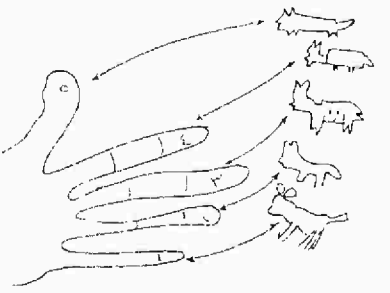
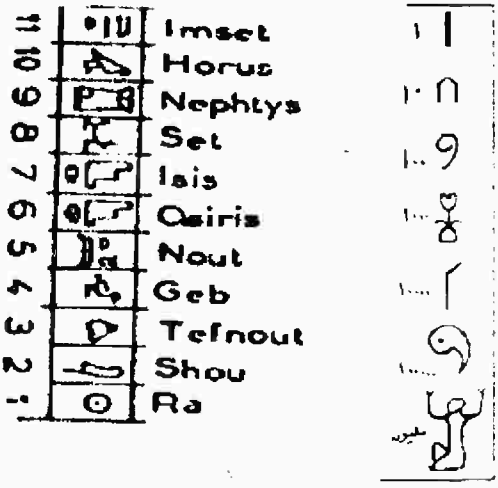
(أولاً) : فى البدء كانت الكلمة... وكان العدد

(١-٠) نشأ العدد من حاجة الإنسان إلى العَدّ... ليعبر عن كَمّ، كَمّ ما يمتلكه من أطفال، من زوجات، من أشجار ومزروعات وحيوانات. ابتكر الإنسان رموزا ومسميات لهذه الأعداد اختلفت من ثقافة لثقافة وانتقلت من حضارة لحضارة. كان الإنسان مثلا يحتفظ بسجلات لعدد القطيع الذى يمتلكه بأن يخصص قطعة حصى أو علامة على شجرة لكل واحدة من القطيع، أو كان يحفر شكل أصابع يد أو أوراق نبات تناظر فى مفرداتها عدد ما يملكه. كانت أصابع اليد فى مرحلة ما ترمز إلى الأعداد: من الخنصر (١) إلى الإبهام (٥).



كوَّن البابليون (أهل العراق القدامى) قبل عام ألفين قبل الميلاد نظامًا للعد اعتمد على النظام الستينى (الذى بقى منه تقسيم الساعة والقياس الستينى للزوايا). كان الرمز V يستخدم ليعنى «ستين» وقواها وكانت رموز مثل >> تعنى عشرين... المصريون القدماء ابتكروا نظامًا للعد أساسه عشرة وكانت رموز الأعداد الهيروغليفية كما فى الأمثلة التالية:



(١-١) أرقامنا العربية:

استخدم العرب قديمًا نظامًا عدِّيا مرتبطا بالحروف الأبجدية – شأنهم فى ذلك شأن حضارات قديمة كما فى تمثيل الأعداد بحروف اللغة القبطية وبحروف اللغة اليونانية – كانت الحروف الأبجدية العربية وما يناظرها من أعداد كالآتى:

أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠

ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠	٨٠٠	٩٠٠	١٠٠٠

وكان الحساب بها يسمى حساب الجُمَّل فالعدد ٢٠٠٨ مثلاً يمثل بالحروف ح غ غ.

بعد ذلك جاءت الرموز العربية الحالية مستقلة عن الحروف الأبجدية، وجاءت فى صورتين:

الأولى: ٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩ والتى تستخدم فى المشرق العربى.

والصورة الأخرى: 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، والتى تستخدم فى المغرب العربى ومنها دخلت الأندلس ثم انتشرت فى سائر أوروبا لتحل محل الرموز الرومانية I ، II ، III ، IV ، V ،... X ، C ، L ... وكان دخولها عن طريق كتاب محمد بن موسى الخوارزمى. ويعتقد أن هذه الرموز العربية بصورتيها المشرقية والمغربية من أصل هندى نقلها العرب من خلال ترجمتهم – بناء على أمر الخليفة المنصور (فى العصر العباسى) – لكتاب «السندهند» فى الفلك والرياضيات والذى حمله إلى بغداد عالم فلكى هندى يدعى «كانكاه» وترجمه إلى العربية يعقوب بن طارق المتوفى عام ٧٩٦م وربما آخرون. الصفر كان فى الهند بالصورة (٠) ويطلق عليه «سونيا» بمعنى المكان الخالى وترجمة العرب إلى كلمة صفر التى تحمل لغويا نفس المعنى. هناك ادعاءات أخرى ترى أن الرموز العربية هذه جاءت من فارس أو كابول، وهناك من يرى أنها عربية خالصة ولكن السائد أنها

من أصول هندية. وقد ذكر أبو الريحان البيرونى (من مشاهير الرياضيين العرب فى القرن الحادى عشر الميلادى) أن صور الحروف وأرقام الحساب تختلف فى الهند باختلاف المحلات وأن العرب أخذوا أحسن ما عندهم فهذبوا بعضها

البيرونى (٩٧٣-١٠٤٨)

وكونوا سلسلتين إحداهما عرفت بالأرقام الهندية (١، ٢، ٣...، ٩) ويتضح فى كتابتها الوضع العمودى، والأخرى عرفت بالغبارية (1 ، 2 ، 3 ،... ، 9) والتى تميل فى كتابتها إلى الوضع الأفقى. ومع دخول الرموز العربية إلى الغرب مصاحبة بطرق الحساب بالنظام العشرى، جرى تيسير إجراء

العمليات الحسابية بالورقة والقلم وذلك بديلاً عن العمليات المعقدة التى كانت تجرى عن طريق المِعداد ورموز الأرقام الرومانية. وقد أطلق الأوروبيون على طرق إجراء العمليات وخطوات حل المسائل باستخدام النظام العربى كلمة ألجوريزم (Algorithm) أو الخوارزمية تكريما لاسم الخوارزمى. وقد تطور معنى الخوارزمية ليشمل برمجة خطوات حل مشكلة أو إجراء أية عملية رياضية بالورقة والقلم أو حاسوبيا.

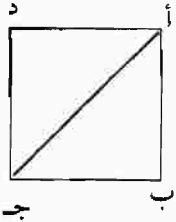
(١-٢) الفيثاغوريون والعدد:

يطلق على مجموعة الأعداد ١، ٢، ٣،... أيا كانت رموزها الأعداد الطبيعية. وكان الرياضيون والفلاسفة ومن أشهرهم فيثاغورس (٥٨٢-٥٠٧ ق.م ؟؟) يعتقدون أن العدد أصل كل الأشياء ومفتاح الكون. وكان لكل عدد معنى ومغنى (خاصية) وأن السماء ليست إلا سلما موسيقيا وعددا،

وأن الحياة عدد ونغم. وقد انشغل بعض العرب (مثل إخوان الصفا وخِلاَّن الوفا) وغيرهم فى العصور الوسطى بدراسة الأعداد وخواصها وتفسيرات ورودها فى بعض النصوص. الإغريق كانوا يعتقدون أن الأعداد ١، ٢، ٣، ٤ تمثل العناصر الأساسية فى تكوين الطبيعة ويرون فيها رباعيا مقدسا يشمل أصل هذا الخلق المتدفق إلى الأبد.

(١-٣) الحاجة إلى مزيد من أنواع الأعداد:

كان من الطبيعى أن يحتاج الإنسان بعد حل مشكلة العَدّ إلى حل مشكلة القياس، وقد بدأ باستخدام أدوات متاحة مثل الذراع والشبر والإصبع... ثم احتاج إلى وحدة قياسية لتركيب وترٍ لقوس الصيد ورأسٍ لفأس الفلاحة أو لخشب قارب الملاحة... ثم كانت حاجته لوحدات أصغر فأصغر فابتكر «الكسور». وكان اعتقاد الفيثاغوريين أنه لا توجد أعداد سوى الأعداد الصحيحة أو الكلية والأعداد الكسرية، وأنه فى حالة وجود «طولين» أو مسافتين فإن أحدهما لابد



أجـ ≠ ١ × عدد صحيح أو كسر
(فى المربع أ ب جـ د)

وأن يساوى الآخر مضروبا فى عدد صحيح أو عدد كسرى. إلا أن أحدهم اكتشف أن طول قطر مربع مثلاً لا يساوى طول ضلعه مضروبا فى عدد صحيح أو كسر. ومن ثم نشأت حاجة (وإن لم يعترف بها الفيثاغوريون) إلى أعداد أخرى التى سميت بعد ذلك بالجذور الصم (مثل $\sqrt{٢}$) ثم سميت أعداد غير نسبية. وقد أدى هذا الاكتشاف إلى اهتزاز فى ثقة الفيثاغوريين والإغريق فى الحساب، وحدث عزل بين الحساب والهندسة واكتفى الإغريق بدراسة الهندسة دراسة وصفية. من المعروف أن الكسور ظهرت عند البابليين والمصريين. وفى كتاب أحمس الكاتب المصرى (حوالى ١٦٥٠ ق.م) والمعروف باسم بردية رايند (مكتشف المخطوطة فى الأقصر عام ١٨٥٨م) ظهرت مسائل بها كسور

عادية وخاصـــة كسور الوحدة أى الذى يكون البسط فيها هو الواحد الصحيح، وعملية تجزئ أى كسر عادى إلى مجموعة مـــن كسور الوحدة. وقـــد ظلت طريقة تجزئ أى كسر إلى كسور الوحدة مستخدمة حتى حوالى القرن العاشر الميلادى حيث استخدمها الرياضى المصـــرى سعدى بن يوسف الفيومى فى حســـاب المواريث حوالى عام ٩٤٠م. جـــدير بالإشارة أن الرياضى الإيطالى فيبوناتسى وضع فى القـــــرن الثانى عشـــر الميلادى قاعـــدة عامة لتجزئ الكسور

$$\frac{أ}{ب\ جـ} = \frac{١}{ب \times \frac{ب + جـ}{أ}} + \frac{١}{جـ \times \frac{ب + جـ}{أ}}$$

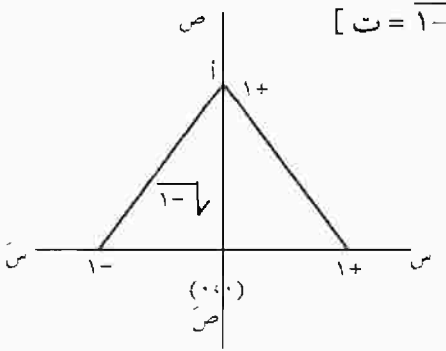
الكسور العشرية جاءت بعد ظهور نظام العد العربى بحوالى ألف عام. وكان ظهورها مرتبطا بتقريب أعداد صماء مثل $\sqrt{٢}$ ونسبة مثل ط. وعلى الرغم من أن كسور عشرية ظهرت فى أعمال بعض الرياضيين العرب مثل غياث الدين الكاشى (حوالى عام ١٤٣٠م) ورياضيين ألمان مثل رادولف (حوالى عام ١٥٣٠م) إلا أن المؤرخين فى معظمهم ينسبون ابتكار

الكسور العشرية إلى الرياضى الهولندى ستيفن (Stevin) الذى نشر فى عام ١٥٨٥م كتابا شرح فيه الكسور العشرية وقواعد العمليات عليها.

الأعداد السالبة نشأت من حاجات رياضية فى حل معادلات مثل س + ١ = ٠ وكانت تهمل قبل ذلك، كذلك الحال بالنسبة للأعداد غير النسبية مثل $\sqrt{٢}$ ، $\sqrt[٣]{٥}$ ، ومن الحاجة إلى تعميمات فى نظرية حل المعادلات. وبناء نظام الأعداد الحقيقية واكتماله بأعداد غير نسبية مثل ط (Π) ، هـ (e). وقد أدى حل مزيد من المعادلات مثل $س^{٢} = -١$ إلى التوسع فى نظم الأعداد لابتكار الأعداد التخيلية مثل (ت) حيث $ت^{٢} = -١$ ثم الأعداد المركبة أ + ب ت حيث أ عدد حقيقى، ت ب عدد تخيلى... كثير من الأعداد التى استحدثت من حاجات رياضياتية ظلت غير معترف بها طويلاً وكان البعض يعتبرها أعدادا معتلة أو سفسطائية.

مع نهاية القرن الثامن عشر وبداية التاسع عشر وجد «مسَّاح» ترويجى اسمه واصل (Wessel) وأمين مكتبة فرنسى هو أرجاند (Argand) مستقلين أنه يمكن تمثيل الأعداد المركبة بيانيًا.

[فى الشكل أ و هو الوسط الهندسى للمثلث ويساوى $\sqrt{(+1)}\sqrt{(-1)} = \sqrt{-1} = ت$]

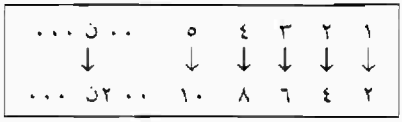


(١-٤) المالانهاية والصراع المعرفى:

هذه الثمانية «النائمة» «∞» ترمز إلى مفهوم رياضى وضعه جون واليس (١٦٥٥) ليعبر به عن المالانهاية (Infinity) أى

ما يتجاوز المحدود والمعدود. إنها رمز لكيان رياضى يعتبر أكبر من أى عدد حقيقى، وهو أيضًا يعتبر عددا كاردينياليا لمجموعة الأعداد الطبيعية ١، ٢، ٣، ... والتى لا يوجد نهاية لعناصرها، حيث لكل عنصر فيها تالٍ له، وتستمر فى انسيابها وتتابعها دون حدود فى تناظر أحادى مع نقاط على الخط المستقيم بل فى تناظر أحادى مع مجموعات جزئية منها مثل مجموعات الأعداد الزوجية والتى عددها هو أيضًا لا نهائى

جون واليس (١٦١٦-١٧٠٣)



ومع هذه اللانهـاية «الفعلية» (actual) توجـد أيضًا ما لانهاية «كامنة» (Potential) تتمثل فى انسياب وتتابع غير نمطى كما فى حالة أرقام عشرية تقارب، ولكنها لا تصل إلى ٢ مثلا أو إلى العدد ط (Π) الذى مهما طال المطال أو امتد المسار لا نهاية لأرقامه العشرية دون تكرار أو تنميط.

ط = ٣,١٤١٥٩٢٦٥٣٥٨٩٧٩٣٢٣٨٤٦٢٦٤٣٣٨٣٢٧٩٥٠٢٨٨٤٠٠٠٠٠٠٠

ويمثل العدد ط متسلسلة لا نهائية تقاربية هى

$$\frac{ط}{٤} = ١ - \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٧} + \frac{١}{٩} - \frac{١}{١١} + \cdots \longrightarrow \infty$$

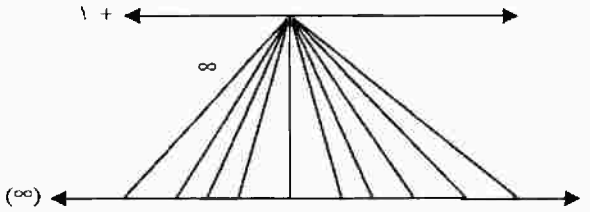
كما تتمثل اللانهاية الكامنة فى متتابعات تتكرر فيها الأرقام العشرية دون توقف مثل المتتابعة: ٠,٣، ٠,٣٣، ٠,٣٣٣، ٠,٣٣٣٣، ٠٠٠٠٠ تسير على درب طويل ونفق لا نهائى، ترى فى نهاية النفق ضوء هو ضوء العدد $\frac{١}{٣}$ ولكنها

لا تصل إليه ولا هو واحد من حدودها ولكنه يصبح ما يسمى نهاية لها (Limit).

كمثال آخر للمالانهاية الكامنة: لنفرض أن هناك «بنكا» يعطى أرباحًا مركبة بنسبة ١٠٠٪ فى السنة وأنه يضيف الأرباح كل لحظة زمنية متناهية فى الصغر. إذا وضعت جنيها واحدا فى هذا البنك فإن جملته فى نهاية العام وبعد تتابع لا نهائى من الإضافات والأرباح المركبة تصبح نهـا $_{ن\to\infty}$ $(1+\frac{1}{ن})^{ن}$ حيث ن عدد اللحظات المتناهية فى الصغر المكونة «للعام» والتى تقترب من المالانهاية. الجملة هنا فى نهايتها تصبح العدد (e) الذى يُقرَّب إلى ٢,٧٠٠٠ ويتبع الرقم العشرى ٧ أرقاما عشرية لا نهائية العدد وبدون نمط فى تواجدها.

من ناحية أخرى فإنه توجد أكثر من ما لانهاية فعلية أولها يسمى $\aleph_0$ (أَلِف صفر) وهو «عدد» الأعداد الطبيعية. وهناك مالانهائيات أخرى «أكبر» منها. على سبيل المثال عدد المستقيمات التى تمر بنقطة خارج مستقيم معلوم هو ما لا نهاية ولكنه أكبر بواحد من العدد اللانهائى الذى يمثل عدد نقاط الخط المستقيم (بحسب مسلمة إقليدس التى تقول بأنه يوجد

مستقيم واحد وواحد فقط يمر بنقطة معلومة خارج خط مستقيم ويوازى الخط المستقيم).



كما أن العدد اللانهائى لمجموعة الأعداد النسبية أكبر من العدد اللانهائى لمجموعة الأعداد الطبيعية... وهكذا... بدأ التفكير فى قضية المالانهاية فى إشكالية طرحها الفيلسوف الإغريقى زينو Zeno (حوالى عام ٤٥٠ ق.م) مثّلت آنذاك صراعًا معرفيا بين الحِس العام والمعرفة الأصيلة. وهى الإشكالية المعروفة بالسباق بين الأرنب (أشيلومس) ذى الأقدام السريعة وبين السلحفاة ذات الأقدام بطيئة الحركة. افترض زينو أن السلحفاة تتقدم عن الأرنب بمسافة (ولنفترض نحن أنها ١٠٠٠ متر، وأن سباقا بدأ بينهما حيث الأرنب يتحرك بسرعة تساوى عشرة أمثال سرعة السلحفاة.

فى رأى زينو أن الأرنب لن يلحق بالسلحفاة أبدًا، لأنه فى الوقت الذى يقطع فيه الأرنب الألف متر تكون السلحفاة قد

سبقته بمائة متر وعندما يجرى الأرنب المائة متر تكون السلحفاة قد سبقته بعشرة أمتار... وهكذا سوف تسبق السلحفاة الأرنب بمسافات بحسب المتتابعة ١, ٠، ٠,٠١، ٠,٠٠١، ٠,٠٠٠، ٠٠٠ بمسافات تصغر رويدًا رويدًا فى تناهٍ من الصِغَر ولكن يظل دائمًا بينهما مسافة تتناهى فى الصغر مهما ازداد زمن السباق... لقد لعبت هذه التتابعات اللانهائية دورًا هامًا فى تطور مفهوم المالانهاية والتى رأى البعض فيها أشياء سخيفة وآخرون رأوا فيها أفكارًا شيطانية وأن التفكير فى بعض مظاهرها مثل توالى الليل من بعد النهار قد يكون عملاً غير إيمانى... وقد ظلت المشكلة تراوح نفسها إلى أن أوضح كانتور (١٨٤٥-١٩١٨م) وجود المالانهاية فى صورتيها

الفعلية والكامنة ولاقى معاناة كبيرة فى عرض أفكاره تطور إلى اضطهاد علمى من أستاذه كرونيكر... وقد تابع أفكار كانتور الرياضى جودل (Godel) ذو الأصول التشيكية والتربية الألمانية الذى بحث أكثر وأكثر فى المالانهاية بعد أن تخرج من جامعة فينا ثم سافر إلى جامعة برينستون بالولايات المتحدة فى منتصف ثلاثينيات القرن العشرين ثم عاد ليواصل بحوثه فى لانهائية الأعداد بين الصفر والواحد ولانهائية المُتَّصَل (Continuum) حتى عام ١٩٧٨ حين توفى عن عمر ناهز الثانية والخمسين. تابع دراسة المالانهاية ونظرية المتصل ونظرية المجموعات (Sets)

(ألبرت أينشتاين صاحب النظرية النسبية)
ومكتشف العلاقة $E=mc^2$ أى
الطاقة = الكتلة × مربع سرعة الضوء

ومشكلة الاتساق فى بعض مسلمات الرياضيات الحديثة رياضيون مثل «كوهين» (Cohen) ووايل (Weil) وغيرهما... المهم أن مفهوم المالانهاية أصبح مفهوما رياضيا يتم التعامل معه وبه فى سائر الفروع الرياضية وخاصة فى التحليل الرياضى، كما وأن هناك جبر يحدد العمليات على المالانهايات كبيرها وصغيرها..، لعله من الطريف هنا الإشارة إلى مقولة تنسب لأينشتاين عندما سئل فى مؤتمر صحفى فى الثلاثينيات من القرن العشرين عن المالانهاية حيث قال أنه يعرف شيئين لانهائيين هما العالم والغباء البشرى ولكنه – أى أينشتاين – ليس متأكدًا من الشىء الأول. ترى هل كان أينشتاين يتنبأ بما يحدث فى العالم هذه الأيام، وبعد أن توفى عام ١٩٥٥؟

(١-٥) نظام العد الثنائى: البِت والبايت والرقمنة:

كان ابتكار النظام العربى العشرى فى العَدْ من أعظم الابتكارات ليس فقط فى أنه استخدم عشرة أرقام أساسية

مستقلة فقط (٠، ١، ٢ ٠٠٠، ٩) بل أيضًا فى استخدامه فكرة القيمة المكانية حيث المنازل والخانات تسير من اليمين إلى اليسار كالآتى: أحاد (١)، عشرات (١٠)، مئات (١٠ ٢)، آلاف (١٠ ٣) .... وهكذا تتزايد قوى الأساس عشرة. كان ذلك دافعًا لإمكانية وجود نظم عد أخرى تستخدم عددًا محدودًا من الأرقام الأساسية المستقلة وأساسًا معينًا وقيما مكانية. الرياضى الألمانى ليبنتز (Libnitz) (١٦٤٢-١٧٢٧م) ابتكر نظامًا عَدِّيا ثنائيا (ثنويا) يتكون من رقمين أساسيين مستقلين فقط هما ٠، ١ وباستخدام الأساس (اثنان) والقيمة المكانية: آحاد، ٢، (٢)٢، (٢) ٣ ، .... أنشأ نظاما ثنائيا. فالعدد ٣ مثلا يتحول إلى ١١، ٤ يتحول إلى ١٠٠ وهكذا.

يقال أن ليبنتز استلهم هذا النظام من قراءاته فى سفر التكوين عن بدء الخلق حيث الله (١) والخواء أو العدم أو اللاشىء قبل الخليقة (٠)، ومن هذه الثنائية خلق الله كل

شيء... ظل هذا النظام الثنائي الذى يمكن التعبير بواسطته عن كل الأعداد مجرد عمل رياضي ذهنى بحت... إلى أن جاء الكمبيوتر ليقوم بثورة بيضاء لبناء مجتمع المعلوماتية التى تتطلب قدرات فائقة على التخزين والمعالجة والاستدعاء ومن ثم احتاج إلى نظام أبسط من النظام العشرى ليدخل به الأعداد ثم البيانات والمعلومات. تَوَقُّف النبض الإلكترونى فى دائرة يمثل الرقم (٠) وسريان النبض يمثل الرقم (١). فالدائرة على التوالى التى بالشكل (ـــاــــ•ــــاــــ•ـــ•ـ) تمثل العدد (١١٠١٠) أى العدد العشـــــرى (٢٦). كـــذلك وضعـــت تشـــفيرات بالنظـــام الثنائى للحروف فمثلاً الحـــــرف A يمثـــل بالشفرة (١١٠٠١٠) وهكذا. وبذلك يمكن

ليبنتز (١٦٤٢-١٧٢٧)

إدخال أعداد وكلمات بما يسمى عملية الرقمنة (Digitaliation). ويسمى الرقم ٠ أو ١ بِت (Bit) اختصارًا للتعبير (Binary Digit) ويطلق على مجموعة من البِتَات وحدة تُسمى بايت (Byte) وتقاس سعة ذاكرة الكمبيوتر بالبايت أو بوحدات أكبر مثل الكيلوبايت والميجابايت. البايت يتكون من ثمانية بتات (فى النظام الموسع)، الكيلو بايت (KB) = ١٠٢٤ بايت، الميجابيات (MB) = ألف كيلو بايت.