الفصل الثالث

علم المنطق

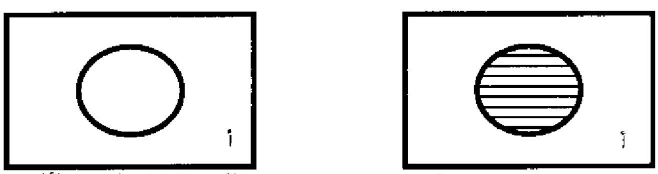
1- تمثيل الكميات الجبرية المنطقية :

لو فرضنا إنه يوجد لدينا حيز معين ، بحيث تكون العناصر المكونة له عبارة عن **عناصر ثنائية الحالة** . فهي أما **موجودة** أو **غير موجودة** ، أي إما **حقيقية** أو **زائفة** . أو بعبارة أخرى إما (1) أو (0) . فمثلاً لو مثلنا الحيز بمستطيل ، فإننا سنقوم بتظليل الحيز (أي المستطيل) بخطوط أفقية للدلالة على وجود العناصر ، أي العناصر في حالة (1) . ونترك الحيز دون تظليل عند عدم وجود العناصر المنطقية ، أي تكون العناصر في حالة (0) كما في الشكل (1) :

العناصر موجودة العناصر غير موجودة

الشكل (1)

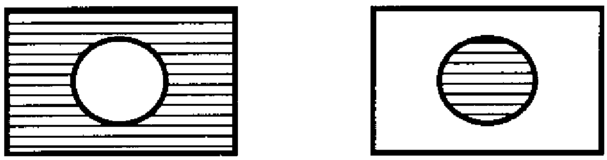
ولنفترض أنه يوجد لدينا كمية جبرية منطقية سنرمز لها بالحرف (أ)داخل الحيز ،وسنرمز للكمية (أ) بدائرة داخل المستطيل . فإذا كانت الكمية (أ) موجودة فإننا نرمز لها بدائرة مظللة داخل المستطيل أما لو كانت (أ) غير موجودة ، فإننا سنرمز لها بدائرة بيضاء (غير مظللة) كما في الشكل (2) :



الكمية المنطقية (أ) موجودة الكمية المنطقية (أ) غير موجودة

الشكل(2)

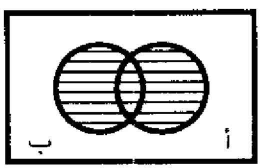
من تعريف المتمم (الوارد في الفقرة 7 الفصل 2) وجدنا بأن متمم العنصر يمثل معكوسه . فلو كانت لدينا الكمية المنطقية (أ) فإننا سنرمز للمتمم لها بنفس الحرف وفوقه خط صغير أي (أ̄) . ونستطيع تمثيله ، حسب طريقة الرسم السابقة ، كما مبين في الشكل (3) على شكل دائرة بيضاء داخل مستطيل مظلل .



أ̄   أ

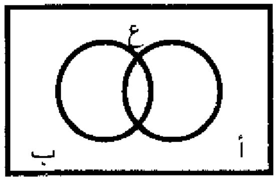
الشكل (3)

ولو كانت لدينا كمية منطقية أخرى تدعى (ب) تمتلك عناصر مشتركة مع الكمية (أ) فإننا نستطيع أن نمثل (ب) على شكل دائرة أخرى متداخلة مع دائرة (أ) كما في الشكل (4) .



الشكل (4)

إن العناصر المشتركة فقط بين الكمية (أ) والكمية (ب) ، تدعى تقاطع (أ) مع (ب) . ونرمز للتقاطع بالرمز (∩) ويمثل التقاطع (∩) المنطقة المشتركة (أو الحيز المشترك) ، وسنرمز لها بالحرف (ع) ، والتي تتواجد فيها عناصر (أ) وعناصر (ب) معاً في آن واحد وسنظلل فقط هذه المنطقة التي تمثل تقاطع (أ) مع (ب) في الشكل (5) التالي للتوضيح :



الشكل(5)

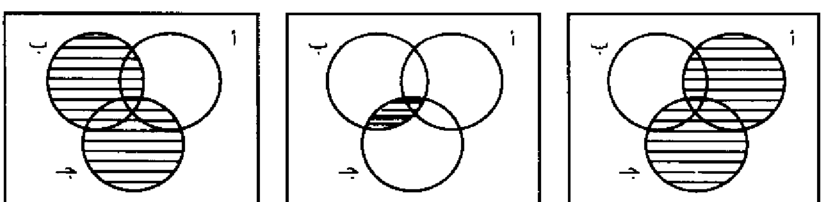
ومن الرسم أعــلاه نســتطيع أن نـلاحظ المنطقــة المظللة والـتي سندعـوها (ع) تمثـل تقـاطع (أ) و (ب) . وفي جبـر المنطق يتم تمثـيـل التقاطع (∩) بين (أ) و (ب) بنقطة توضع بين الحرفين . أي أن :

ع = أ . ب

أما المنطقة التي تتـواجد فيـهـا (أ) أو (ب) فـهي كل المنـطقة المظللة في الشكل (4) أعلاه ولو سميناها بالحرف (د) ، حيث يمثل الرمز (∪) أتحاد (أ) و(ب) . أما في جبر المنطق فـتمثل بإشارة (+) توضع بين (أ) و (ب) . أي أن :

د = أ + ب

وبنفس الطريقة يمكن أن نمثل ثلاثة كميات منطقية مثل (أ، ب ، حـ) تترابط فيما بينها بعلاقات منطقيـة (أي أتحاد أو تقاطع) . وكمـا موضح في الشكل(6) أدناه :



اتحاد (أ) مع (جـ)
اي (أ + جـ)

تقاطع (ب) مع (جـ)
اي (ب . جـ)

اتحاد (ب) مع (جـ)
اي (ب + جـ)

الشكل (6)

امثلة توضيحية حول كيفية تمثيل ثلاث كميات منطقية

وتدعى طريقة التمثيل هذه بمخطط ڤين (نسبة إلى العالم الذي إبتكره) ، والتي سنرى أهميتها في تسهيل حل المعادلات الجبرية المنطقية في الفقرات التالية من هذا الفصل .

2- الجبر البووليياني :

وهو علم المنطق الرياضي . وسمي بالجبر البووليياني نسبة إلى العالم الذي وضع أسسه . وهو جبر تكون الكميات فيه منطقية ، ولا يشترط أن تكون كميات عددية كما في الجبر الأعتيادي ، أما الإشارات الجبرية (إن صحت التسمية) في هذا النوع من الجبر فهي علامة (+) والتي تعني أتحاد مجموعتين أو أكثر ، ولا تعني عملية جمع ، كما في الجبر الاعتيادي . وعلامة (.) والتي تعني تقاطع مجموعتين أو أكثر ، ولا تعني عملية ضرب ، كما في الجبر الاعتيادي . وللجبر البووليياني مبادئ قائمة على عدد من البديهيات والنظريات والتي سنثبتها فيما بعد بطريقة مخطط ڤين .

2-1- بديهيات الجبر البووليياني :

(1) البديهية الأولى (تعريف الجبر البووليياني) :

الجبر البووليياني هو نظام جبري مغلق يحتوي على مجموعة تحتوي على عناصر ثنائية الحالة (أي إما (واحد) أو (صفر) ويحوي على نوعين من العلاقات الجبرية هما الأتحاد ونرمز له بعلامة (+) والتقاطع ونرمز له بالعلامة (.) فإذا كان العنصر (أ) والعنصر (ب) معاً وضمن مجموعة تدعى(س) فيجب أن تكون المجموعة (أ + ب) والمجموعة (أ.ب) تنتميان معاً إلى المجموعة (س) .

(2) البديهية الثانية (المساواة) :

تتساوى كميتان من الجبر المنطقي (الجبر البووليياني) ، فقط إذا

كان بالإمكان التعويض عن إحداهما بالأخرى مثلاً :

إذا كانت أ = ب .

وكانت ب = جـ

فعندئذ يمكننا القول أن أ = جـ .

(3) البديهية الثالثة (وجود الحالة الثنائية) :

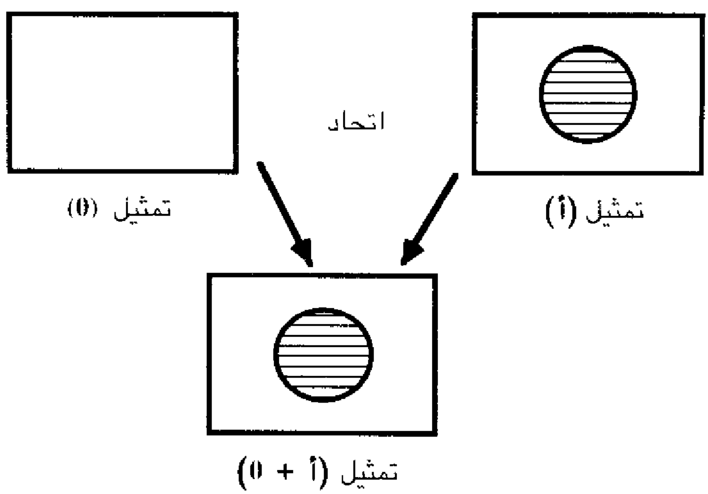
توجد عناصر ثنائية الحالة أي تكون إما (واحد) أو تكون (صفر) حيث أنه :

أ + 0 = أ .... (1)

أ . 1 = أ ..... (2)

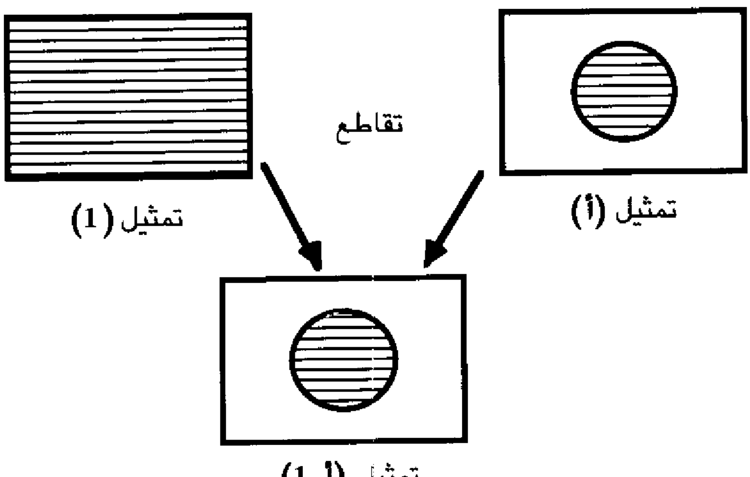
وللبرهنة على ذلك نستخدم مخطط ڤين وكما يلي :

لاثبات المعادلة (1) أعلاه نمثل مجموعة (أ) مظللة داخل مستطيل أبيض. أما (0) فنمثله بمستطيل غير مظلل (لأنه 0) . أما اتحادهما (لوجود إشارة (+)) فيساوي(أ) كما مبين في الشكل (7) ، والذي يمثل حيز تتواجد فيه العناصر الموجودة في (أ) أو الموجودة في (0) .



شكل (7)

ولإثبات المعادلة (2) بواسطة مخطط فين وكما الشكل (8) التالي :



شكل (8)

نلاحظ أن تقاطع (أ) مع (1) ، أي (أ.1) يمثل الحيز الذي تتواجد فيها عناصر (أ) و (1) معاً في آنٍ واحد . أو بمعنى آخر العناصر المشتركة فقط.

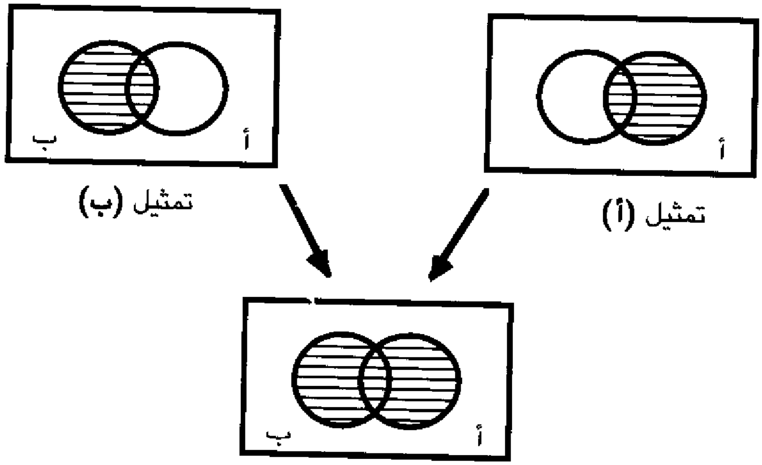
(4) البديهية الرابعة (خاصية الإستبدال) :

نفرض أن (أ) و (ب) هما مجموعتان متداخلتان في حيز ، أو مجموعة ثالثة ، تدعى (س) بحيث أن :

أ + ب = ب + أ .... (1)

أ . ب = ب . أ .... (2)

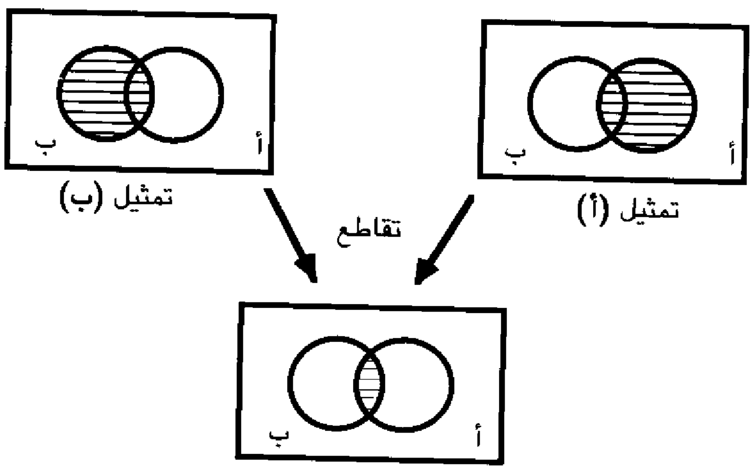
ولإثبات المعادلة (1) نرسم **مخطط ڤين** كما موضح في الشكل 9).



تمثيل (أ+ب) او تمثيل (ب+أ)

شكل (9)

أما لإثبات المعادلة (2) نرسم مخطط ڤين كما موضح في الشكل (10)



تمثيل (أ.ب) او تمثيل (ب.أ)

شكل (10)

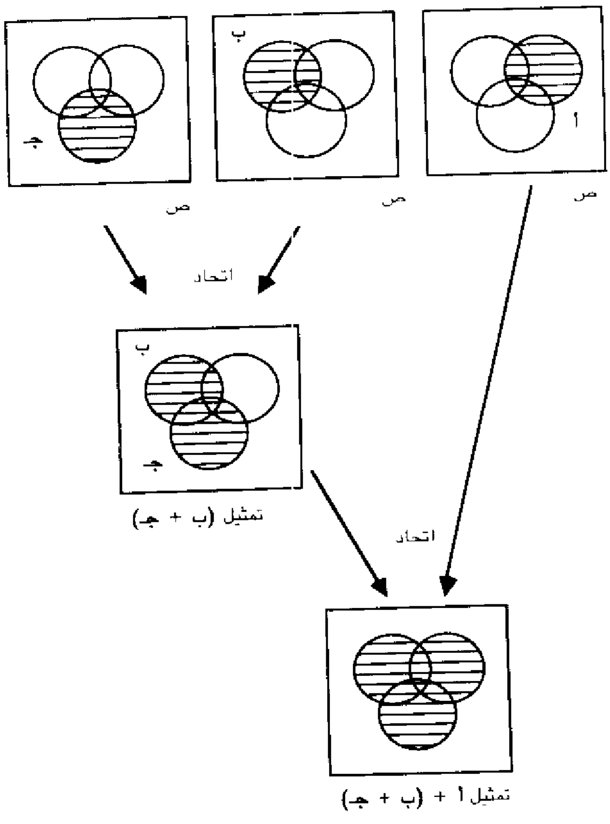
(5) البديهية الخامسة (خاصية المرافقة) :

نفرض أن (أ) و (ب) و (جـ) مجموعات موجودة معاً في مجموعة وتدعى (ص) بحيث أن :

أ + (ب+جـ) = (أ+ب) +جـ ....(1)

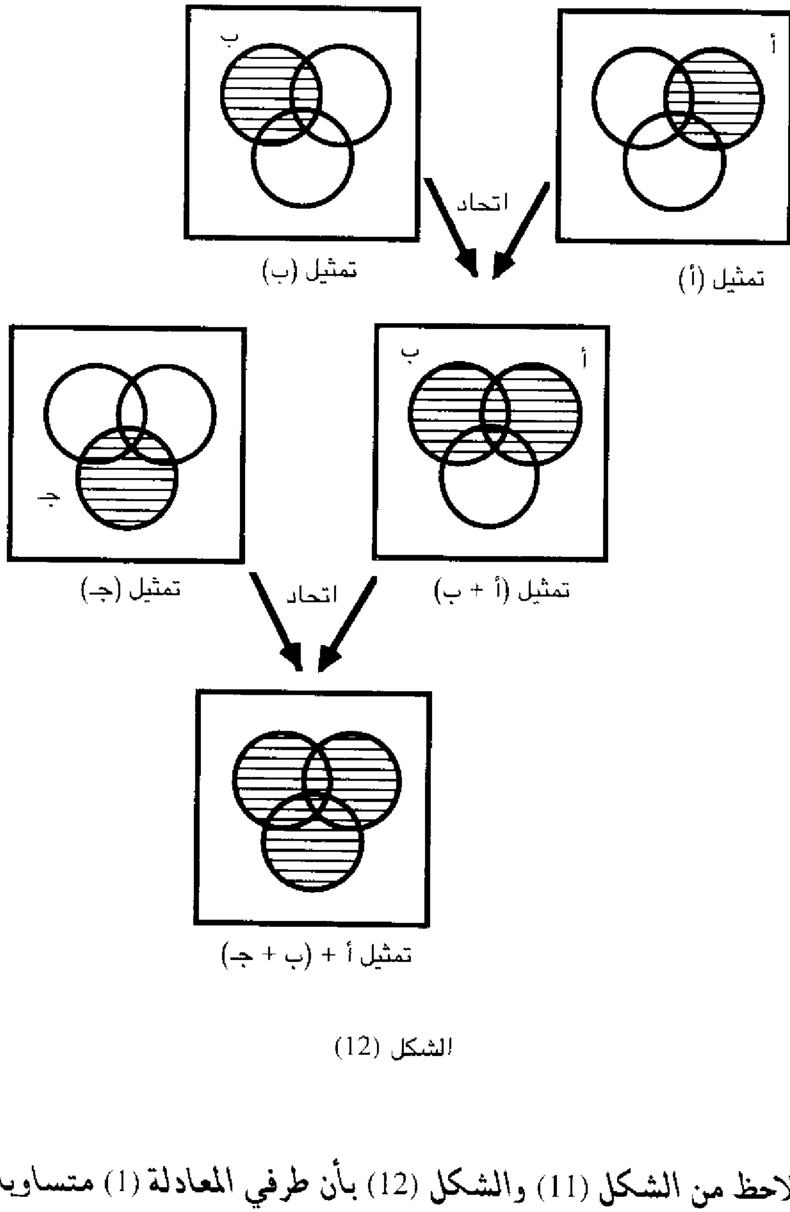
أ.(ب.جـ) = (أ.ب) . جـ ....(2)

نقوم بتمثيل الطرف الايمن للمعادلة (1) اعلاه كما في الشكل (11) ادناه:



شكل (11)

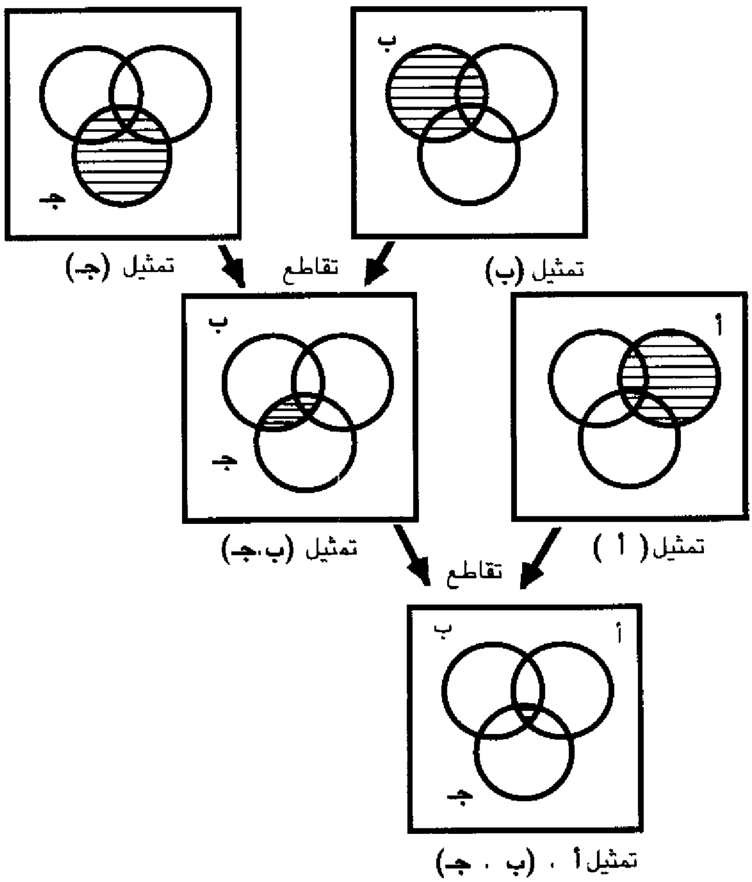
ونرسم مخطط ڤين للطرف الأيسر للمعادلة (1) كما في الشكل (12) أدناه



الشكل (12)

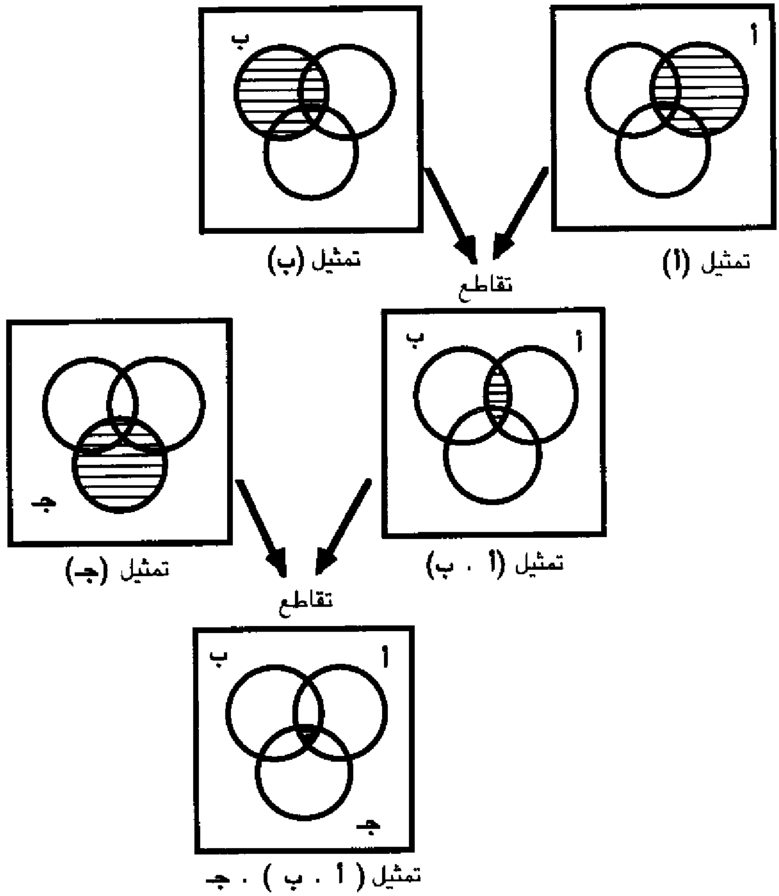
ونلاحظ من الشكل (11) والشكل (12) بأن طرفي المعادلة (1) متساويان

وتثبت المعادلة (2) البديهية (5) بنفس الطريقة السابقة فنرسم **مخطط فين** للطرف الأيمن للمعادلة (2) كما في الشكل (13) أدناه :



الشكل (13)

والآن نرسم **مخطط ڤين** للطرف الأيسر في المعادلة (2) البديهية (5) كما موضح في الشكل (14) أدناه :



الشكل (14)

ومن الشكلين (13) و (14) نلاحظ أن ((أ .ب) .جـ) يســـــاوي (أ.(ب.جـ))

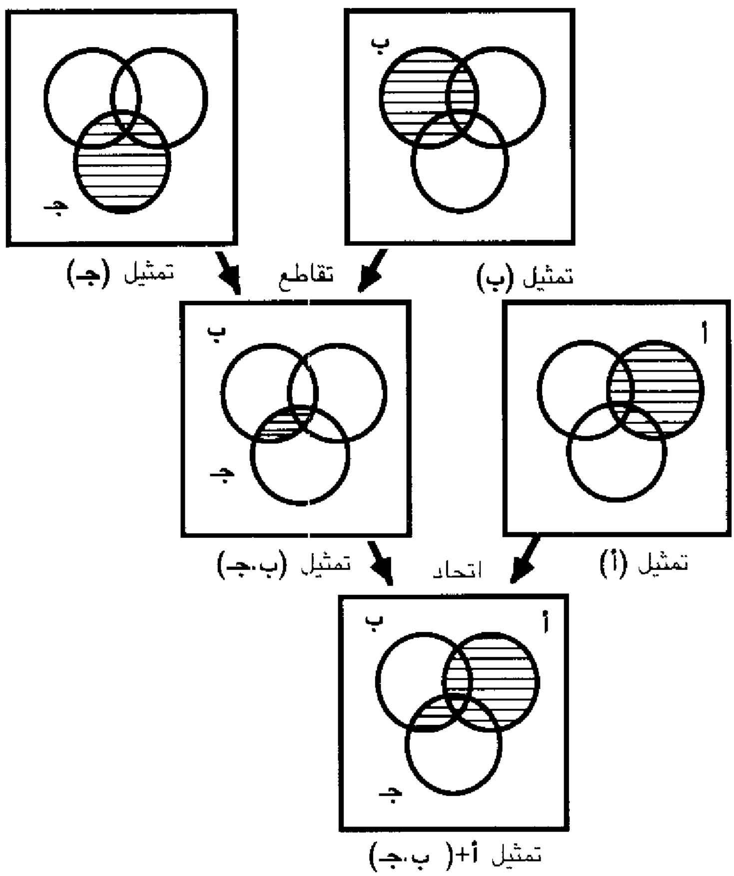
(6) **البديهية السادسة (خاصية التوزيع) :**

نفرض أن أ ، ب ، حـ هي ضمن مجموعة (ص) فإن :

أ+ (ب . حـ) = (أ + ب) . (أ + حـ) . .... (1)

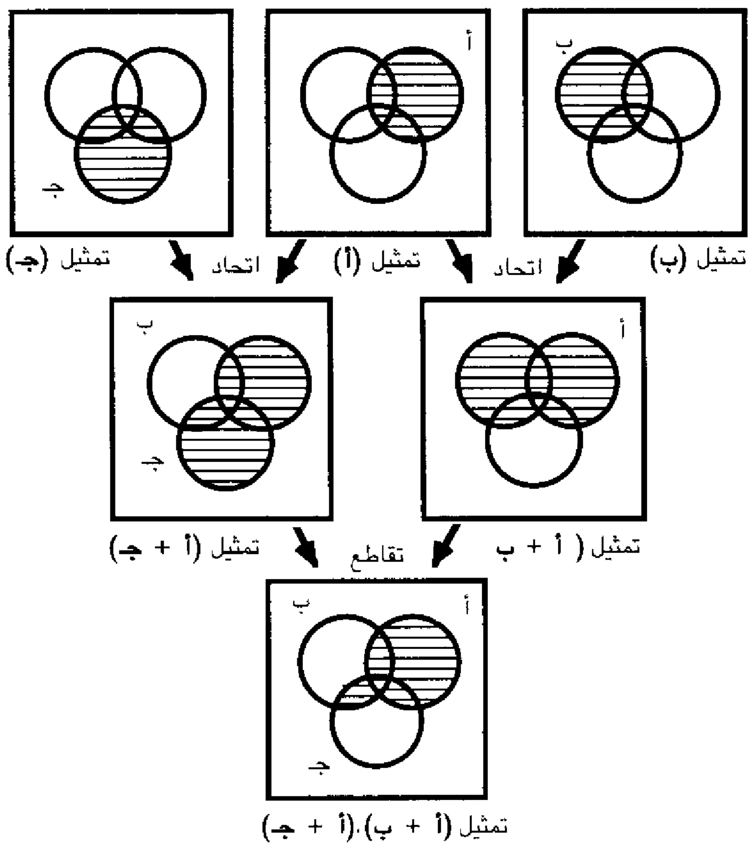
أ . (ب + حـ) = (أ . ب) + (أ . حـ) . .... (2)

نرسم مخطط فين للطرف الايمن من المعادلة (1) اعلاه ؛ كما في الشكل (15) ادناه :



الشكل (15)

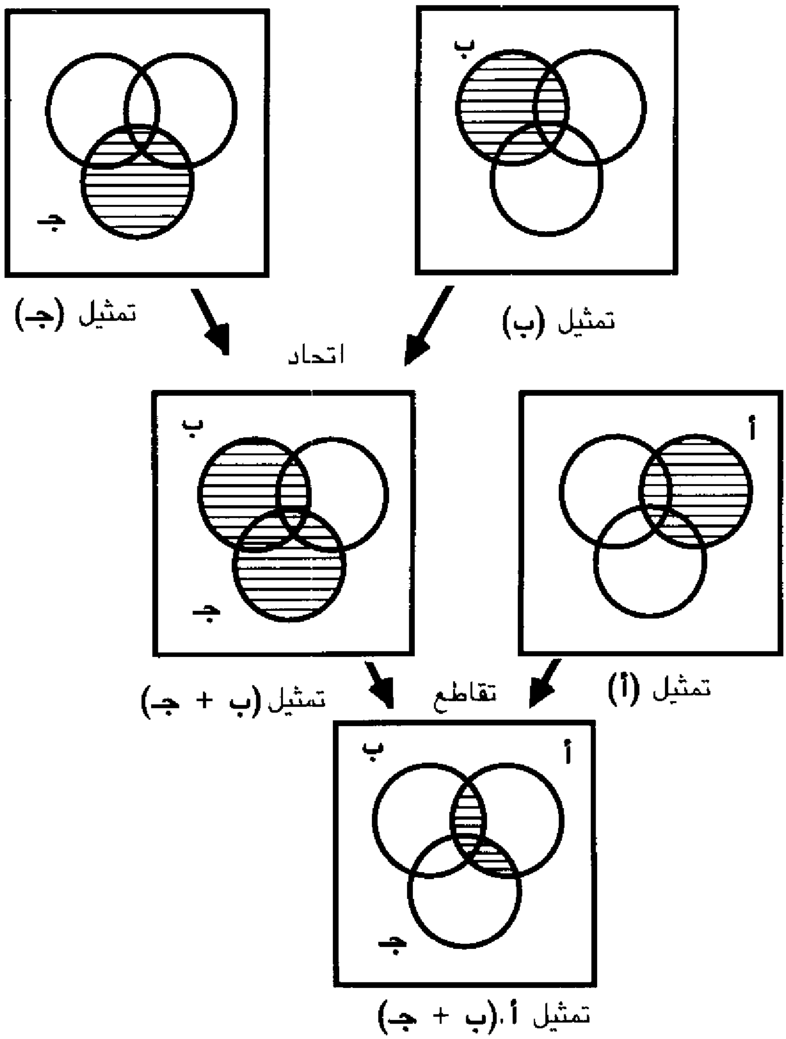
ثم نرسم **مخطط ڤين** للطرف الأيسر للمعادلة (1) كما في الشكل (16):



الشكل (16)

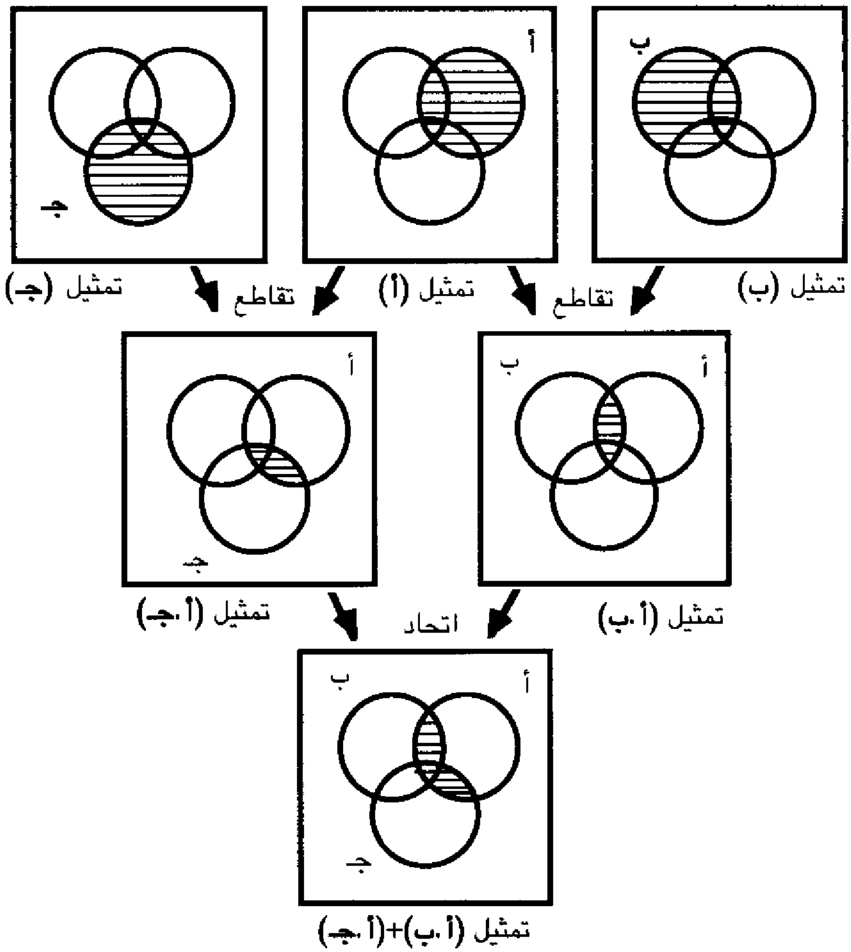
ومن الشكلين (15) و (16) نلاحظ أن طرفي المعادلة (1) البديهية (6) متساويان .

ولإثبات المعادلة (2) البديهية (6) نرسم **مخطط ڤين** للطرف الأيمن لهذه المعادلة كما يلي:



الشكل (17)

والآن نرسم **مخطط ڤين** للطرف الأيسر للمعادلة (2) بديهية (6) :



الشكل (18)

اذن طرفي المعادلة (2) للبديهية (6) متساويان

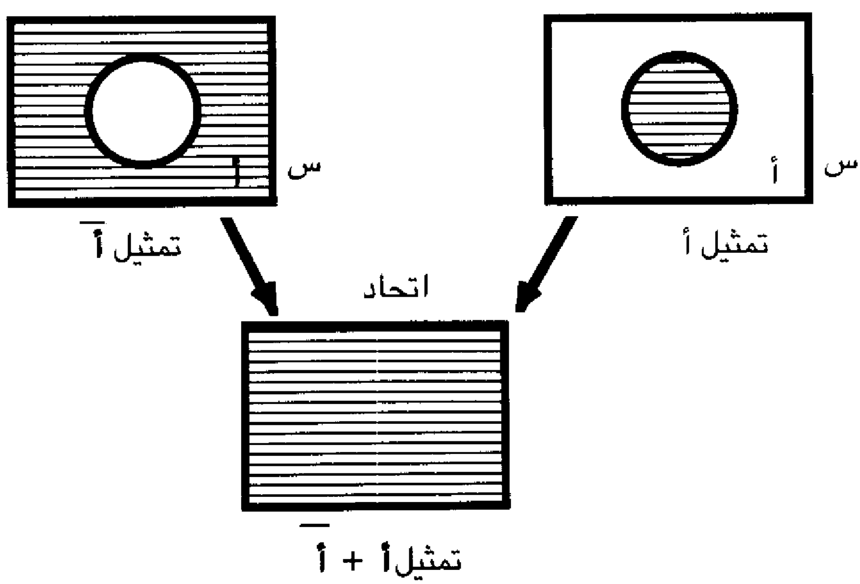
(7) **البديهية السابعة (وجود المتمم المنطقي) :**

إذا كان هناك عنصر يدعى (أ) في مجموعة تدعى (س) . فإنه يوجد عنصر منطقي يدعى متمم (أ) . وترمز له بنفس الحرف وفوقه خط صغير أي ($\overline{أ}$) وهو متمم (أ) . بحيث أن :

$$أ + \overline{أ} = 1 \qquad (1) \ldots.$$

$$أ \, . \, \overline{أ} = 0 \qquad (2) \ldots.$$

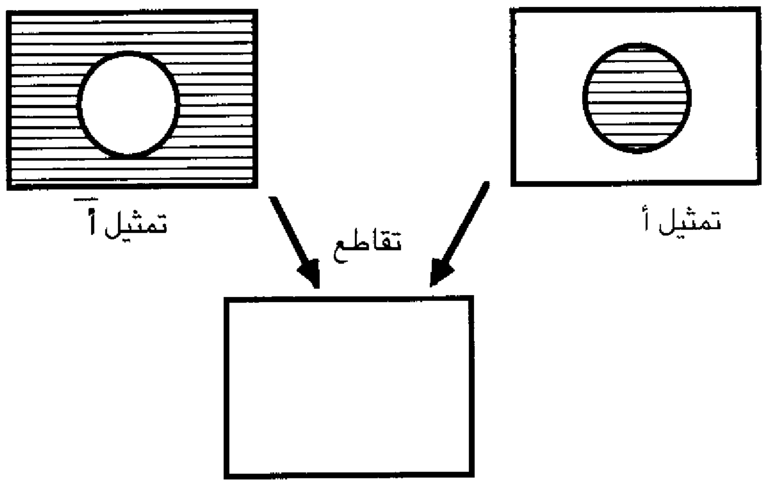
ولكي نثبت المعادلة (1) نرسم **مخطط ڤين** كما في الشكل (19) أدناه :



شكل (19)

وهو يساوي (1) . إذن تم إثبات المعادلة (1) أعلاه .

ولإثبات المعادلة (2) نرسم مخطط ڤين الموضح في الشكل (20) وكما يلي :



شكل (20)

2-2- نظريات الجبر البوولياني :

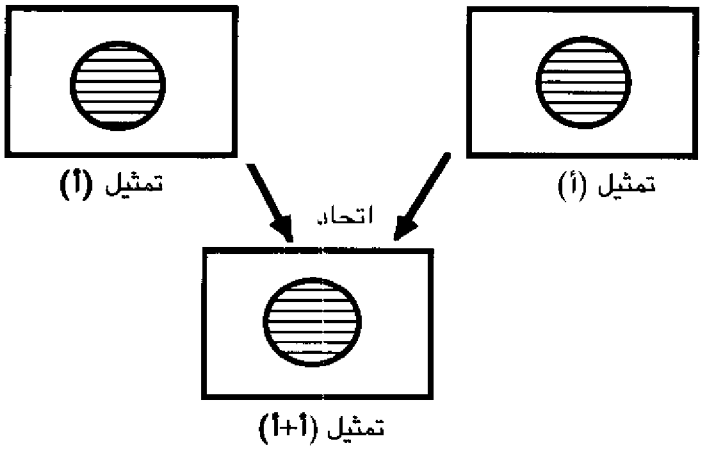
إستناداً الى البديهيات السبعة التي ذكرناها سابقاً فقد تم إستنتاج وإستخراج النظريات التالية :

(1) النظرية الأولى :

أ + أ = أ

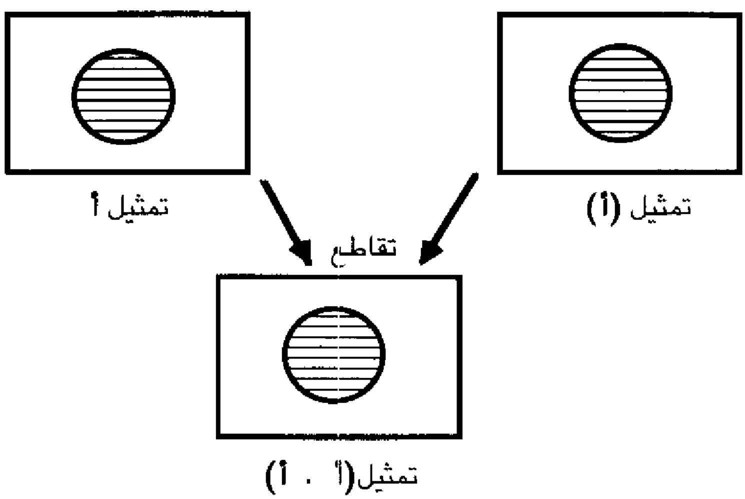
أ . أ = أ

ولكي نثبت صحة المعادلة (1) من هذه النظرية نستخدم طريقة ڤين كما في الشكل (21) :



شكل (21)

ومع ذلك نلاحظ أن **(أ)** تساوي **(أ + أ) وهو المطلوب**
ولإثبات صحة المعادلة (2) من هذه النظرية نستخدم الطريقة التالية كما في الشكل ادناه :



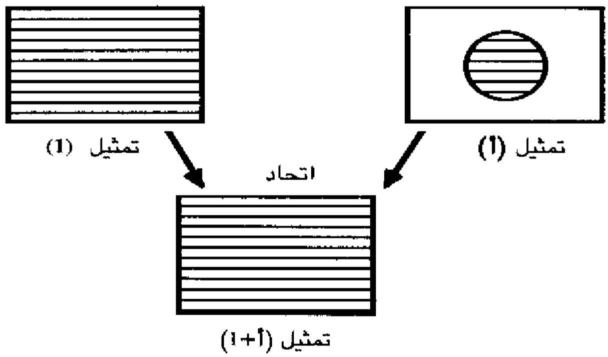
شكل (22)

(2) النظرية الثانية:

أ + 1 = 1 .... (1)

أ . 0 = 0 .... (2)

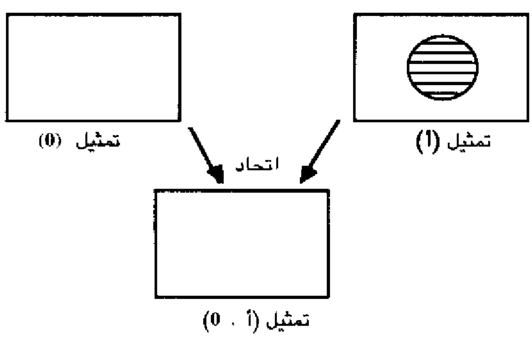
ولإثبات المعادلة (1) من هذه النظرية ، نستخدم **مخطط فين** وكما في الشكل (23) التالي :



شكل (23)

ومن الواضح من الشكل أعلاه **(أ+1)** يساوي (1) وهو المطلوب .

لإثبات المعادلة (2) من هذه النظرية بإستخدام مخطط ڤين نلاحظ الشكل (24) التالي :



شكل (24)

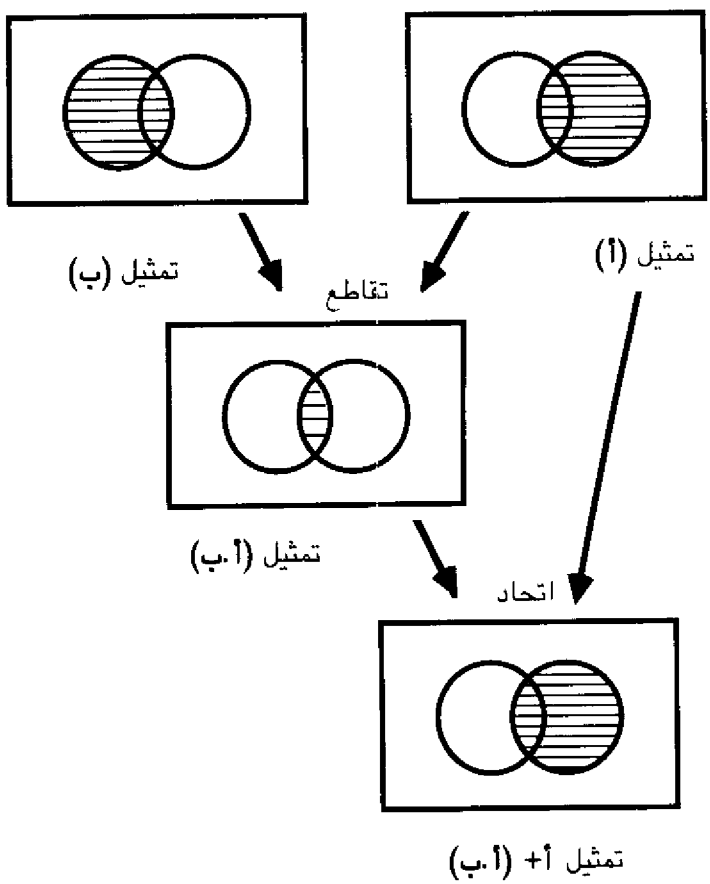
ومن ذلك نلاحظ أن (أ.0) يكافيء **(0)** وهو المطلوب .

(3) **النظرية الثالثة :**

أ + (أ . ب) = أ .... (1)

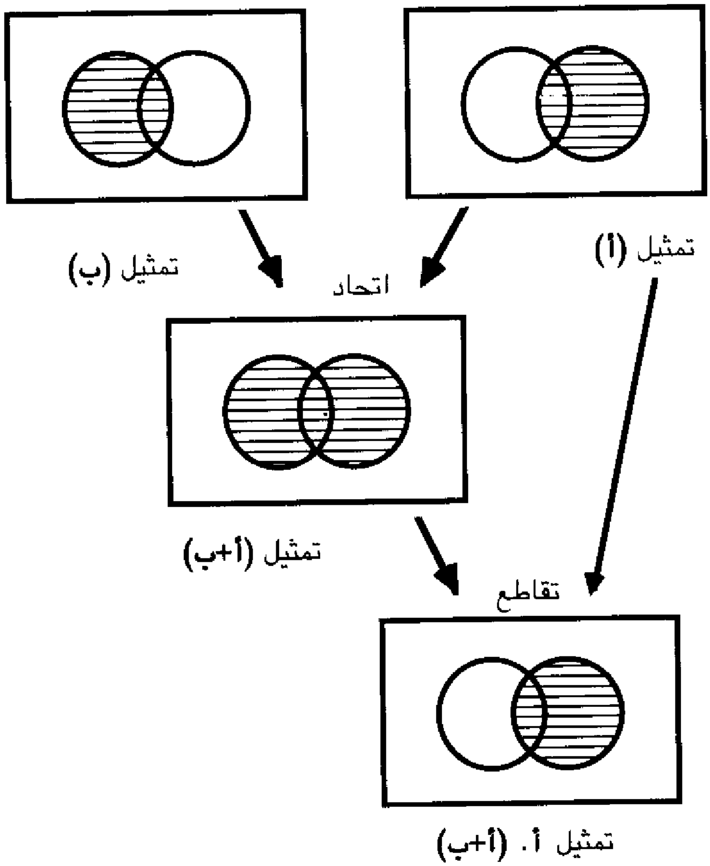
أ . (أ + ب) = أ .... (2)

ولإثبات المعادلة (1) من هذه النظرية نستخدم مخطط ڤين كما في الشكل (25) أدناه :



شكل (25)

ومن الشكل أعلاه ، نلاحظ أن أ + (أ . ب) يساوي (أ) وهو المطلوب .
ولإثبات المعادلة (2) من هذه النظرية نستخدم نفس الطريقة كما موضح في الشكل (26) التالي :



شكل (26)

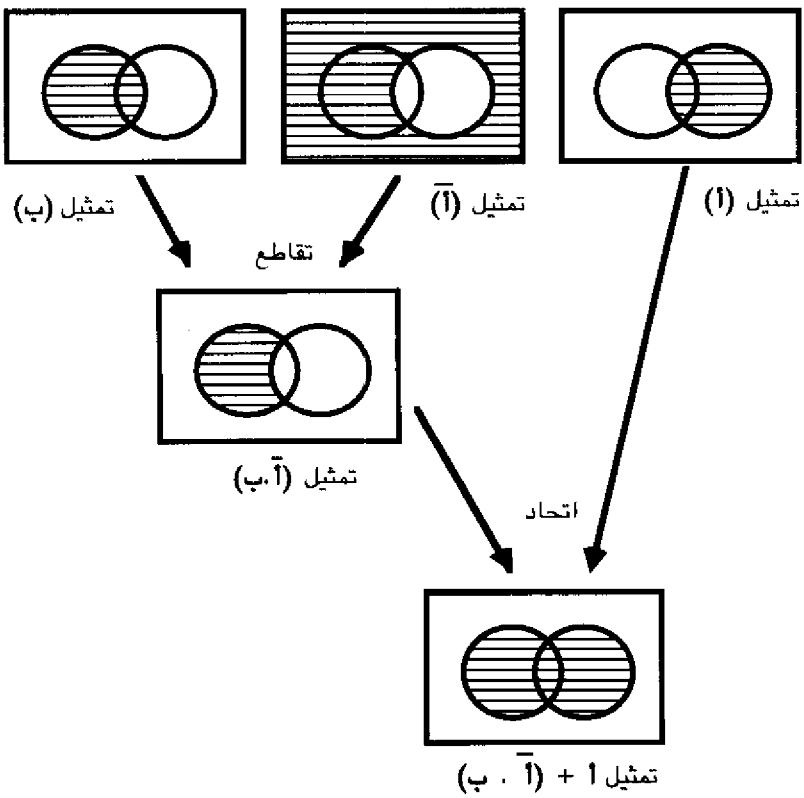
ومن الشكل أعلاه نلاحظ أن **أ . (أ+ب)** يساوي **(أ)** . وهو المطلوب .

(4) النظرية الرابعة :

أ + (أ̄.ب) = أ+ب .... (1)

أ . (أ̄+ ب) = أ.ب .... (2)

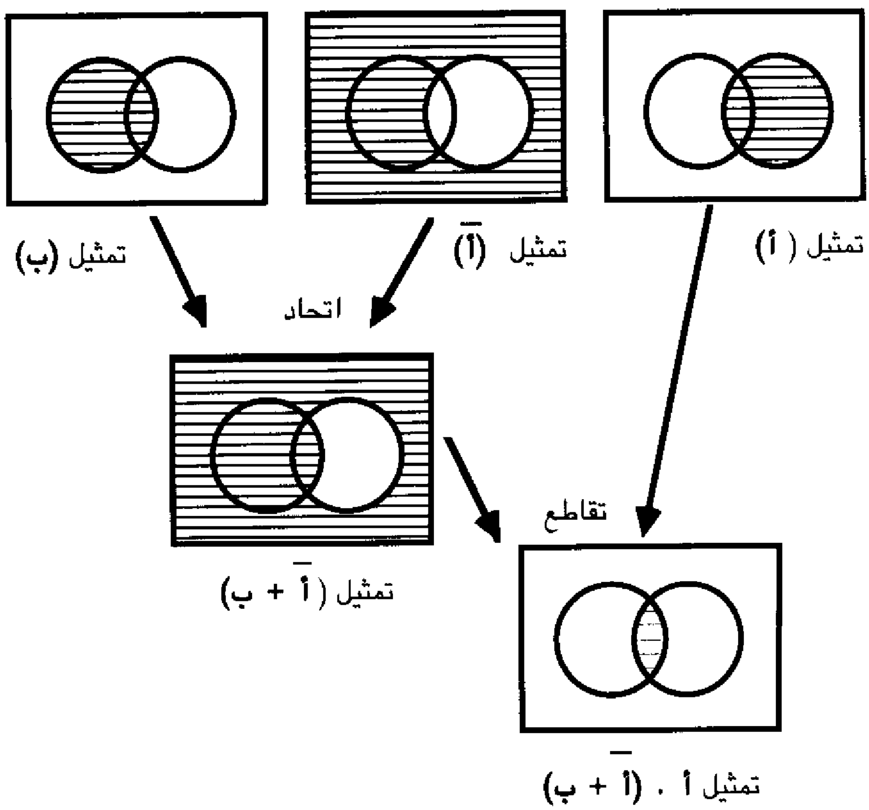
ولإثبات المعادلة (1) من هذه النظرية نستخدم **مخطط ڤين** كما في الشكل (27) أدناه :



الشكل (27)

ومن الواضح أن الشكل **أ+(أ̅.ب)** يساوي (**أ + ب**) وهو المطلوب

ولإثبات المعادلة (2) من هذه النظرية نرسم **مخطط ڤين** كما في الشكل (28) أدناه :



شكل (28)

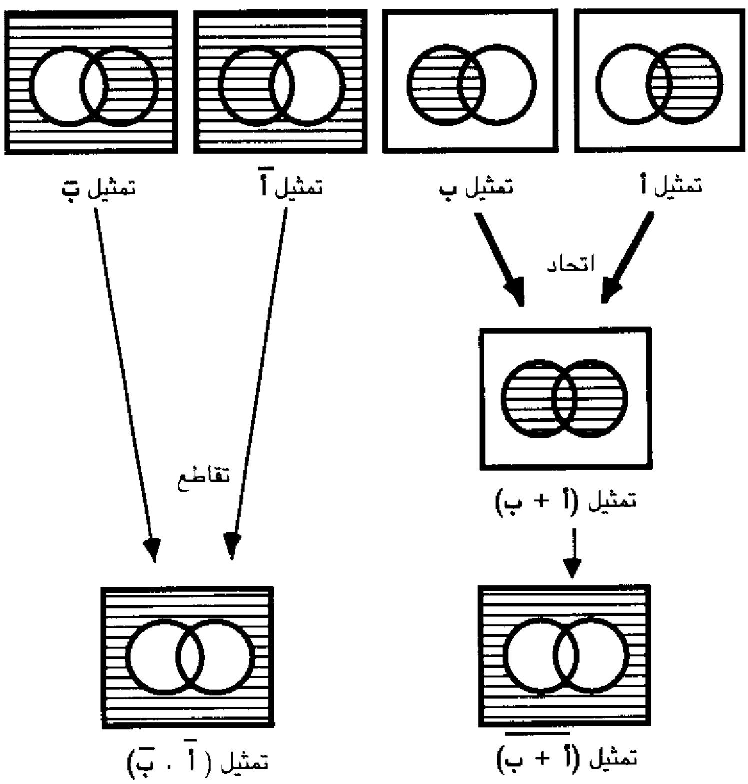
ونلاحظ بشكل واضح أن أ.(أ + ب) يساوي في الواقع (أ . ب) وهو المطلوب .

(5) النظرية الخامسة (نظرية دي موركان) :

$$\overline{\text{أ} + \text{ب}} = \overline{\text{أ}} \cdot \overline{\text{ب}} \qquad (1) ....$$

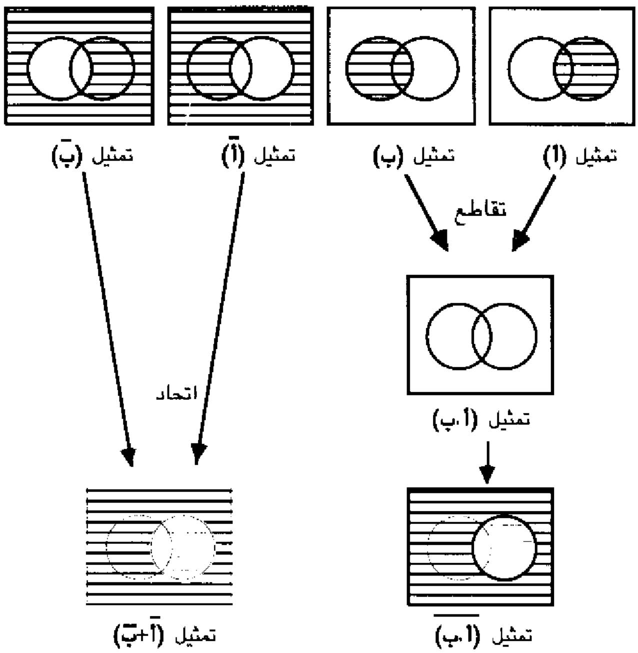
$$\overline{\text{أ} \cdot \text{ب}} = \overline{\text{أ}} + \overline{\text{ب}} \qquad (2) ....$$

ولإثبات صحة المعادلة (1) من هذه النظرية ، نرسمها بطريقة مخطط ڤين كما في الشكل (29) :



الشكل (29)

ومن الشكل أعلاه نلاحظ أن ($\overline{\text{أ + ب}}$) يساوي ($\overline{\text{أ}}$. $\overline{\text{ب}}$) وهو المطلوب .ولإثبات المعادلة (2) من هذه النظرية ، نرسم **مخطط فين** كما في الشكل (30) :



الشكل (30)

ومن الشكل(30) أعلاه نلاحظ بكل وضوح أن ($\overline{\text{أ + ب}}$) يساوي ($\overline{\text{أ}}$ + $\overline{\text{ب}}$) وهو المطلوب .ويمكن كتابة نظرية دي موركان بصيغة عامة وكما يلي:

$$\overline{\text{أ + ب + جـ + د .... + ي}} = \overline{\text{أ}} \,.\, \overline{\text{ب}} \,.\, \overline{\text{جـ}} \,.\, \overline{\text{د}} \;...\; \overline{\text{ي}}$$

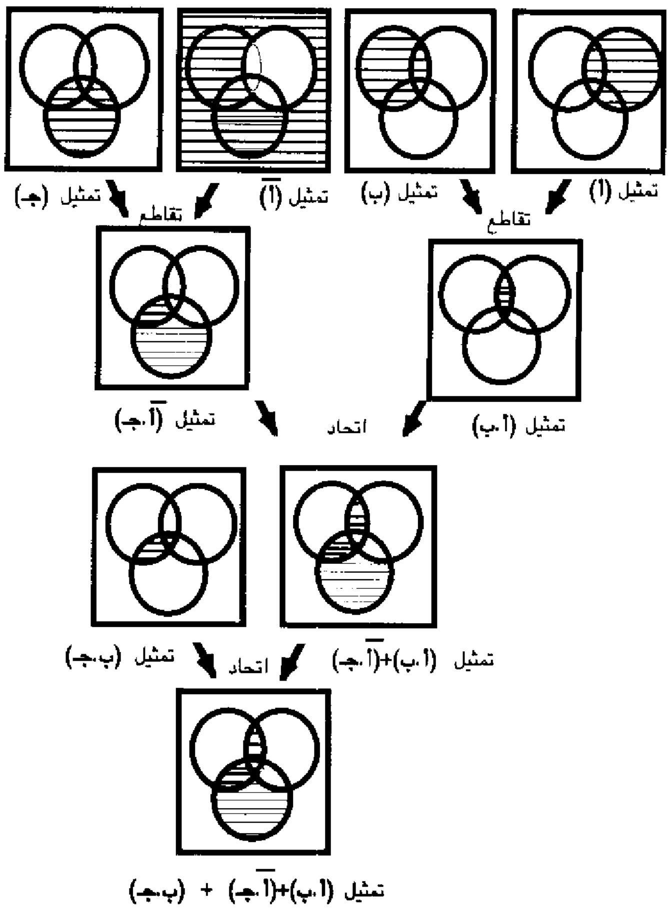
$$\overline{\text{أ . ب . جـ . د .... ي}} = \overline{\text{أ}} + \overline{\text{ب}} + \overline{\text{جـ}} + \overline{\text{د}} + ... + \overline{\text{ي}}$$

(6) النظرية السادسة :

(أ.ب)+($\overline{\text{أ}}$.جـ)+(ب.جـ)=(أ.ب)+($\overline{\text{أ}}$.جـ) .... (1)

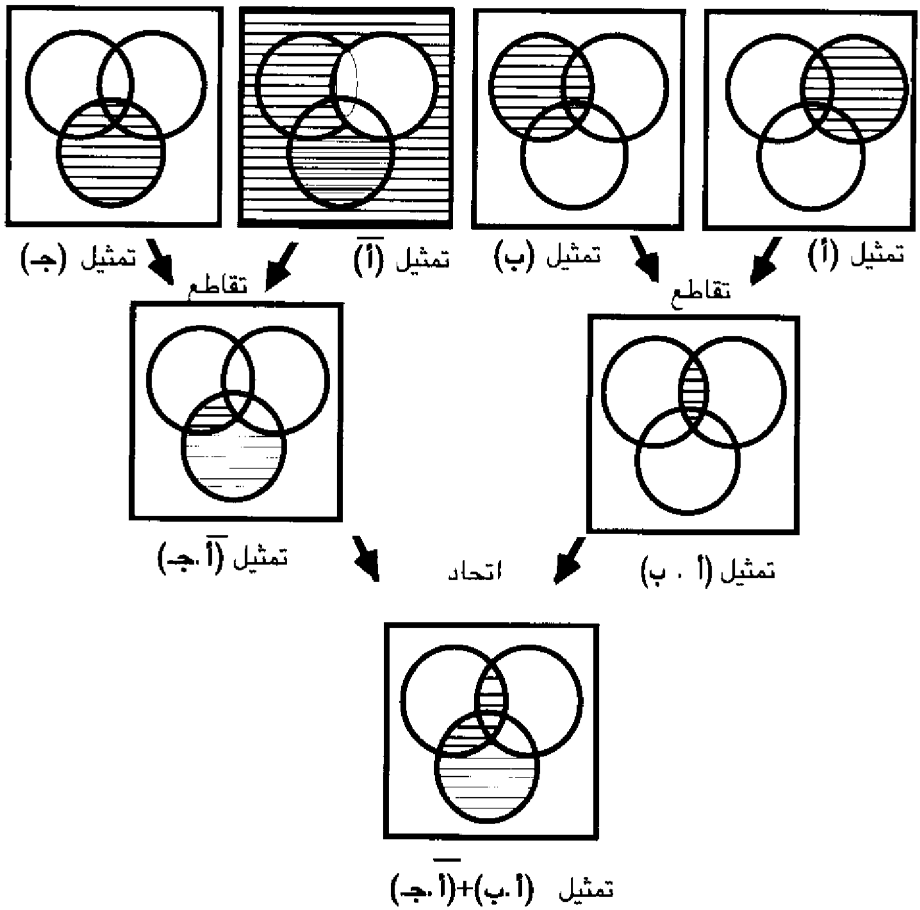
(أ+ب).($\overline{\text{أ}}$+جـ).(ب+جـ)=(أ+ب).($\overline{\text{أ}}$+جـ) .... (2)

ولإثبات المعادلة (1) من هذه النظرية ، نستخدم ، نستخدم مخطط ڤين ونأخذ أولاً الطرف الأيمن كما في الشكل (31) :



الشكل (31)

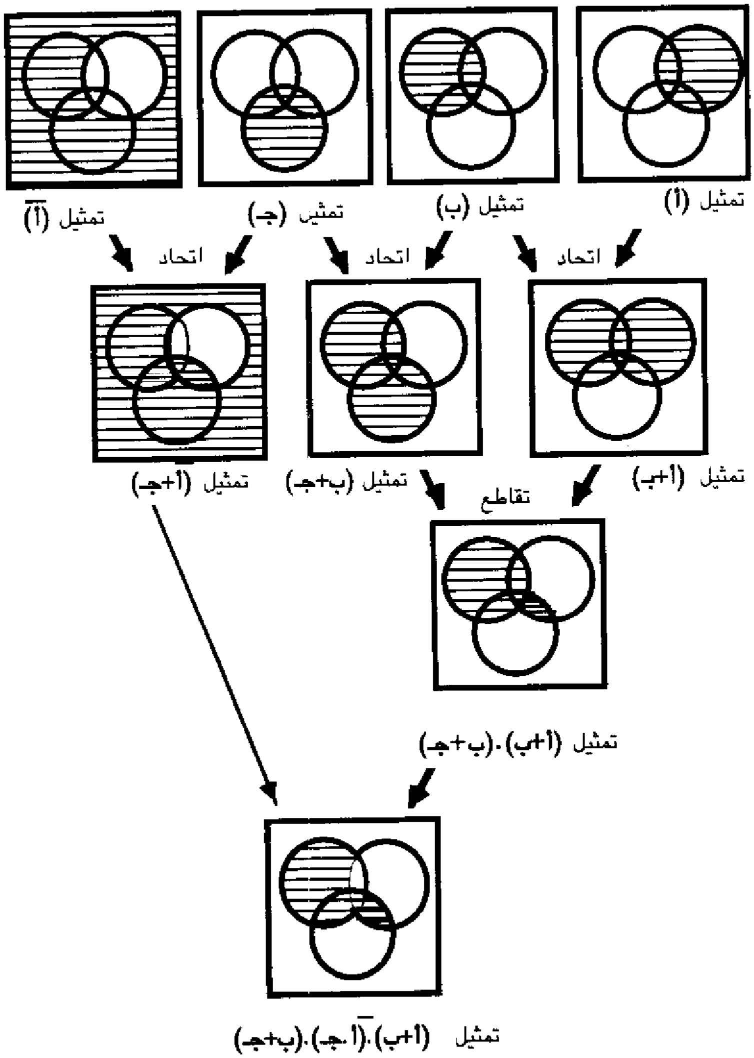
أما الطرف الأيسر :



الشكل (32)

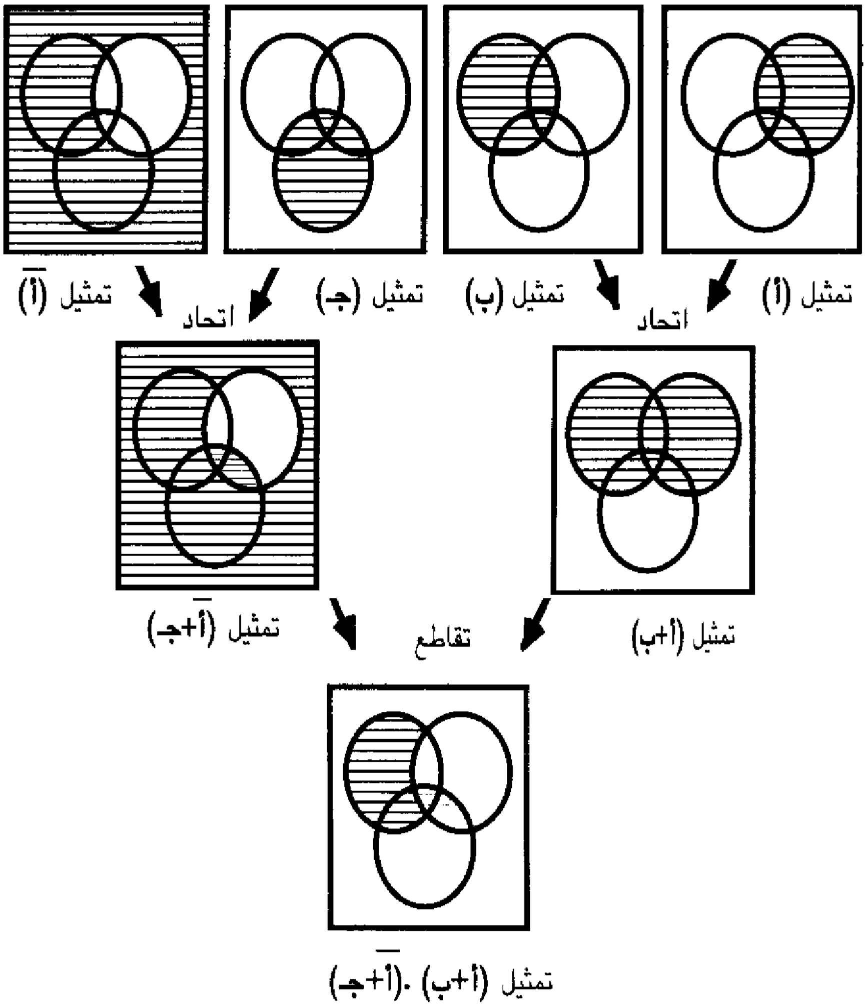
ومن الشكلين (31) و (32) نلاحظ أن طرفي المعادلة (1) متساويان . وهو المطلوب .

ونثبت المعادلة (2) من النظرية (6) بنفس الطريقة وكما يلي الطرف الأيمن :



الشكل (33)

اما الطرف الايسر فيكون كما في الشكل (34) ادناه :



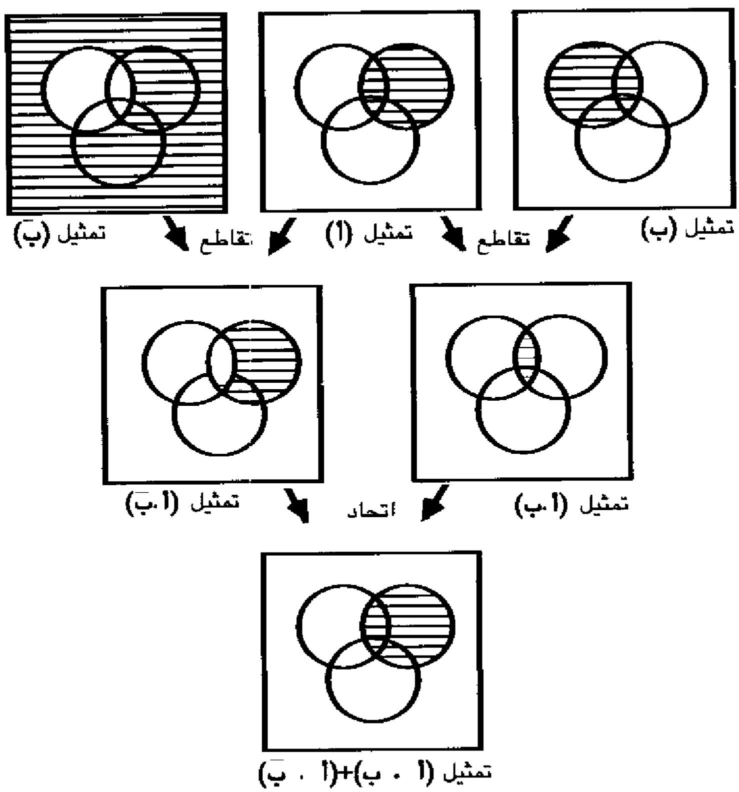
الشكل (34)

(7) **النظرية السابعة :**

$$(أ.ب) + (أ.\overline{ب}) = أ \qquad \text{.... (1)}$$

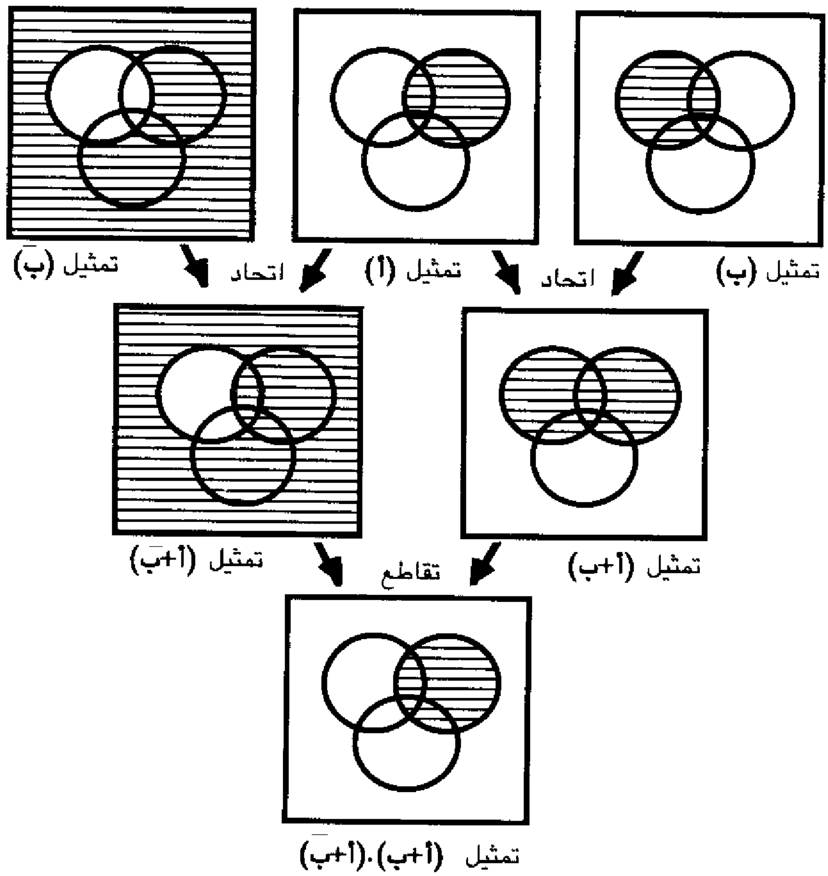
$$(أ+ب) \;.\; (أ+\overline{ب}) = أ \qquad \text{.... (2)}$$

لإثبات المعادلة (1) من هذه النظرية نستعمل مخطط ڤين كما مبين في الشكل ادناه :



الشكل (35)

ومن الواضح أن الشكل السابق يمثل (أ) وهو المطلوب . ولكي نثبت المعادلة (2) من هذه النظرية نرسم المخطط كما في الشكل (36) التالي:



الشكل (36)

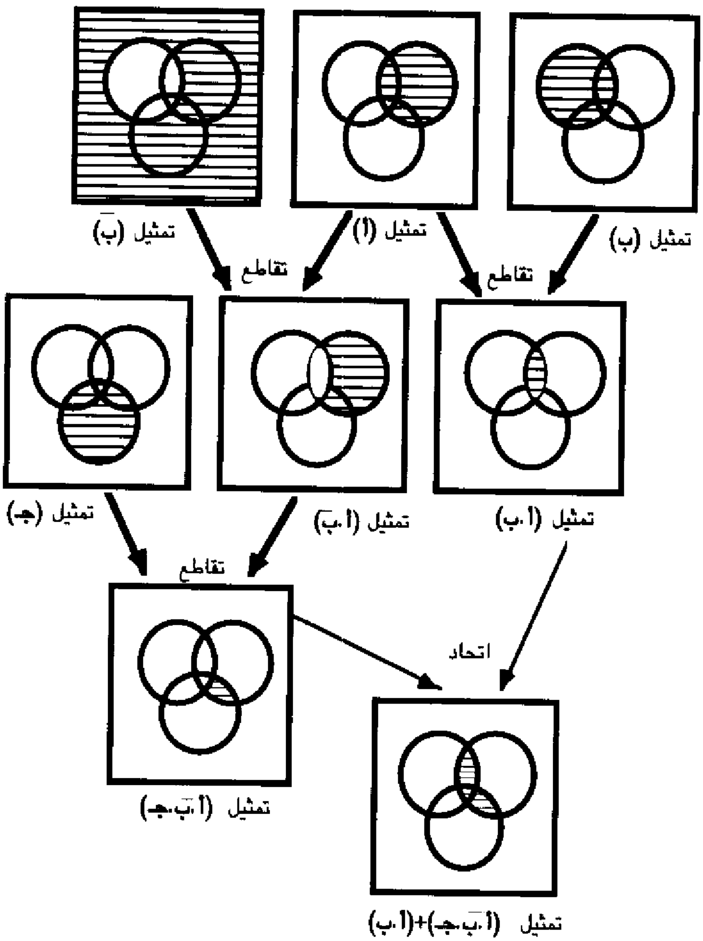
ومن الواضح أن الشكل السابق يمثل (أ) . وهو المطلوب .

(8) النظرية الثامنة :

(أ . ب)+(أ . ب̄ .جـ)=(أ . ب)+(أ .حـ) .... (1)

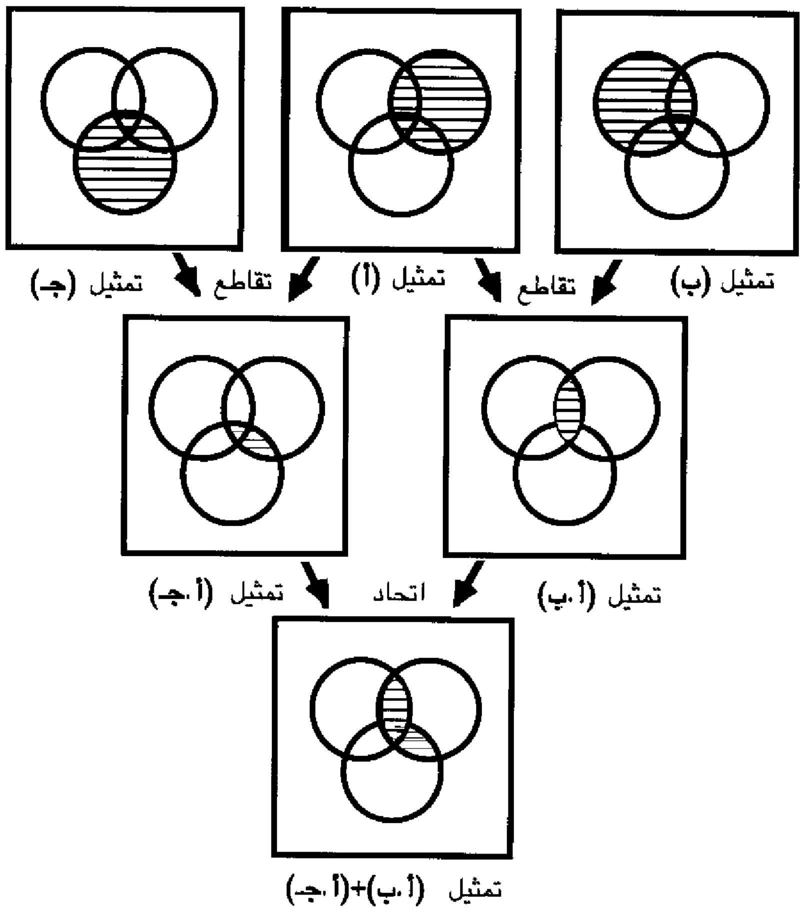
(أ +ب).(أ + ب̄ + حـ)=(أ + ب).(أ+حـ) .... (2)

لكي نثبت هذه المعادلة سوف نأخذ أولاً الطرف الأيمن لهـذه المعادلة كما في الشكل (37- أ) أدناه :



شكل (37-أ)

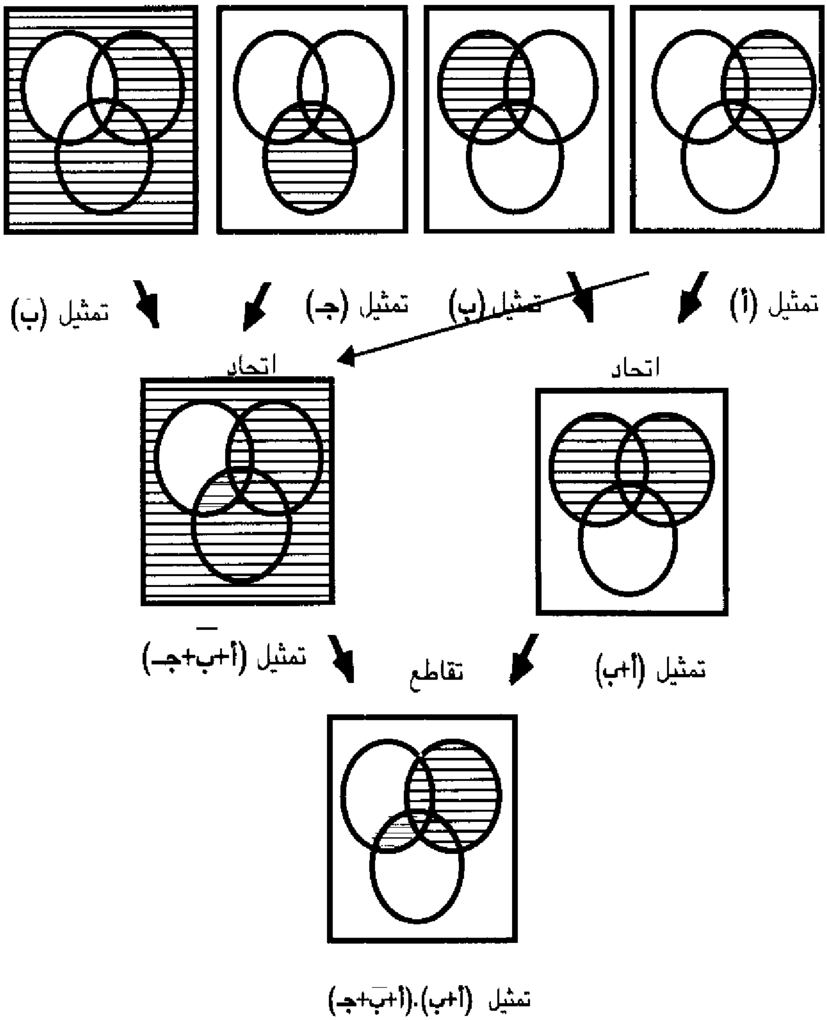
والآن نأخذ الطرف الأيسر للمعادلة وكما يلي :



الشكل (37-ب)

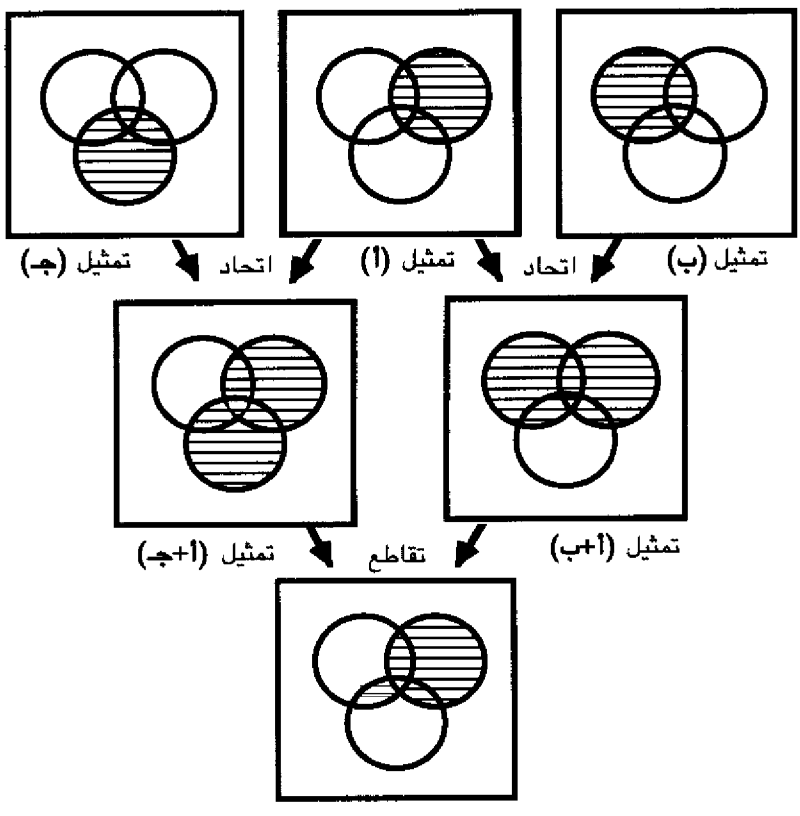
ومن الشكل (37- أ) و(37 -ب) نلاحظ أن طرفي المعـــادلة متساويان وهو المطلوب .

ولإثبــات المعــادلة (2) من هذه النظريـة نأخـذ الطرف الأيمن من المعادلة كما مبين في الشكل (38) أدناه :



الشكل (38)

أما الطرف الايسر من المعادلة (2) فيمكن تمثيله كما في الشكل التالي:



الشكل (39)

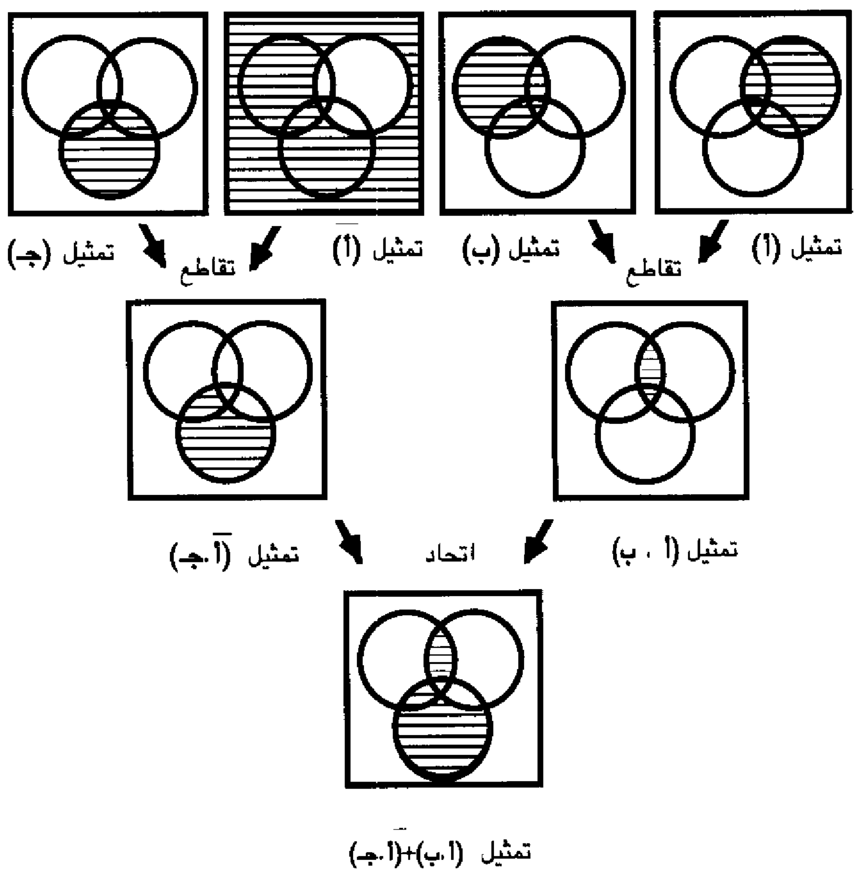
ومن الشكلين (38) و (39) نلاحظ طرفي المعادلة (2) النظرية (8) متساويان ، وهو المطلوب .

(9) النظرية التاسعة :

(أ . ب)+(أ̅ . حـ)=(أ + حـ).(أ̅ + ب) .... (1)

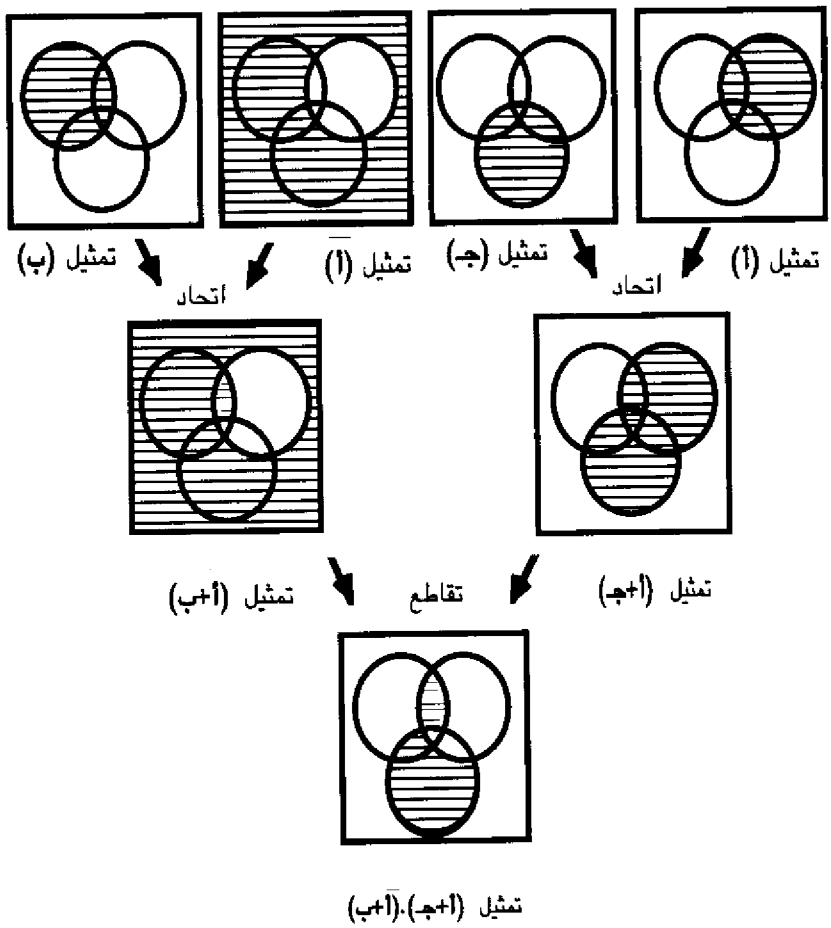
(أ + ب).(أ̅ + حـ)=(أ . حـ)+(أ̅ . ب) .... (2)

لإثبات المعادلة (1) من هذه النظرية نستخدم **مخطط ڤين** ونأخذ الطرف الأيمن أولاً ، كما في الشكل (40) أدناه :



الشكل(40)

ولتمثيل الطرف الايسر نستخدم نفس الاسلوب كما في الشكل (41) :

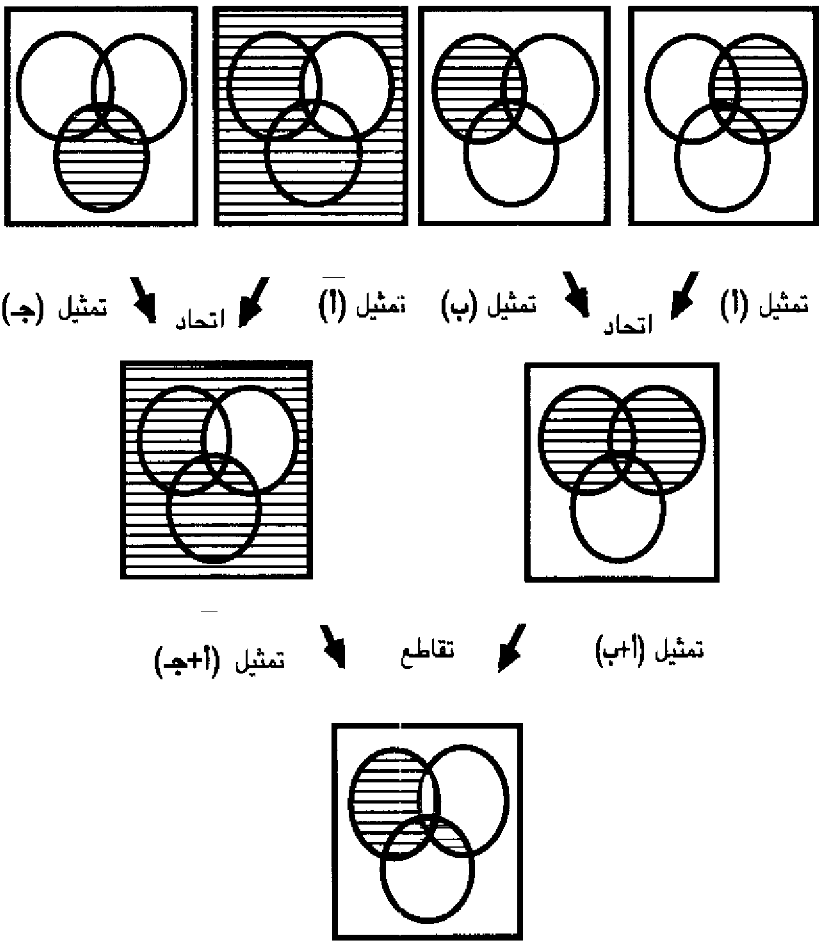


الشكل (41)

ومن مـلاحظة الشكلين (40) و (41) نلاحظ ان طرفي المعـادلة متساويان

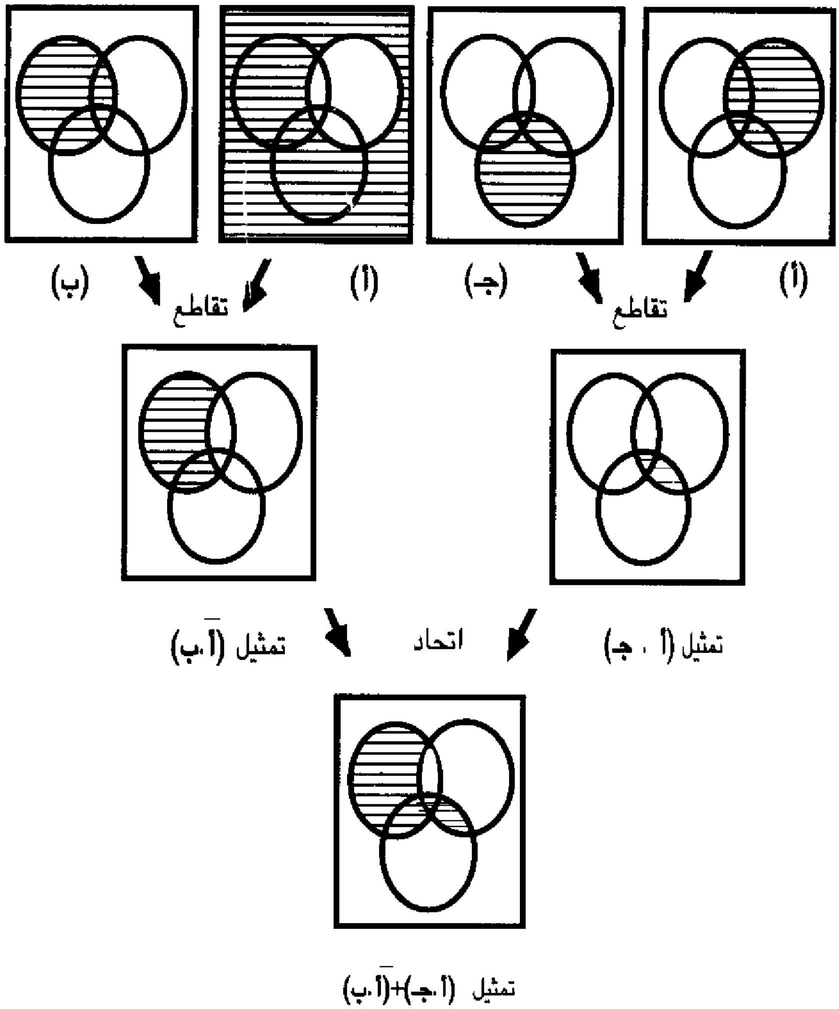
ولاثبات المعادلة (2) من هذه النظرية نتبع نفس الطريقة فنمثل الطرفين الايسر والايمن كما في الشكلين (42) و (43) التاليين :

الطرف الايمن :



الشكل (42)

الطرف الايسر :



الشكل (43)