

أساسيات الاحتمالات

FUNDAMENTALS OF PROBABILITIES

BASIC CONCEPTS

مفاهيم أساسية

Definition of Probability

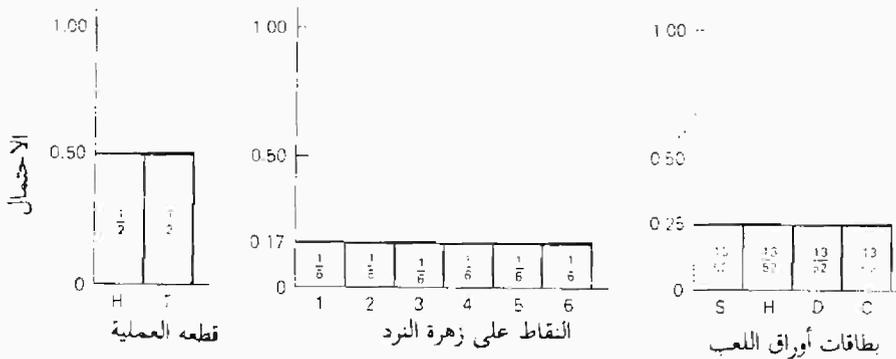
تعريف الاحتمال

للاصطلاح احتمال probability العديد من المرادفات، مثل ترجيح likelihood، وفرصة chance، وميل tendency، واتجاه trend. وبالنسبة إلى رجل الشارع، الاحتمال هو اصطلاح معروف جيدا بأنه يشير إلى فرصة حدوث شيء معين. «ربما ألعب الجولف غدا»، أو «ربما أحصل على معدل A في هذا المقرر» هي أمثلة تقليدية. عندما يبدأ المعلق في نشرة الأخبار قائلا: «احتمال هطول المطر غدا هو 25%، يكون التعريف كليا». من الممكن تعريف الاحتمال تعريفا رياضيا بحثا، إلا أننا في هذا الكتاب نعرف الاحتمال من وجهة نظر عملية والتي تطبق على مراقبة الجودة.

إذا ما ألقيت قطعة نقدية من المعدن، فإن احتمال ظهور كل من وجهيها هو $1/2$. وزهرة النرد، المستخدمة في ألعاب التسلية، هي مكعب له ستة أسطح

ونقاط على كل سطح من أسطحه تتراوح من 1 إلى 6. وعند إلقاء زهرة النرد، فترجيح ظهور نقطة واحدة هو $1/6$ ، واحتمال ظهور نقطتين هو $1/6$ ،، واحتمال ظهور ست نقاط هو $1/6$. مثال آخر للاحتمال يوضح عن طريق سحب بطاقة من بطاقات أوراق اللعب. احتمال أن تكون البطاقة بستوني spade هو $13/52$ بطاقة. 52 بطاقة من هذا النوع في المجموعة المشتملة على 13، حيث يوجد 52 وبالنسبة للأشكال الثلاثة الأخرى : القلب، والمعين، والاسباتي، احتمال كل منها هو $13/52$ أيضا.

يبين شكل ٤ - ١ التوزيعات الاحتمالية للأمثلة السابقة. ويلاحظ أن مساحة كل توزيع = $(1/2 + 1/2 = 1.000)$ و $(1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1.000)$ و $(13/52 + 13/52 + 13/52 + 13/52 = 1.000)$. كما يذكر أيضا أن المساحة تحت منحني التوزيع الطبيعي، وهو توزيع احتمالات، تساوي 1.000 أيضا. لهذا، فإن مجموع الاحتمالات لأي موقف يساوي 1.000. ويعبر عن الاحتمال بكسر عشري مثل (١) احتمال ظهور أحد أوجه العملة المعدنية يكون 0.500 والذي يمثل بالرموز على النحو التالي : $[P(h) = 0.500]$ ، و (٢) احتمال ظهور ثلاث نقاط لزهرة النرد يكون 0.167، أي $[P(3) = 0.167]$ ، و (٣) احتمال البستوني يكون 0.250، أي $[P(s) = 0.25]$.



شكل ٤.١: التوزيعات الاحتمالية

تحدث الاحتمالات المعطاة في المثال السابق بافتراض حدوث محاولات كافية وبافتراض ترجيح متساو لحدوث الأحداث. وفي كلمات أخرى، يكون احتمال ظهور أحد أوجه العملة 0.500 بافتراض أن فرصة ظهور كل من الوجهين متساوية (متساوية الترجيح). وفي معظم قطع العملة المعدنية يتحقق شرط الترجيح المتساوي، إلا أن إضافة معدن بسيط زيادة على أحد الجانبين ينتج عنه عملة منحازة وقد لا يتحقق شرط الترجيح المتساوي. وبالمثل، الشخص منعدم الضمير يمكنه أن يعد زهر النرد بحيث أن 3 تظهر أكثر اعتيادا عن 1/6، أو يمكن أن يرص مجموعة ورق اللعب بحيث أن الأربعة أوراق المحتوية على 1 تظهر في المقدمة.

بالعودة إلى مثال زهر النرد ذو الأسطح الستة، يكون هناك ستة مخرجات ممكنة (1 و 2 و 3 و 4 و 5 و 6). والحدث event هو تجميع لمخرجات. لهذا، حدوث الحدث 2 أو 4 عند إلقاء النرد له مخرجان وإجمالي عدد المخرجات يكون 6. ومن الواضح أن الاحتمال يكون 2/6 أو 0.333.

من المناقشة السابقة، يمكن تقديم تعريف مبنى على تفسير التكرار. إذا كان يمكن للحدث A أن يحدث في عدد N من مرات المخرجات من إجمالي عدد N للمخرجات متساوية الترجيح الممكنة، فإن احتمال حدوث الحدث يكون :

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

حيث : $P(A)$ = احتمال حدوث الحدث A

N_A = عدد مرات ظهور الحدث A

N = عدد مرات المخرجات الكلية

ويمكن استخدام التعريف عندما يكون عدد مرات المخرجات معروفا أو عندما يمكن إيجاد عدد مرات المخرجات بالتجربة.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

يتم اختيار جزء عشوائيا من حاوى لعدد 50 جزءا معروف أنه به 10 وحدات عدم مطابقة. ويعاد الجزء إلى الحاوى ويحفظ سجل بعدد المحاولات وعدد وحدات عدم المطابقة. بعد 90 محاولة، تم تسجيل 16 حالة عدم مطابقة. ما الاحتمال طبقا للمخرجات المعروفة والمخرجات التجريبية؟

المخرجات المعروفة :

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{10}{50} = 0.200$$

مخرجات التجريبية :

$$P(A) = \frac{N_A}{N} = \frac{16}{90} = 0.178$$

الاحتمال المحسوب باستخدام مخرجات معروفة يكون احتمالا حقيقيا والاحتمال المحسوب باستخدام مخرجات تجريبية يكون مختلفا بسبب عامل الفرصة. إذا ما حدث، على سبيل المثال، 900 محاولة، فإن الاحتمال باستخدام المخرجات التجريبية يمكن أن يكون أقرب كثيرا للاحتمال الحقيقي حيث ان عامل الفرصة يمكن أن يقل.

في معظم الحالات، يمكن ألا يكون عدد عدم المطابقة فى الحاوى معروفا، لهذا، لايمكن تحديد الاحتمال بمخرجات معروفة. إذا ما اعتبرنا أن الاحتمال باستخدام المخرجات التجريبية يمثل عينة وأن المخرجات المعروفة تمثل المجتمع، فيكون هناك نفس العلاقة التى سبق مناقشتها فى الفصل الثانى بين العينة والمجتمع.

التعريف السابق يكون مفيداً للمواقف المحددة حيث N_A ، عدد المخرجات التي تحدث، و N ، إجمالي عدد المخرجات، تكون معروفة أو يجب أن توجد تجريبياً. وبالنسبة إلى موقف لانهائي، حيث تكون $N = \infty$ ، يقود التعريف دائماً إلى احتمال صفر. لهذا، في الموقف اللانهائي يكون احتمال حدوث أحد الأحداث متناسباً مع توزيع المجتمع. وتوجد مناقشة لذلك تحت مناقشة توزيعات الاحتمال المستمرة والوثابة.

Theorem of Probability

نظرية الاحتمالات

نظرية ١ : يعبر عن الاحتمال بعدد يقع بين 0 و 1.000، حيث القيمة 1.000 هي التأكيد أن الحدث سيحدث والقيمة 0 هي التأكيد بأن الحدث لن يحدث.

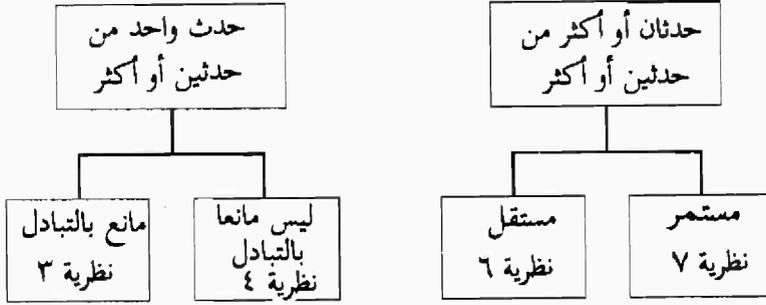
نظرية ٢ : إذا كانت $P(A)$ هي احتمال أن الحدث A سيحدث، فإن احتمال عدم حدوث الحدث A هو $P(\bar{A}) = 1.000 - P(A)$.

إذا كان احتمال إيجاد خطأ في العائد على ضريبة الدخل هو 0.04، فما احتمال إيجاد عائد صحيح؟

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1.000 - P(A) \\ &= 1.000 - 0.040 \\ &= 0.960 \end{aligned}$$

لهذا، فإن احتمال إيجاد عائد صحيح على ضريبة الدخل هو 0.960.

قبل الاستمرار مع نظرية أخرى، يكون مناسباً معرفة أين التطبيق. في شكل ٤-٢، نرى أنه إذا كان احتمال أحد الأحداث فقط يكون مطلوباً، فتستخدم نظرية ٣ ونظرية ٤، طبقاً لما إذا كان الحدث مانع بالتبادل mutually exclusive أم لا. فإذا كان مطلوباً احتمال حدثين أو أكثر، فتستخدم نظرية ٦ ونظرية ٧، طبقاً لما إذا كانت الأحداث مستقلة أم لا. ولاتظهر نظرية ٥ في الشكل، حيث أنها تختص بمفهوم مختلف.



شكل ٢.٤: متى تستخدم نظرية ٣ و ٤ و ٦ و ٧

نظرية ٣: إذا كان A و B حدثين مانعين بالتبادل، فإن احتمال حدوث الحدث A أو الحدث B هو مجموع الاحتمالين المناظرين لهما.

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$$

ويعنى المانع بالتبادل أن حدوث أحد الحدثين يجعل من حدوث الحدث الآخر مستحيلا. لهذا، إذا ما ألقى زهر النرد تحدث 3 (الحدث A)، ثم الحدث B ، وليكن 5، لا يمكن حدوثه.

وعندما تستخدم «أو»، تكون العملية الرياضية جمعا، أو كما سنرى في نظرية ٤، يمكن أن تكون طرحا. وتوضح نظرية ٣ بحدثين - ويمكن تطبيقها على أكثر من حدثين.

$$P(A \text{ or } B \text{ or } \dots \text{ or } F) = P(A) + P(B) + \dots + P(F)$$

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

إذا ما احتويت الأجزاء البالغ عددها 261 الموجودة في جدول ٤ - ١ في صندوق، ما احتمال اختيار جزء عشوائيا ينتجه المورد X أو ينتجه المورد Z ؟

$$\begin{aligned}
 P(X \text{ or } Z) &= P(X) + P(Z) \\
 &= \frac{53}{261} + \frac{77}{261} \\
 &= 0.498
 \end{aligned}$$

ما احتمال اختيار جزء عدم مطابقة من المورد X أو جزء مقبول من المورد Z ؟

$$\begin{aligned}
 P(\text{nc. } X \text{ or ac. } Z) &= P(\text{nc. } X) + P(\text{ac. } Z) \\
 &= \frac{3}{261} + \frac{75}{261} \\
 &= 0.299
 \end{aligned}$$

جدول ١.٤: نتائج الفحص طبقا للمورد

المورد	عدد المقبول	عدد عدم المطابقة	الإجمالي
X	50	3	53
Y	125	6	131
Z	75	2	77
الإجمالي	250	11	261

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

إذا كانت الأجزاء البالغ عددها 261 في جدول ٤ - ١ محتواه في صندوق، ما احتمال أن أحد الأجزاء الذي يتم اختياره عشوائيا يكون من المورد Z، أو يكون جزء عدم مطابقة من المورد X، أو يكون مقبولا من المورد Z ؟

$$\begin{aligned}
 P(Z \text{ or nc. } X \text{ or ac. } Y) &= P(Z) + P(\text{nc. } X) + P(\text{ac. } Y) \\
 &= \frac{77}{261} + \frac{3}{261} + \frac{125}{261} \\
 &= 0.785
 \end{aligned}$$

وتتكرر الإشارة إلى نظرية ٣ على أنها قانون جمع الاحتمالات additive law of probability.

نظرية ٤ : إذا لم يكن الحدثان A و B مانعين بالتبادل، فإن احتمال أى من الحدث A أو الحدث B أو كلاهما يعطى بالعلاقة :

$$P(A \text{ or } B \text{ or both}) = P(A) + P(B) - P(\text{both})$$

الأحداث المانعة بالتبادل يكون لها بعض المخرجات المشتركة.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

إذا ما وضعت الأجزاء البالغ عددها 261 الموجودة فى شكل ٤ - ١ فى صندوق، ما احتمال اختيار جزء عشوائيا ليكون من المورد X أو يكون وحدة عدم مطابقة؟

$$\begin{aligned} P(X \text{ or nc. or both}) &= P(X) + P(\text{nc.}) - P(X \text{ and nc.}) \\ &= \frac{53}{261} + \frac{11}{261} - \frac{3}{261} \\ &= 0.234 \end{aligned}$$

فى مثال المشكلة، هناك ثلاثة مخرجات لكل من الحدثين. ثلاث وحدات عدم المطابقة للمورد A يمكن أن تحسب كمخرجات لـ P(X) و P(nc.) مرتين، لهذا، تطرح فئة من الثلاثة. وتطبق هذه النظرية على أكثر من حدثين أيضا. ويستخدم رسم فن فى بعض الأحيان لوصف مفهوم عدم التبادل المانع كما هو مبين فى شكل ٤ - ٣. الدائرة اليسرى تحتوى على 53 وحدة من المورد X والدائرة اليمنى تحتوى على 11 وحدة غير مطابقة. والثلاث وحدات لعدم المطابقة من المورد X توجد عند تقاطع الدائرتين.

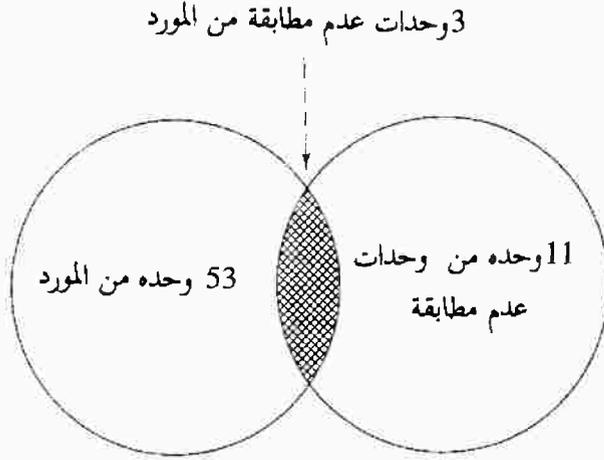
نظرية ٥ : مجموع الاحتمالات للأحداث لأحد المواقف تساوى 1.000.

$$P(A) + P(B) + \dots + P(N) = 1.000$$

لقد تم توضيح هذه النظرية في شكل ٤ - ١ بالنسبة إلى مواقف إلقاء العملة المعدنية، أو إلقاء زهر الترد، أو سحب بطاقة من مجموعة ورق اللعب حيث يكون مجموع الأحداث مساويا 1.000.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة



شكل ٤-٣: رسم فن لمثال المشكلة على نظرية ٤

يفحص فاحص صحي ثلاثة منتجات في مجموعة جزئية لتحديد ما إذا كانت مقبولة أم لا. ومن الخبرة السابقة كان معروفا أن احتمال عدم وجود وحدات عدم المطابقة في العينة البالغ حجمها 3 هو 0.990، واحتمال أن وحدة عدم مطابقة واحدة في العينة البالغ حجمها 3 هو 0.006، واحتمال وجود وحدتي عدم مطابقة في العينة البالغ حجمها 3 هو 0.003. ما احتمال وجود 3 وحدات عدم مطابقة في العينة البالغ حجمها 3؟

هناك 4 أحداث، وأربعة أحداث فقط لهذا الموقف : عدد 0 وحدة عدم مطابقة، وعدد 1 وحدة عدم مطابقة، وعدد 2 وحدة عدم مطابقة، وعدد 3 وحدة عدم مطابقة.

$$\begin{aligned}
 P(0) + P(1) + P(2) + P(3) &= 1.000 \\
 0.990 + 0.006 + 0.003 + P(3) &= 1.000 \\
 P(3) &= 0.001
 \end{aligned}$$

لهذا، احتمال وجود عدد 3 وحدات عدم مطابقة في عينة من 3 وحدات هو 0.001.

نظرية ٦ : إذا كان A و B حدثين مستقلين، فإن احتمال حدوث كل من A و B هو حاصل ضرب الاحتمال المناظر لكل منهما في بعضهما.

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$$

الحدث المستقل هو الذي لا يكون للحدث فيه أى تأثير على احتمال الحدث أو الأحداث الأخرى. ويشار إلى هذه النظرية بقانون ضرب الاحتمالات multiplication law of probabilities. وعند ذكر «و»، تكون العملية الرياضية ضرباً.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

إذا ما وضعت الأجزاء البالغ عددها 261 الموجودة في جدول ٤ - ١ محتواه في صندوق، ما احتمال أن يكون جزآن يسحبان عشوائياً أنهما من المورد X؟ افرض أن الجزء المسحوب أولاً يعاد إلى الصندوق قبل سحب الجزء الثانى. (تسمى مع الإحلال (with replacement).

$$\begin{aligned}
 P(X \text{ and } Y) &= P(X) \times P(Y) \\
 &= \left(\frac{53}{261}\right)\left(\frac{131}{261}\right) \\
 &= 0.102
 \end{aligned}$$

من الفكرة الأولى، تبدو نتيجة مثال المشكلة أنها منخفضة جدا، إلا أنه هناك خمس إمكانيات مختلفة: XX و YY و ZZ و XZ و YZ . وتطبق هذه النظرية على أكثر من حدثين أيضا.

نظرية V : إذا كان A و B حدثين معتمدين، فإن احتمال حدوث كل من A و B هو حاصل ضرب احتمال حدوث A في احتمال أنه إذا حدث A ، لا يحدث B .

$$P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B|A)$$

الرمز $P(B/A)$ يعرف على أنه احتمال حدوث A بشرط عدم حدوث A . الحدث المعتمد هو الحدث الذي يؤثر حدوثه على احتمال حدث آخر أو أحداث أخرى. وأحيانا ما يشار إلى هذه النظرية بأنها النظرية الشرطية conditional theorem، حيث أن احتمال الحدث الثاني يعتمد على نتيجة الحدث الأول. وتطبق النظرية على أكثر من حدثين.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

افرض أنه في المثال السابق لم يعاد الجزء الأول بعد سحبه من الصندوق قبل سحب الجزء الثاني. ما الاحتمال؟

$$\begin{aligned} P(X \text{ and } Y) &= P(X) \times P(Y|X) \\ &= \left(\frac{53}{261}\right) \left(\frac{131}{260}\right) \\ &= 0.102 \end{aligned}$$

حيث أن أول جزء لا يعاد إلى الصندوق، فيكون هناك إجمالي 260 جزءا فقط في الصندوق.

ما احتمال أن يكون الجزآن من المورد Z ؟

$$\begin{aligned} P(Z \text{ and } Z) &= P(Z) \times P(Z|Z) \\ &= \left(\frac{77}{261}\right)\left(\frac{76}{260}\right) \\ &= 0.086 \end{aligned}$$

حيث أن الجزء الأول كان من المورد Z، فيكون هناك 76 فقط من المورد Z في الإجمالي الجديد البالغ عدده 260.

لحل العديد من مشاكل الاحتمالات يكون من الضروري استخدام نظريات عدة كما هو مبين في المثال التالي، والذي يستخدم نظرية ٣، ونظرية ٦.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

إذا ما وضعت الأجزاء البالغ عددها 261 من جدول ٤ - ١ في صندوق، ما احتمال سحب جزئين عشوائيا (مع الإحلال) أن يكون واحد منهما مقبولا من المورد X والآخر مقبولا من المورد Y أو المورد Z ؟

$$\begin{aligned} P[\text{ac. } X \text{ and (ac. } Y \text{ or ac. } Z)] &= P(\text{ac. } X)[P(\text{ac. } Y) + P(\text{ac. } Z)] \\ &= \left(\frac{50}{261}\right)\left(\frac{125}{261} + \frac{75}{261}\right) \\ &= 0.147 \end{aligned}$$

COUNTING OF EVENTS

عد الأحداث

العديد من مشاكل الاحتمالات، مثل التي يكون للأحداث فيها توزيعات

احتمالية منتظمة، يمكن أن نحل باستخدام طرق العد. وهناك ثلاث طرق تستخدم في العادة في حسابات الاحتمالات.

١- الضرب البسيط simple multiplication. إذا كان يمكن أن يحدث الحدث A بأى من الطرق أو المخرجات a، وبعد حدوثه يمكن أن يحدث حدث آخر B بعدد b من الطرق أو المخرجات، فإن عدد الطرق التي يمكن أن يحدث بها الحدثان معا هو ba.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

تذكر شاهد لحادثة سيارة هرب سائقها أول ثلاثة أرقام من رقم اللوحة المعدنية البالغ عددها خمسة أرقام، ولاحظ أن آخر خانتين تشغلها أرقام. ما عدد ملاك السيارات الذين يجب أن يفحص البوليس سياراتهم؟

$$\begin{aligned} ab &= (10)(10) \\ &= 100 \end{aligned}$$

إذا كان آخر رقمين، حرفين أبجديين، فما عدد السيارات التي يجب أن تفحص؟

$$\begin{aligned} ab &= (26)(26) \\ &= 676 \end{aligned}$$

٢- التباديل permutations. التبديل permutation هو ترتيب لفئة من الأشياء. فتباديل كلمة cup هي cup و cpu و upc و ucp و puc و pcu. في هذه الحالة يوجد ٣ مفردات في الفئة و ترتيبها في مجموعات من 3 للحصول على 6 تباديل. ويشار إلى ذلك بتبديل لعدد n مفردة مع أخذ r في نفس الوقت حيث $n = 3$ و

$r = 3$. ما عدد التباديل الموجودة لعدد 4 مفردات تؤخذ 2 في كل مرة؟ باستخدام كلمة شوكة fork لتمثيل الأربع مفردات، تكون التباديل هي fo و of و fr و rf و ke و ek و or و ro و ok و ko و rk و kr. وكلما ازداد عدد المفردات n وعدد المأخوذ كل مرة r ، كلما أصبح سرد كل التباديل مرهقا. وصيغة إيجاد كل التباديل بسهولة أكثر هي :

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث : $P_r^n =$ عدد التباديل لعدد n مفردة تؤخذ r منها في كل مرة

(وأحيانا يكتب هذا الرمز على النحو التالي : ${}_n P_r$)

$= n$ إجمالي عدد المفردات

$= r$ عدد المفردات المختارة من إجمالي عدد المفردات

التعبير: $n!$ يقرأ «مضروب n » ويعنى : $(1) (2) (3) \dots (n-1) (n)$. لهذا، فإن $6!$
 $720 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = .$ وبالتعريف، $0! = 1$.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

ما عدد التباديل لخمس مفردات تؤخذ كل 3 في نفس المرة؟

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1} = 60$$

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

فى مثال رقم اللوحة المعدنية للسيارة، أفرض أن الشاهد تذكر أكثر أن الرقمين الأخيرين لم يكونا متشابهين.

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_2^{10} = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1}{8 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 1} \\ = 90$$

يمكن أن نحل هذه المشكلة أيضا عن طريق الضرب البسيط حيث $a = 10$ و $b = 9$. وفى كلمات أخرى، هناك 10 طرق للرقم الأول و 9 طرق للرقم الثانى حيث أن الأزواج غير مسموح به.

يستخدم الرمز P لكل من التباديل والاحتمالات. ويجب ألا ينتج عن ذلك الاستخدام المزدوج أى خلط، حيث أنه بالنسبة إلى التباديل يستخدم الدليلان n و r .

٣- التوافيق combinations. إذا كانت طريقة ترتيب المفردات غير مهمة، فيكون لدينا توفيق combination. الكلمة cup لها 6 تباديل عند أخذ 3 مفردات من 3 فى كل مرة. إلا أنه يوجد توفيق واحد one فقط، حيث أن نفس الثلاثة حروف تكون فى ترتيب مختلف. والكلمة fork لها 12 من التباديل عند أخذ الأربعة حروف حرفان فى كل مرة، إلا أن عدد التوافيق يكون fo و fr و fk و or و ok و rk ، والتي تعطى إجماليا مقداره 6. وصيغة حساب عدد التوافيق هي :

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث C_r^n : عدد التوافيق لعدد n مفردة تؤخذ بعدد r كل مرة

(وأحيانا يكتب الرمز على النحو التالي ${}_n C_r$ أو $\binom{n}{r}$)

n = إجمالي عدد المفردات

r = عدد المفردات التي تؤخذ كل مرة من إجمالي عدد المفردات

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

لدى مصمم داخلي خمسة كراسي ملونة وسوف يستخدم ثلاثة منها في غرفة المعيشة. ما عدد التوافيق الممكنة؟

$$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$C_3^5 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}$$

$$= 10$$

توجد تماثلية مصاحبة للتوافيق مثل $C_3^5 = C_2^3$ ، $C_4^5 = C_1^5$ ، و $C_5^{10} = C_5^5$ ،

وما إلى ذلك. ويترك إثبات هذا التماثل كتمرين للقارئ.

تعريف الاحتمال، والسبع نظريات، والثلاث طرق للحل تستخدم كلها في حل مشاكل الاحتمالات. والعديد من الآلات الحاسبة بها مفاتيح وظيفية للتبادل والتوافيق والتي تلغى أخطاء الحسابات باشرط أنه يتم الضغط على المفاتيح الصحيحة.

توزيعات احتمالية وثابة

DESCRETE PROBABILITY DISTRIBUTION

عند استخدام قيم محددة مثل 0 أو 1 أو 2 أو 3، فتكون التوزيعات الاحتمالية وثابة. والتوزيعات الاحتمالية الوثابة التقليدية هي الهندسى الزائدى hypergeometric وذات الحدين binomial وبواسون poisson .

توزيع الاحتمال الهندسى الزائدى

Hypergeometric Probability Distribution

يحدث توزيع الاحتمالات الهندسى الزائدى hypergeometric عندما يكون المجتمع محددًا وتؤخذ العينة العشوائية بدون إحلال. وتعد صيغة التوزيع الهندسى الزائدى من ثلاث توفيقات (توافق كلية، وتوافق عدم مطابقة، وتوافق مقبولة) وهى كما يلي :

$$P(d) = \frac{C_d^D C_{n-d}^{N-D}}{C_n^N}$$

حيث: $P(d)$ = احتمال عدد d من وحدات عدم المطابقة فى عينة حجمها n

$$= C_n^N \text{ توافق كل الوحدات}$$

$$= C_d^D \text{ توافق وحدات عدم المطابقة}$$

$$= C_{n-d}^{N-D} \text{ توافق الوحدات المقبولة}$$

$$= N \text{ عدد الوحدات المقبولة فى الدفعة (المجتمع)}$$

$$= n \text{ عدد الوحدات فى العينة}$$

$$= N - D \text{ عدد الوحدات المقبولة فى الدفعة}$$

$n - d =$ عدد الوحدات المقبولة في العينة

$D =$ عدد وحدات عدم المطابقة في الدفعة

$d =$ عدد وحدات عدم المطابقة في العينة

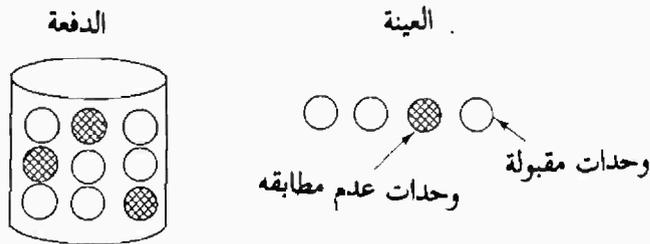
ويتم الحصول على الصيغة من تطبيق تعريف الاحتمال، والضرب البسيط، والتوافق. وفي كلمات أخرى، يكون البسط هو طرق الحصول على وحدات عدم مطابقة (مخرجات) مضروباً في طرق الحصول على وحدات مقبولة (مخرجات) ويكون المقام إجمالي الطرق (أو المخرجات) الممكنة. لاحظ أن الرموز في صيغة التوافق تغيرت لجعلها مناسبة أكثر لمراقبة الجودة.

ويجعل أحد الأمثلة تطبيق هذا التوزيع أكثر معنوية.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

دفعة من 9 ترموستات موضوعة في حاوي بها 3 وحدات عدم مطابقة. ما احتمال سحب وحدة عدم مطابقة واحدة في عينة عشوائية حجمها 4؟
ولأغراض التعليمات يظهر توضيح بياني للمشكلة أدناه.



من الصورة أو من صياغة المشكلة، $N = 9$ ، و $D = 3$ ، و $n = 4$ ، و $d = 1$.

$$P(d) = \frac{C_d^D C_{n-d}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$P(1) = \frac{C_1^3 C_{4-1}^{9-3}}{C_4^9}$$

$$= \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot \frac{6!}{3!(6-3)!}$$

$$= \frac{9!}{4!(9-4)!}$$

$$= 0.476$$

وبالمثل، $P(0) = 0.119$ ، $P(2) = 0.357$ ، و $P(3) = 0.048$. حيث أنه هناك 3 وحدات عدم مطابقة في الدفعة، فإن $P(4)$ يكون مستحيلا. في مجموع الاحتمالات يجب أن يساوى 1,000، ويتم التحقق من ذلك كما يلي :

$$P(T) = P(0) + P(1) + P(2) + P(3)$$

$$= 0.119 + 0.476 + 0.357 + 0.048$$

$$= 1.000$$

وتوزيع الاحتمالات الكامل معطى فى شكل ٤ - ٤. ومع تغير معالم التوزيع الهندسى الزائدى، تتغير أشكال التوزيعات كما هو مبين فى شكل ٤ - ٥. لهذا، كل توزيع هندسى زائدى يكون له شكل فريد مبني على N و n و D . وتوجد جداول للتوزيع الهندسى الزائدى، إلا أنه حيث أنه يكون هناك 4 متغيرات مشمولة (بما فى ذلك d)، فإنها تكون كبيرة جدا. ومع الآلات الحاسبة وأجهزة الحاسوب الشخصية، لاتلزم هذه الجداول للحسابات الفعالة للتوزيع.

وتتطلب بعض الحلول احتمال «أو أقل». في مثل هذه الحالات تكون الطريقة جمع الاحتمالات المناظرة. لهذا،

$$P(2 \text{ or less}) = P(2) + P(1) + P(0)$$

وبالمثل، تتطلب بعض الحلول احتمال «أو أكبر» وتستخدم الصيغة :

$$\begin{aligned} P(2 \text{ or more}) &= P(T) - P(1 \text{ or less}) \\ &= P(2) + P(3) + \dots \end{aligned}$$

في السلسلة الأخيرة، يتحدد عدد الحدود التي تحسب عن طريق حجم العينة، أو عدد وحدات عدم المطابقة في الدفعة، أو عندما تقل القيمة عن 0.001.

توزيع احتمال ذو الحدين Binomial Probability Distribution

توزيع احتمال ذو الحدين binomial يطبق على مشاكل التوزيع الثنائى التي لها عدد لانهائى من العناصر أو التي لها سريان مستقر لعناصر تأتي من مركز العمل. وتطبق ذو الحدين على مشاكل لها خواص، مثل مطابقة أو عدم مطابقة، أو نجاح أو فشل، أو مرور أو فشل، أو وجه لعملة أو وجهها الآخر. وهي تناظر الحدود المتتالية في توسع ذى الحدين، وهو :

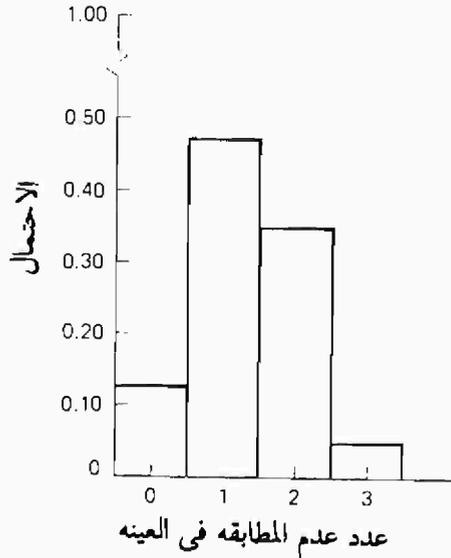
$$(p + q)^n = p^n + np^{n-1}q + \frac{n(n-1)}{2}p^{n-2}q^2 + \dots + q^n$$

حيث : P = احتمال حدوث أحد الأحداث مثل وحدة عدم المطابقة

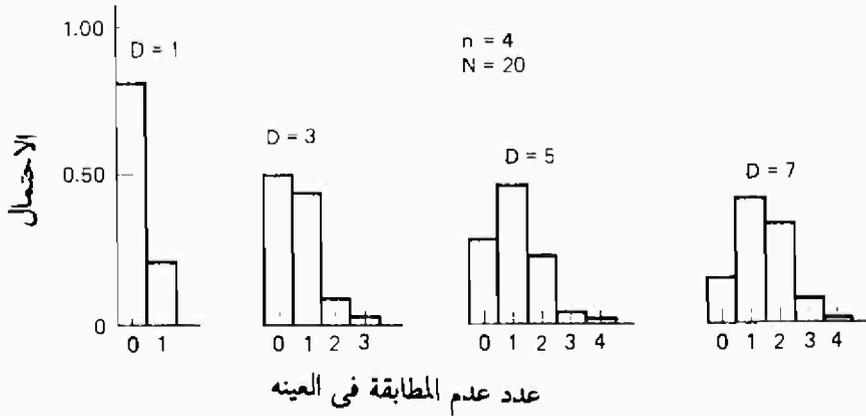
(احتمال أن عدم مطابقة مقالة فردية هو نفسه مثل نسبة عدم المطابقة)

$q = 1 - P$ هي احتمال عدم حدوث الحدث مثل الوحدة المطابقة
(نسبة المطابق)

$n =$ عدد المحاولات أو حجم العينة



شكل 4.4: توزيع هندسي زائدى لـ $N=9$ و $n=4$ و $D=3$

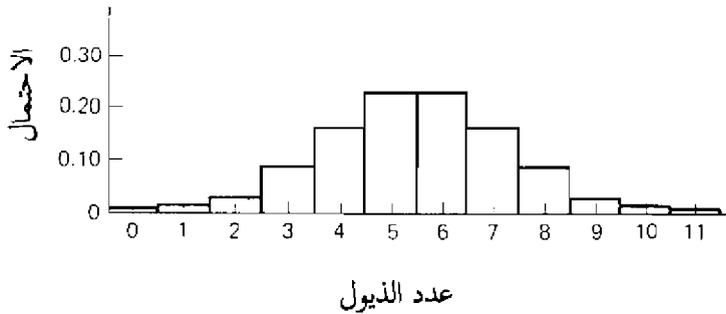


شكل 5.4: مقارنة توزيعات هندسية زائدة مع كسر معيب مختلف في الدفعة

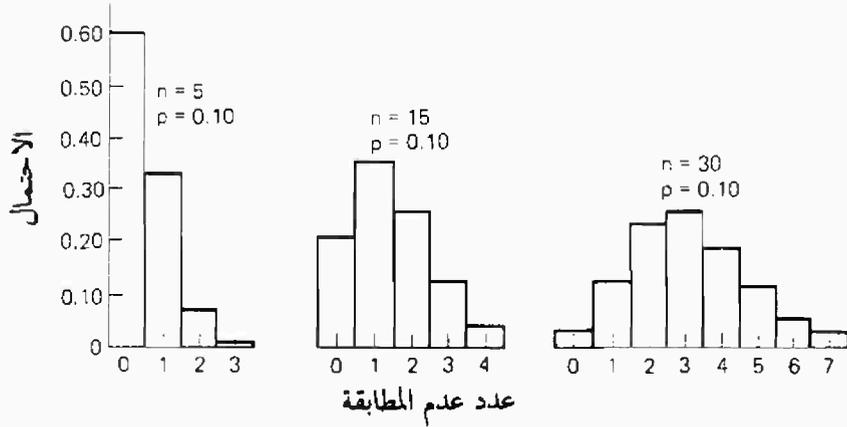
وتطبيق التوسع على توزيع أوجه العملة المعدنية ($P = 1/2$ و $q = 1/2$) الناتج من عدد لانتهائي لإلقاء 11 عملة مرة واحدة، يكون الاتساع على النحو التالي :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{11} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{11} + 11\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\frac{1}{2}\right) + 55\left(\frac{1}{2}\right)^9\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{11} \\ &= 0.001 + 0.005 + 0.027 + 0.080 + 0.161 + \dots + 0.001 \end{aligned}$$

التوزيع الاحتمالي لعدد الذبول مبين في شكل ٤ - ٦. حيث أن $p = q$ ، يكون التوزيع متماثلاً بغض النظر عن قيمة n ، إلا أنه عندما لا تتساوى p مع q ، لا يكون التوزيع متماثلاً. وفي عمل مراقبة الجودة يكون P نسبة أو كسر عدم المطابقة وعادة ما يكون أقل من 0.15. ويوضح شكل ٤ - ٧ التغير في التوزيع مع زيادة حجم العينة لكسر عدم المطابقة لقيمة $P = 0.10$ ، ويوضح شكل ٤ - ٨ التغير لقيمة $P = 0.05$. ومع تزايد حجم العينة، كلما أصبح شكل المنحنى متماثلاً بالرغم من عدم تساوى P و q . بمقارنة توزيع $P = 0.10$ و $n = 15$ في شكل ٤ - ٧ مع توزيع $P = 0.05$ و $n = 15$ في شكل ٤ - ٨، يلاحظ أنه لنفس قيمة n ، كلما ازدادت قيمة نسبة عدم المطابقة P ، كلما ازدادت تماثلية التوزيع.



شكل ٦.٤: توزيع عدد الأذبال لعدد لانتهائي من الإلقاء لعدد 11 قطعة عملة معدنية



شكل ١: توزيع ذى الحدين لأحجام عينة مختلفة عندما تكون $P = 0.10$

شكل التوزيع يكون دائما دالة في حجم العينة، n ، ونسبة عدم المطابقة، p . والتغير في أى من هاتين القيمتين ينتج عنه توزيع مختلف.

وفي معظم الحالات في عمل مراقبة الجودة، لانهم بمحتوى التوزيع، وإنما نهتم بعامل واحد أو اثنين من عوامل توسع ذات الحدين. وصيغة ذات الحدين لعامل واحد هي :

$$P(d) = \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d q^{n-d}$$

حيث $P(d)$ = احتمال عدد d من وحدات عدم المطابقة

n = العدد في العينة

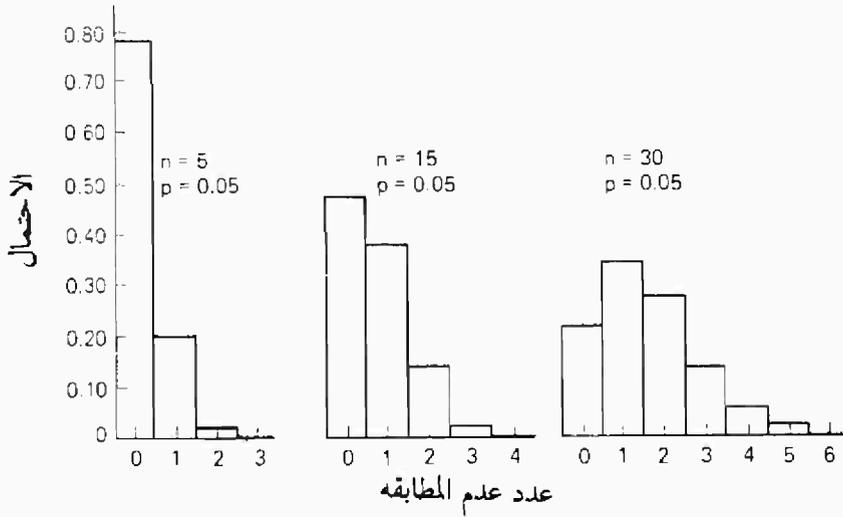
d = عدد عدم المطابقة في العينة

P_0 = نسبة (كسر) عدم المطابقة في المجتمع^(١)

q_0 = نسبة (كسر) المطابق $(1 - P_0)$ في المجتمع

حيث أن ذا الحدين للمواقف اللانهائية، فلا يوجد حجم دفعة N في الصيغة.

(١) كذلك قيمة نمطية أو دلالية، انظر الفصل الخامس.



شكل ٨. ٤: توزيعات دي الحدين لأحجام عينات مختلفة عندما $P = 0.05$

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

اختيرت عينة عشوائية من 5 مفصلات من سريان مستقر لمنتج لمكبس تثقيب وكانت نسبة عدم المطابقة 0.10. ما احتمال وجود وحدة عدم مطابقة في العينة؟ ما احتمال وجود وحدة عدم مطابقة واحدة أو أقل؟ ما احتمال وجود وحدتين عدم مطابقة أو أكثر؟

$$q_0 = 1 - p_0 = 1.00 - 0.10 = 0.90$$

$$P(d) = \frac{n!}{d!(n-d)!} p_0^d q_0^{n-d}$$

$$\begin{aligned} P(1) &= \frac{5!}{1!(5-1)!} (0.10)^1 (0.90)^{5-1} \\ &= 0.328 \end{aligned}$$

ما احتمال وحدة عدم مطابقة واحدة أو أقل؟ للحل، نحتاج إلى استخدام نظرية الجمع ونجمع $P(1)$ على $P(0)$.

$$P(d) = \frac{n!}{d!(n-d)!} p^d q^{n-d}$$

$$\begin{aligned} P(0) &= \frac{5!}{0!(5-0)!} (0.10^0)(0.90^{5-0}) \\ &= 0.590 \end{aligned}$$

لهذا،

$$\begin{aligned} P(1 \text{ or less}) &= P(0) + P(1) \\ &= 0.590 + 0.328 \\ &= 0.918 \end{aligned}$$

ما احتمال وحدتى عدم مطابقة أو أكثر؟ يمكن الوصول إلى الحل باستخدام نظرية الجمع وجمع الاحتمالات لوحداث عدم المطابقة البالغ عددها 2 و 3 و 4 و 5.

$$P(2 \text{ or more}) = P(2) + P(3) + P(4) + P(5)$$

أو يمكن تحقيق ذلك باستخدام النظرية التى تجمع الاحتمالات إلى 1 :

$$\begin{aligned} P(2 \text{ or more}) &= P(T) - P(1 \text{ or less}) \\ &= 1.000 - 0.918 \\ &= 0.082 \end{aligned}$$

حسابات وحدتى عدم مطابقة أو ثلاث للبيانات الموجودة فى المثال تعطى $P(2) = 0.073$ و $P(3) = 0.008$. والتوزيع الكامل مبين بيانيا فى يسار شكل ٤ - ٧. وحسابات $P(4)$ و $P(5)$ تعطى قيما أقل من 0.001 ولذلك فلم تؤخذ فى الاعتبار فى الرسم.

وتوجد جداول لتوزيع ذى الحدين. إلا أنه حيث أنه يلزم ثلاثة متغيرات (p و n و d)، فإن ذلك يلزمه مكان كبير. ويمكن للآلة الحاسبة أو الحاسوب الشخصي أن يؤديا الحسابات اللازمة بفاعلية كبيرة، لهذا فلاحاجة إلى الجداول.

وتستخدم ذو الحدين في الموقف اللانهائي إلا أنها تقرب التوزيع الهندسي الزائدى تحت شروط معينة تناقش فيما بعد في هذا الفصل. ويلزم أن يكون هناك اثنان واثنان فقط من المخرجات (وحدة عدم مطابقة ووحدة مطابقة)، وإن احتمال كل من المخرجات لا يتغير. بالإضافة إلى ذلك، يتطلب استخدام ذات الحدين أن المحاولات تكون مستقلة، أى أنه إذا حدثت وحدة عدم مطابقة، فإن فرصة أن الوحدة التالية تكون عدم مطابقة لا تزيد أو لا تنقل.

بالإضافة إلى ذلك، فإن توزيع ذات الحدين هو أساس إحدى مجموعات خرائط المراقبة التى تناقش فى الفصل الخامس.

Poisson Probability Distribution

توزيع بواسون الاحتمالى

توزيع احتمالى وثاب ثالث يشار إليه بتوزيع بواسون. والمسمى باسم سيمون بواسون Simeon Poisson، الذى وصفه عام 1837م. ويطبق التوزيع فى العديد من المواقف التى تشمل ملاحظات فى وحدة الزمن. مثال ذلك، عد عدد السيارات التى تصل كشك كشك تحصيل الرسوم على الطريق السريع فى فترات من 1 دقيقة لكل منها، وعد عدد مرات تعطل ماكينة فى فترة 1 يوم، وعد عدد المشتريين الذين يدخلون أحد محلات البقالة فى فترات من 5 دقائق لكل منها. كما أن التوزيع يطبق أيضا على مواقف تشمل ملاحظات فى الوحدة الواحدة من الكمية. مثال ذلك، عدد التموجات غير المطابقة فى قطعة قماش مساحتها 1000 متر مربع، وعد عدد غير المطابقات فى إحدى دفعات الإنتاج، وعد عدد مسامير البرشام غير المطابقة فى المنازل القابلة للنقل.

في كل موقف من المواقف السابقة، يوجد العديد من الفرص المتساوية لحدوث حدث. كل مسمار برشام في مركبة للاستجمام يكون له فرصة متساوية لعدم المطابقة، إلا أنه يكون هناك قلة فقط من غير المطابق في مئات من مسامير البرشام. ويطبق توزيع بواسون عندما تكون n كبيرة جدا وتكون p صغيرة.

وصيغة توزيع بواسون هي :

$$P(c) = \frac{(np_0)^c}{c!} e^{-np_0}$$

حيث : c = عدد، أو رقم، الأحداث لتصنيف معطى يحدث في العينة، مثل عدد غير المطابق، أو السيارات، أو العملاء، أو تعطل الماكينات.

np_0 = متوسط عدد، أو متوسط رقم، أحداث لتصنيف معطى يحدث في

العينة

$$e = 2.718281$$

عندما يستخدم توزيع بواسون كتقريب لذات الحدين (والذي يناقش فيما بعد في هذا الفصل)، يكون للرمز c نفس المعنى مثل d الموجود في صيغ ذات الحدين والتوزيع الهندسي الزائدي. وحيث أن c و np_0 لهما تعريفات شبيهة، فيكون هناك شيء من الخلط، والذي يمكن تصحيحه عن طريق التفكير في c كقيمة فردية وفي np_0 كمتوسط أو قيمة مجتمع.

باستخدام الصيغة، يمكن تحديد توزيع احتمالي. أفرض أن متوسط عدد السيارات التي تصل كشك تحصيل الرسوم على الطريق السريع في فترات من 1 دقيقة لكل منها هو 2، فتكون الحسابات كما يلي :

$$P(c) = \frac{(np_0)^c}{c!} e^{-np_0}$$

$$P(0) = \frac{(2)^0}{0!} e^{-2} = 0.135$$

$$P(1) = \frac{(2)^1}{1!} e^{-2} = 0.271$$

$$P(2) = \frac{(2)^2}{2!} e^{-2} = 0.271$$

$$P(3) = \frac{(2)^3}{3!} e^{-2} = 0.180$$

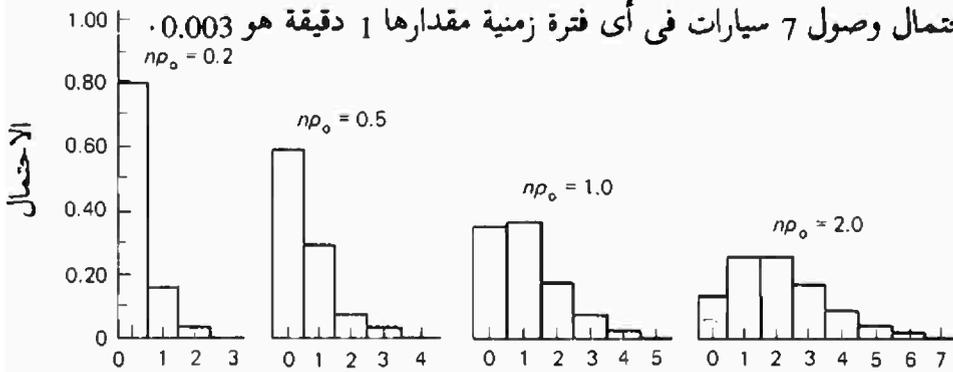
$$P(4) = \frac{(2)^4}{4!} e^{-2} = 0.090$$

$$P(5) = \frac{(2)^5}{5!} e^{-2} = 0.036$$

$$P(6) = \frac{(2)^6}{6!} e^{-2} = 0.012$$

$$P(7) = \frac{(2)^7}{7!} e^{-2} = 0.003$$

التوزيع الاحتمالي الناتج هو الموجود على يمين شكل ٤ - ٩. يحدد هذا التوزيع احتمال أن عدد معين للسيارات سيصل في أى فترة زمنية طولها ١ دقيقة. لهذا، احتمال وصول 0 سيارة في أى فترة زمنية مقدارها 1 دقيقة هو 0.135، واحتمال وصول سيارة واحدة في أى فترة زمنية طولها 1 دقيقة هو 0.271، ...، واحتمال وصول 7 سيارات في أى فترة زمنية مقدارها 1 دقيقة هو 0.003.



عدد السيارات التي تصل في فترات من ١ دقيقة (٢)

شكل ٤-٩: توزيعات بواسون احتمالية لقيم np₀ مختلفة

كما يوضح شكل ٤ - ٩ أيضاً أنه مع ازدياد قيمة np_0 ، يصل التوزيع إلى حالة تماثل. وخواص أخرى لمنحنى بواسون هي أن الوسط الحسابي يساوي np_0 ، والانحراف المعياري السابق يساوي $\sqrt{np_0}$.

وتوجد احتمالات توزيع بواسون لقيم np_0 من 0.1 إلى 5.0 بفترات قيمتها 0.1 ومن 6.0 إلى 15.0 بفترات مقدارها 1.0 في جدول ج من الملحق. القيم الموجودة بين أقواس في الجدول هي احتمالات متجمعة صاعدة للحصول على إجابات لـ «أو أقل من». ويسهل استخدام هذا الجدول الحسابات كما هو موضح في المشكلة التالية.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

متوسط عدد أخطاء الفواتير في أحد البنوك المحلية في مناوبة طولها 8 ساعات هو 0.1. ما احتمال حدوث خطأين في فواتير؟ ما احتمال حدوث خطأ واحد أو أقل؟ وما احتمال حدوث خطأين أو أكثر؟
من جدول ج لقيمة np_0 المساوية 1.0 :

$$P(2) = 0.184$$

$$P(1 \text{ or less}) = 0.736$$

$$P(2 \text{ or more}) = 1.000 - P(1 \text{ or less})$$

$$= 1.000 - 0.736$$

$$= 0.264$$

ويمكن استخدام توزيع بواسون كتقريب لذات الحدين في بعض المواقف. وفيما يلي مثال لمشكلة توضح هذا المفهوم.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

إذا كان احتمال أن تكون دفعة معاملة حرارية معيبة هو 0.01، ما احتمال أن توجد دفتان معيبتان من 250؟ ما احتمال وجود 2 أو أقل معيبة؟

$$np_0 = (250)(0.01) = 2.5$$

من جدول ج، تقاطع العمود مع قيمة np المساوية 2.5 والصف الذى قيمة c مساوية 2 فيه يعطى :

$$P(2) = 0.256 \quad P(2 \text{ or less}) = 0.543$$

والإجابة باستخدام ذات الحدين هي :

$$P(2) = 0.257 \quad P(2 \text{ or less}) = 0.543$$

توزيع احتمالات بواسون هو أساس خرائط مراقبة الخواص لمعاينة القبول، والتي تناقش فى الفصول التالية. بالإضافة إلى تطبيقات مراقبة الجودة، يستخدم توزيع بواسون فى مواقف صناعية أخرى، مثل تكرارات الحوادث، ومحاكاة الحاسوب، وبحوث العمليات، ومعاينة العمل.

ومن وجهة النظر النظرية يجب أن يستخدم توزيع الاحتمالات الوثاب رسم الأعمدة. إلا أنه من المعتاد عمليا (الأمر المتبع فى أشكال هذا الكتاب) استخدام المدرج التكرارى.

والتوزيعات الاحتمالية الوثابة الأخرى هى المنتظم، والهندسى، وذات الحدين السالب. وقد سبق توضيح التوزيع المنتظم فى شكل ١٠٤. ومن وجهة النظر التطبيقية فهو التوزيع المستخدم فى إنتاج جدول أرقام عشوائية. وتستخدم التوزيعات الهندسية وذات الحدين السالب فى دراسات العولية للبيانات الوثابة.

توزيعات احتمالية مستمرة

CONTINUOUS PROBABILITY DISTRIBUTIONS

عند استخدام بيانات يمكن قياسها مثل الأمتار، والأوزم، يكون التوزيع الاحتمالي مستمرا. وبينما يوجد العديد من التوزيعات الاحتمالية المستمرة، إلا أن التوزيع الطبيعي بمفرده له أهمية كافية في مراقبة الجودة لضمان مناقشة تفصيلية في كتاب أولى.

Normal Probability Distribution

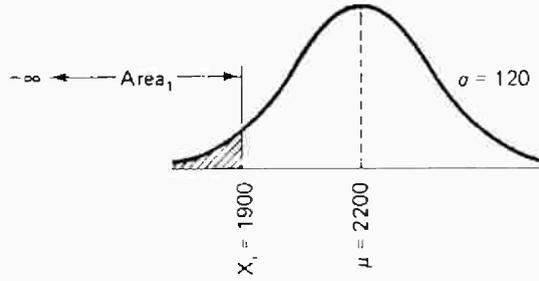
توزيع احتمالات طبيعي

المنحنى الطبيعي normal curve هو توزيع احتمالي مستمر. وحلول مشاكل الاحتمالات التي تشمل بيانات مستمرة يمكن الوصول إليها باستخدام منحنى التوزيع الاحتمالي الطبيعي. في الفصل الثاني، تعلمت طرقا لتحديد النسبة المئوية للبيانات التي تقع أعلى قيمة معينة، أو أسفل قيمة معينة، أو بين قيمتين. نفس هذه الطرق تطبق على مشاكل الاحتمالات، كما هو مبين في مثال المشكلة التالي.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

إذا كانت حياة عمل خلاط كهربائي، موزعة توزيعا طبيعيا، لها وسط حسابي مقداره 2200 ساعة وانحراف معياري مقداره 120 ساعة، ما احتمال أن خلاط كهربائي واحد يفشل في العمل عند 1900 ساعة أو أقل؟



$$\begin{aligned}
 Z &= \frac{X_i - \mu}{\sigma} \\
 &= \frac{1900 - 2200}{120} \\
 &= -2.5
 \end{aligned}$$

من جدول أ من الملحق، لقيمة Z المساوية -2.5، تكون $area_1 = 0.0062$. لهذا، احتمال فشل خلاط كهربائي عند 1900 ساعة أو أقل هو :

$$P(\text{failure at 1900 h or less}) = 0.0062$$

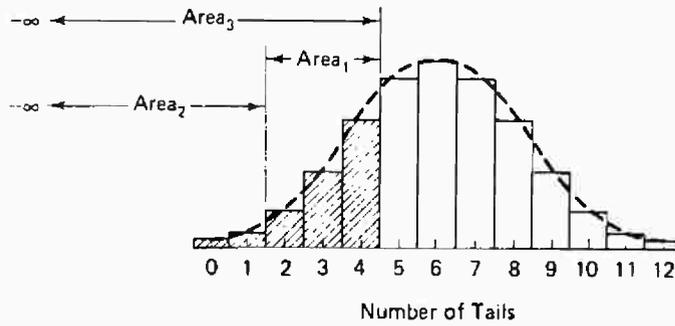
كان يمكن أن تصاغ إجابة المشكلة كما يلي : «النسبة المئوية للعناصر لأقل من 1900 ساعة هي 0.62%». لهذا، يمكن أن تعامل المساحة تحت المنحنى أما كقيمة احتمال أو كقيمة تكرار نسبي.

تحت شروط معينة يقرب توزيع الاحتمالات الطبيعي توزيع ذات الحدين للاحتتمالات. وتناقش هذه الشروط فيما بعد في هذا الفصل. والآن، فإننا نهتم بطريقة حل المشكلة والتي توضح في مشكلة المثال التالية.

EXAMPLE PROBLEM

مثال لمشكلة

أوجد احتمال الحصول على 2 أو 3 أو 4 ذبول في 12 إلقاء لعملة معدنية بتقريب التوزيع الطبيعي لذات الحدين. وفيما يلي توضيح المشكلة بيانياً. مساحة الاحتمال المطلوب تم تهشيرها ويمكن أن تقرب بالمنحنى الطبيعي، والمبين بخط متقطع. وحيث أن البيانات يجب أن تكون متصلة للمتصلة للمنحنى الطبيعي، فإن احتمال الحصول على من 2 إلى 4 ذبول يعتبر من 1.5 إلى 4.5.



$$\begin{aligned} \mu &= np & \sigma &= \sqrt{np_0q_0} \\ &= 12\left(\frac{1}{2}\right) & &= \sqrt{12\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= 6 & &= 1.73 \end{aligned}$$

من جدول أ، لقيمة $Z_2 = 2.60$ تكون $area_2 = 0.0047$ ، ولقيمة $Z_3 = -0.87$ ، تكون $area_3 = 0.1922$.

$$\begin{aligned}
Z_2 &= \frac{X_2 - \mu}{\sigma} & Z_3 &= \frac{X_3 - \mu}{\sigma} \\
&= \frac{1.5 - 6}{1.73} & &= \frac{4.5 - 6}{1.73} \\
&= -2.60 & &= -0.87 \\
\text{Area}_1 &= \text{Area}_3 - \text{Area}_2 & &: \text{لهذا الاحتمال المطلوب هو} \\
&= 0.1922 - 0.0047 \\
&= 0.1875 \\
P(2, 3, \text{ or } 4 \text{ tails}) &= 0.1875
\end{aligned}$$

توزيعات احتمالية مستمرة أخرى

Other Continuous Probability Distributions

من التوزيعات الاحتمالية المستمرة العديدة الأخرى يوجد اثنان فقط لهما أهمية معنوية لذكر تطبيقاتهما العملية. توزيع الاحتمالات الاسى ويستخدم فى دراسات العولية عندما يوجد معدل فشل ثابت وويبل weibull الذى يستخدم عندما لا يكون وقت الفشل ثابتا. وهذان التوزيعان يناقشان فى الفصل الثامن.

علاقات التوزيعات

DISTRIBUTION INTERRELATIONSHIP

مع هذه التوزيعات العديدة، يكون من الصعب فى بعض الأحيان معرفة متى تطبق. بالتأكيد، حيث أن توزيع بواسون يمكن حسابه ببساطة باستخدام جدول ج من الملحق، فيجب استخدامه كلما كان ذلك مناسباً. تبين الأشكال ٤ - ٥ و ٤ - ٨ و ٤ - ٩ تشابهاً عبر التوزيعات الهندسية الزائدى، وذو الحدين، وبواسون.

يستخدم التوزيع الهندسى الزائدى لدفعات محددة لحجم معين N . ويمكن تقريبها بواسطة ذات الحدين عندما تكون $n/N \leq 0.10$ ، أو بواسطة بواسون عندما تكون $n/N \leq 0.10$ ويكون $p_0 \leq 0.10$ ، ويكون $np_0 \geq 5$ ، أو بواسطة الطبيعي عندما يكون $n/N \leq 0.10$ ويقرب الطبيعي من ذات الحدين.

ويستخدم توزيع ذات الحدين للمواقف اللانهائية أو عندما يكون هناك سريان مستقر للمنتج بحيث يفترض وجود موقف لانهاى. ويمكن أن يقرب بواسطة بواسون عندما يكون $p_0 \leq 0.10$ ويكون $np_0 \leq 5$. والمنحنى الطبيعي يكون تقريبا ممتازا عندما تكون p_0 قريبة من 0.5 ويكون $n \geq 10$. ومع انحراف np_0 عن 5.0، يظل التقريب جيدا طالما أن $np_0 \geq 5$ وتزداد n إلى 50 أو أكثر لقيم p_0 التى تكون منخفضة إلى 0.10 ومرتفعة إلى 0.90. وحيث أن وقت حسابات ذات الحدين لا يختلف كثيرا عن وقت حسابات الطبيعي، فلاتوجد إلا ميزة بسيطة لاستخدام الطبيعي كتقريب.

والمعلومات المعطاة عالية يمكن أن تعتبر كخطوط إرشادية تقريبية بدلا من أنها قوانين مطلقة. التقريب أفضل كلما ازدادت البيانات من القيم المحددة. وللجزء الأكبر فإن فعالية الآلات الحاسبة والحاسوب الشخصى جعلت التقريبات متقدمة.

COMPUTER PROGRAM

برنامج حاسوب

برنامج الحاسوب المعطى فى شكل ٤ - ١٠ يحسب التوزيع الاحتمالى الهندسى الزائدى لدفعة حجمها N ، وعدد عدم المطابقة فى الدفعة D ، وحجم العينة n . وحيث أن الثلاث توافيق يجب أن تحسب، فقد أعد مقطع للتوافيق فى البرنامج. وقد أعد احتياطي لمضروب صفر والحالات الخاصة التى يكون فيها $r = 0$ و $r = 1$. كما أن بسط ومقام التوافيق تعمل معا لإلغاء إمكانية أى مشاكل للفائض overflow. والاحتمال محدد بواسطة D و n ، وأقل احتمال، 0.001. والإجابة هى نفسها مثل المينة فى شكل ٤ - ٤.

```

10 REM                      Hypergeometric Distribution
20 REM
30 REM                      NL = Lot Size(N)
40 REM                      NS = Sample Size(n)
50 REM                      DL = Number Nonconforming in Lot(D)
60 REM                      DS = Number Nonconforming in Sample(d)
70 REM                      P = Probability
80 REM                      C = Combination
90 REM                      CG = Combinations Conforming
100 REM                     CD = Combinations Nonconforming
110 REM                     CT = Combinations Total
120 REM
130 REM DIM P(100)
140 PRINT " Enter the Lot Size." ; INPUT NL
150 LPRINT TAB(5);" N = ";NL
160 PRINT " Enter the Number Nonconforming in the Lot." INPUT DL
170 LPRINT TAB(5);" D = ";DL
180 PRINT " Enter the Sample Size." ; INPUT NS
190 LPRINT TAB(5);" n = ";NS ; LPRINT
200 LPRINT TAB(5);" Number Nonconforming";TAB(30);" Probability"
210 DS = 0
220 K = 0
230 K = K + 1
240 IF K = 1 GOTO 270
250 IF K = 2 GOTO 280
260 N = NL ; R = NS ; GOTO 300
270 N = NL - DL ; R = NS - DS ; GOTO 300
280 N = DL ; R = DS
290 REM                      COMBINATION ROUTINE
300 IF R = 0 THEN C = 1
310 IF R = 1 THEN C = N
320 IF R < 2 GOTO 400
330 CS = 1
340   FOR I = N TO (N - R + 1) STEP -1
350     J = I - (R - N)
360     CS = CS * (I / J)
370   NEXT I
380 C = CS
390 REM                      HYPERGEOMETRIC CALCULATION
400 IF K = 1 THEN CG = C
410 IF K = 2 THEN CD = C
420 IF K < 3 GOTO 230
430 CT = C
440 P(DS) = CG * (CD / CT)
450 LPRINT TAB (12); DS; TAB (32) ; P(DS)
460 IF DS = NS GOTO 510
470 IF DS = DL GOTO 510
480 IF P(DS) < .005 GOTO 510
490 DS = DS + 1
500 GOTO 220
510 SP = 0
520   FOR I = 0 TO DS
530     SP = SP + P(I)
540   NEXT I
550 LPRINT
560 LPRINT TAB(5);" Sum of Probabilities = ";SP
570 END

```

```

N = 20
D = 5
n = 4

```

Number Nonconforming	Probability
0	.281734
1	.469556
2	.216718
3	.0309598
4	1.03199E-03

شكل ١٠٠٤: برنامج حاسوب بالبيسك لحساب التوزيع الهندسي الزائدي

PROBLEM

مشاكل

- ١ - إذا كان حدوث أحد الأحداث مؤكداً، فما احتمالُه؟ إذا لم يكن ممكناً حدوث أحد الأحداث، فما احتمالُه؟
- ٢ - ما احتمال أن يعيش أحد الأشخاص إلى ما لانهاية؟ ما احتمال أن يطير الأخطبوط؟
- ٣ - إذا كان احتمال الحصول على الرقم 3 من إلقاء زهر نرد له 6 أسطح هو 0.167، فما احتمال الحصول على أى رقم آخر غير الرقم 3؟
- ٤ - حدد حدثاً له احتمال حدوث 1.00.
- ٥ - احتمال سحب رقيقة قرنفلية من صندوق به رقائق مختلفة الألوان هو 0.35، واحتمال سحب رقيقة زرقاء هو 0.46، واحتمال سحب رقيقة خضراء هو 0.15، واحتمال سحب رقيقة أرجوانية اللون هو 0.04. ما احتمال أن تكون الرقيقة المسحوبة زرقاء أو أرجوانية اللون؟ وما احتمال أن تكون زرقاء أو قرنفلية اللون؟
- ٦ - فى أى ساعة فى وحدة الرعاية المركزة بأحد المستشفيات يكون احتمال الطوارئ 0.247. ما احتمال أن يكون القسم هادئاً، أى بدون طوارئ؟
- ٧ - إذا كان أحد الفنادق به 20 سريراً من الحجم الفاخر جداً، و 50 سريراً من الحجم الفاخر، و 100 سرير مزدوج عريض، و 30 سريراً مزدوجاً، ما احتمال أن يحصل أحد النزلاء على سرير من الحجم الفاخر أو سرير مزدوج؟
- ٨ - سجت كرة عشوائياً من حاوى به 8 كرات صفراء اللون مرقمة من 1 إلى 8، وبه 6 كرات برتقالية اللون مرقمة من 1 إلى 6، و 10 كرات رمادية اللون مرقمة من 1 إلى 10. ما احتمال الحصول على كرة برتقالية اللون أو كرة رقم 5 أو كرة

برتقالية اللون ولها الرقم 5 عند سحب كرة واحدة؟ ما احتمال سحب كرة رمادية اللون أو كرة رقم 8 أو كرة رمادية اللون ورقم 8 عند سحب كرة واحدة؟

٩- إذا كان احتمال الحصول على وحدة عدم مطابقة واحدة في عينة من 2 من دفعة كبيرة من منتجات المطاط الصناعي هو 0.18 واحتمال وجود وحدتي عدم مطابقة هو 0.25، فما احتمال عدم وجود وحدات عدم مطابقة؟

١٠- باستخدام معلومات المشكلة السابقة، واحتمال الحصول على وحدتي عدم مطابقة في أول عينة من 2 ووحدة عدم مطابقة واحدة في العينة الثانية من 2. ما احتمال عدم وجود وحدات عدم مطابقة في العينة الثانية؟ تعاد أول وحدة تسحب إلى الدفعة قبل سحب الوحدة الثانية.

١١- تحتوي سلة على 34 رأس خس، منها 5 غير سليمة. إذا سحبت عينة من 2 من عدم الإحلال، ما احتمال أن يكون الرأسان غير سليمين؟

١٢- إذا كان من الممكن سحب عينة حجمها 1 من مخزن آلي (أوتوماتيكي) وأرفق استرجاع من ثلاثة أنواع أرفق مختلفة مع وجود 6 صواني مختلفة على كل رف، ما عدد الطرق المختلفة للحصول على عينة حجمها 1؟

١٣- لنموذج موتور طائرة صغير أربعة مكونات للبدء : مفتاح، وبطارية، وسلك، وأداة كهربائية صغيرة. ما احتمال أن يعمل النظام إذا كان احتمال أن يعمل كل مكون من المكونات الأربعة كما يلي : المفتاح (0.998)، والبطارية (0.997)، والسلك (0.999)، والأداة الكهربائية (0.995) ؟

١٤- يقوم أحد العاملين في الفحص في فحص منتجات من ثلاث ماكينات في أحد الأقسام، وخمس ماكينات من قسم آخر، وماكينتين من قسم ثالث. ويريد مدير الجودة أن يغير من مسار عامل الفحص. ما عدد الطرق المختلفة الممكنة؟

١٥- فى مثال مشكلة قائد السيارة الذى عمل حادثة وهرب كان فى رقم اللوحة المعدنية للسيارة رقم عددى وآخر حرفى، ما عدد السيارات التى يجب أن تفحص؟

١٦- يتم اختيار عينة حجمها 3 من 10 أفراد. ما عدد التباديل الممكنة؟

١٧- يتم اختيار 8 تذاكر من 90 تذكرة سفر. ما عدد التباديل الممكنة؟

١٨- يتم اختيار عينة حجمها 4 من 20 حلقة مكبس. ما عدد توافيق العينات المختلفة الممكنة؟

١٩- يتم اختيار عينة حجمها 3 من 100 غرفة بفندق. ما عدد توافيق العينات المختلفة الممكنة؟

٢٠- يتم اختيار عينة حجمها 2 من صينية بها 20 مسمار. ما عدد توافيق العينات المختلفة الممكنة؟

٢١- يوجد فى فانغ أوتوماتيكي لباب كراج 12 مفتاح تحويل يمكن أن يكون كل منها فى وضع on أو وضع off. وكل من الراسل والمستقبل يعدان بنفس الطريقة ويكون للمالك الخيار فى إعداد 1 لكل المفاتيح البالغ عددها 21. ما احتمال أن شخصا آخر يكون لديه نفس نموذج الراسل يفتح الباب؟

٢٢- قارن الإجابات C_3^5 مع C_2^5 ، و C_1^4 مع C_3^4 ، و C_2^{10} مع C_8^{10} . ما التعليق الذى يمكن أن تستخلصه؟

٢٣- احسب C_0^6 و C_0^{10} و C_0^{25} . ما التعليق الذى يمكن أن تستخلصه؟

٢٤- احسب C_3^3 و C_9^9 و C_{35}^{35} . ما التعليق الذى يمكن أن تستخلصه؟

٢٥- احسب C_1^7 و C_1^{12} و C_1^{18} . ما التعليق الذى يمكن أن تستخلصه؟

٢٦ - اختيرت عينة حجمها 4 من طلبات التأمين البالغ عددها 12 والتي بها 3 وحدات عدم مطابقة. باستخدام التوزيع الهندسي الزائد، ما احتمال أن العينة تحتوي على 0 عدم مطابقة بالضبط؟ و 1 عدم مطابقة؟ و 2 عدم مطابقة؟ و 3 عدم مطابقة؟ و 4 عدم مطابقة؟

٢٧ - دفعة محددة من الساعات الرقمية البالغ عددها 20 تبلغ عدم المطابقة بها 20%. مستخدماً التوزيع الهندسي الزائدي، ما احتمال أن يوجد بعينة حجمها 3 ساعتين عدم مطابقة؟

٢٨ - في المشكلة السابقة ما احتمال الحصول على 2 أو أكثر من وحدات عدم المطابقة؟ وما احتمال الحصول على 2 أو أقل من وحدات عدم المطابقة؟

٢٩ - تبلغ نسبة عدم المطابقة لسريان مستقر من عائد ضريبة الدخل 0.03. ما احتمال الحصول على وحدتي عدم مطابقة من عينة حجمها 20؟ استخدم توزيع ذات الحدين.

٣٠ - باستخدام توزيع ذات الحدين، أوجد احتمال الحصول على 2 أو أكثر من الوحدات غير المطابقة عند معاينة 5 آلات كاتبة من دفعة معروف أن بها 6% غير مطابقة؟

٣١ - باستخدام توزيع ذات الحدين، أوجد احتمال الحصول على مطعمى عدم مطابقة أو أقل في عينة من 9 عندما تكون نسبة عدم المطابقة في الدفعة 15%.

٣٢ - ما احتمال تخمين أربع إجابات صحيحة في اختبار به 9 أسئلة نتيجة كل سؤال هي: صحيح أو خطأ؟ استخدم توزيع ذات الحدين.

٣٣ - ينتج قالب ضخ قطع المطاط التي توضع عليها كرات الجولف والتي تكون نسبة عدم المطابقة فيه 15%. باستخدام التوزيع الطبيعي كتقريب لذات

الحددين، أوجد احتمال وجود 34 عدم مطابقة من قطع المطاط في عينة من 300 قطعة مطاط.

٣٤- أخذت عينة من 10 من ممتص الصدمات للسيارات من سريان منتج به 5% من عدم المطابقة. باستخدام بواسون كتقريب لتوزيع ذات الحددين، حدد احتمال وجود 2 عدم مطابقة. قارن النتيجة مع النتيجة عند استخدام توزيع ذات الحددين.

٣٥ - إذا كان احتمال عدم مطابقة مقالة واحدة هو 0.08، فما احتمال أن تحتوى عينة من 20 على وحدتى عدم مطابقة أو أقل؟ استخدم بواسون كتقريب لتوزيع ذات الحددين.

٣٦ - باستخدام بيانات المشكلة السابقة، حدد احتمال وجود وحدتى عدم مطابقة أو أكثر.

٣٧ - يتم اختيار عينة من 10 ماكينات غسيل من دفعة محددة حجمها 100. إذا كان $p_0 = 0.08$ ، فما احتمال وجود ماكينة غسيل عدم مطابقة واحدة في العينة؟ هل البواسون يكون تقريبا جيدا؟

٣٨ - بإحدى الدفعات التى حجمها 15 ثلاث وحدات عدم مطابقة. ما احتمال وجود وحدة عدم مطابقة واحدة فى عينة حجمها 3؟ هل يكون البواسون تقريبا جيدا؟

٣٩ - أخذت عينة من زجاجات طبية حجمها 3 من صينية بها 30 زجاجة. إذا كانت عدم المطابقة فى محتويات الصينية هى 10%، فما احتمال وجود زجاجة طبية عدم مطابقة واحدة فى العينة؟ هل ذات الحددين تقريبا جيد؟

٤٠ - نسبة عدم المطابقة فى سريان مستقر للمبات كانت 0.09. فإذا أخذت عينة حجمها 67 فما احتمال وجود 3 وحدات عدم مطابقة؟ هل البواسون تقريبا جيد؟

٤١ - اختبر، وأعد الكتابة إذا لزم الأمر، برنامج الحاسوب على الحاسوب المتاح لك استخدامه.

٤٢ - عدل برنامج الحاسوب لإخراج المعلومات على وحدة الرسومات المتاحة لك.

٤٣ - اكتب برنامجا للحاسوب لكل مما يلي :

أ - التوزيع الاحتمالي لذات الحدين.

ب - توزيع بواسون الاحتمالي.