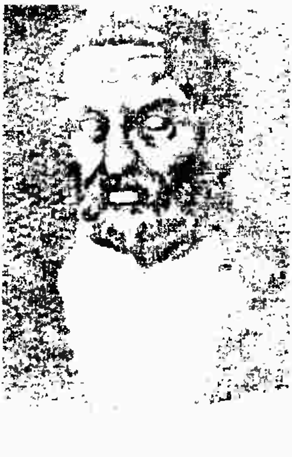
(ثانيًا) : الهندسة... ومنطق «بما أن... إذن»

(٢-٠) يقول هيرودوت المؤرخ الإغريقى أن الهندسة نشأت فى مصر. وكما هو الحال فى كل المجالات الرياضياتية وأيًا كانت نشأتها فإن الهندسة بدأت مراحلها الأولى حدسية فى طبيعتها. الهندسة فى معناها تعنى قياس الأرض (Surveying). وقد توصل الإنسان للحقائق المتعلقة بالقياس دون محاولة لإثبات تلك الحقائق بأى عملية فكرية من التعليل الاستنباطى (Deductive) أو باستخدام المنطق. لقد بحثت الهندسة البدائية فقط عن صيغ وأشكال مقبولة مثل تضفير أشكال متماثلة فى حصيرة. بعد ذلك جاءت قياسات لمستطيلات ومثلثات وكما ظهرت فى كتاب أحمس حيث تضمن مثلاً ما معناه أن مساحة المثلث متساوى الساقين يساوى $\frac{1}{2}$ القاعدة فى الارتفاع، وأن مساحة الدائرة التى قطرها ق هو م = $(ن - \frac{1}{9} ن)^2$ ومنها يمكن استنتاج أن العدد (ط) يساوى تقريبًا ٣,١٦٠٥... مثل تلك القواعد

استخلصها المصريون القدماء على أسس تجريبية كما فى حالة الثلاثية (٣، ٤، ٥) التى ينقسم إليها حبل (مقسم إلى ٣ عقد، ٤ عقد، ٥ عقد) لتكوين زاوية قائمة. نفس الظروف تواجدت عند البابليين والهنود والرومان فى إعطاء قياسات وقواعد وضعية لأغراض مدنية وحربية استنادًا إلى التجريب وإلى المحاولة والخطأ... وهكذا بالنسبة لحضارات قديمة أخرى.

(٢-١) طاليس وفيثاغورس:

بداية الهندسة النظرية والمتمحورة حول فكرة إثبات صحة قضية ما يرجعها المؤرخون إلى طاليس (حوالى ٦٠٠ ق.م) الذى كان فى الأصل يعيش على تجارة



طاليس

الزيتون فى شبابه. إلا أنه اهتم بدراسة الرياضيات. ينسب إلى طاليس أنه أثبت نظريا خمس مبرهنات/ نظريات (Theorems)، المهم فيها ليست النظريات نفسها بل البرهنة على صحتها نظريًا وهى:

(١) قطر الدائرة يقسمها إلى نصفين.

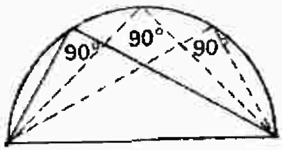
(٢) الزاوية المحيطية المرسومة على قطر دائرة تكون قائمة (ويقال أن طاليس ذبح عجلاً ابتهاجًا بهذا الاكتشاف).

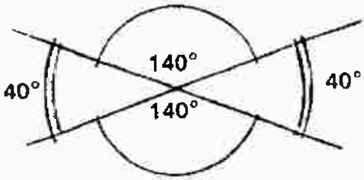
(٣) المستقيمان المتقاطعان يكونان أربع زوايا بحيث أن كل زاويتين متقابلتين بالرأس تتساويان.

(٤) فى المثلث المتساوى الساقين تتساوى الزاويتان المقابلتان للساقين (زاويتا القاعدة).

(٥) يتطابق المثلثان إذا ساوى فى أحدهما زاويتان وضلع نظائر لها فى المثلث الآخر.

وينسب لطاليس أن له الفضل فى أنه قدم هندسة





المصـــــــريين للإغريق بحكم سفـره المتواصل بـرًا وبحـرًا للتجارة. ومن الناحية الأخرى فـإنه كـــان لفيثاغـــورس الفضل فى تحقيق أحلام طاليس فى توجهه نحو التنظير والتجريد الهندسى.

ولعل أشهر أعمال فيثاغورس الهندسية هى النظرية المعروفة باسمه والتى أثبت فيها نظريًا أن «مجموع مساحتى المربعين المنشأين على ضلعى القائمة فى المثلث القائم الزاوية يساوى مساحة المربع المنشأ على الوتر». من الطريف أن بعض المصادر العربية الوسيطة تسمى الشكل الذى يوضح النظرية

باسم «كرسى العروسة». ويقول بروكلوس أن فيثاغورس هو أول من طبع الهندسة بطابعها المنطقى وأنه أول من رتب النظريات الهندسية الأساسية ترتيبًا منطقيًا. ويرى البعض أن فيثاغورس استلهم نظريته من المصريين الذين كانوا يستخدمون حبلا مقسما إلى ثلاث عقد وأربع عقد وخمس عقد لعمل زاوية قائمة واستخدام ذلك فى إقامة منشآت عمودية على سطح الأرض. وقد أعطيت قوانين عديدة لاستخراج ثلاثيات فيثاغورس. مثل: لأى عدد طبيعى م يكون

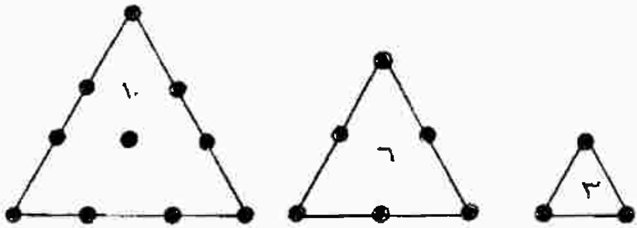
$(م^{٢} + ١)^{٢} = (م^{٢} - ١)^{٢} + (٢م)^{٢}$

ولأى عددين صحيحين ن، ك يكون

$(ن^{٢} + ك^{٢})^{٢} = (ن^{٢} - ك^{٢})^{٢} + (٢ ن ك)^{٢}$

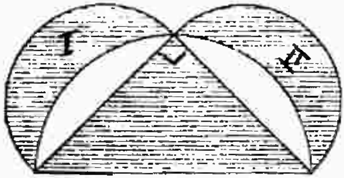
فيثاغورس

وقد ربط فيثاغوس بين الأعداد والأشكال الهندسية فالنقطتان تمثلان مستقيما والثلاث نقاط تمثل مثلثا، كما قدم الأعداد المثلثة والأعداد المربعة والمخمسة... وهكذا.



الحسن بن الهيثم والقطاعات الهلالية :

كانت نظرية فيثاغورس حافزا لدراسة العلاقة بين مساحات أشكال على أضلاع المثلث القائم الزاوية. لعل من بينها ما اكتشفه الحسن بن الهيثم (عام ١٠٠٠م) من أن «مجموع مساحتى القطاعين الهلاليين المرسومين على ضلعى مثلث قائم الزاوية تساوى مساحة المثلث القائم الزاوية» وهى النظرية التى استفاد منها ليوناردى فينشى فى الكثير من لوحاته المتضمنة أشكال هلالية.



مساحة المثلث = مساحة I مساحة II

(٢-٢) إقليدس وكتاب الأصول : أول بناء علمى منطقى :

فى حوالى (٤٥٠ ق.م) بدأت تظهر عند الإغريق سلسلة من النظريات المبنية على بضع مسلمات وتعاريف معروضة عرضا منطقيا منظما. أشهر تلك المحاولات تمثلت فيما قدمه إقليدس (Euclid) حوالى عام ٣٠٠ ق.م فى كتاب الأصول.

نال إقليدس بعمله هذا شهرة عظيمة بالدرجة التى قيل عنه أنه معصوم من الخطأ، وإن كانت تلك الشهرة كانت من أسباب تأخر علم الهندسة حيث نجد رياضيا شاعرًا وفيلسوفا هو عمر الخيام (١٠٤٨-١١٣١م) ومن قبله نصير الدين الطوسى يقف على عتبة اكتشاف الهندسة اللاإقليدية ولكنه

رفض قبول أية مسلمات تخالف مسلمة إقليدس الخاصة بالتوازى لاعتقاده بعدم إمكانية أن يخطئ إقليدس (رغم أن قبول مسلمة تخالف مسلمة إقليدس لا يعنى وجود خطأً).

وضع إقليدس أول نظام منطقى فى تاريخ العلم حيث نظم المفاهيم والخواص الهندسية التى استلهمها من عالم الحقيقة المتمثل فى الفضاء/ الفراغ الفيزيقى ومن الخواص التى اكتشفها وصاغها رياضيون وممارسون عمليون من قبله – نظمها فى تتابع منطقى ذى نسق متآلف مستندًا إلى مجموعة من المبادئ العامة والبديهيات الواضحة المقبولة بالحواس والتى تشرح نفسها بنفسها. وقد بناها خاصة تلو الأخرى بالبرهان والمنطق وضمنها فى كتابه الذى نطلق عليه بالعربية «الأصول» (Elements) سائرًا على مذهب أفلاطون الذى قال بأن «المعرفة الرياضية يمكن أن تكتسب عن طريق التعليل والبرهان فقط... لذلك ينبغى ألا نستنتج خواصًا هندسية من الشكل/ الرسم بل من برهان صحيح». بنفس المعنى قال أرسطو «عند بناء نظام رياضى ينبغى أن نبدأ من مبادئ عامة

يستند إليها كل أنواع التفكير الاستنباطى (Deductive) على أن نبدأ من مبادئ خاصة نسلم فيها بالمفاهيم الأساسية «التى لها معان ثم ينبغى أن نعرِّف المفاهيم الأخرى بإرجاعها إلى مفاهيم كبرى أعم...». كتاب إقليدس مكون من ١٣ جزءًا: الستة الأولى تناولت الهندسة المستوية، الثلاثة التالية عالجت الأعداد، الجزء العاشر ناقش قضية الأعداد «الصماء» والنسب «غير النسبية»، وعالجت الثلاثة الأخيرة الهندسة المجسمة الفراغية (فى ٣ أبعاد).

(٢-٣) الهندسة الإقليدية:

وضع إقليدس منظومته الهندسية على أساس خمس مسلمات (تقبل بدون برهان)، وهى:

(١) يمكن رسم خط مستقيم من أى نقطة إلى أخرى.

(٢) يمكن مد خط مستقيم محدود باستمرار.

(٣) يمكن رسم دائرة بمعلومية مركز ومسافة معلومة.

(٤) الزوايــا القــائمة متطابقة (متساوية فى القياس).

إقليدس

(٥) إذا قطع مستقيم مستقيمين بحيث أن مجمـــــوع الزاويتـــــين الداخلتــين وفى جهة واحــدة سن القاطع تكون أقل من قائمتين فإن هذين المستقيمين يلتقيان إذا مدا على استقامتهما من الجهة التى يكون فيها مجموع الزاويتين الداخليتين أقل من قائمتين.

المسلمة الأخيرة هى المشهورة باسم مسلمة التوازى والتى استبدلت بعد ذلك بمسلمة مكافئة هى مسلمة «بلاثعير» والتى تنص على أنه:

«من نقطة خارج مستقيم معلوم لا يمكن رسم أكثر من مستقيم واحد يوازى المستقيم المعلوم».

وقد حاول كثيرون البرهنة على المسلمة الخامسة استنادًا إلى المسلمات الأربعة السابقة وعلى ٢٨ نظرية تم برهنتها استنادًا إلى تلك المسلمات الأربعة، ولكنهم فشلوا... مما أثبت سلامة وضعها كمسلمة.

(٢-٤) الهندسة اللاإقليدية (Non Euclidean):

فى الوقت الذى كانت لاتزال تجرى فيه محاولات للبرهنة على مسلمة إقليدس فى التوازى والتمسك بأن هندسة إقليدس كانت مثالاً للحقيقة اللزومية (على حد تعبير الفيلسوف كانت)، ظهرت محاولات شجاعة على يدى كارلوس جاوس (١٧٧٧-١٨٥٥م) فى ألمانيا ولو باتشفسكى (١٧٩٣-١٨٥٦) فى روسيا وبولياى (١٨٠٢-١٨٦٠) فى المجر، تمثلت فى قبول مسلمات أخرى تناقض مسلمة إقليدس، وقد كان من يقول بغير ما قاله إقليدس يتعرض

لنوع من الإرهاب الفكرى الذى كان من الممكن أن يطيح بسمعته. وقد ظهرت مسلمتان بديلتان تكونت منهما الهندستان اللاإقليديتان الزائدية والناقصية. ولا يعنى ذلك خطأ مسلمة إقليدس بل يعنى أنها مستقلة لا يمكن اشتقاقها بالبرهان. وكان قبل ذلك ظهرت كتابات عن هندسات أخرى لا تتبع مسلمة إقليدس مثل هندسة «النجوم الحائرة» (Astral Geometry) لأستاذ قانون يدعى شيفكارت كان يعمل فى جامعة ماريوج الألمانية (عام ١٨١٨).

(أ) **الهندسة الزائدية** (Hyperbolic)

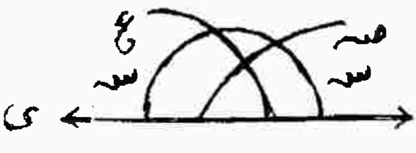
وهى التى وضعها لوباتشفسكى وبولياى استنادًا إلى مسلمة بديلة تقول بأنه: «من نقطة معلومة خارج مستقيم معلوم يمكن رسم أكثر من مستقيم واحد يوازى المستقيم المعلوم».

وبهذه المسلمة والمسلمات الأربعة السابقة لمسلمة التوازى (عند إقليدس) أمكن تكوين هندسة متآلفة (متسقة) يكون فيها «مجموع زوايا المثلث أقل من قائمتين»، وحيث الفرق يسمى قصور المثلث ويتناسب مع مساحة المثلث.

(ب) الهندسة الناقصية (Elliptic)

ريمان

وهى الهندسة التى وضعها ريمان (١٨٢٦-١٨٦٦) فى رسالته للدكتوراة والتى نشرت بعد وفاته.. وتستند الهندسة الناقصية إلى مسلمة بديلة تقول بأن: «من نقطة معلومة خارج مستقيم معلوم لا يوجد أى مستقيم يمر بالنقطة المعلومة ويوازى المستقيم المعلوم» المعلوم. وبالتالى فإن أى مستقيمين مستويين يتلاقيـــان ويشتركان فى أكثر من نقطة. وفى هذه الهنـــدسة المستنـدة إلى مسلمة ريمان والأربع مسلمات الســـابقة



لمسلمـــة التوازى، يكـــون مجمـــوع زوايـــا المثلث أكبر من قائمتين، وحيث مساحة المثلث تتناسب مع زيادة مجموع زوايا المثلث القائمتين.

فمثلاً يمكن أن تكون س، ص، ع ثلاثة مستقيمات عمودية على المستقيم ى.

ولقد تسبب ظهور هندسة لا إقليدية فى انتعاش مناقشات فلسفية فى رفض الزمان المطلق والمكان المطلق، وفى تقديم تفسيرات وتمثيلات هندسية تتواءم مع نسبية أينشتاين وفيزياء الكم.

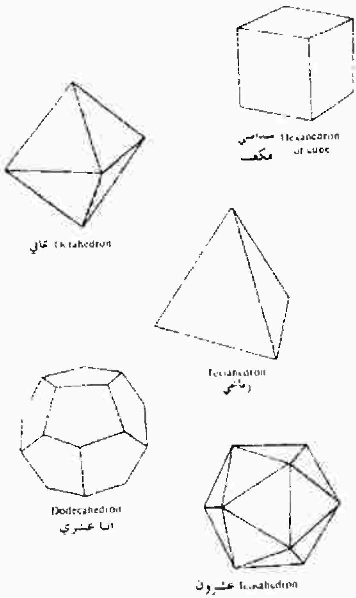
فمثلاً: إذا قطع شخص مسافة قدرها (٣٠٠٠) ميلا غربا، (٤٠٠٠) ميلا جنوبا على سطح الأرض فإن أقصر مسافة من نقطة الابتداء إلى نقطة الانتهاء لا تكون (٥٠٠٠) ميلاً بل تكون حوالى (٤٧٤٠) ميلاً تقريبًا. وهذا المسار هو طريق الدائرة الكبرى الذى تستخدمه الخطوط الجوية لشركات الطيران حتى يكون استهلاك الوقود وزمن الطيران أقل ما يمكن.

(٢-٥) المجسمات (Solids) والمجسمات الأفلاطونية:

لم يهتم الإغريق كثيرًا بتنمية الهندسة المجسمة (الفراغية) كما فعلوا بالهندسة المستوية، ولذا لم تكن مسميات وتعاريف المجسمات مقننة. فمجسم سطوح متوازيات الأضلاع المتوازية (Parallel-Piped) يعنى فقط شكل كثير سطوح كل من أوجهه متوازى أضلاع، وكذلك الحال مع مجسم متوازى المستطيلات أو شبه المكعب. كلمة الهرم (Pyramid) أخذها الإغريق عن المصريين وقد كانت تعنى فى اللغة الإغريقية جسم على شكل النار (Fire-shaped).

وقد استفاد الإغريق مما جاء فى بردية أحمس فى التعامل بقوانين بعض المجسمات بطرق تجريبية. وقد اهتم الإغريق بما سمى بالمجسمات الأفلاطونية أو الكونية، وهى خمسة مجسمات محدبة تشكل حروفها مضلعات مستوية منتظمة متطابقة. وهذه المجسمات هى: رباعى الأوجه (Tetrahedron) والمكعب: وله ستة أوجه كل منها على شكل مربع، وثمانى الأوجه (Octahedron)، والإثنا عشرى الأوجه (Dodecahedron)، والعشرونى الأوجه (Icosahedron).

وفى نهاية القرن السادس عشر ابتكر كبلر (Kepler) نموذجًا لتنظيم الكواكب تضمن كرات وحيدة المركز مرسومة داخل وخارج مجسمات أفلاطونية. المجسمات متعددة الأوجه تفيد حاليًا فى دراسة البللورات فى الكيمياء وفى الإلكترونيات.



الخمس مجسمات الأفلاطونية

(٢-٦) الثلاث مسائل الشهيرة فى الهندسة :

واجه الإغريق ثلاث إشكاليات هندسية تمثلت فى إنشاءات هندسية لم يستطيعوا حلها باستخدام الحافة المستقيمة والفرجار فقط وهى:

(أ) تثليث الزاوية أى تقسيمها إلى ثلاثة أجزاء متساوية.

(ب) تربيع الدائرة أى إيجاد مربع مساحته تساوى مساحة دائرة معينة وهو ما يعنى إنشاء قطعة مستقيمة طولها يساوى محيط الدائرة.

(جـ) تضعيف المكعب أى إيجاد ضلع مكعب يكون فيه حجم المكعب ضعف حجم مكعب معين.

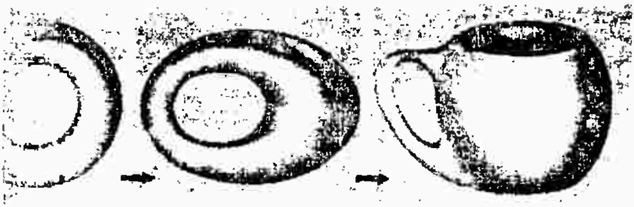
وقد شغلت هذه الإشكاليات الرياضيين حتى القرن التاسع عشر والتى أمكن حلها بشروط إضافية لقيود الحافة المستقيمة والفرجار، مع الاستعانة بطرق جبرية مرتبطة بنظرية المعادلات التكعيبية وحيث أثبت ليندرمان عام (١٨٨٢) أن «ط» عدد متسامى.

(٢-٧) الهندسة الوصفية (Descriptive Geometry):

بدأت الهندسة الوصفية كعلم مستقل قبل حوالى ثلاثين عامًا من نشرها على يدى مبتكرها مونج (Monge) (١٧٤٦-١٨١٨). وهى فى جوهرها هندسة تمثيل أشكال ثلاثية البعد عن طريق إسقاطات مناسبة لها على مستوى ثنائى البعد. ويرجع المؤرخون ملامحها الرئيسة لآخرين مثل ديسارجس (١٦٣٩) ولامبرت... وقد أضاف إليها وطورها هاشيت (Hachette) فى النصف الأول من القرن التاسع عشر.

فكرة إسقاط مستقيم على مستوٍ فكرة قديمة فى حد ذاتها ظهرت فى أعمال إغريقية ومتضمنة فى معالجة تقاطع أنواع من السطوح. فى عام (١٨٢٢) نشر بونسلت (Poncelet)، وعلى الرغم من أنه كان سجينا فى روسيا، دراسة لخواص إسقاطية مقدما ما سمى بالنسبة الفوق التوافقية (Anaharmonic) والتى بلورها بعد ذلك فى الفترة (١٨٤٧-١٨٦٠). بعد ذلك جاء مبدأ الثنائية (Duality) فى الهندسة الإسقاطية، والذى

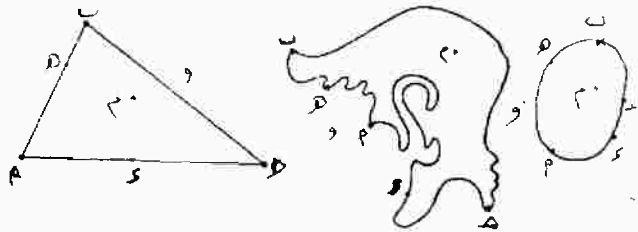
يقول بوجود تماثل بين النقط والخطوط. فمثلاً «أى نقطتين مختلفتين يحددان خطا مستقيما واحدا يمر بهما»، وبالمثل «أى مستقيمين مختلفين يحددان نقطة واحدة يمر بهما المستقيمان».



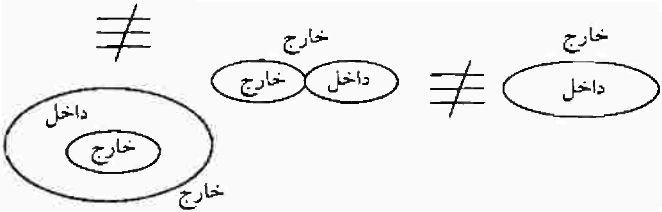
(٢-٨) التوبولوجى بين قرص الحلقة وفنجان القهوة:

تهتم هندسة التوبولوجية بأشكال السطوح عندما يجرى تشويهها عن طريق الشد سحبا أو التقليص انكماشًا أو عن طريق التعويج باللى أو التحريف حيث يمكن تحويل الوجه الداخلى لسطح ما إلى السطح الخارجى والعكس بالعكس. ويمكن القول أن طـالب التوبولوجى هـو الشخص الذى لا يميز بين قرص الحلقة وفنجان القهوة، فعلى الرغم من أنه

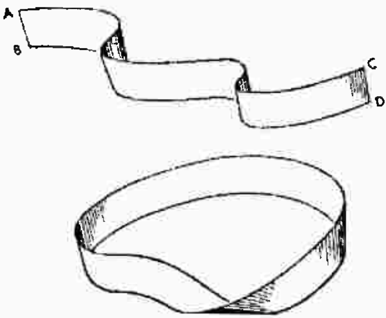
لا يمكن تحويل أحدهما للآخر، إلا أن هندسة التوبولوجى تقول أنهما متكافئان. ويعرف التوبولوجى رياضيًا على أنه دراسة اللامتغيرات فى الأشكال الهندسية تحت مجموعة من التحويلات. فى التوبولوجى (أو هندسة تحليل الموقع) (لا يسأل الشخص عن طول أو مساحة شكل معين بل يكون اهتمامه يكون عن «أين»، بين ماذا وماذا؟ لا يهم هنا إذا كان الخط منحنيا أو مستقيما... إنه يهتم بهندسة «لا كمية» و«لا قياسية» ولكنه يهتم بعلاقة وموقع أجزاء الشكل بالنسبة لبعضها بغض النظر عن الهيئةأو الحجم.



الأشكال الثلاثة المبنية متكافئة توبولوجيا طالما أن أى نقطة (د) مثلا مازالت تقع بين أ، ج، وأن النقطة (م) تظل داخل الشكل المغلق وتظل النقطة (و) خارجه.



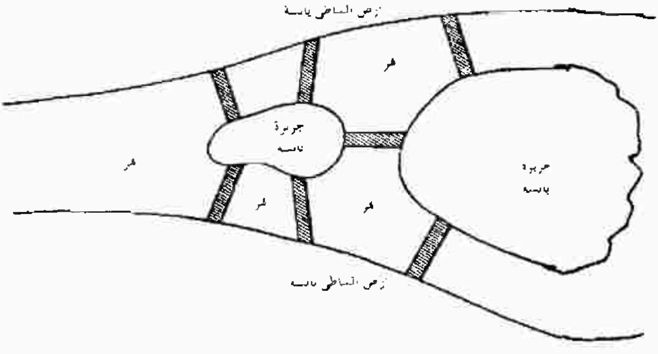
ثلاثة أشكال غير متكافئة توبولوجيا



شرائط موبياس (وحيدة السطح)

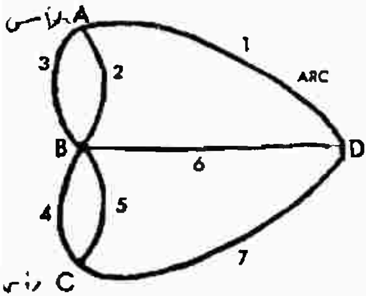
نشأ التوبولوجى عن محاولة حل مشكلة أثارها أهل مدينة كوينسبرج (Konisberg) البروسية، حيث كان هناك سبعة كبارى تربط ضفتى النهر الذى يخترق المدينة، وكان

التساؤل «هل يمكن لشخص أن يمشى فوق كل الجسور السبع فى مسار واحد دون أن يمشى فوق أى من الجسور أكثر من مرة واحدة؟».



عندما سمع أويلر (Euler) وهو فى سويسرا عن هذه المشكلة قام بحلها رياضيا أمام الأكاديمية فى بتسبرج عام ١٧٥٣م، حيث برهن على أن الرحلة عبر الجسور السبع بتلك الشروط كانت مستحيلة. لتبسيط المشكلة وضع أويلر مخططا

نمذج به المشكلة، حيث مثل الأرض اليابسة بنقاط، والكبارى بخطوط تربط بين هذه النقاط وأصبح السؤال كالآتى:



«هل يمكن رسم الشكل النموذج بجرة قلم متصلة دون رفع سن القلم عن الورقة؟».

وأصبحت المشكلة مشكلة اجتياز شكل بيانى (Graph). الشكل البيانى - فى هذا الصدد - هو شكل يتكون من عدد محدود من النقاط تسمى الرؤوس وعدد من الأقواس. الرؤوس هى النقاط التى تنتهى عندها الأقواس، وأى قوسين لا يكون بينهما نقاط مشتركة إلا إذا كان الرأس مشتركا. الرأس يصنف فرديًا أو زوجيًا بحسب ما إذا كان عدد الأقواس التى تكونه فردية أو زوجية.

ويعتبر الشكل البيانى «مجتازا» إذا كان المرور فى كل الأقواس يتم مرة واحدة وواحدة فقط.

اكتشف أويلر أن الشكل البيانى يكون «مجتازا» مبتدئا ومنتهيا عند نفس النقطة إذا كان الشكل يحتوى على رؤوس زوجية فقط. كذلك، اكتشف أويلر أنه إذا كان الشكل البيانى يحتوى على الأكثر رأسين فرديين فإنه قد يكون «مجتازا»، ولكن الاجتياز فى هذه الحالة لا يعود لنفس نقطة البداية.

وبصفة عامة:

إذا احتوى الشكل البيانى على (٢ن) من الرؤوس الفردية حيث ن عدد صحيح فإنه يتطلب لاجتيازه (ن) من الرحلات المختلفة. وحيث أن نموذج كوينسبرج (أصل المشكلة) يحتوى على (٤) رؤوس كلها فردية (انظر فى الشكل النقاط أ، ب، جـ، د)، لذلك فإن اجتياز النهر خلال السبعة كبارى يتطلب رحلتين وليس رحلة واحدة.

توصل أويلر أيضًا إلى وجود علاقة بين عدد الأوجه وعدد الرؤوس وعدد الأحرف لأى مجسم وهى كالآتى:

عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الحروف + ٢

فى الشكل المكعب مثلاً وتأكيدًا لنظرية أويلر:

عدد الأوجه = ٦، عدد الرؤوس = ٨

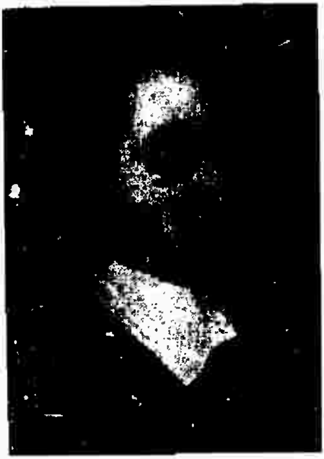
عد الأحرف = ١٢

٦ + ٨ = ١٢ + ٢

أويلر (١٧٠٧-١٧٨٣)

وقد تطورت دراسة التوبولوجى لتعالج قضايا مثل عدد الألوان اللازمة والكافية لتلوين خريطة مهما كان عدد الدول التى تشملها بحيث لا يتم تلوين أى قطرين متجاورين بنفس اللون.. كما يشمل دراسات فى التحليل الرياضى وفى فراغات لها (ن) من الأبعاد وفى نظرية المجموعات (sets).

باسكال : شباب بلا ربيع :



باسكال (١٦٣١-١٦٦٢)

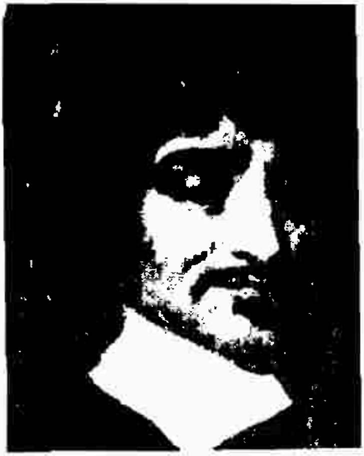
«للقلـــب منطقـــه وأسبابه التى لا يعرفها العقل... المعتقدات من شأن الروح وأما العلم فهو من شأن العقل»... هكذا قال بليز باسكال (Pascal) الرياضى الفرنسى الذى عاش حياة متأرجحة بين فكر علمى قوى وبين تدين وجدانى متوهج. نشر باسكال أول بحث رياضى له عن القطوع المخروطية أحدث دويا فى الدوائر الرياضية رغم صغر سنه. كما اهتم بالهندسة الإسقاطية التى كان المهندس «ديسارجس» ابتكرها حديثا وعمل منها موضوعا رياضيا جادًا وليس مجرد أسلوب فى الرسم المنظور يهتم بها الفنانون

فقط.. اكتشف باسكال أن الهندسة الإقليدية جزء من الهندسة الإسقاطية... تألق رياضيا حتى سن الثالثة والعشرين... حتى انتمى إلى مذهب دينى متشدد (اليانسينية) ثم تركه فترة فعاد إلى الرياضيات منشئًا «مثلث باسكال» الذى يساعد على حل مشكلات فى الاحتمال حيث يمثل أحد التوزيعات الاحتمالية... ولكنه بعد ذلك اعتبر أن الرياضيات والفيزياء نزوة شباب وهجرها... كان يعذب نفسه كلما مر بخاطره شعور بسعادة دنيوية، ولكنه ابتكر منحنى السيكلويد أثناء مرضه وعندما أحس بأن آلامه خفت اعتبر أن ذلك علامة من الله وبأنه لا يعارض هذا العمل.. ولكنه مرض بشدة وطلب أن ينقل إلى مستشفى الأمراض غير القابلة للشفاء لكى يموت مع الفقراء... وانتهى فى سن الحادية والثلاثين شبابا بلا ربيع وعبقرية جمدها الصقيع... صقيع تدين سلبى يباعد بين العقل والقلب...؟!!

(٢-٩) زفاف النقطة إلى العدد والهندسة الإحداثية:

مر ابتكار الهندسة الإحداثية/ التحليلية بثلاث مراحل:

(١) ابتكار نظام محاور متعامـــــــدة، (٢) الاعتراف بوجود تناظر أحادى بين الأعداد الحقيقية ونقاط الخط المستقيم ومن ثم بين الجـــبر والهندسة، (٣) التمثيل البيانى لدوال بصـــورة:

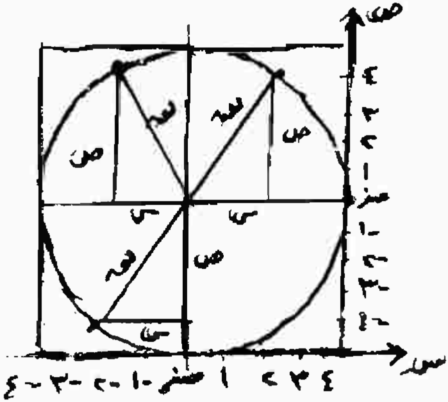


ديكارت (١٥٩٦-١٦٥٠)

ص = د (س).

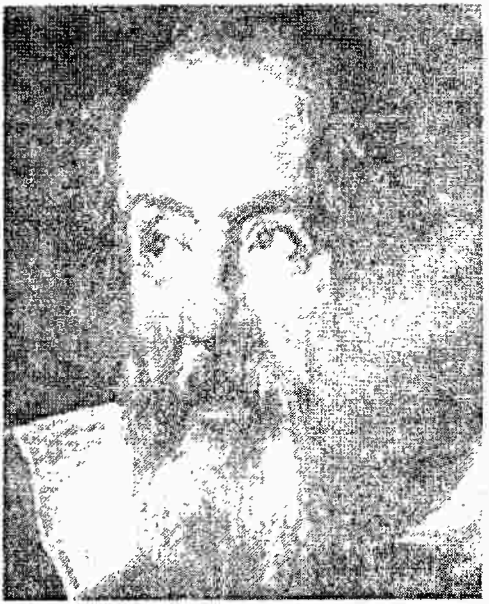
إلا أن هناك إجماعا على أن الهندسة الإحداثية أرسيت قواعدها على يد الرياضى الفرنسى رينيه ديكارت (Descartes) (١٥٩٦-١٦٥٠) الذى تخرج فى جامعة بواتييه. فقد استطاع أن يعقد زواجا رياضيا بين النقطة والعدد عن طريق تمثيل الأعداد بصريا بنقاط على خطوط مستقيمة ومستويات ثم فى أشكال ثلاثية الأبعاد. ومن ثم أمكن تمثيل المعادلات بأشكال هندسية والتعبير عن الأشكال بمعادلات،

ومهد بذلك للتقدم في التفاضل والتكامل ولتمثيل ظواهر في الفيزياء وعلوم أخرى بأشكال بيانية لدوال جبرية ولوغاريتمية ومثلثية. كان عصر ديكارت مليئًا بالأحداث حيث غاب شكسبير عن



معادلة الدائرة س٢ + ص٢ = نق٢
بالطريقة التي استخلصها ديكارت

عشاق مسرحه، وقال «هارفي» أن القلب ليس مصدر العواطف بل هو مضخة للدم. وكان الراهب الفلكي كوبرنكس يواجه تهمة الهرطقة بإعلانه أن الشمس هي مركز النظام الشمسي، كما كان جاليليو مشغولاً بمقرابه (تلسكوبه) ومحاكمته بسبب دعواه بدوران الأرض.



جاليليو

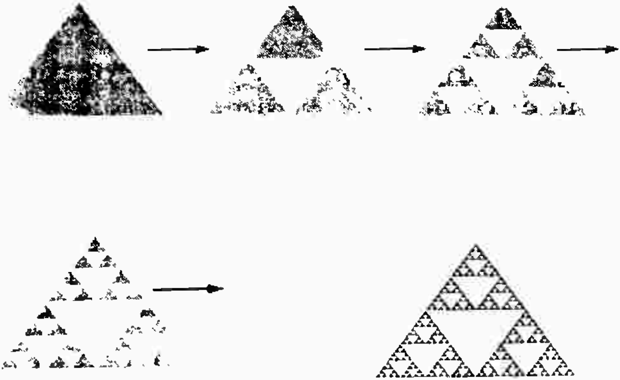
وسط كل هذا هجر ديكارت ذى الاثنين والعشرين عامًا ملذاته فى باريس وانقطع لدراسة الرياضيات ليقدم للعالم هندسته الإحداثية، وليقدم فلسفته الشهيرة «أنا أفكر... إذن أنا موجود» (Cogito Ergo Sum) ودعوته بأن تعالج كل أنواع المعرفة رياضيا ومن خلال المنطق بدءًا بمسلمات. تابع الهندسة الإحداثية رياضيون لاحقون، فمثلاً تبلورت الهندسة الإحداثية فى ثلاثة أبعاد على أيدى «برنولى» الذى حاول تمثيل سطوح فى ثلاثة أبعاد بيانيًا، وكذلك من رياضيين آخرين فى القرن الثامن عشر. كما قدم «مونج» العلاقة بين نظرية السطوح وتكاملات المعادلات التفاضلية. فى عام ١٨٣٥ قدم «بلوكر» (Plucker)معادلات لمنحنيات حتى الدرجة الرابعة، كما قدم معادلات بيَّن بواسطتها خواص أى منحنى من حيث الرتبة والصنف وعدد النقاط المزدوجة وعدد القرنات وعدد الممارسات المزدوجة وعدد (الانعطافات). فكرة الإحداثيات القطبية تنسب إلى «جريجورى» فونتانا (١٧٣٥-١٨٠٣).

لعله من الطريف أن إحدى الروايات تقول أن الذى أوحى لديكارت بالهندسة الإحداثية أنه حاول تتبع ذبابة – كانت تتحرك على سقف حجرته – بالنسبة لحائطين متجاورين حول أحد أركان الغرفة.

(٢-١٠) الهندسة الكسورية... وآن لنا أن ننصت للطبيعة:

الأشكال الهندسية الكسورية (Fractals) مثل مجموعة كانتور ومثلث سيربنسكى ومنحنى كوخ سبق ظهورها فى الأدبيات الرياضياتية فى قرون ماضية (ليست بعيدة) وكان ينظر إليها بسبب تعقدها على أنها أشكال مريضة ولا تهم إلا المهتمين بأبحاث الرياضيات. إلا أن ذلك تغير فى حوالى الثلاثين عامًا الماضية. فقد لاحظ الرياضى «ماندلبروت» (Benolt Mandelbrot) أن الأشكال الكسورية ليست مجرد أشكال تثير حب الاستطلاع الرياضياتى ولكنها أشكال تمثل «هندسة الطبيعة»، حيث كثير من الأشكال فى عالم الطبيعة هى أشكال كسورية فى مظهرها كما فى أشكال السحب

وسواحل الشواطئ ونبات الخردل.. وغيرها من الأشكال غير المنتظمة أو ذاتية التماثل، وأنه يمكن فهمها باستخدام الهندسة الكسورية أفضل من استخدام الهندسة الإقليدية.. ولا شك أن الخطوط المستقيمة والمثلثات والدوائر الإقليدية هامة لكثير من الأنشطة المفيدة للإنسان، إلا أن الطبيعة (على حد تعبير مؤلفى كتاب Fractals) تميل إلى بناء مكوناتها بطرق مختلفة بهندسة أكثر تعقيدًا وأكثر ثراء: وقد كان لتقدم تكنولوجيا المعلومات والحوسبة والتقنيات الديناميكية الفضل فى توضيح الأشكال الكسورية بصريا وليس فقط ذهنيا وأن تبرز جمالها واتساقها الذاتى. جدير بالإشارة أن بعض الأشكال الكسورية لها أبعاد كسرية، كما فى حالة مثلث سيبرنسكى حيث البعد ليس عددًا صحيحًا كما فى الأشكال الإقليدية بل كسريا ويساوى ١,٥٨٥ حيث أنه لا هو أحادى البعد مثل الخلوط ولا هو ثنائى البعد مثل السطوح.

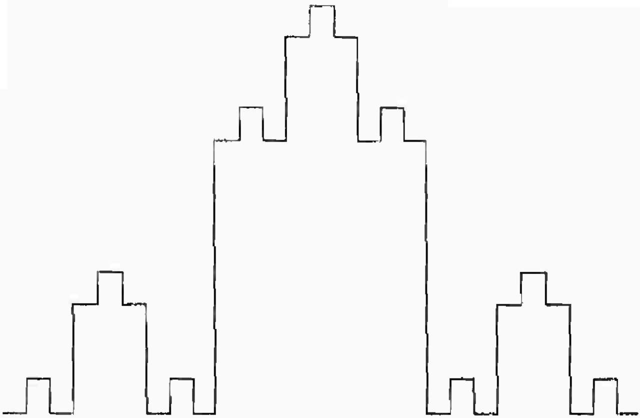


تكوين مثلث سيرنسكى (الكـــورى)

$$\text{البعد (Dimension)} = \frac{\text{لو ٣}}{\text{لو ٢}} = ١,٥٨٥$$

بللورة ثلج

الشريط الساحلي لأحد الشواطئ



زخرفة معمارية (شكل كسورى)