α للخطأ من النوع الأول كلما كبر الاحتمال β للخطأ من النوع الثاني وصغرت قوة الاختبار .

وهذه الحقيقة تعطينا سببا وجيها يبرر التقليد المتبع باختيار $\alpha = 0,05$ أو $\alpha = 0,01$ ، لأن اختيارنا لقيم تقل عن ذلك يؤثر تأثيرا سيئا في الاحتمال β الذى يمكن التحكم فيه بتكبير حجم العينة كما سيتبين بعد .

(٢) قيمة البارامتر μ

بالتأمل في قيم β أو α التى حسبناها في البند (٧ - ٢ - ١) نجد أن هذه القيم تتوقف على بعد القيمة μ التى يحددها الفرض الآخر عن القيمة μ_0 التى يحددها الفرض الصفرى . ومن الناحية الهندسية إذا كانت μ_0 ، μ قريبتين من بعضهما أى كان متوسطا توزيعى F_1 ، F_2 قريبتين من بعضهما فإن التداخل بين هذين التوزيعين في منطقة القبول يكون كبيرا وهذا يؤدي إلى كبر الاحتمال β وصغر قوة الاختبار . أما إذا كانت μ_0 بعيدة عن μ فإن هذا التداخل يكون صغيرا ويؤدي إلى صغر الاحتمال β وكبر قوة الاختبار . وتتضح هذه الحقيقة أيضا عند التأمل في منحني دالة القوة المبين بالشكل (٧ - ٣) . ومن هنا يمكننا تقبل الحقيقة الآتية :

كلما زاد الفرق بين القيمة التى يحددها الفرض الصفرى للبارامتر المختبر والقيمة التى يحددها الفرض الآخر ، كلما صغر الاحتمال β وزادت قوة الاختبار

(٣) الخطأ المعياري لإحصاءة الاختبار :

في المثال (٧ - ١) كان الخطأ المعياري لإحصاءة الاختبار هو $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1,4$ ووجدنا أن قيمة العدد z الذى يفصل بين منطقتى الرفض والقبول هي $z = 3,77$. إذا

أجرينا تعديلا في هذا المثال بحيث يصبح الخطأ المعياري أقل من ١,٤ نجد أن σ تصغر وتزاح النقطة الممتلة لها على توزيع الإحصاءة \bar{X} إلى اليسار وبالتالي تصغر منطقة القبول ويقل الاحتمال β . فمثلا إذا أخذنا $\frac{\sigma}{\sqrt{V}} = 1,1$ فإن

$$L(\bar{X} < 1) = 0,05 \quad \text{ومنها} \quad L\left(\frac{75 - 1}{1,1} < E\right) = 0,05$$

$$\therefore \frac{75 - 1}{1,1} = 1,64 \quad \therefore 1 = 76,804 \quad \text{وهذا العدد أصغر من } 77,3 \quad \text{ومن}$$

هنا يمكننا تقبل الحقيقة الآتية :

كلما صغر الخطأ المعياري لإحصاءة الاختبار كلما صغر الاحتمال β وزادت قوة الاختبار .

ومن الواضح أن قيمة الكسر $\frac{\sigma}{\sqrt{V}}$ تتوقف على قيمتين هما الانحراف المعياري σ للمجتمع وحجم العينة n ، ويصغر هذا الكسر (أى يصغر الخطأ المعياري) إذا صغرت قيمة σ فقط أو كبرت قيمة n فقط أو صغرت σ وكبرت n في الوقت نفسه .

(٧ - ٢ - ٣) كيفية زيادة قوة الاختبار :

في الفقرة السابقة وجدنا أن قوة الاختبار تتوقف على أربع قيم هي μ ، α ، σ ، n . ولما كانت القيمتان μ ، α تتحددان سلفا بحسب خبرة الباحث وطبيعة المشكلة التي يتناولها ، لا يبقى لدينا من الناحية الإحصائية لزيادة قوة الاختبار إلا الاعتماد على تصغير الخطأ المعياري $\frac{\sigma}{\sqrt{V}}$ وذلك بتصغير σ أو تكبير n .

ونظرا لأننا نقدر عادة تباين المجتمع σ^2 من تباين العينة فإن زيادة قوة الاختبار تقتضى أن نحصر على ألا يكون هذا التقدير أكبر مما ينبغي وهذا لا يتأتى إلا

بالتحكم الجيد في ظروف التجريب واستبعاد تأثير أية عوامل خارجية تؤثر في المشاهدات وتسهم في زيادة تباينها .

أما زيادة حجم العينة فهو العامل الرئيسى الذى نعتد عليه في زيادة قوة الاختبار ، وهذه أهم نتيجة نخرج بها من هذا الفصل وتتلخص في الحقيقة الآتية :

إذا تساوت جميع الظروف ، كلما كبر حجم العينة كلما صغر الاحتمال β وزادت قوة الاختبار .

الحد الأمثل لحجم العينة :

على أن كفاءة التجريب تستدعى ألا يكون حجم العينة أكبر مما ينبغي تحسبا لما تتطلبه هذه العملية من جهد ووقت وتكاليف ، ومن المناسب إذن وضع حد أعلى لحجم العينة يحقق الهدف المنشود من زيادة قوة الاختبار دون تحمل أعباء لا ضرورة لها . غير أنه لا توجد قاعدة عامة لتحديد الحجم المناسب للعينة ، إلا أننا نستطيع ذلك في بعض الحالات الخاصة ومنها الحالات التى يتناولها هذا الفصل .

ففي حالة اختبار فرض عن متوسط مجتمع معتدل ، نفرض أننا حددنا مسبقا قيمة α وقيمتى الفرض الصفري والفرض الآخر . إذا أردنا أن نضمن أن يأخذ احتمال الخطأ من النوع الثانى قيمة محددة β يمكن إثبات أن الحد الأعلى لحجم العينة الذى يحقق هذا الضمان ينتج من حل المعادلة الآتية :

$$(1) \quad \frac{f}{\bar{x} - \bar{c}} = z_{\alpha} \cdot z_{\beta}$$

حيث z_{α} = الخطأ المعياري لإحصاءة الاختبار ،
 f = الفرق بين القيمة التى يحددها الفرض الصفري والقيمة التى يحددها الفرض الآخر

أما α ، β ، فتحددان بحل المتباينتين الآتيتين :

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \text{ إذا كان الاختبار ذا جانب واحد} \\ \frac{\alpha}{2} \text{ إذا كان الاختبار ذا جانبيين} \end{array} \right\} = (\bar{X} < \mu)$$

$$\beta = (\bar{X} \geq \mu)$$

حيث \bar{X} هو المتغير المعتدل المعياري : مع $(0, 1)$. أى أن \bar{X} ، μ توجدان من جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل المعياري بمجرد التعويض عن قيمتي α ، β . والمعادلة (١) هي معادلة عامة في حالة اختبار فرض عن متوسط مجتمع معتدل أو اختبار الفرق بين متوسطي مجتمعين معتدلين ، مع بعض الاختلافات في حساب القيم التي تتركب منها هذه المعادلة كما سنرى بعد .

مثال (٧ - ٢) :

اعتبر المثال (٧ - ١) حيث $\sigma = 49$ ، $\alpha = 0,05$ نريد اختبار الفرض $\mu = 75$ ضد الفرض $\mu < 75$. وإذا أخذنا $\mu = 78$ فأوجد الحد الأعلى لحجم العينة الذي يضمن أن تكون $\beta = 0,08$.

الحل :

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = 0,2$$

$$z = 3 = 75 - 78 = \mu - \mu$$

من جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل المعياري نجد أن :

$\alpha = 0,05 = (\bar{X} < \mu)$ تعطى $\bar{X} = 1,64$ (اختبار ذو جانب واحد)

$$\beta = 0,08 = (\bar{X} \geq \mu)$$

بالتعويض في المعادلة (١) ينتج أن :

$$\frac{3}{3,05} = \frac{3}{(1,41) - 1,64} = \frac{y}{\sqrt{v}}$$

$$50,6469 = \sqrt{\left(\frac{3,05 \times y}{3}\right)} = n \therefore$$

أى أننا إذا أعدنا التجربة بأخذ عينة عشوائية من الحجم ٥١ (بدلاً من الحجم ٢٥) فإننا نضمن أن يكون احتمال الخطأ من النوع الثاني $\beta = 0,08$ (تحقق من ذلك بأخذ $n = 51$ وإثبات أن القيمة الحرجة $1 = 76,607$ والاحتمال $\beta = 0,0778$). يلاحظ أننا استطعنا أن نضمن احتمالاً صغيراً هو $0,08$ للخطأ من النوع الثاني (بدلاً من الاحتمال $\beta = 0,31$ الذى وجدناه في عينة بالحجم ٢٥)، إلا أن ذلك كان على حساب زيادة حجم العينة إلى الضعف تقريباً في هذا المثال.

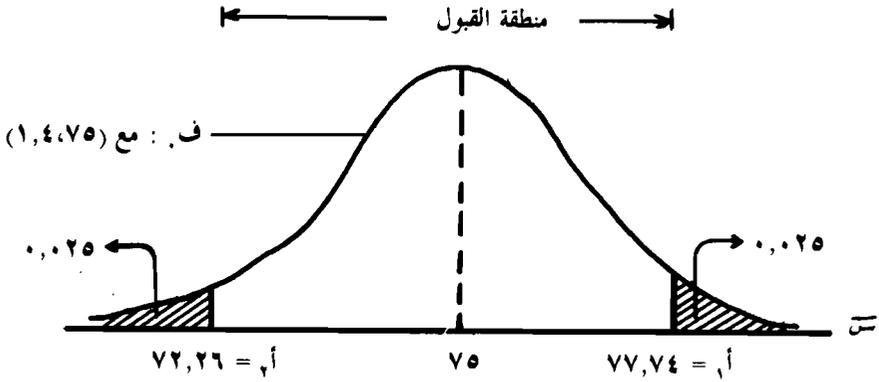
(٧ - ٣) حساب قيمة β في اختبار فرض عن متوسط مجتمع معتدل - حالة الاختبار ذى الجانبين .
مثال (٧ - ٣) :

بأخذ بيانات المثال (٧ - ١) يبين كيف تستخدم الوسط الحسابى لعينة لاختبار الفرض الصفري $\mu = 75$ ضد الفرض الآخر $\mu \neq 75$ عند مستوى الدلالة $0,05$. حدد قوة الاختبار عند $\mu = 76$ وارسم دالة القوة لهذا الاختبار.

الحل :

نظراً لأن المجتمع معتدل يكون للمتغير \bar{x} توزيع معتدل : مع $(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{v}})$ وبالتالي يكون للاحصاءة
ع = $\frac{\bar{x} - \mu}{\sqrt{v}/\sigma}$ توزيع معتدل معيارى : مع $(0, 1)$.

ونظراً لأن الاختبار ذو جانبيين فإن منطقة رفض الفرض الصفري تتألف من جزئين متساويين في جانبي التوزيع . لتكن a_1 هي القيمة الحرجة التي تحدد منطقة الرفض اليمنى من اليسار ، ولتكن a_2 هي القيمة الحرجة التي تحدد منطقة الرفض اليسرى من اليمين . انظر الشكل (٧ - ٤) .



الشكل (٧ - ٤)

منطقتا الرفض والقبول في اختبار ذي جانبيين

لإيجاد قيمتي a_1 ، a_2 نستخدم جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل المعياري كالتالي :

$$ل (س < a_1) = 0.025 = \frac{0.05}{2} = 0.025 \quad \text{حيث } \bar{s} : \text{ مع } (1.4, 75)$$

$$\therefore ل (س < a_1) = 0.025 = \left(\frac{75 - a_1}{1.4} < 1.96 \right) \text{ أي ل } 0.025 = \left(\frac{75 - a_1}{1.4} < 1.96 \right)$$

$$\therefore 1.96 = \frac{75 - a_1}{1.4} \quad \text{ومنها } a_1 = 77.744$$

بالمثل ، ل ($\bar{S} > 1$) = $\frac{2.5}{3} = 0.83$ حيث \bar{S} : مع (1.4 ، 75)

$$\therefore \text{ل (} \bar{C} > 1 \text{)} = \frac{75 - 1}{1.4} = 0.025$$

$$\therefore \frac{75 - 1}{1.4} = 1.96 - \text{ومنها } 1 = 72.256$$

وإذن تتحدد منطقة قبول الفرض الصفري حين يفترض صحته بالفترة (72,26 ، 77,74) وتكون قاعدة الاختبار كالتالي :

« إذا وقع الوسط الحسابي لعينة عشوائية من الحجم 25 خارج المنطقة \bar{C} = { $\bar{S} : 77,74 \leq \bar{S} < 72,26$ } نرفض الفرض الصفري ف عند مستوى الدلالة 0.05 ، وإلا نقبل ف »

نحسب الآن الاحتمال β عند $\mu = 76$ وفقا للمنطق السابق .
 β = احتمال وقوع قيم المتغير \bar{S} في منطقة القبول (72,26 ، 77,74) تحت الفرض الآخر $\mu = 76$

$$= \text{ل (} 77,74 < \bar{S} < 72,26 \text{) حيث } \bar{S} : \text{ مع (1,4 ، 76)}$$

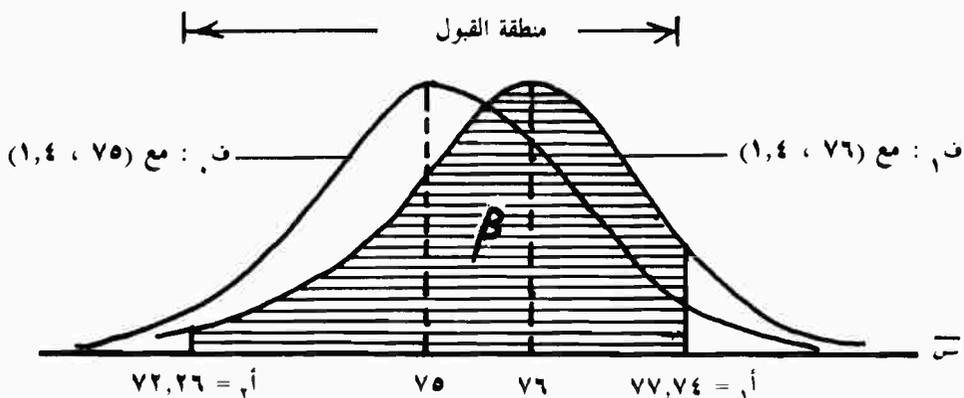
$$= \text{ل (} \frac{76 - 72,26}{1,4} \leq \frac{76 - \bar{S}}{1,4} \leq \frac{76 - 77,74}{1,4} \text{)}$$

$$= \text{ل (} 1,24 \leq \bar{C} \leq 2,67 \text{)} = 0,89 \text{ تقريبا}$$

\therefore قوة الاختبار عند $\mu = 76$ هي 0,89 - 1 = 0,11 تقريبا

لتوضيح ذلك هندسيا نرسم كما في الشكل (7 - 5) توزيع المتغير \bar{S} تحت كل من الفرضين ف : $\mu = 75$ وف : $\mu = 76$ من هذا الشكل يلاحظ

أن الاحتمال $\beta = 0,89$ هو نسبة الجزء من توزيع F_1 الذى يشترك فى منطقة القبول مع توزيع F_2 ، وهذه النسبة تعبر عنها مساحة الجزء المظلل من الشكل (٥ - ٧) .



الشكل (٥ - ٧)

التوزيع الممثل للفرض الصفري والتوزيع الممثل للفرض الآخر
(مساحة الجزء المظلل تعبر عن الاحتمال β فى اختبار ذى جانبيين)

فى هذه الحالة تأخذ دالة قوة الاختبار الصيغة الآتية :

$$د(\mu) = ل(\bar{س} \leq \bar{ا}_1) + ل(\bar{س} \geq \bar{ا}_2)$$

$$= ١ - ل(\bar{ا}_1 < \bar{س} < \bar{ا}_2)$$

وفى هذا المثال نجد أن :

$$د(\mu) = ١ - ل(٧٢,٢٦ < \bar{س} < ٧٧,٧٤) \quad \text{حيث } \bar{س} : \text{مع } (\mu, 1,4)$$

$$\text{وقد وجدنا أن } د(٧٦) = ٠,٨٩ - ١ = ٠,١١$$

وبالمثل نجد ما يلى :

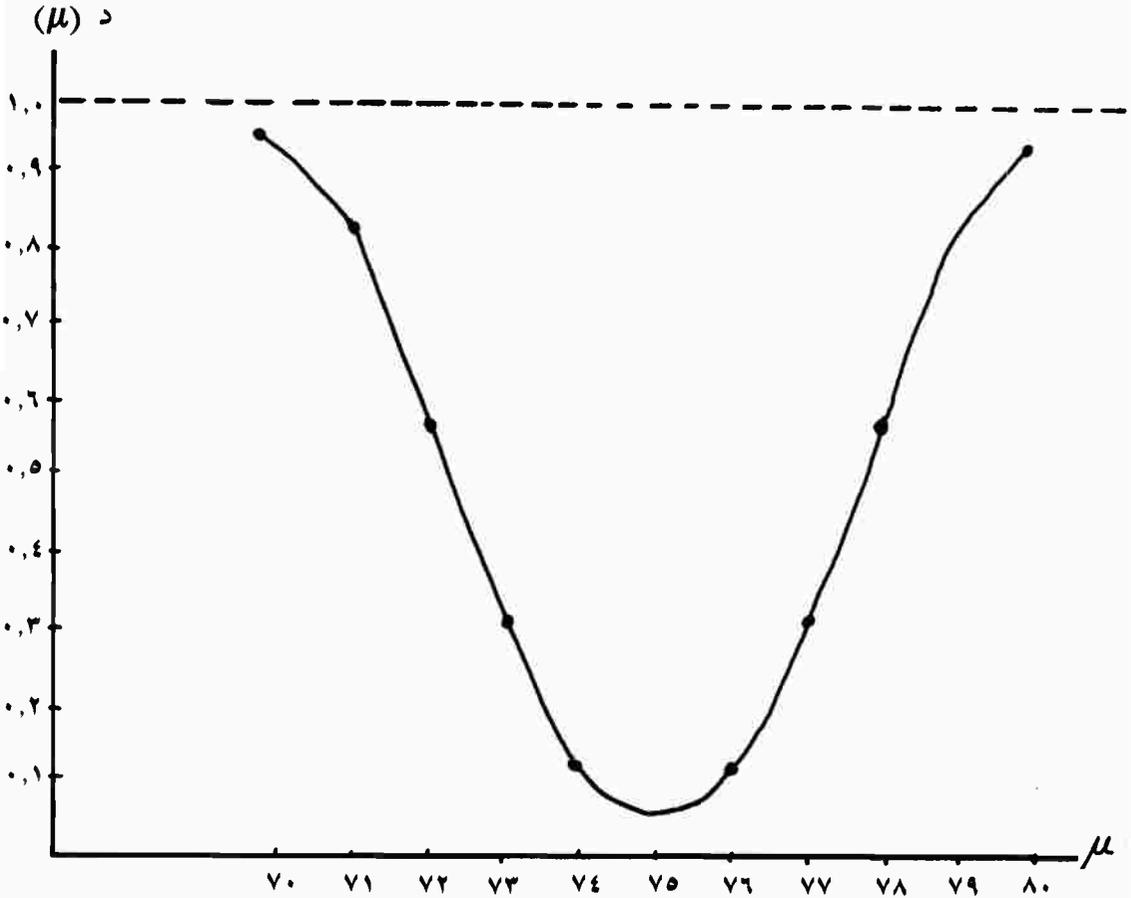
$$د(٧٧) = ٠,٣٠ \quad \text{ود } (٧٨) = ٠,٥٧ \quad \text{ود } (٧٩) = ٠,٨٢ \quad \text{ود } (٨٠) = ٠,٩٤$$

... الخ . ومن التماثل نجد أن

$$د(٧٤) = ٠,١١ \quad \text{ود } (٧٣) = ٠,٣٠ \quad \text{ود } (٧٢) = ٠,٥٧ \quad \text{ود } (٧١) = ٠,٨٢$$

$$\text{ود } (٧٠) = ٠,٩٤ \quad \dots \text{ الخ}$$

والشكل (٧ - ٦) يمثل هذه الدالة بيانيا .



الشكل (٦-٧)

منحنى القوة لاختبار المثال (٧-٢) - اختبار ذو جانبيين

إن الملاحظات والحقائق التي ذكرت في البند (٧ - ٢ - ٢) عن العوامل المؤثرة في قيمة β تنطبق هنا أيضا . فكلما صغر الاحتمال α كلما صغر جزءا منطقة الرفض ، واتسعت منطقة القبول وهذا يؤدي إلى زيادة الاحتمال β وصغر قوة الاختبار . كذلك كلما بعدت القيمة μ التي يفرضها الفرض الآخر عن القيمة التي يحددها الفرض الصفري كلما قل التداخل بين توزيعي f_0 ، f_1 وصغرت

β وزادت قوة الاختبار . وأخيرا كلما نُقص الخطأ المعياري سواء بتصغير الانحراف المعياري σ للمجتمع أو بزيادة حجم العينة ، كلما صغرت β وزادت قوة الاختبار .

وجدير بالملاحظة هنا أنه إذا تساوت جميع الظروف فإن الاحتمال β للخطأ من النوع الثاني يكون أقل في الاختبار ذي الجانب الواحد منه في الاختبار ذي الجانبين ، أى أن الاختبار ذا الجانب الواحد يكون أقل تعرضا لهذا النوع من الخطأ .

وكما في البند (٧ - ٢ - ٣) حين نتناول اختبارا ذا جانبيين لفرض عن متوسط مجتمع معتدل ، إذا تحددت قيم α ، μ ، σ وأردنا أن نضمن أن يأخذ احتمال الخطأ من النوع الثاني قيمة محددة β فإن الحد الأعلى لحجم العينة الذى يوفر هذا الضمان هو ذلك الذى ينتج من حل نفس المعادلة (١) السابق تقديمها وهى :

$$\frac{f}{\bar{c}_1 - \bar{c}_2} = \text{خ. م. ٠}$$

والفرق في استخدام هذه المعادلة بين الحالتين يحدث فقط في حساب القيمة \bar{c}_1

مثال (٧ - ٤) :

في المثال (٧ - ٣) حيث $\sigma^2 = ٤٩$ ، $\alpha = ٠,٠٥$ ، $\mu = ٧٥$ إذا أخذنا $\mu_1 = ٧٨$ فأوجد الحد الأعلى لحجم العينة الذى يضمن أن تكون $\beta = ٠,١٠$.

الحل :

$$\frac{y}{\sigma \sqrt{v}} = \frac{\sigma}{\sigma \sqrt{v}} = \text{خ. م. ٠}$$

$$f = \mu_1 - \mu = ٧٨ - ٧٥ = ٣$$

ل ($\epsilon < \epsilon$) ، $\alpha = 0,025$ ومنها $\epsilon = 1,96$ (اختبار ذو جانبيين)
 ل ($\epsilon \geq \epsilon$) ، $\beta = 0,10$ ومنها $\epsilon = 1,28$

$$\frac{1}{1,08} = \frac{3}{3,24} = \frac{3}{(1,28) - 1,96} = \frac{7}{\sqrt{v}} \therefore$$

ومنها $v = (1,08 \times 7)^2 = 57,15$
 أى أنه يكفى أن نأخذ عينة حجمها 58 لنضمن أن تكون $\beta = 0,10$ (تحقق
 من ذلك بأخذ $v = 58$ وإثبات أن القيمتين الحرجتين هما $\epsilon = 1,76, 1,80$ ،
 $\epsilon = 1,73, 1,99$ وأن $\beta = 0,0981$)

(7 - 4) حساب قيمة β في اختبار الفرق بين متوسطى مجتمعين
 معتدلين :

نستخدم نفس الأسلوب المقدم في البندين السابقين مع مراعاة طريقة حساب
 الخطأ المعياري التي تتطلبها هذه الحالة .

مثال (7 - 5) :

لتجربة أقراص لإنقاص الوزن عند النساء ، اختيرت 40 من إناث القطط المنزلية
 وقسمت عشوائيا إلى مجموعتين بكل منها 20 قطة ووضعت المجموعتان تحت نفس
 الظروف والنظام الغذائى فيما عدا أن الأقراص كانت تضاف إلى غذاء واحدة فقط
 من المجموعتين . وبعد ستة أسابيع وباستخدام مقياس معين حسب الوسطان
 الحسابيان \bar{y}_1 ، \bar{y}_2 للمجموعتين . إذا اعتبرنا أن المجموعتين مستقلتان
 ومأخوذتان من مجتمعين معتدلين تباين كل منها 40 ومتوسطاهما μ_1 ، μ_2 :
 (أولا) بين كيف نختبر الفرض الصفرى $\mu_1 = \mu_2$ ضد الفرض $\mu_1 \neq \mu_2$.
 عن مستوى الدلالة 0,05 .

(ثانيا) أوجد قوة الاختبار عندما يفترض أن الفرق بين متوسطي المجتمعين يساوى ٣ وحدات . .

(ثالثا) أوجد الحد الأدنى لحجم العينة الذي يضمن أن يكون الاحتمال β للخطأ من النوع الثاني يساوى ٠,١٥ .

الحل :

(أولا)

نظرا لأن المجتمعين معتدلان والعينتين مستقلتان فإن المتغير العشوائى $\bar{X}_1 - \bar{X}_2$ يكون ذا توزيع معتدل وسطه الحسابى $\mu_1 - \mu_2$ وتباينه يساوى

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \quad \text{لأن } \sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \quad \text{و } n = n_1 = n_2$$

وبالتالى يكون للإحصاءة

$$\frac{(\bar{X}_1 - \bar{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{\sigma^2}{n}} = Z$$

توزيع معتدل معيارى : مع (٠ ، ١) .

$$\text{لدينا } \sigma^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ٤٠ \quad \text{و } n = n_1 = n_2 = ٢٠$$

$$\text{اذن } Z = \frac{٤٠ \times ٢}{٢٠} \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} \quad \text{وهذا هو الخطأ المعيارى للإحصاءة}$$

الفرض الصفري ف. هو $\mu_1 = \mu_2$

الفرض الآخر ف. هو $\mu_1 \neq \mu_2$ (اختبار ذو جانبيين) ، $\alpha = 0,05$

نظرا لأن الاختبار ذو جانبيين فإن منطقة رفض الفرض الصفري تتألف من منطقتين

عند ذيلي التوزيع يحدهما العددان z_1 ، z_2 بحيث

$$z_1 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \frac{s}{\sqrt{2}} < -z_1 \quad \text{و} \quad z_2 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \frac{s}{\sqrt{2}} > z_2$$

على أن يحسب كلا الاحتمالين على أساس التسليم بصحة الفرض الصفري

$\mu_1 = \mu_2$ أي من الإحصاءة

$$z = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\frac{s}{\sqrt{2}}} = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - \text{صفر}}{\frac{s}{\sqrt{2}}}$$

التي تتبع التوزيع المعتدل المعياري : مع (0 ، 1) .

$$\text{لدينا } z = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \frac{s}{\sqrt{2}} < -z_1 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \frac{s}{\sqrt{2}} < -z_1 \quad \text{و} \quad z = (\bar{x}_1 - \bar{x}_2) / \frac{s}{\sqrt{2}} > z_2$$

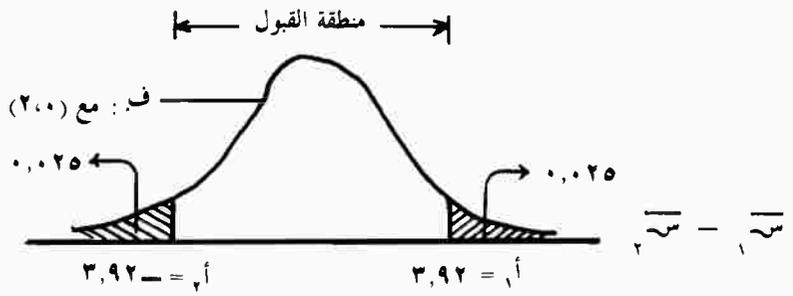
$0,025 =$

من جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل نجد أن

$$z_1 = 1,96 \quad \text{ومنها } z_2 = 3,92$$

من التماثل نجد أن :

$$z_1 = -1,96 \quad \text{ومنها } z_2 = -3,92$$



الشكل (٧ - ٧)

وإذن تتألف المنطقة التي نرفض فيها الفرض الصفري ف : $\mu = \mu_0$ عند المستوى ٠,٠٥ من اتحاد المنطقتين $(\bar{s}_1 - \bar{s}_2) < 3,92$ و $(\bar{s}_1 - \bar{s}_2) > 3,92$ أى من المنطقة التي يأخذ فيها الفرق بين الوسطين الحسابيين للعينات من الحجم ٢٠ قيمة تزيد عن ٣,٩٢ أو قيمة تقل عن ٣,٩٢ واحتمال هاتين المنطقتين معا تعبر عنه مساحتي الجزئين المظللين بالشكل (٧ - ٧) ، وتكون منطقة القبول هي المنطقة المكتملة لهاتين المنطقتين أى المنطقة التي تحددها الفترة $(- 3,92 , 3,92)$ وتحدد قاعدة الاختبار كالتالى :

« إذا وقع الفرق بين متوسطى عينتين مستقلتين من الحجم ٢٠ خارج المنطقة $\bar{s}_1 - \bar{s}_2 = \mu_1 - \mu_2 : 3,92 \leq \bar{s}_1 - \bar{s}_2 \leq 3,92$ نرفض الفرض الصفري ف: عند مستوى الدلالة ٠,٠٥ وإلا نقبل ف: ٠ »

(ثانيا)

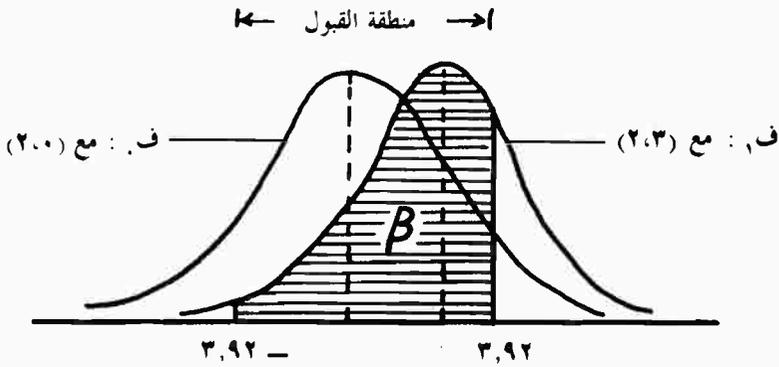
لحساب قيمة β نحسب احتمال وقوع قيم المتغير $\bar{s}_1 - \bar{s}_2$ فى منطقة القبول على أساس أن الفرض الصفري خاطيء والفرض الآخر $\mu_1 - \mu_2 = 3$ هو الصحيح .

$\beta = P(3,92 \leq \bar{s}_1 - \bar{s}_2 \leq 3,92)$ حيث $\bar{s}_1 - \bar{s}_2$ مع $(3, 2)$

$$J = \left(\frac{3 - 3,92}{2} \leq \frac{3 - \bar{x}_1 - \bar{x}_2}{2} \leq \frac{3 - 3,92}{2} \right)$$

من جدول المساحات $J = (0,46 \leq C \leq 3,46) = 0,68$

وإذن قوة الاختبار عندما $\mu - \mu = 3$ هي $\beta = 0,32$ - انظر الشكل (٧ - ٨).



الشكل (٧ - ٨)

التوزيع الممثل للفرض الصفري والتوزيع الممثل للفرض الآخر
(مساحة الجزء المظلل تعبر عن الاحتمال β للخطأ من النوع الثاني)

(ثالثاً)

لإيجاد الحد الأعلى لحجم العينة الذي يضمن أن تكون $\beta = 0,15$ نستخدم نفس المعادلة (١) السابق تقديمها وهي :

$$X = 0,2 \cdot \frac{f}{\bar{c}_1 - \bar{c}_2}$$

ويستلزم الأمر هنا أن تكون العينتان مستقلتين ومن نفس الحجم .

$$\text{لدينا } \frac{\sqrt{80}}{3} = \frac{\sqrt{0.2}}{3} = 0.2$$

$$3 = 0 - 3 = \text{ف ،}$$

$$\text{ل } (E < 3) = \alpha = 0.025 \text{ لأن الاختبار ذو جانبيين}$$

$$\text{وإذن } \alpha = 1.96$$

$$\text{ل } (E \geq 3) = \beta = 0.15 \text{ وإذن } \beta = 1.04$$

$$\therefore 1 = \frac{3}{3} = \frac{3}{(1.04) - 1.96} = \frac{\sqrt{80}}{3}$$

$$\therefore 80 = n$$

أى أنه يكفي أخذ عيتين مستقلتين حجم كل منهما 80 لكي نضمن أن تكون $\beta = 0.15$ (تحقق من ذلك بأخذ $n = 80$ وإثبات أن $\alpha = 1.96$ و $\beta = 1.04$ وأن $\beta = 0.1492$)

(٧ - ٥) حساب قيمة β في اختبار النسبة :

في البنود الثلاثة السابقة كنا نتناول الأوساط الحسابية لعينات من مجتمعات معتدلة أو معتدلة تقريبا . على أن المنطق الذى استخدمناه في حساب الاحتمال β للخطأ من النوع الثانى وحساب قوة الاختبار ينطبق على أى مقاييس أخرى . وفي المثال الآتى نتناول نسبة وقوع حدث ما في مجتمع ما .

مثال (٧ - ٦) :

بينت الخبرة أن معدل الشفاء من مرض معين بواسطة علاج قياسي 60%. ابتكر علاج جديد يظن أنه أفضل من العلاج القياسي . بين كيف تختبر عند مستوى

الدلالة ٠,٠٥ ، ما إذا كان معدل الشفاء بالعلاج الجديد أعلى منه بالعلاج القياسي ، وذلك باستخدام عينة من ١٥ مريضا بهذا المرض . حدد قوة الاختبار عندما يفترض أن معدل الشفاء بالعلاج الجديد ٧٠٪ .

الحل :

إن جودة العلاج تقاس بقيمة المتغير θ الذى يعبر عن عدد المرضى الذين شفوا فى عينة من الحجم ١٥ . وإذا اعتبرنا أن العينة عشوائية ذات وحدات مستقلة فإن المتغير θ يكون له توزيع ذى الحدين دليلاه θ ، θ حيث $\theta = ١٥$ ، θ بارامتر مجهول يعبر عن احتمال الشفاء لأمى مريض . راجع البند (٣ - ٣) .

ولبحث أفضلية العلاج الجديد ، علينا أن نقارن بين الفرضين الآتيين :

الفرض الصفرى F_0 : $\theta = ٠,٦$ (لا يوجد فرق فى معدل الشفاء بين نوعى العلاج)

الفرض الآخر F_1 : $\theta < ٠,٦$ (اختبار ذو جانب واحد)

إذا كان الفرض الصفرى صحيحا ، يكون للمتغير θ توزيع ذو حدين دليلاه $\theta = ١٥$ ، $\theta = ٠,٦$. ويمكننا حينئذ إيجاد توزيع احتمال هذا المتغير بالحساب المعتاد (أى من دالة الكتلة) أو باستخدام الجدول (٣) فى ذيل هذا الكتاب مع أخذ $\theta = ١٥$ ، $\theta = ٠,٦$ فنجد التوزيع الذى ننقله فى الجدول (٧ - ٢) الآتى .

نظرا لأن الاختبار ذو جانب واحد هو الجانب الأيمن فإن منطقة رفض الفرض الصفرى هى المنطقة التى يأخذ فيها المتغير θ قيمة تزيد عن العدد a حيث $L (S < a)$ لا تزيد عن $\alpha = ٠,٠٥$. ولإيجاد القيمة الحرجة a التى تحدد التوزيع من اليمين نجرب بضعة قيم مستعنين بالجدول (٧ - ٢) كالآتى :

$$L (S < ١٤) = ٠$$

$$L (S < ١٣) = ٠,٠٠٥$$

$$ل (س < 12) = 0,022 + 0,005 = 0,027$$

$$ل (س < 11) = 0,063 + 0,027 = 0,090$$

وهذا الاحتمال يزيد عن 0,05

إذن القيمة الحرجة $أ = 12$ وتتحدد قاعدة الاختبار كالآتي :

« إذا كان عدد المرضى الذين شفوا في عينة من 15 مريضاً يزيد عن 12 نرفض

الفرض الصفري ف. أن $ح = 0,6$ عند مستوى الدلالة 0,05، وإلا نقبل

ف. » .

الجدول (٧-٢)

توزيع الاحتمال للمتغير ذي حدين : حد (15، 0,6)

ل	س	ل	س
احتمال هذا العدد	عدد حالات الشفاء	احتمال هذا العدد	عدد حالات الشفاء
0,177	8	_____	0
0,207	9	_____	1
0,186	10	_____	2
0,127	11	0,002	3
0,063	12	0,007	4
0,022	13	0,024	5
0,005	14	0,061	6
_____	15	0,118	7
0,999			

لحساب قوة الاختبار عندما يفترض أن $\alpha = 0,7$ نحسب احتمال وقوع قيم المتغير s في منطقة القبول وهي $s \geq 12$ تحت هذا الفرض أى على أساس أن للمتغير s توزيعاً ذا حدين دليلاً $15, 0,7$.

احتمال الخطأ من النوع الثاني $\beta = P(s < 12)$ حيث s : حد $(15, 0,7)$
 $= 1 - P(s > 12)$

من الجدول (3) بديل هذا الكتاب وبأخذ $n = 15$ و $\alpha = 0,7$ نجد أن :

$$\beta = 1 - (0,005 + 0,031 + 0,092) = 0,872$$

$$= 0,872 \approx 0,87$$

وإذن قوة الاختبار $\alpha = 0,87 - 1 = 0,13$

ويلاحظ أن قوة الاختبار ضعيفة مما يدعونا إلى الشك في قدرة التجربة على التمييز بين معدل الشفاء في العلاجين القياسى والجديد . وينبغى حينئذ العمل على زيادة هذه القدرة وذلك بزيادة حجم العينة .

حل آخر :

فى هذا المثال يمكننا استخدام تقريب التوزيع المعتدل لتوزيع ذى

الحدين — راجع البند (4 - 6) مع ملاحظة أن $n \alpha = 0,6 \times 15 = 9 < 5$

كما أن $n(1 - \alpha) = 0,4 \times 15 = 6 < 5$ ، ويقتررب توزيع ذى الحدين

حد $(15, 0,6)$ من توزيع معتدل متوسطه $\mu = n \alpha = 9$ وانحرافه المعيارى σ

$= \sqrt{n \alpha (1 - \alpha)} = \sqrt{0,6 \times 0,4 \times 15} = 1,897$ وبالتالي يكون للمتغير

$$z = \frac{9 - (s - 9)}{1,897}$$

بالتقريب توزيع معتدل معيارى : مع $(0, 1)$.

لإيجاد القيمة الحرجة لدينا :

$$L = (s < 1) = L < \epsilon = \frac{9 - (0,5 - 1)}{1,897} < 0,05 \text{ فرضا}$$

من جدول المساحات أسفل المنحنى المعتدل المعيارى نجد أن

$$1,64 = \frac{9,5 - 1}{1,897} \text{ ومنها } 12,611 =$$

واذن نرفض الفرض الصفري أن $\mu = 0,6$ عند مستوى الدلالة $0,05$ إذا كان عدد المرضى الذين شفوا في عينة من 15 مريضا يزيد عن 12. وهذه هي النتيجة التي توصلنا إليها بالحل الأول. كذلك:

$$\beta = L = (s \geq 12) \text{ حيث } s = \text{حد} (0,7, 15)$$

$$\text{وبالتقريب بتوزيع معتدل وسطه الحسابى } \mu = 0,7 \times 15 = 10,5$$

$$\text{وانحرافه المعيارى } \sigma = \sqrt{0,3 \times 0,7 \times 15} = 1,7748$$

نجد أن:

$$\beta = L = (s \geq 12) = L \geq \epsilon = \frac{(10,5 - (0,5 + 12))}{1,7748}$$

$$L = (s \geq 12) = 0,8708 = 0,87 \text{ تقريبا}$$

$$0,13 = 0,87 - 1 = \epsilon$$

تمارين (٧)

- (١) أخذت عينة عشوائية حجمها $n = 50$ من مجتمع معتدل تباينه $15,21$. بين كيف تختبر عند مستوى الدلالة $0,05$ الفرض الصفري أن متوسط المجتمع $\mu = 45,5$ ضد الفرض $\mu \neq 45,5$. أوجد قوة الاختبار عندما نفترض أن $\mu = 54$.