حاشية المطور (phasor)
و الأرقام المركبة (complex numbers)

<u>الأرقام المركبة</u>

قبل أبي عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي كنا نعرف فقط الأرقام الموجبة و لكنه حينما توصل إلى حلول المعادلة الجبرية من الدرجة الثانية اضطر لتعريف الصفر (المأخوذة منه كلمة zero و لذا فمن العيب علينا إستخدام النطق المحور لكلمة أصلها عربي)

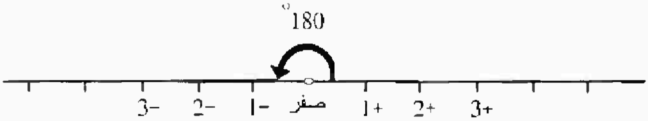
و لتعريف الأرقام السالبة و لتعريف الكمية التخيلية $\sqrt{-1}$

و لفهم تلك الأرقام و لنتصور كنهها أورد التالي:
أصل الكلمة في اللغة العربية هو الفعل الماضي. فالفعل الماضي لكلمة الصفر هو صَفِرَ يعني خلا، فنقول صَفِرَت يداه أي خلت فهو صفر اليدين.

فإذا بدأنا من نقطة الصفر و أردنا رسم الأرقام الموجبة رسمنا خطا أفقيا إلى يمين نقطة الصفر و قسمناه أقساما متساوية و وضعنا عند نهاية كل قسم علامة صغيرة كتبنا تحتها رقما موجبا فنكتب +1 تحت أول علامة علي يمين الصفر و نكتب +2 تحت ثاني علامة و هلم جرا. و سمينا الخط الأفقي الممتد يمين نقطة الصفر المحور الموجب.

و لرسم الأرقام السالبة أدرنا المحور الموجب 180 درجة عكس عقرب الساعة بحيث أصبح امتدادا للخط الأفقي على يسار نقطة

الصفر. و قسمناه و علمناه مثل ما صنعنا في المحور الموجب إلا أن الأرقام هنا هي -1 ثم -2 و هلم جرا. (انظر الشكل التالي) .



و جدير بنا هنا أن نلاحظ أن جميع شعوب العالم، بما فيه هؤلاء الذين يكتبون لغتهم من اليسار إلى اليمين قد أخذوا عنا المحور الموجب يمين الصفر و السالب يسار الصفر. بل أنهم أخذوا عنا الإتجاه من اليمين إلى اليسار أيضا في كتابة الأعداد فوق التسعة، فحينما تمتلأ خانة الآحاد بالرقم 9 نضع الصفر في خانة الآحاد (للدلالة على خلوها) و ننتقل من اليمين إلى اليسار كما نكتب لغتنا العربية إلى خانة العشرات و نضع فيها الرقم 1 ، و هذا نقلوه عنا أيضا.

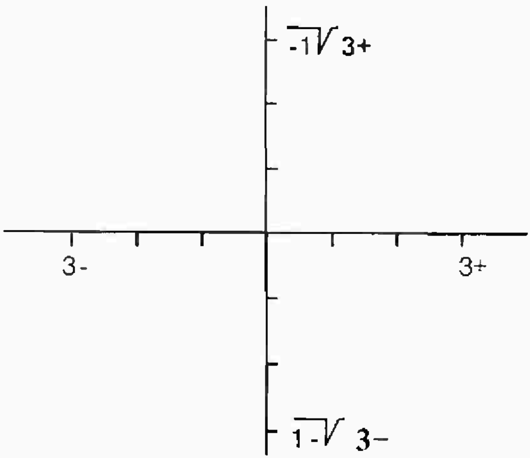
اللهم اجعلنا من أصحاب اليمين ولا تجعلنا من أصحاب الشمال. (إ قرأ سورة الواقعة).

و على ذلك فإن أي رقم سالب هو حاصل ضرب العامل (-1) في نفس مقدار العدد الموجب، أي أنه مثلا -7 = (-1) × 7 . أي أن العامل (-1) يسبب دوران العدد 180° عكس عقرب الساعة مع الإحتفاظ بمقداره. أي أن الرقم -7 يبعد يسارا عن نقطة الصفر بنفس المسافة التي يبعد بها يمينا الرقم +7 عن نقطة الصفر. وقد يبدو ذلك بديهيا و ما كان ليتطلب كل هذا الإستطراد، إلا أن المراد

الآن هو إستخدام نفس الطريقة لرسم الأرقام السالبة تحت الجذر التربيعي.

أي أنه لرسم أي رقم سالب تحت الجذر يجب تعريف كيفية رسم الكمية التخيلية خ = $\sqrt{-1}$

و كما عرفنا عامل الضرب -1 بأنه يسبب دوران العدد عكس عقرب الساعة بزاوية مقدارها 180° ، فلقد عرف عامل الضرب خ بأنه يسبب دوران العدد عكس عقرب الساعة بزاوية مقدارها 90 °.



ففي الشكل أعلاه نرى الرقم +3 على المحور الموجب يمين نقطة الصفر ، و بضربه في خ = $\sqrt{-1}$ يدور الرقم عكس إتجاه عقرب الساعة بزاوية 90 ° ليصبح فوق نقطة الصفر على محور

عمودي على المحور الموجب عند نقطة الصفر، أي أن حاصل الضرب وهو الرقم + 3 $\sqrt{-1}$ يقع على هذا المحور العمودي

و الذي نسميه المحور التخيلي الموجب.

و بضرب الرقم +3 $\sqrt{-1}$ في خ يدور عكس إتجاه عقرب الساعة بزاوية 90 ° ليصبح الرقم - 3 ، ثم بالضرب مرة أخرى في خ يصير الرقم -3 $\sqrt{-1}$ على محور عمودي أسفل نقطة

الصفر نسميه المحور التخيلي السالب.

الرقم المركب مثل(أ + خ ب) يتكون من جزئين الأول(أ) هو رقم حقيقي و الثاني هو الكمية التخيلية خ مضروبة في رقم حقيقي هو(ب).

و الآن نشرح المطور و كيفية استخدامه لرسم الأرقام المركبة.

<u>المطور</u>

كلمة vector تعني حامل و هي مشتقة من اللغة اللاتينية (محمول = vectus , يحمل = vehere). و هناك من يطلق على vector كمية متجهة و قد تكون هذه التسمية مناسبة فيما إذا كنا نتعامل مع السرعة على أساس أن لها مقدار و اتجاه و ذلك يسمى space vector أي أننا نعمل في المجال المكاني . و لكن حينما نعمل في المجال الزمني فإننا لا نتعامل مع إتجاه بل نتعامل مع كمية لها سعة (amplitude) و طور (phase) و هو ما يسمى

و من الكلمتين كمية زمنية أو مطـور phasor أو time vector أختار الثانية أي مطور حيث أرى أنها الأنسب نظرا لما تعبر عنه.

و يستخدم المطور في التعبير عن ضغط الصوت و هو كمية لهـا في المجال المكاني (أي عند أي نقطة حول مصدر الصوت) سـعة غير إتجاهية أي لا تعتمد على الإتجاه، و لكن تتغير من مكان إلى آخر حسب بعدها من نقطة الصوت، كما أنها تتغير مع الزمن.

الكمية پ $^{خ ز}$ = جتا ز + خ جا ز

و پ $^{-خ ز}$ = جتا ز - خ جا ز

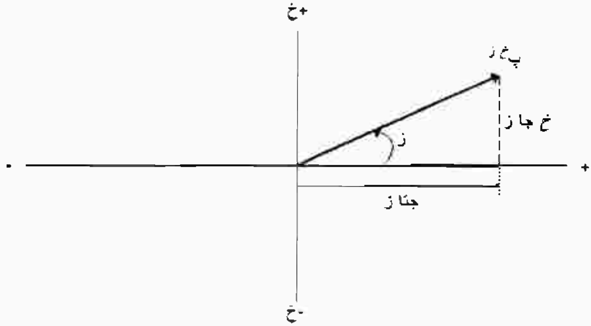
حيث

پ أساس الخوارزم الطبيعي = 2,71828

خ الكمية التخيلية $\sqrt{-1}$

المعادلتين السابقتين يطلق عليهما اسم الرياضي و عالم الطبيعـة Euler الذي اكتشفهما. وقد ولـد Leonhard Euler فـي بـازل بسويسرا عام 1707 م و توفى عـام 1783 م فـي پيتيرسـبورج بروسيا و عمل مديرا لقسم الرياضيات في أكاديمية العلـوم فـي عاصمة ألمانيا برلين.

الكمية پ $^{خ ز}$ هي رقم مركب و هي مطور و الشكل التالي يوضح كيفية رسمها.



فهي كرقم مركب تتكون من (جتا ز) على المحور الأفقي و من (خ جا ز) على المحور الرأسي. و هي كمطور لها سعة هي طول السهم (و هو هنا الواحد الصحيح) الذي يحصر بينه و بين المحور الموجب زاوية الطور (ز) و تسمى الطور.

<u>كيفية إجراء العمليات الحسابية على الأرقام التخيلية و المركبة</u>

جمع الأرقام التخيلية : أ خ + ب خ = (أ + ب) خ

ضرب الأرقام التخيلية : (أ) (ب خ) = (أ ب) خ ، (أ خ) (ب خ) = - أ ب

جمع الأرقام المركبة :

(أ + ب خ) + (ت + د خ) = (أ + ت) + (ب + د) خ

مثلا (2 + 5 خ) + (4 – 3 خ) = 6 + 2 خ

ضرب الأرقام المركبة :

(أ + ب خ) (ت + د خ) = أ ت + ب ت خ + أ د خ - ب د = (أ ت – ب د) + (ب ت + أ د) خ

مثلا (10 + 5 خ) (8 – 3 خ) = 80 – 30 خ + 40 خ + 15 = 95 + 10 خ

قسمة الأرقام المركبة :

(أ + ب خ) / (ت + د خ) = [(أ + ب خ) (ت - د خ)] / [(ت + د خ) (ت - د خ)]

= [(أ ت + ب د) + (ب ت – أ د) خ] / (ت^2 + د^2)

= [(أ ت + ب د) / (ت^2 + د^2)] + خ [(ب ت – أ د) / (ت^2 + د^2)]

مثلا (3 + 4 خ)/(2 + 3 خ) = [(3 + 4 خ)/(2 + 3 خ)] [(2 - 3 خ)/(2 - 3 خ)]

= (18 – خ) / 13 = (18/13) – خ (1/13)

المطور في الحالة العامة

المطور في الحالة العامة هو رقم مركب و يمكن كتابته بعدة طرق:

م ې خ ز

م (جتا ز + خ جا ز) = أ + ب خ

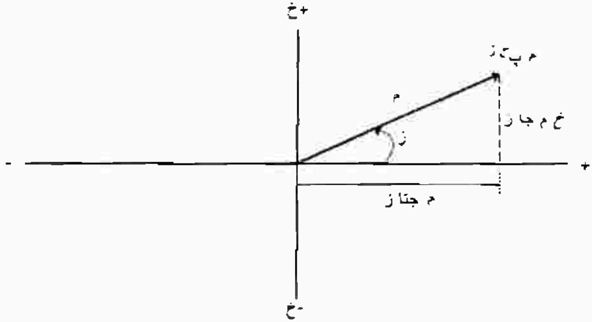
م ∠ ز

حيث م = السعة

ز = الطور (زاوية الطور)

و يلاحظ أن سعة المطور تكتب هكذا بين خطين راسيين | م | = $\sqrt{\text{أ}^2 + \text{ب}^2}$

و الشكل التالي يوضح ذلك.



و يلاحظ ان المسقط الراسي للمطور م يساوي م جـا ز اي انــه يرسم منحنى الجيب كما هو موضح بالشكل التالي ، و أن المطور يدور عكس عقرب الساعة بسرعة زاوية مقدارها ω.

و يلاحظ أن منحنى الجيب عند الزمن صفر له في الشكل التــالي قيمة مقدارها م جا ز$_1$ حيث أن الطور عند الزمن صــفر مقــداره ز$_1$.

كما أن الزاوية ز$_2$ = ω ن + ز$_1$
حيث ن هو االزمن المقاس من نقطة الصفر.