الفصل الثاني

أنظمة الأعداد

1- أنظمة الأعداد :

المقصود بنظام الأعداد ، هو ذلك النظام المستخدم في تمثيل الاعداد. حيث يمكن ان نمثل اي عدد (يتكون من عدة مراتب) مثل س بالمعادلة العامة التالية :

$$س_{ر} = ق_{0}\ ق_{1}\ ق_{2}\ ق_{3} \cdots ق_{ن} \qquad ..... (1)$$

او

$$س_{ر} = ق_{0}\times ر^{0} + ق_{1}\times ر^{1} + ق_{2}\times ر^{2} + ق_{3}\times ر^{3} + \ldots + ق_{ن}\times ر^{ن} \qquad ..... (2)$$

حيث أن (ق) تمثل أي رقم موجود ضمن العدد (س) في مرتبة معينة ، تتحدد قيمتها حسب موقع هذا الرقم ضمن العدد . وتظهر هذه المرتبة بصورة الأس الذي يعلو الحرف (ر) في المعادلة رقم (2) أعلاه .

علماً بأن (ر) هنا تمثل **الأساس العددي** الذي يقوم عليه النظام والذي يسمى بأسمه. فلو كان (ر) مثلاً عشرة فإن الأساس العددي للنظام هو عشرة ولذلك يسمى بالنظام العشري للأعداد .

فلو أخذنا على سبيل المثال العدد (563) بالنظام العشري للاعداد . فيمكننا ان نقوم بتحليل هذا العدد حسب المعادلة (1) اعلاه . فيظهر لنا مايلي :

$$س_{10} = 563 = ق_{0}\,ق_{1}\,ق_{2}$$

اي ان : $ق_{0} = 3$

$ق_{1} = 6$

$ق_{2} = 5$

وعدد الأرقام الموجودة في هذا العدد هي (3) اعداد (3 ، 6 ، 5) ، أو بمعنى أصح (3) مراتب تبدأ بالمرتبة (0) (أي الآحاد) وتنتهي بالمرتبة (2) أي المئات . أي أن :

$ن + 1 = 3$

$\therefore\ ن = 2$

كما إننا منذ البداية قلنا إن (563) هو بالنظام العشري للاعداد أي أن :

ر = 10

وبتطبيق المعادلة (2) أعلاه نجد أن :

$س_{10} = 3 \times 10^{0} + 6 \times 10^{1} + 5 \times 10^{2}$

$س_{10} = 3 \times 1 + 6 \times 10 + 5 \times 100$

$س_{10} = 563$

وهذا صحيح تماماً كما نلاحظ . علماً بأن الرقم (10) الذي يظهر أسفل الرمز (س) يعني ان العدد بالنظام العشري .

مثال :

ضع العدد التالي بصيغة المعادلتين (1) ، (2) :

$س_{10} = 615004$

الحل :

من المعادلة (1) :

$س_{10} = ق_{0}\ ق_{1}\ ق_{2}\ ق_{3}\ ق_{4}\ ق_{5}$

$\therefore ق_{0} = 4$

$ق_{1} = 0$

$ق_{2} = 0$

$ق_{3} = 5$

$ق_{4} = 1$

$ق_{5} = 6$

وبما إن ر = 10 (نلاحظ علامة 10 أسفل الرمز س)

اذن ومن المعادلة (2) يمكن كتابة $س_{10}$ حسب المعادلة وكما يلي :

$س_{10} = 4 \times 10^{0} + 0 \times 10^{1} + 0 \times 10^{2} + 5 \times 10^{3} + 1 \times 10^{4} + 6 \times 10^{5}$

$$س_{10} = 4\times1 + 0\times10 + 0\times100 + 5\times1000 + 1\times10000 + 6\times100000$$
$$= 4 + 0 + 0 + 5000 + 10000 + 600000$$
$$\therefore س_{10} = 615004$$

مثال :

أكتب عدد المراتب وقيم ن ، $ق_0$ ، $ق_1$ ، . . . ، $ق_ن$ ، ر للعدد التالي . ثم ضعه بصيغة المعادلتين (1) و (2) .

$$س_{10} = 75193$$

الحل :

عدد المراتب = ن + 1 = 5

$\therefore$ ن = 4

ر = 10

$ق_0 = 3$ ، $ق_1 = 9$ ، $ق_2 = 1$ ، $ق_3 = 5$ ، $ق_4 = 7$.

وبذلك يمكن كتابة العدد بصيغة المعادلة (2) وكما يلي :

$$س_{10} = 3\times10^0 + 9\times10^1 + 1\times10^2 + 5\times10^3 + 7\times10^4$$
$$= 3 + 90 + 100 + 5000 + 70\,000$$
$$س_{10} = 75193$$

وهو المطلوب .

2- النظام الثنائي للأعداد :

لقد تعودنا من دراساتنا السابقة على التعامل مع النظام العشري للأعداد فقط ، حيث أن (ر= 10) في المعادلتين (1) و (2) وكما يلي :

$$س_{10} = ق_0 ق_1 ق_2 ق_3 \cdots\cdots ق_ن \quad \ldots\ldots (3)$$

$$س_{10} = ق_0\times10^0 + ق_1\times10^1 + ق_2\times10^2 + \ldots + ق_ن\times10^ن \quad \ldots\ldots (4)$$

ولكن لا يفوتنا ان نذكر **ملاحظة مهمة جداً ، وهي ان قيمة الرقم (ق) تتراوح بين (0) الى (9) وبغض النظر عن قيمة (ن)** .

ولو راجعنا الأمثلة في الفقرة السابقة لوجدنا أن ($ق_ن$) ممكن أن تأخذ قيم متعددة وتقع جميعها بين (0) و (9) وذلك لأن النظام المستخدم لتمثيل الأعداد هو النظام العشري

ولكن لو أفترضنا أن **الأساس** (ر) للنظام العددي هو (2) ، فسنحصل على نظام جديد للأعداد هو **النظام الثنائي للأعداد** . وتكون فيه (ق) بإحدى قيمتين هما (0) أو (1) أي يمكن كتابة المعادلة (1) و (2) كما يلي :

$$\text{س}_2 = \text{ق}_0\ \text{ق}_1\ \text{ق}_2\ \text{ق}_3\ \cdots\cdots\ \text{ق}_{\text{ن}} \qquad \ldots\ (5)$$

$$(\text{س}_2)_{10} = \text{ق}_0 \times 2^0 + \text{ق}_1 \times 2^1 + \text{ق}_2 \times 2^2 + \ldots + \text{ق}_{\text{ن}} \times 2^{\text{ن}} \qquad \ldots\ (6)$$

حيث تكون قيم كل من ($ق_0$ ، $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ .... ، $ق_ن$) هي أما (5) أو (1) لذا يكون العدد $س_2$ (أي العدد في **النظام الثنائي للأعداد**) هو بصورة عامة عبارة عن سلسلة من ارقام (0) و (1) ، والمعادلة (6) نجد بواسطتها العدد العشري الذي يكافىء العدد الثنائي $س_2$ وتدعى (**خوارزمي تحويل الثنائي إلى عشري**) .

مثال :

في العدد الثنائي التالي جد قيمة ($ق_0$ ، $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$ .... ، $ق_ن$) ثم جد قيمة العدد العشري الذي يقابل هذا العدد الثنائي بواسطة (خوارزمي تحويل العدد الثنائي إلى عشري) .

$س_2 = 10$

الحل :

عدد المراتب = 2 = ن + 1

∴ ن = 1

وبتطبيق المعادلة (5) نجد أن :

س$_2$ = ق$_0$ ق$_1$

∴ ق$_0$ = 5

ق$_1$ = 1

وبأستخدام المعادلة (6) نجد ان

(س$_2$)$_{10}$ = ق$_0$ $\times 2^0$ + ق$_1$ $\times 2^1$

$= 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1$

$= 0 \times 1 + 1 \times 2$

$= 0 + 2$

$= 2$

∴ العدد الثنائي (10) يساوي العدد العشري (2) .

مثال :

جد العدد العشري الذي يقابل العدد الثنائي (11101) بواسطة **خوارزمي تحويل الثنائي إلى عشري** .

الحل :

بتطبيق المعادلة (5) نجد إن :

س$_2$ = ق$_0$ ق$_1$ ق$_2$ ق$_3$ ق$_4$

∴ ق$_0$ = 1 ، ق$_1$ = 0 ، ق$_2$ = 1 ، ق$_3$ = 1 ، ق$_4$ = 1

∴ (س$_2$)$_{10}$ = $1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^4$

$= 1 \times 1 + 0 \times 2 + 1 \times 4 + 1 \times 8 + 1 \times 16$

$= 1 + 0 + 4 + 8 + 16$

(س$_2$)$_{10}$ = 29

اذن العدد (11101) في النظام الثنائي للأعداد يقابل العدد (29) في النظام العشري للأعداد .

مثال :

ما هو العدد العشري الذي يقابل العدد(100000) في النظام الثنائي للأعداد .

الحل :

س$_2$ = 100 000

ومن المعادلة (5) نستنتج إن قيمة (ن) = 5

∴ س$_2$ = ق$_0$ ق$_1$ ق$_2$ ق$_3$ ق$_4$ ق$_5$

حيث أن ق$_0$ = 0 ، ق$_1$ = 0 ، ق$_2$ = 0 ، ق$_3$ = 0 ، ق$_4$ = 0 ، ق$_5$ = 1

وبتطبيق المعادلة (6) نجد ان :

(س$_2$)$_{10}$ $= 0 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5$

$= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 1 \times 32$

(س$_2$)$_{10}$ $= 32$

إذن العدد (100000) في النظام الثنائي للأعداد يساوي (32) في النظام العشري للأعداد.

3- حساب الأعداد في النظام الثنائي للأعداد :

3-1- الجمع في النظام الثنائي للأعداد :

لقد تعودنا في النظام العشري للأعداد أن نجمع عددين بأن نضع كل رقم من العدد الأول تحت الرقم الذي يكافئه بالمرتبة من العدد الثاني ونجمع الرقمين مع بعضهما . وإذا زاد مجموع الرقمين عن تسعة (أي كان 10 فما فوق) فإننا نضيف الباقي إلى الناتج . أي مع الرقمين التاليين ، من ناحية المرتبة ، ويدعى هذا بـ(**خوارزمي الجمع في النظام**

العشري للأعداد) .

مثال :

جد مجموع العددين العشريين التاليين :

س = 514

ص = 692

الحل :

ع = س + ص = 514 + 692

1 الباقي

514 المضاف

+ 692 المضاف اليه

1206

أما في النظام الثنائي للأعداد فإن الطريقة متشابهة ، على أن تتذكر دائماً بأن العدد الثنائي هو عبارة عن سلسلة من أرقام (0) و (1) والجمع فيه يتم ضمن القواعد التالية :

$0 + 0 = 0$

$0 + 1 = 1 + 0 = 1$

$1 + 1 = 10$ (أو بعبارة أخرى (0) والباقي (1) يضاف إلى ناتج الجمع للمرتبة اللاحقة) .

ولكي نثبت أن قيمة (1+1) تساوي في النظام الثنائي للأعداد (10) فإننا نعلم ، وكما تعودنا في النظام العشري للأعداد ، بأن مجموع (1+1) يساوي (2) . وبإستخدام المعادلة (6) نجد إن س$_2$ = 10 ، يعني :

س$_2$ = $0 \times 2^0 + 1 \times 2^1$

= $0 + 2$

(س$_2$)$_{10}$ = 2

وبذلك إثبتنا إن (1+1) في النظام الثنائي للأعداد يساوي (10) .

وتدعى طريقة جمع عددين ثنائيين بأسلوب مشابه للجمع في النظام العشري للأعداد بـ (**خوارزمي الجمع في النظام الثنائي للأعداد**) .

مثال :

بإستخدام **خوارزمي الجمع في النظام الثنائي للأعداد**. جد ناتج العدد (س) التالي . ثم أثبت صحة الناتج ، بتحويل الأعداد إلى النظام العشري للأعداد وإستخدام (**خوارزمي الجمع في النظام العشري للأعداد**) .

س$_2$ $= 1100 + 1101$

الحل :

في النظام الثنائي للأعداد :

1 الباقي

1101 المضاف

1100 المضاف اليه

11001

∴ س$_2$ $= 11001$

ولو حولنا الأعداد إلى النظام العشري للأعداد بواسطة (**خوارزمي تحويل الثنائي إلى عشري**) كما يلي :

$$(1101)_{10} = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3$$
$$= 1 + 0 + 4 + 8$$
$$= 13$$

$$(1100)_{10} = 0 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^3$$
$$= 0 + 0 + 4 + 8$$
$$= 12$$

اذن س$_2$ $= 13 + 12 = 25$

ولتحويل س $_2$ إلى النظام العشري نتبع (**خوارزمي تحويل الثنائي إلى عشري**) .

$$(س_2)_{10} = 11001$$

$$= 1\times2^0 + 0\times2^1 + 0\times2^2 + 1\times2^3 + 1\times2^4$$

$$= 1 + 0 + 0 + 8 + 16$$

$$(س_2)_{10} = 25$$

إذن العدد الثنائي(11001) يساوي العدد (25) في النظام العشري للأعداد وناتج الجمع للأعداد الثنائية صحيح.

مثال :

إجمع العدد الثنائي (1010) مع العدد الثنائي (0001) .

الحل :

بإتباع خوارزمي الجمع في النظام الثنائي للأعداد نجد إن :

$$\begin{array}{r} 1010 \\ +\ 0001 \\ \hline 1011 \end{array}$$

اذن س $_2$ = 1011

2-3- الطرح في النظام الثنائي للأعداد :

كما في النظام العشري للأعداد فإننا نقوم بطرح كل رقم (من العدد **المطروح**) من الذي يكافئه من ناحية المرتبة (في العدد **المطروح منه**). وإذا كان الرقم في العدد **المطروح منه** لايكفي ، فنستدين واحد من المرتبة المجاورة (التي إلى اليسار) أو بعبارة أصح (عشرة) . فلو قمنا بطرح (671)من (765) فسنحصل على ما يلي :

10+ -1 الاستدانة

5 6 7 المطروح منه

- 1 7 6 المطروح

4 9 0

وندعو هذه الطريقة بـ **خوارزمي الطرح في النظام العشري للأعداد** .

مثال :

إطرح العدد الثنائي (1001) من العدد الثنائي(1010)

الحل :

بإستخدام **خوارزمي الطرح في النظام الثنائي للأعداد** نرتب العددين واحد فوق الآخر ، بحيث يكون المطروح منه إلى أعلى والمطروح هو الأسفل ثم نقوم بعملية الطرح للأرقام الثنائية وكما يلي :

1 الاستدانة

1010 المطروح منه

- 1001 المطروح

1001

مثال :

جد ناتج مايأتي :

$س_2 = 101101 - 11010$

الحل :

بإتباع **خوارزمي الطرح في النظام الثنائي للأعداد** ، نجد أن :

1 11	الاستدانة	
110010	المطروح منه	
- 101101	المطروح	
000101		

س $_2$ = 101

مثال :

جد قيمة س$_2$ إذا كانت :

إذن س $_2$ = 1101001 - 10110

الحل :

بواسطة (**خوارزمي الطرح في النظام الثنائي للأعداد**) نجد أن:

11 1	الاستدانة	
1101001	المطروح منه	
10110	المطروح	
1010011		

3-3- الضرب في النظام الثنائي للأعداد :

لقد تعلمنا من دراستنا في السنين السابقة أننا لكي نجد حاصل ضرب عددين في النظام العشري للأعداد ، فإننا نقوم بضرب كل رقم من عدد بجميع الأرقام في العدد الآخر ، ثم نأخذ الرقم التالي بالمرتبة ونضربه بنفس الطريقة كما في المثال التالي . حيث نضرب (65) بالعدد (392) على شرط أن نتذكر أنه إذا تخلف باقي من عملية الضرب فنضيفه للخطوة التالية ثم نجمع نواتج الضرب وكما يلي :

$$
\begin{array}{rl}
392 & \text{المضروب} \\
\times\ 65 & \text{المضروب به} \\
\hline
1960 & \\
2352\ \ + & \\
\hline
25480 &
\end{array}
$$

وهذه الطريقة تدعى بـ(**خوارزمي الضرب في النظام العشري للأعداد**) . أما في النظام الثنائي للأعداد فنتبع نفس الخوارزمي بشرط أن نتذكر ما يلي :

$$0 = 0 \times 0$$
$$0 = 1 \times 0$$
$$0 = 0 \times 1$$
$$1 = 1 \times 1$$

وعندما نتبع نفس الخوارزمي السابق على الأعداد الثنائية ، نسمي ذلك بـ(**خوارزمي الضرب في النظام الثنائي للأعداد**) . وكما مبين في المثال التالي :

مثال :

باتباع (**خوارزمي الضرب في النظام الثنائي للأعداد**) :
إضرب العدد (1011) بالعدد (10111) .

الحل :

$$
\begin{array}{r}
10111 \\
1011 \times \\
\hline
10111 \\
10111 \\
00000 \\
10111 \\
\hline
1111101
\end{array}
$$

مثال :

أفرض ص $_2$ = 1101

ع $_2$ = 1100

جد قيمة س $_2$ = ص $_2$ × ع $_2$

الحل :

بإستخدام (**خوارزمي الضرب في النظام الثنائي للأعداد**)

نجد إن :

$$
\begin{array}{r}
1101 \\
1100 \times \\
\hline
0000 \\
0000 \\
1101 \\
1011 + \\
\hline
10011100
\end{array}
$$

مثال :

جد حاصل ضرب العددين الثنائيين (10) و (100) ثم حقق النتيجة

بتحويلهما إلى النظام العشري للأعداد .

الحل :

بإتباع (خوارزمي الضرب في النظام الثنائي للأعداد) نجد أن :

$$\begin{array}{r} 100 \\ 10\ \times \\ \hline 000 \\ 100\ \ + \\ \hline 1000 \end{array}$$

$\therefore$ س$_2$ = 1000

ولكي نتأكد من النتيجة ، تحول الأرقام الثنائية إلى أرقام عشرية بواسطة (**خوارزمي تحويل الثنائي إلى عشري**) ، (المعادلة (6))

(ص$_2$)$_{10}$ =(10)$_{10}$

$= 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1 = 0 + 2 = 2$

(ع$_2$)$_{10}$ =(100)$_{10}$

$= 0 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2 = 0 + 0 + 4 = 4$

$\therefore$ (س)$_{10}$ = $2 \times 4 = 8$

وبتحويل س$_2$ إلى النظام العشري للأعداد نجد إن :

س$_2$ = 1000

(س$_2$)$_{10}$ = $0 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3$

$= 0 + 0 + 0 + 8$

(س$_2$)$_{10}$ = 8

$\therefore$ (س$_2$)$_{10}$ = س$_{10}$

وهو المطلوب .

4-3 - القسمة في النظام الثنائي للأعداد :

لو تأملنا القسـمة في النظام العشري للأعداد ، لوجدناها تخضع للتجربة والخطأ كما في المثال التالي :

ص = 15461 ÷ 130 =

```
         118
      ________
130 | 15461
       130
       ----
        246
        130
       -----
        1161
        1040
       -----
         121
```

∴ ص = 15461 ÷ 130 = 118 والباقي 121

(وخوارزمي القسـمـة في النظام الثنائي للأعـداد) يتم بنفس الأسلوب السابق وكما نلاحظ ذلك في الأمثلة التالية

مثال :

جد ناتج قسمة العدد الثنائي(101101) على العدد الثنائي (100) .

الحل :

س = 101101 ÷ 100 =

```
          1011
      _________
100 | 101101
       100    -
       ------
       00110
          100  -
       -------
         0101
          100  -
         -----
          001
```

∴ س = 1011 والباقي (1)

مثال :

أفرض أن :

ع = 100

ص = 10100

جد قيمة س = ص ÷ ع

ثم حقق النتيجة بضرب (س) في (ع) بحيث ينتج (ص)

الحل :

س = ص ÷ ع = 10100 ÷ 100 =

$$\begin{array}{r|l} \multicolumn{1}{r}{101} & \\ \hline 10100 & 100 \\ 100 & \\ \hline 00100 & \\ 100 & \\ \hline 000 & \end{array}$$

∴ س = 101

ولكي نتحقق من النتيجة نضرب (ع) في (س) باستخدام (خوارزمي الضرب في النظام الثنائي للأعداد) :

ع × س = 100 × 101

$$\begin{array}{r} 101 \\ 100\ \times \\ \hline 000 \\ 000 \\ 101\ + \\ \hline 10100 \end{array}$$

∴ ص = ع × س = 10100

وهو المطلوب .

مثال :

جد ناتج قسمة العدد (10001) على العدد (11) ثم حقق النتيجة بنفس الطريقة المتبعة في المثال السابق .

الحل :

أفرض أن :

$س_2$ = 10001

$ص_2$ = 11

بإتباع (خوارزمي القسمة في النظام الثنائي للأعداد) نجد أن :

= $س_2 \div ص_2$

$$\begin{array}{r|l} 101 & \\ \hline 10001 & 11 \\ 11 & \\ \hline 00101 & \\ 11 & \\ \hline 010 & \end{array}$$

∴ الناتج هو $ك_2$ = 101 واالباقي $ب_2$ = 10

ولكي نثبت النتيجة نقوم بضرب ($ك_2$) في ($ص_2$) ثم نضيف ($ب_2$) إلى النتائج فيفترض أن نحصل على $س_2$ وكما يلي :

$ك_2 \times ص_2$

$$\begin{array}{r} 101 \\ 11\ \times \\ \hline 101 \\ 101\ \ + \\ \hline 1111 \end{array}$$

ثم نضيف للناتج $ب_2$ فنجد أن :

$10001 = 10 + 1111$

∴ الناتج = $س_2$. وهو المطلوب .

مثال :

أفرض (كما في المثال السابق) أن :

$س_2 = 10001$

$ص_2 = 11$

جد ناتج قسمة ($س_2$) على ($ص_2$) وذلك بتحويل كل عدد ثنائي إلى عدد عشري . ثم أجري القسمة . ثم أثبت أن الأعداد العشرية الناتجة هي نفس الأعداد الثنائية الناتجة من القسمة في المثال السابق .

الحل :

بإستخدام المعادلة (6) نجد أن

(1) $(س_2)_{10} = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^4$

$= 1 + 0 + 0 + 0 + 16$

$= 17$

(2) $(ص_2)_{10} = 1 \times 2^0 + 1 \times 2^1$

$= 1 + 2$

$= 3$

∴ $(س_2)_{10} \div (ص_2)_{10} = 17 \div 3 = 5$ والباقي (2)

∴ $ك_2 = 5$ و $ب_{10} = 2$

والان يجب ان نثبت ان $(ك_2) = ك_{10}$ ، $(ب_2)_{10} = ب_{10}$

$(ك_2)_{10} = 1 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^2$

$= 1 + 0 + 4$

$= 5$

$\therefore$ $(ك_2)_{10} =$ $ك_{10}$

والان نثبت ان :

$(ب_2)_{10} =$ $ب_{10}$

حيث $(ب_2)_{10} = 0 \times 2^0 + 1 \times 2^1$

$= 0 + 2$

$(ب_2)_{10} = 2$

وهو يساوي $ب_{10}$

وهو المطلوب .

4- تحويل الأعداد العشرية إلى أعداد ثنائية :

لقد لاحظنا من تطبيق المعادلة (6) ، في الفقرة (2) من هذا الفصل أننا نستطيع تحويل العدد من النظام الثنائي للأعداد إلى عدد في النظام العشري للأعداد . ولو أردنا القيام بالعكس فإننا نقوم بقسمة العدد العشري على (2)ونسجل الباقي على جهة ونقسم الناتج على (2) ونسجل الباقي على يسار الباقي السابق ، وهكذا نستمر بالعملية حتى نصل إلى الرقم (0) . ويمكننا أيضاً كتابة الباقي على شكل عمود . فعند ذاك يصبح العدد الثنائي عبارة عن **سلسلة من الباقي** ، بشرط أن يكون آخر رقم ثنائي **باقي** هو إلى أقصى اليسار في العدد الثنائي ويليه الرقم الذي يليه ويوضع إلى يمينه ، وهكذا مبتدءاً من الأسفل إلى الأعلى. وتدعى هذه الطريقة (**خوارزمي تحويل العدد العشري إلى ثنائي**) وفيما يلي بعض الأمثلة على ذلك .

مثال :

جد العدد الثنائي الذي يساوي بالقيمة العدد (6) في النظام العشري .

الحل :

نتبع **(خوارزمي تحويل العدد العشري إلى ثنائي)** ، وذلك بقسمة العدد (6) على (2) وتسجيل الباقي ونستمر بالعملية إلى أن يتحول (6) إلى (0) .

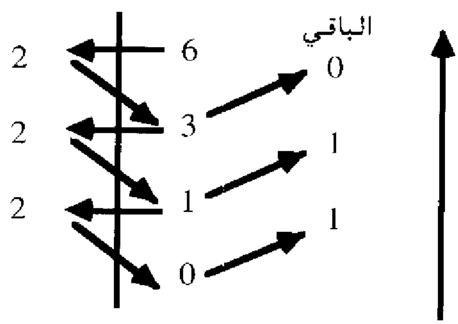
$6 \div 2 = 3$ والباقي (0)

$3 \div 2 = 1$ والباقي (1)

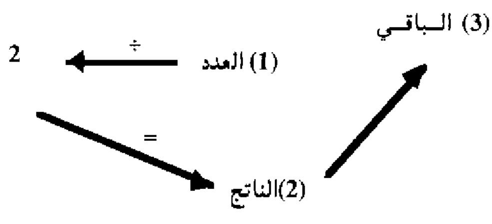
$1 \div 2 = 0$ والباقي (1)

فيكون العدد الثنائي هو (110)

ويمكن كتابة الصيغة السابقة على الصورة التالية :



إتجاه السهم من الاسفل الى الاعلى يمثل العدد الثنائي من اليسار إلى اليمين .ويمكن إختصار الخوارزمي هذا بالرسم التوضيحي التالي :



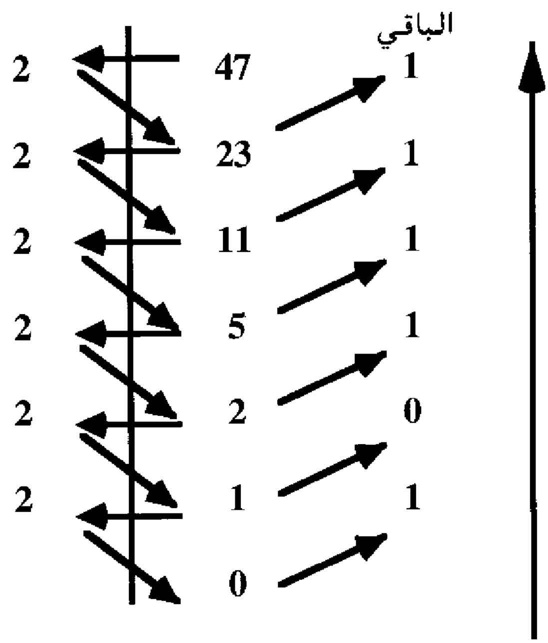
حيث نضع الناتج بدل العدد ونكرر العملية عدة مرات حتى نصل إلى الناتج يساوي (0) ، وبعد ذلك نكتب العدد الثنائي والذي يمثل قيم الباقي بدءاً من الأسفل إلى الأعلى .

مثال :

جد العدد الثنائي الذي يساوي بالقيمة العدد العشري (47) .

الحل :

بإستخدام (**خوارزمي تحويل العشري إلى ثنائي**) نجد أن:

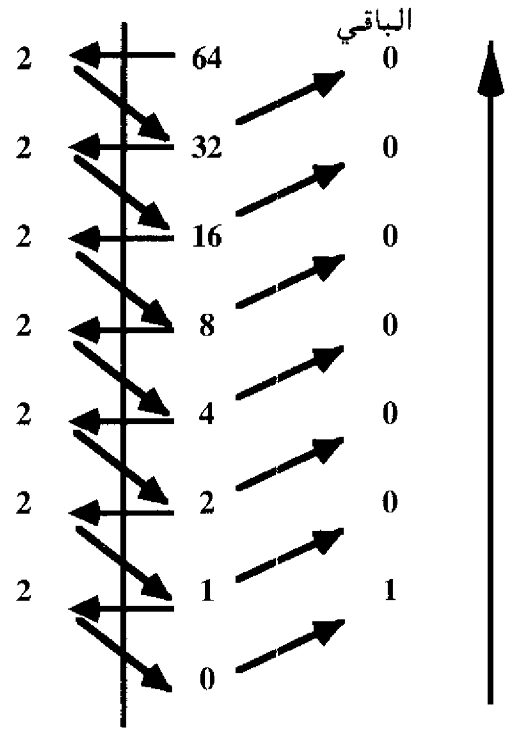


ونكتب باقي القسمة بحيث يصبح الرقم الذي إلى الأسفل في أقصى اليسار ، والأعلى في أقصى اليمين أي ان العدد الثنائي هو (101111) .

مثال :

بإستخدام **خوارزمي تحويل العشري إلى ثنائي** جد قيمة العدد العشري (64) .

الحل :



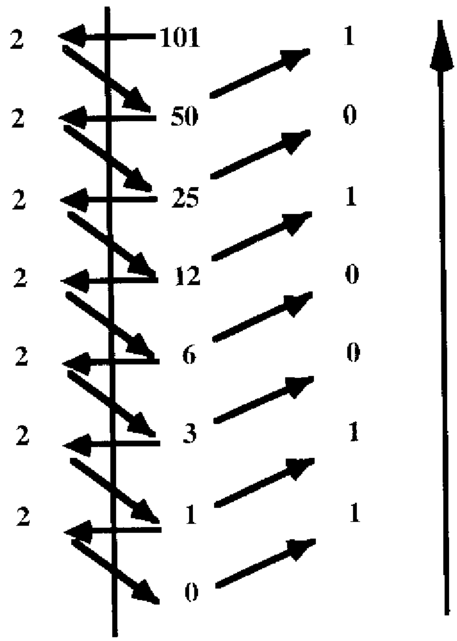
إذن العدد الثنائي هو (1000000) .

مثال :

جد قيمة العدد الثنائي الذي يكافىء العدد العشري (101) . ثم حقق النتيجة .

الحل :

بإستخدام (**خوارزمي تحويل العشري إلى ثنائي**) نجد أن



إذن العدد الثنائي هو (1100101)

ولكي نتأكد من قيمة العدد الثنائي نحوله بواسطة (**خوارزمي تحويل الثنائي إلى عشري**) كما في المعادلة (6) من الفقرة (2) من هذا الفصل:

$$2^6\times1 + 2^5\times1 + 2^4\times0 + 2^3\times0 + 2^2\times1 + 2^1\times0 + 2^0\times1 = (\text{س}_2)_{10}$$

$$64 + 32 + 0 + 0 + 4 + 0 + 1 =$$

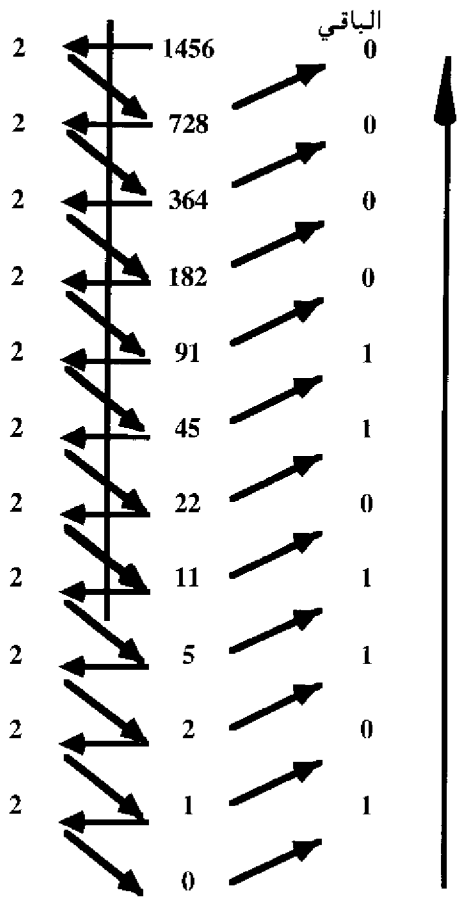
$$101 =$$

∴ العدد الثنائي (1100101) يكافىء العدد العشري (101) .

مثال :

بإستخدام (**خوارزمي تحويل العشري إلى ثنائي**) جد العدد الثنائي والذي يكافىء العدد العشري 1456 .

الحل :



∴ العدد الثنائي هو (10110110000) .

5- النظام الثماني للأعداد :

كما شرحنا في الفقرة (1) من هذا الفصل ، فإن المعادلات العامة لأي نظام للأعداد هي المعادلتين (1) و (2) والتي سنكتبها مرة أخرى فيما يلي للتذكير :

$$س_{ر} = ق_{0}\ ق_{1}\ ق_{2} \cdot\cdot\ ق_{ن} \quad .... (1)$$

$$س_{ر} = ق_{0}\times ر^{0} + ق_{1}\times ر^{1} + ق_{2}\times ر^{2} + ق_{3}\times ر^{3} + \cdot\cdot + ق_{ن}\times ر^{ن} \quad .... (2)$$

حيث ر تمثل الأساس الذي يقوم عليه النظام العددي . فلوإفترضنا أن ر = 8 . فسنحصل على نظام جديد للأعداد ندعوه **النظام الثماني للأعداد** وهذا النظام تكون فيه قيمة (ق) بثمانية إحتمالات هي (7 , 6 , 5 , 4 , 3 , 2 , 1 , 0) .

من ذلك نستطيع أن نكتب المعادلتين (1) و (2) بصيغة أخرى تلائم **النظام الثماني للأعداد** وكما في المعادلتين (7) و (8) التاليتين

$$س_{8} = ق_{0}\ ق_{1}\ ق_{2} \cdot\cdot\ ق_{ن} \quad .... (7)$$

$$س_{8} = ق_{0}\times 8^{0} + ق_{1}\times 8^{1} + ق_{2}\times 8^{2} + ق_{3}\times 8^{3} + \cdot\cdot + ق_{ن}\times 8^{ن} \quad .... (8)$$

حيث إن عدد المراتب يساوي (ن + 1) أما (ق) فيتراوح بين (0) و (7) . والمعادلة (8) ، تمثل لنا (**خوارزمي تحويل الثماني إلى عشري**) للرقم الثماني الذي نمثله حسب المعادلة (7) .

مثال :

جد العدد العشري الذي يقابل العدد الثماني (531)

الحل :

حسب المعادلة (7) نجد أن عدد المراتب = 3 = ن+1

$$س_{8} = 531 = ق_{0}\ ق_{1}\ ق_{2}$$

حيث أن :

$ق_0 = 1$

$ق_1 = 3$

$ق_2 = 5$

وحسب المعادلة (8) نجد إن :

$\therefore (س_8)_{10} = ق_0 \times ر^0 + ق_1 \times ر^1 + ق_2 \times ر^2$

$= 1 \times 8^0 + 3 \times 8^1 + 5 \times 8^2$

$= 1 \times 1 + 3 \times 8 + 5 \times 64$

$= 1 + 24 + 320$

$= 345$

إذن العدد (531) في النظام الثماني للأعداد ، يساوي (345) في النظام العشري للأعداد .

مثال :

جد العدد العشري الذي يقابل العدد الثماني (476) .

الحل :

$س_8 = 476 = ق_0\, ق_1\, ق_2$

$\therefore ق_0 = 6 ،\ ق_1 = 7 ،\ ق_2 = 4$

ولإيجاد ($س_8$) في النظام العشري للأعداد ، تطبق المعادلة (8) وكما يلي

$(س_8)_{10} = 1 \times 8^0 + 7 \times 8^1 + 4 \times 8^2$

$= 6 \times 1 + 7 \times 8 + 4 \times 64$

$= 6 + 56 + 256$

$= 318$

6- تحويل الأعداد الثنائية إلى أعداد ثمانية :

قلنا في الفقرة السابقة بأن (ق) يكون بثمانية إحتمالات في النظام الثماني للأعداد هي من (0) إلى (7) . ويمكننا أن نرمز إلى الإحتمالات الثمانية هذه بعدد ثنائي يتكون من ثلاثة مواضع ثنائية ، أي إن عدد المراتب يساوي (3) ، كما نلاحظ ذلك في الجدول التالي :

الرقم الثماني	العدد الثنائي
0	000
1	001
2	010
3	011
4	100
5	101
6	110
7	111

وكما نلاحظ فإن عدد ثنائي مكون من ثلاثة أرقام ثنائية ، يستطيع تمثيل ثمانية إحتمالات . وهذا يناسب النظام الثماني للأعداد وندعو الرقم الثنائي (أو **الموضع الثنائي**) باللغة الإنكليزية (**بت**) ومجموعة الأرقام الثنائية ، أي العدد الثنائي ، بـ(**الحزمة الثنائية**) ويدعى باللغة الإنكليزية (**بايت**) أو بعبارة أخرى فإن **العدد الثماني** يمكن تمثيله بـ (**بايت**) مكون من (3-**بت**) بواسطة (**خوارزمي تحويل الثنائي إلى ثماني**) . ولهذه الطريقة في تمثيل العدد الثنائي فائدة كبيرة . فلو كان لدينا مثلاً العدد الثنائي(101110100) . والذي يتكون من (9) أرقام ثنائية (**أي 9 - بت**) فإنه يمكن أن نجزئه إلى ثلاثة أجزاء (**حزم**) من الأرقام (**أي 3 - بايت**) . كل منها يتكون من (3 - **بت**) . وكل بايت يمكن تحويله إلى عدد من **النظام الثماني للأعداد**

وكما يلي :

101	110	100
5	6	4

أي إننا وجدنا الرقم الثماني الذي يقابل كل **حزمة ثنائية** (أي **بايت**) وبذلك إختصرنا عملية كتابة سلسلة طويلة من أرقام (0) و (1)، مما قد يسبب أخطاء كثيرة .

مثال :

جد العدد الثماني الذي يكافىء العدد الثنائي التالي :

111011000010

الحل :

نجزىء العدد الثنائي إلى (4 - **بايت**) كل واحد يحتوي على (3 - **بت**) . ونجد العدد الثماني الذي يكافىء كل **بايت** على حدة :

111	011	000	010
7	3	0	2

7- المتممات :

إن المتمم هو عدد يضاف إلى عدد آخر ، كي نحصل على عدد ثالث هو رقم الأساس للنظام العددي أو مضاعفاته الأسية ، فلو كنا نتحدث عن النظام العشري للأعداد مثلاً ، فإن العدد الأساس للنظام هو (10) ومضاعفاته الأسية هي (10^2 ، 10^3 ، 10^4 ، ... ، $10^{\text{ن}+1}$) فإذا كان لدينا عدد عشري معين فإن المتمم له، هو أقرب أكبر مضاعفات العشرة

له ناقصاً العدد العشري الذي نريد إيجاد المتمم له . مثال على ذلك أن **متمم** العدد (91) مثلاً هو ، أقرب أكبر مضاعفات العشرة (وهو (100)) ناقصاً العدد المعطى (أي 91) فيكون الناتج (9) والذي يمثل متمم (91) ونستطيع أن نضع الشرح السابق بصيغة **معادلة عامة** كما يلي :

$$م_ر = ر^{ن+1} - ع_ر \quad .... (9)$$

حيث ر هو الأساس للنظام .

$م_ر$ هو **المتمم** في النظام الرائي للأعداد .

(ن + 1) يمثل عدد المراتب للعدد ع .

$ع_ر$ العدد الذي يراد إيجاد المتمم له .

ولو كان العدد الأساس للنظام (ر) يساوي (10) ، أي إننا نتحدث عن النظام العشري للأعداد ، فإن **المتمم** ممكن أن يوضع بصيغة المعادلة العامة التالية :

$$م_{10} = 10^{ن+1} - ع_2 \quad ... (10)$$

أما في النظام الثنائي للأعداد فتكون المعادلة كما يلي :

$$م_2 = 2^{ن+1} - ع_2 \quad ... (11)$$

حيث تمثل (ن+1) عدد المراتب أو المواضع الثنائية للعدد الثنائي ($ع_2$).

مثال :

جد المتمم للعدد العشري (103) .

الحل :

عدد المراتب يساوي (3) .

إذن ن+1 = 3

ثم بتطبيق المعادلة (10) نجد أن :

$$م_{10} = 10^3 - 103$$

$$= 897$$

مثال :

جد المتمم للعدد الثنائي(1101)

الحل :

نلاحظ أن عدد المراتب هو (4) .

∴ ن + 1 = 4

وبتطبيق المعادلة (11) **نجد** أن :

م٢ = $2^4 - 1101$

= $10000 - 1101$

= 11

وهناك طريقتان للحصول على متمم العدد . وهما :

1-7- متمم الأساس :

وهي الطريقة المباشرة ، والتي تنطبق عليها المعادلة (9) بصورة عامة . فلو كنا نتحدث عن النظام العشري للأعداد ، فهو يدعى (**متمم العشرة**) ، والذي تنطبق عليه المعادلة (10) ، أما إذا كنا نتكلم عن النظام الثنائي للأعداد (م٢)(أي متمم الاثنان) والذي نستطيع إيجاده، كما شرحنا سابقاً ، بتطبيق المعادلة (11) .

مثال :

جد (**متمم الإثنان**) للعدد (10001) .

الحل :

عدد المراتب يساوي (5)

∴ ن+ 1 = 5

وبتطبيق المعادلة (11) **نجد** أن :

م = 2 10001

$م_2 = 100000 - 10001$

$= 111$

ملاحظة :

نلاحظ من الأمثلة السابقة بأن $2^{ن}$ يعني رقم (1) وأمامه ، أي إلى يمينه ، (ن) من الأصفار . أي أن (2^4) هو (1) وأمامه أربعة أصفار . و (2^5) هو (1) وأمامه خمسة أصفار أي (100000)، كما في المثال السابق.

2-7- متمم (الأساس ناقص واحد) :

وفي النظام الثنائي للأعداد يكون الأساس هو (2) لذلك فإن **متمم الأساس** (**ناقص واحد**) . يعني متمم (1) أي (**متمم الواحد**) والذي يمكن وضعه بصيغة معادلة عامة كما يلي :

$$م_{ر-1} = (ر^{ن+1} - 1) - ع \quad ... (12)$$

وفي النظام الثنائي للأعداد تصبح المعادلة (12) كما يلي :

$$م_1 = (2^{ن+1} - 1) \quad ... (13)$$

مثال :

جد (**متمم الواحد**) للعدد (1100101) .

الحل :

نلاحظ أن عدد المراتب = 7

وبتطبيق المعادلة (12) نجد أن :

$م_1 = (2^7 - 1) - 1100101$

$= (10000000 - 1) - 1100101$

$= 1111111 - 1100101$

$م_1 = 11010$

مثال :

جد (**متمم الاثنان**) و (**متمم الواحد**) للعدد(11000)

الحل :

عدد المراتب = 5

∴ ن + 1 = 5

وبتطبيق المعادلة (11) نجد (**متمم الاثنان**) وكما يلي :

$م_2 = 2^5 - 11000$

$= 100000 - 11000$

$م_2 = 1000$

ولإيجاد (**متمم الواحد**) نطبق المعادلة (13) وكما يلي :

$م_1 = (2^5 - 1) - 11000$

$م_1 = (100000 - 1) - 11000$

$= 11111 - 11000$

∴ $م_1 = 111$

ومن هذا المثال نلاحظ أننا **لو أضفنا واحد إلى (متمم الواحد) لأصبح (متمم الإثنان)** .

ملاحظة :

إن الحد($2^{ن+1}$ –1) يساوي في الواقع(ن + 1) من رقم (1) . فلو كان (ن+1) يساوي7 فإن(2^7 - 1) يساوي سبعة أرقام (1) ، أي(1111111) ولو كان (ن + 1) يساوي (5)، فإن(2^5 - 1) يساوي خمسة أرقام (1) ، أي (11111) .