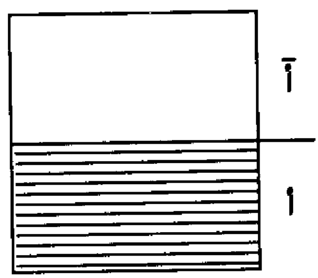
الفصل الخامس

خارطة كارنوف

1- تمثيل الكميات المنطقية :

لقد درسنا في الفصول السابقة طريقتين لتمثيل الكميات المنطقية هما **جداول الحقيقة ومخطط فين** . حيث يتم تمثيل الكميات الجبرية المنطقية في جداول الحقيقة على شكل أرقام ثنائية ، بينما يتم تمثيلها على شكل دوائر مظللة أو غير مظللة في مخطط فين . أما في هذا الفصل فسوف ندرس (مع الكثير من الأمثلة) نوع ثالث من انواع تمثيل الكميات المنطقية يدعى (**خارطة كارنوف**) . و **خارطة كارنوف** تتكون من شكل رباعي (مربع أو مستطيل) . ويقسم هذا الشكل الرباعي ، بواسطة محاور أفقية وعمودية إلى أجزاء أصغر . وتفصل هذه المحاور الحيز الذي يشغله المتغير (أو المتغيرات) عن المتغيرات الأخرى ، أو بين العناصر ومتمماتها . وبأسلوب خاص سوف نوضحه بالرسم فيما يلي . فإذا أردنا مثلاً أن نرسم حيز المتغير (أ) فإننا يجب أن نرسم حيز المتمم له على نفس المربع (أو المستطيل) . كما مبين في الشكل أدناه :

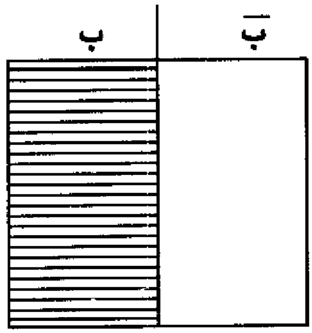


تمثيل (أ)

الشكل (1)

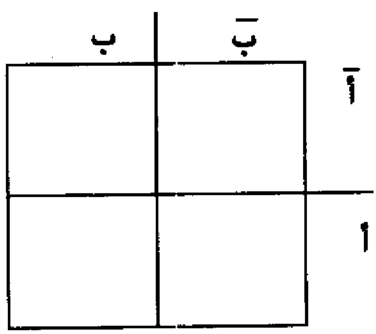
أما إذا أردنا تمثيل الحيز الذي يشغله متغير ثاني مثل (ب) بشكل مشابه ، ولكن بمحور عمودي يفصل المتغير (ب) عن متممه

(بَ) فأننا نرسمه كما في الشكل أدناه :



تمثيل (ب)
الشكل (2)

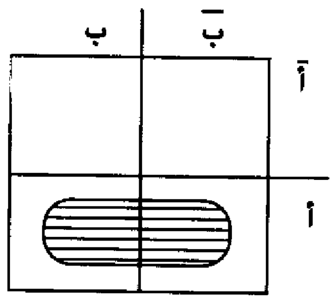
ولكي نرمز إلى حيز يحوي على المتغيرين (المنطقتين) (أ) و (ب) معا ، فأننا نتبع طريقة معينة في تمثيل ذلك . حيث نقوم بمزج الشكلين معاً ، فنحصل على مربع فيه محورين أفقي وعمودي ، كما في الشكل أدناه :



تمثيل (أ)،(ب)
الشكل (3)

ولكي نرمز لأي متغير بأنه موجود أو غير موجود . فأننا نقوم

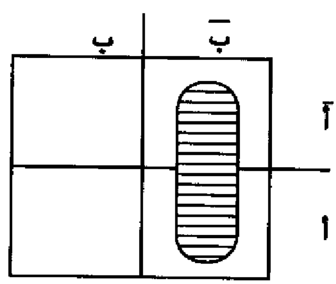
برسم منحني مغلق (دائرة ، مستطيل ، مربع ..إلخ) داخل المنطقة التي يتواجد فيها المتغير (أو المتغيرات) . فلو أردنا مثلاً أن نرمز للمتغير (أ) في الشكل (3) أعلاه . فأننا نقوم برسم منحني مغلق يقع في الحيز الأفقي الذي يشمل (أ) ، ونظلل المساحة المحصورة داخل هذا المنحني . كما في الشكل التالي :



تمثيل (أ)

الشكل (4)

أما لو أردنا مثلاً أن نرمز إلى المتغير (ب̄) فأننا يمكن أن نرسم خارطة كارنوف له ، وكما يلي :

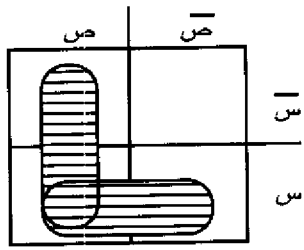


تمثيل (ب̄)

الشكل (5)

وهكذا نستطيع أن نقوم بتمثيل بقية المتغيرات . وذلك بتظليل الجزء المحصور داخل المنحني المغلق والذي يوجد داخل المربع . أو المربعات) التي تشتمل على المتغير .

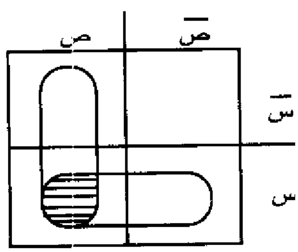
أما إذا كان لدينا معادلة جبرية منطقية ، مثل (ع = س + ص) فإننا نقوم برسم الحيز الذي يحوي المتغيرين (س) ، (ص) ، كما فعلنا ذلك بالنسبة للمتغيرين (أ) ، (ب) . وكما موضح في الشكل التالي :



تمثيل (س + ص)

الشكل (6)

ولو أردنا تمثيل التقاطع للكميتين (س) ، (ص) . فأننا نقوم بنفس الطريقة برسم منحنيات في كل من حيز (س) ، وحيز (ص) . ونقوم بتظليل المنطقية (أو على الأصح المربع) الذي يحصل فيه التقاطع لهاتين الكميتين ، (س . ص) . وكما موضح في الشكل أدناه :

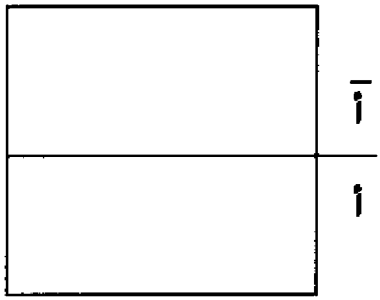


تمثيل (س . ص)

الشكل (7)

2- خارطة كارنوف لثلاثة متغيرات منطقية :

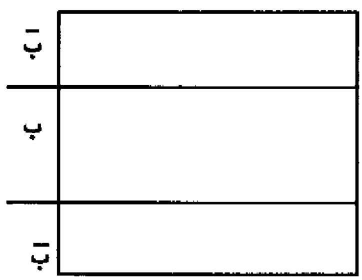
نستطيع تمثيل ثلاثة كميات جبرية منطقية ، بواسطة خارطة كارنوف . فلو كان لدينا مثلاً ، الكميات الجبرية المنطقية أ ، ب ، جـ فيمكننا أن نقوم بتمثيل الكمية (أ) ، كما في الشكل التالي :



تمثيل (أ)

الشكل (8)

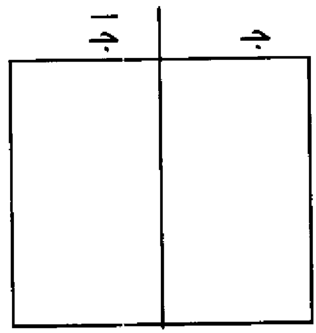
ونستطيع كذلك تمثيل الحيز الذي تشغله الكمية(ب)، بطريقة مختلفة نوعاً ما حيث نتبع الطريقة التالية في تمثيلها . وكما موضح في الشكل أدناه :



تمثيل (ب)

الشكل (9)

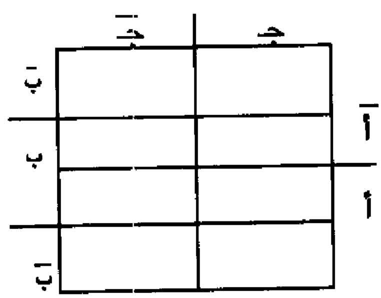
أما (جـ) فنقوم بتمثيلها بحيز يقسم إلى قسمين ، بواسطة خط عمودي . بحيث يكون الجزء الأيمن يمثل (جـ) أما الأيسر فيمثل ($\overline{\text{جـ}}$) كما في الشكل أدناه :



تمثيل (حـ)

الشكل (10)

ولو قمنا الآن بدمج الأشكال (8) ، (9) ، (10) معاً في مخطط أو شكل واحد فسنحصل على الشكل التالي :

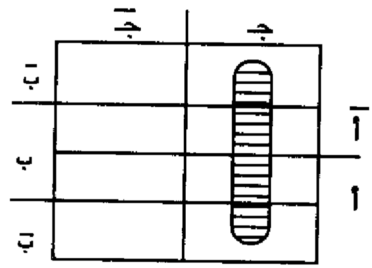


تمثيل (أ ، ب ، حـ)

الشكل (11)

ومن ملاحظة الشكل (11) ، نجد أنه يوجد مربع مشترك بين كل عنصر ومتممه ، والعناصر الباقية ، وبذلك نستطيع تمثيل أي تعبير مشترك بين العناصر فيما بينها . وكما سنلاحظ ذلك جلياً في الأمثلة التي سنوردها فيما بعد .

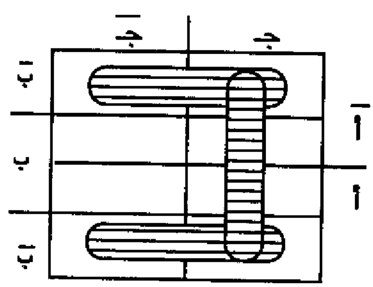
ولو أردنا تمثيل (جـ) على الحيز الذي يحوي ثلاثة متغيرات (أ ، ب ، جـ) مثل الشكل (11). فأننا نقوم برسمه كما يلي :



تمثيل (جـ)

الشكل (12)

أما إذا أردنا رسم أو تمثيل (ب̄) على نفس الشكل (12) . فنقوم برسمه كالتالي :



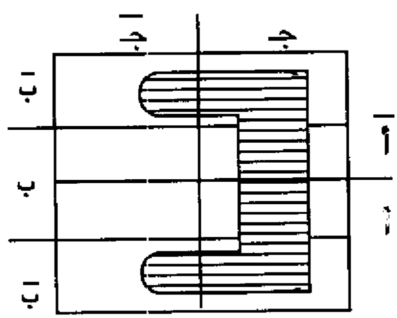
تمثيل (ب̄ .جـ)

الشكل (13)

أما العلاقات الجبرية (مثل إتحاد ، تقاطع) فيمكن أن نعود إلى التعريف الأصلي للإتحاد . وهو أن **الإتحاد يمثل مجموعة** (أو حيز) **تحوي على كل العناصر المشتركة وغير المشتركة معاً ، بين متغيرين** . فلو عدنا إلى الشكل (13) ، فأننا سنلاحظ أن الحيز الذي تم تظليله يمثل المنطقة التي تتواجد فيها عناصر ($\overline{\text{ب}}$) أو عناصر (جـ) أو العناصر المشتركة بينهما . ويمكن كتابة ذلك جبرياً كما يلي :

$$\text{د} = \overline{\text{ب}} + \text{جـ}$$

ويمكن تمثيل ذلك بمنحني مغلق نظلله من الداخل . بشكل مشابه للشكل (13) أعلاه وكما يلي :



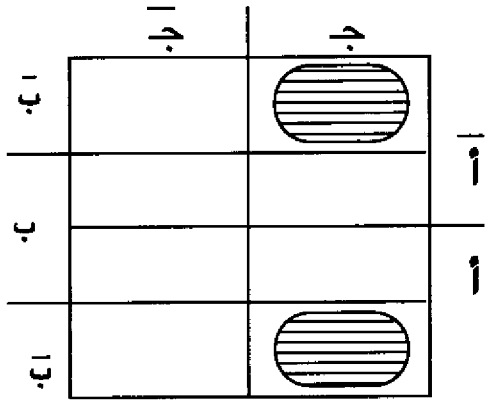
تمثيل ($\overline{\text{ب}}$ + جـ)
الشكل (14)

أما التقاطع بين مجموعتين أو عنصرين مثل تقاطع ($\overline{\text{ب}}$) مع (جـ) فيمكن أن نعبر عنه بالمعادلة التالية :

$$\text{د} = \overline{\text{ب}} \cdot \text{جـ}$$

ونستطيع تمثيل هذه المعادلة على **خارطة كارنوف** كما في

الشكل أدناه :



تمثيل (ب̄ . جـ)

الشكل (15)

وهكذا نستطيع تمثيل الكميات والمعادلات الجبرية المنطقية بواسطة **خارطة كارنوف** ، وبطريقة تشبه إلى حد كبير ، مخطط فين الذي درسناه في الفصل السابق .

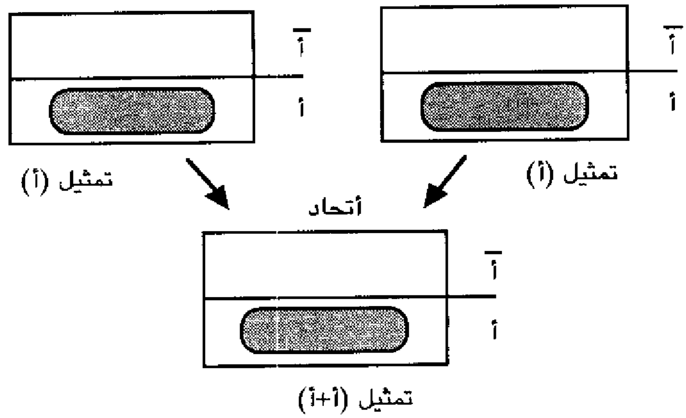
3- إثبات نظريات الجبر البووليياني :

لفهم **خارطة كارنوف** أكثر ، وللتعود على إستعمالها ، سوف نقوم فيما يلي بإثبات نظريات الجبر المنطقي (والتي أثبتناها جميعاً في الفصل السابق) بواسطة خارطة كارنوف في هذه المرة .

3-1- المعادلة الأولى النظرية الأولى :

أ + أ = أ

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

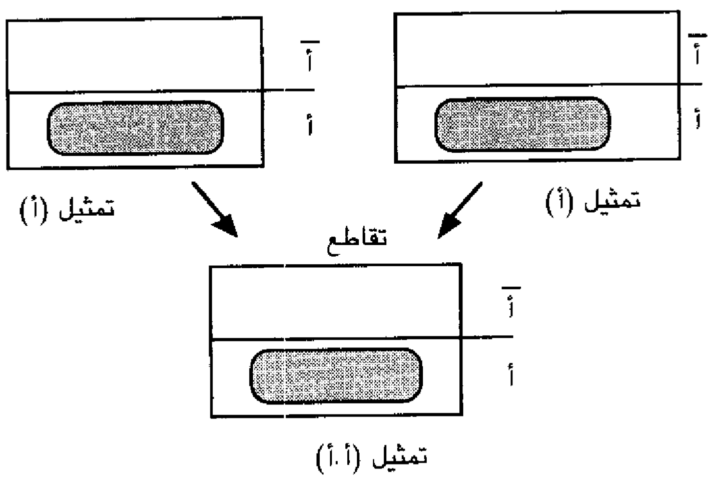


ومن ذلك نلاحظ أن هذه المعادلة قد تحققت وهو المطلوب .

3-2- المعادلة الثانية النظرية الأولى :

أ . أ = أ

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

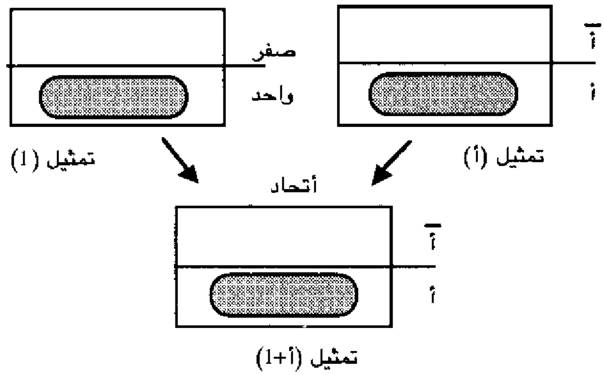


ومن ذلك نلاحظ أن هذه المعادلة قد تحققت وهو المطلوب .

3-3- المعادلة الأولى النظرية الثانية :

أ + 1 = 1

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

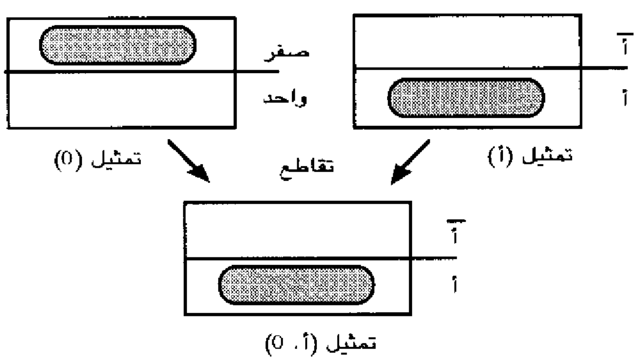


ومن ذلك نلاحظ أن هذه المعادلة قد تحققت . وهو المطلوب .

3-4- المعادلة الثانية النظرية الثانية :

أ .0 = 0

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

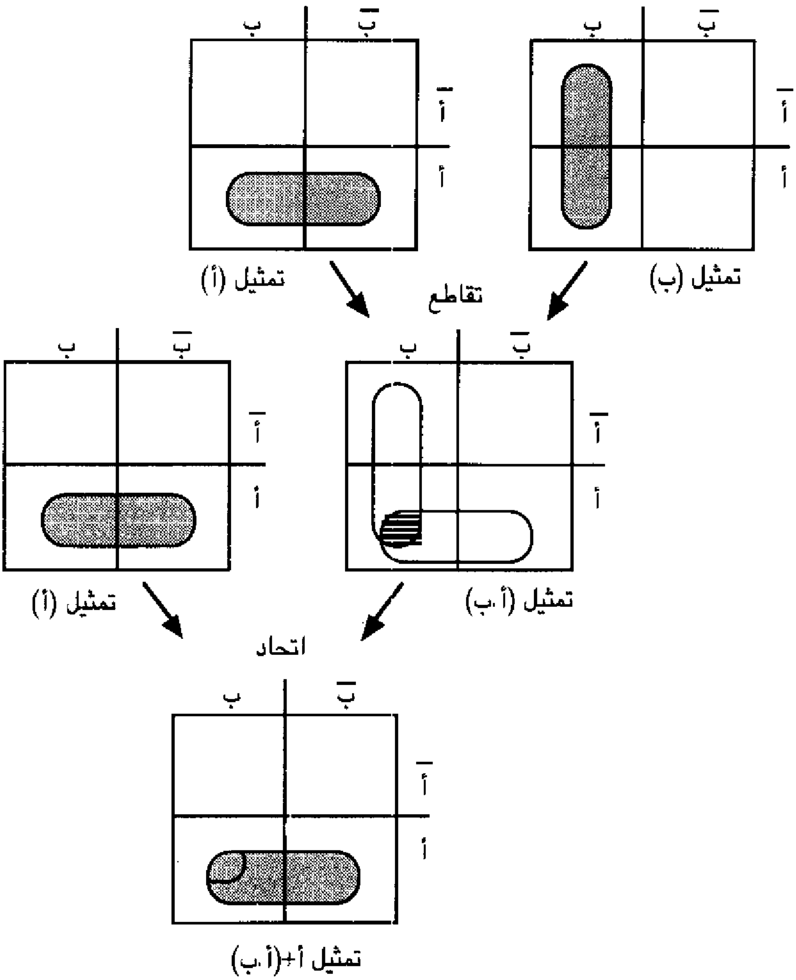


ومن ذلك نلاحظ أن هذه المعادلة قد تحققت . وهو المطلوب .

3-5- المعادلة الأولى النظرية الثالثة :

أ + (أ . ب) = أ

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

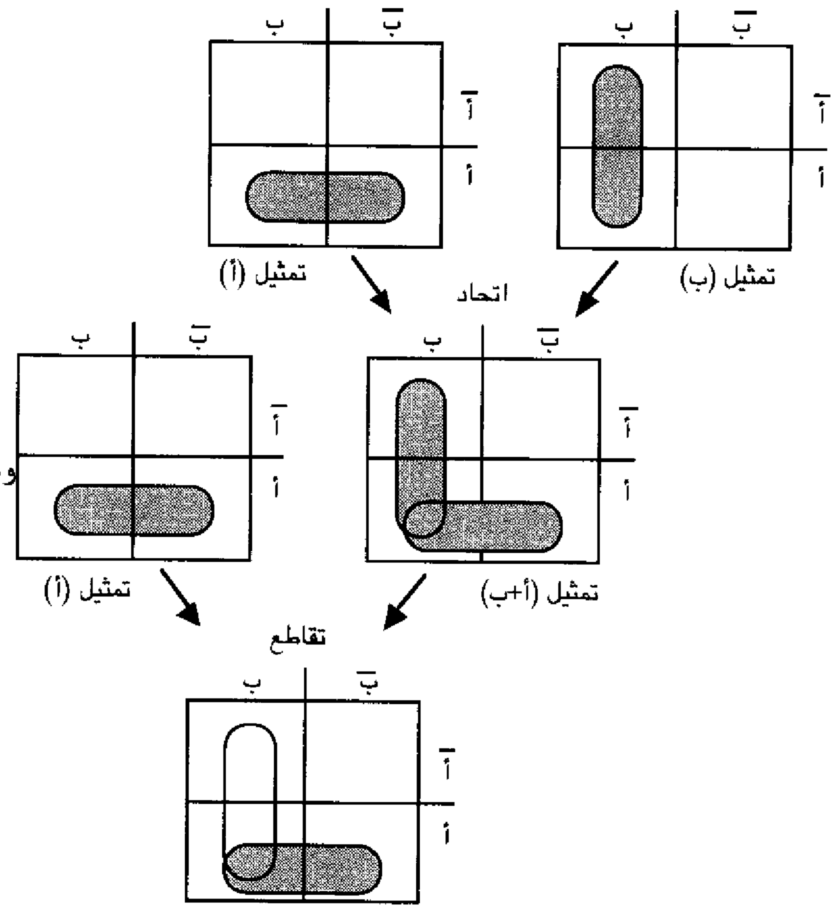


ومن ذلك نلاحظ أن هذه المعادلة قد تحققت . وهو المطلوب .

3-6- المعادلة الثانية النظرية الثالثة :

أ . (أ + ب) = أ

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :



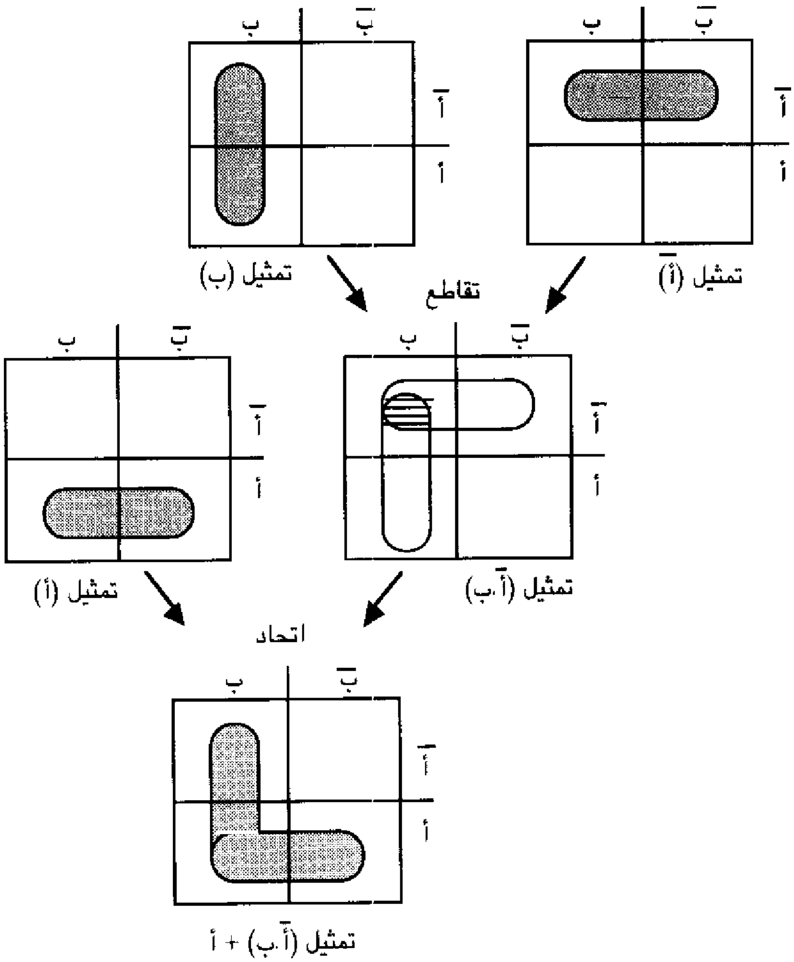
تمثيل (أ+ب) . أ

ومن ذلك نلاحظ أن المعادلة قد تحققت وهو المطلوب .

3-7- المعادلة الأولى النظرية الرابعة :

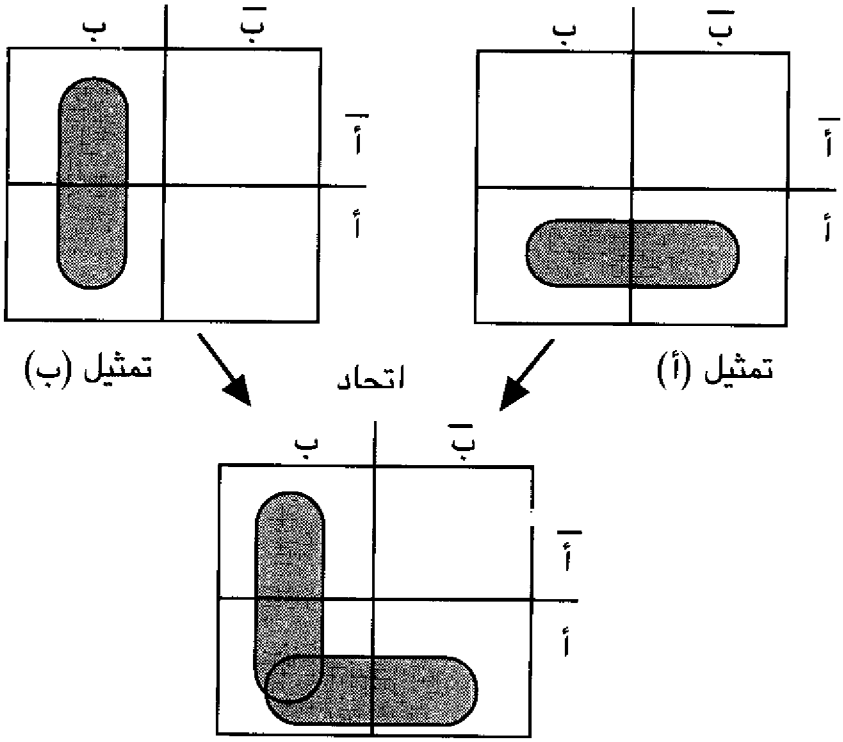
أ+(أ̅ . ب) = أ + ب

التمثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيمن هو كالتالي :



ومن ذلك نلاحظ أن المعادلة قد تحققت . وهو المطلوب .

أما الطرف الأيسر فيمكن تمثيله بنفس الطريقة وكما يلي :



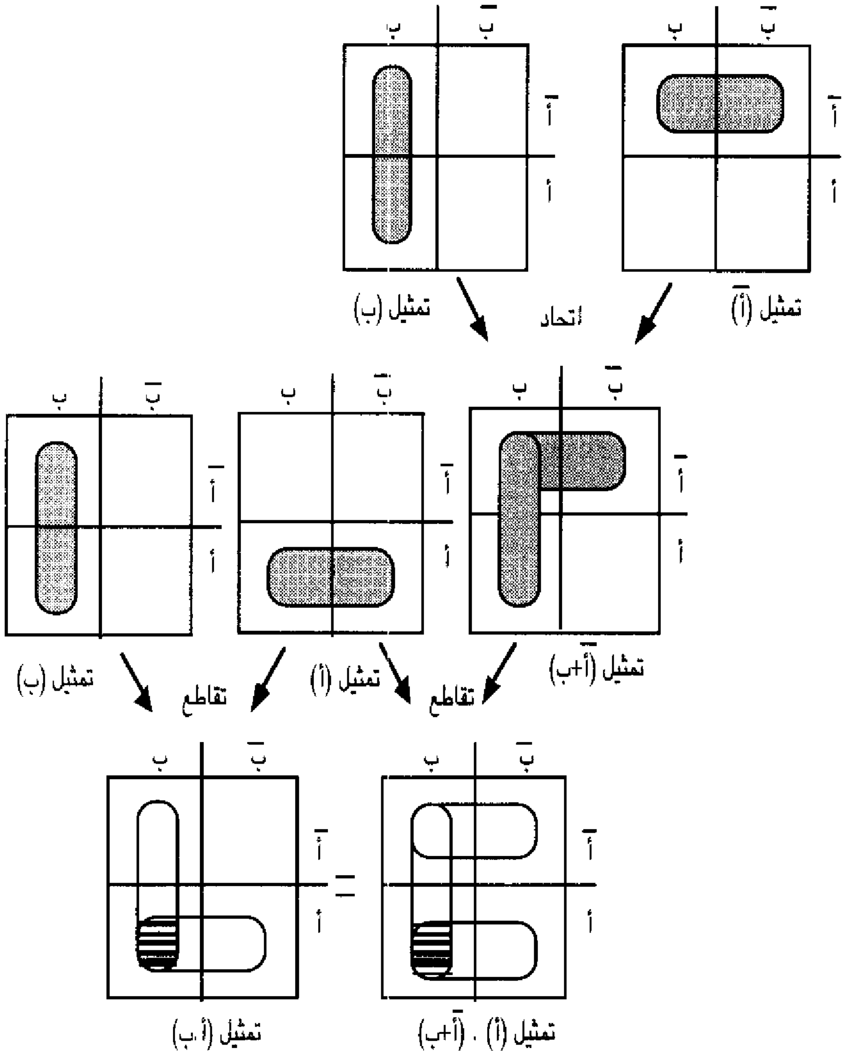
تمثيل (أ+ب)

ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-8- المعادلة الثانية النظرية الرابعة :

أ . (أ̄ + ب) = أ . ب

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف لطرفي المعادلة معاً هو كالتالي :

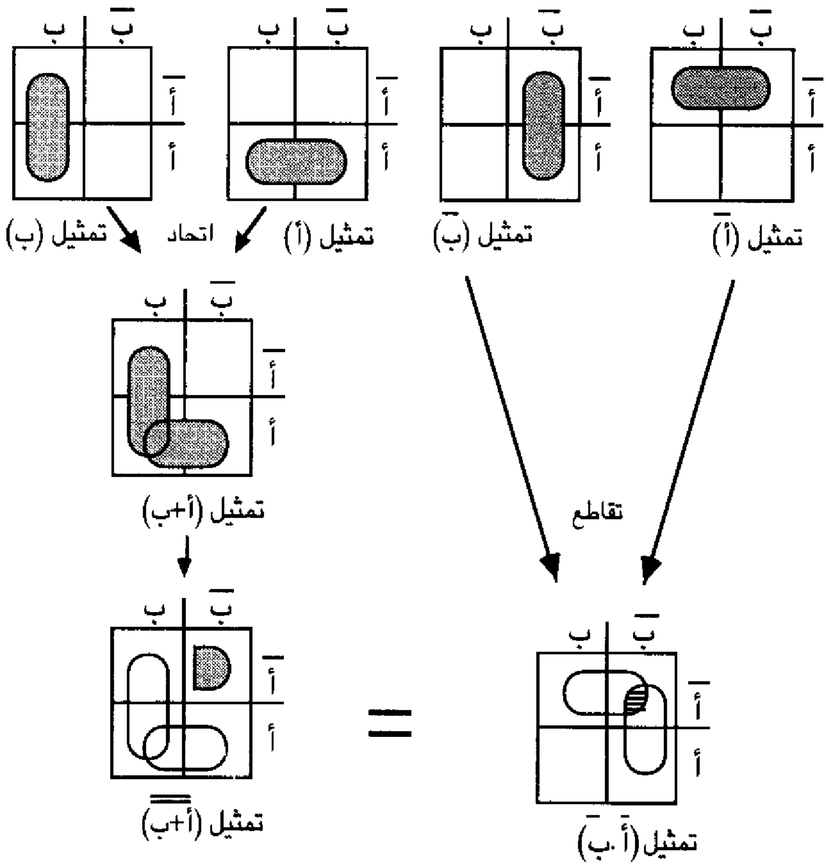


ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-9- المعادلة الأولى النظرية الخامسة :

$$\overline{أ + ب} = \overline{أ} \,.\, \overline{ب}$$

والإثبات لطرفي المعادلة معاً بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي :

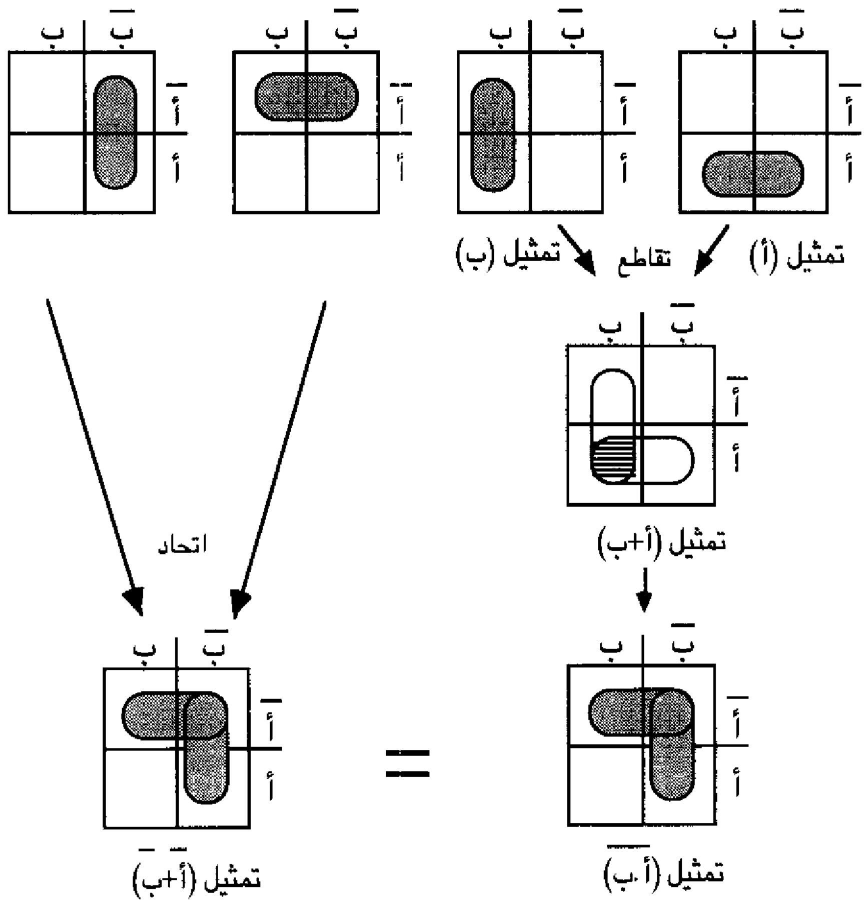


ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-10- المعادلة الثانية النظرية الخامسة :

$$\overline{\text{أ . ب}} = \overline{\text{أ}} + \overline{\text{ب}}$$

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف لطرفي المعادلة معاً ، هو كالتالي :

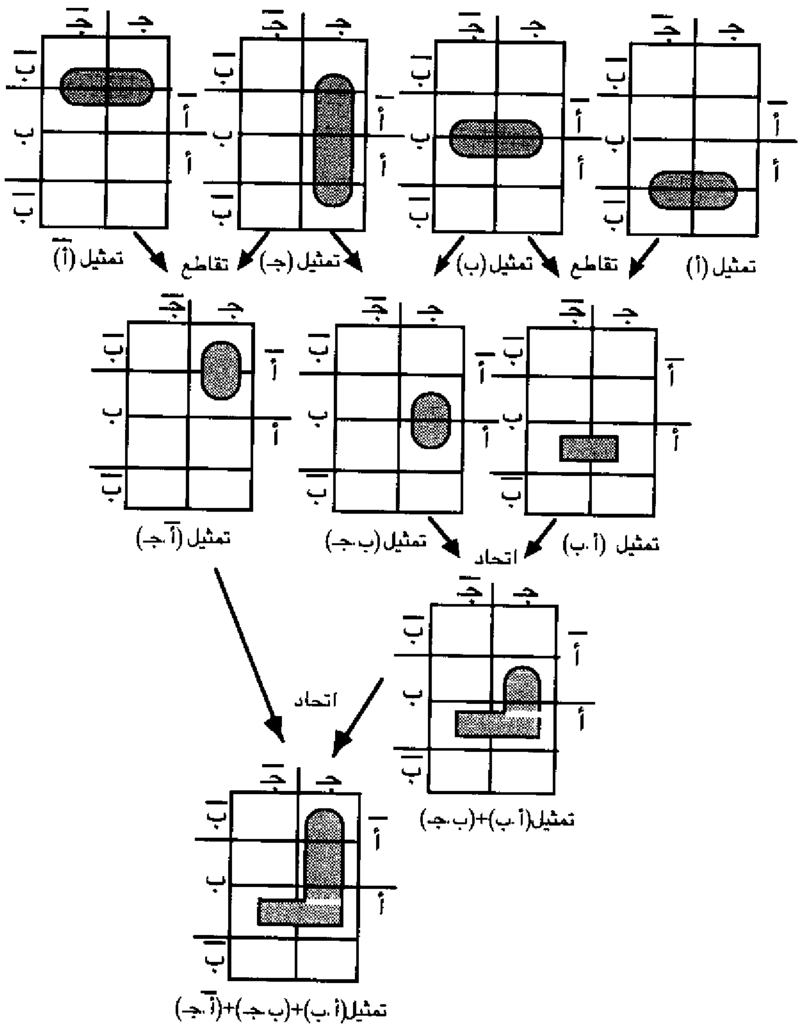


ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

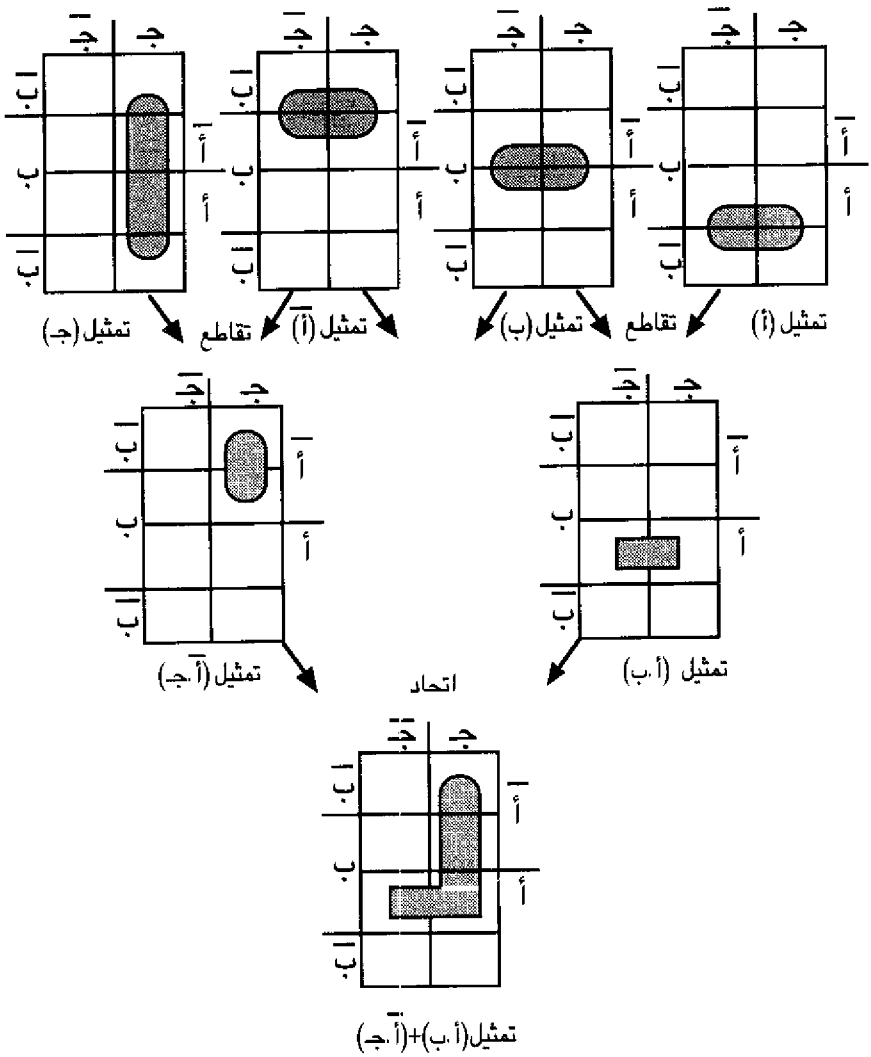
3-11- المعادلة الأولى النظرية السادسة :

(أ.ب)+(أ̅.جـ)+(ب.جـ) = (أ.ب)+(أ̅.جـ)

التمـثـيـل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيمن لهـذه المعـادلة هو كالتالي :



والتمثيل للطرف الأيسر للمعادلة ، بواسطة خارطة كارنوف هو كالتالي:

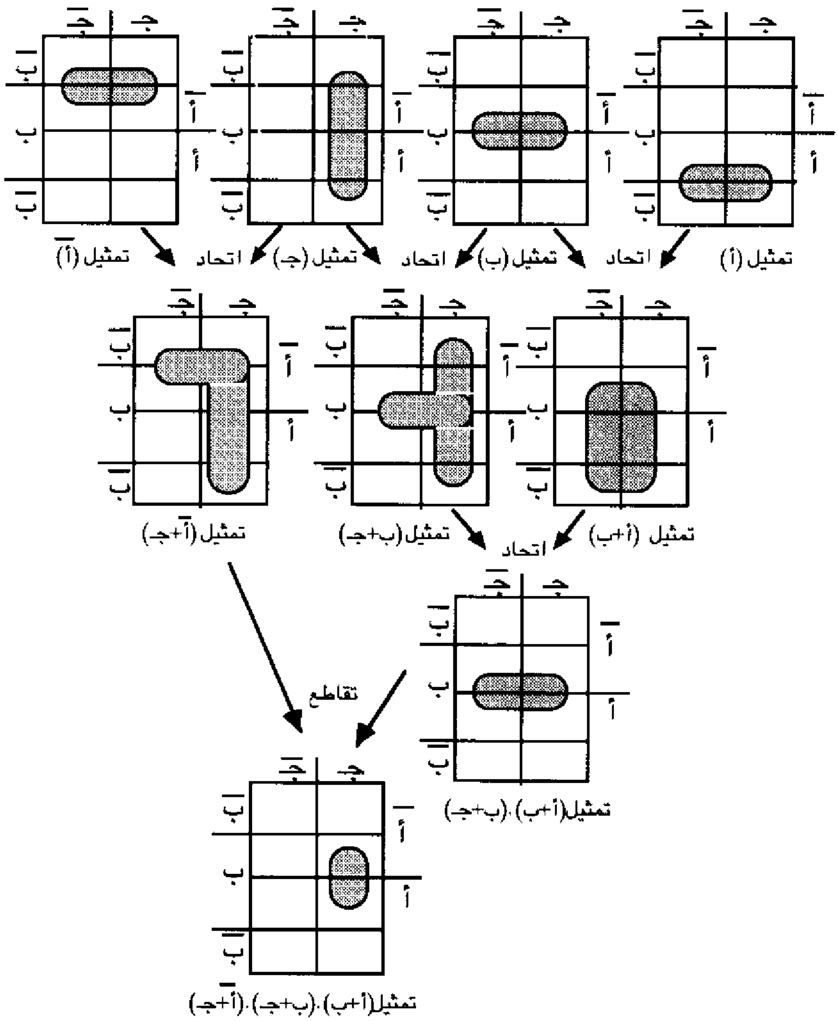


ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

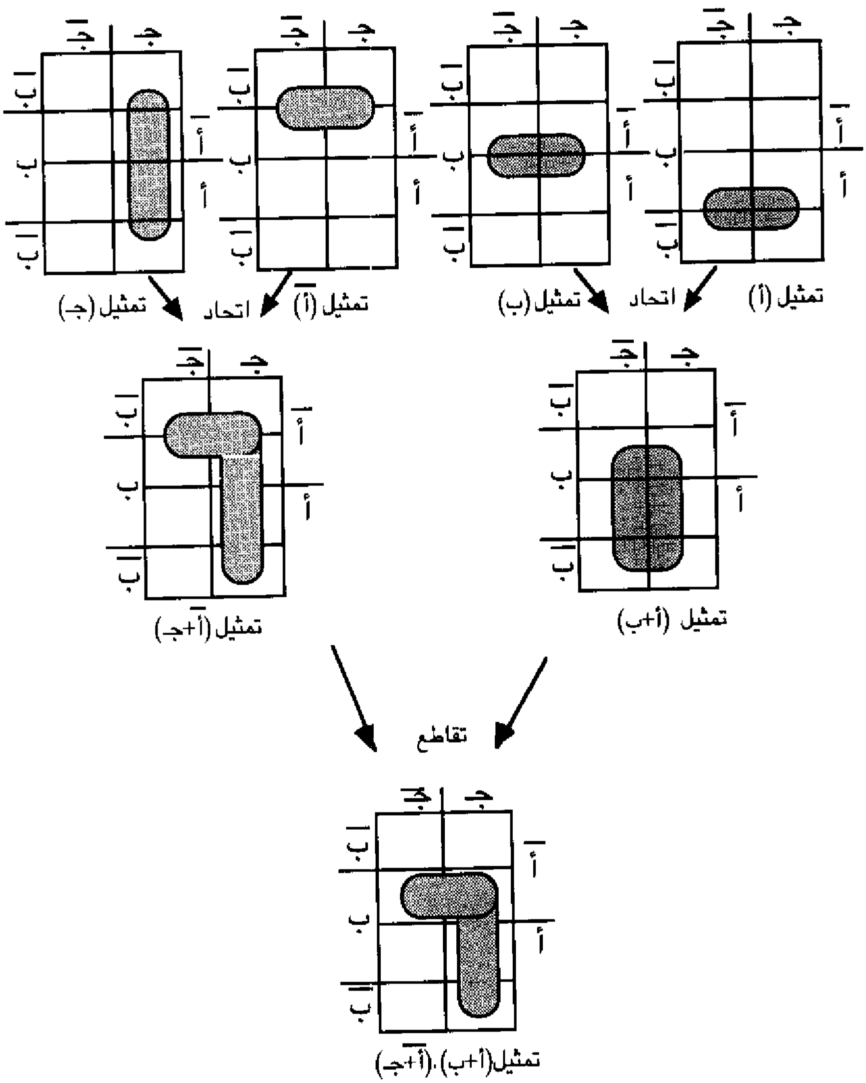
3-12- المعادلة الثانية النظرية السادسة :

(أ+ب).(أ̄+جـ).(ب+جـ) = (أ+ب).(أ̄+جـ)

التمثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيمن لهذه المعادلة ، هو كالتالي :



التمثيل للطرف الأيسر بواسطة خارطة كارنوف هو كما يلي :

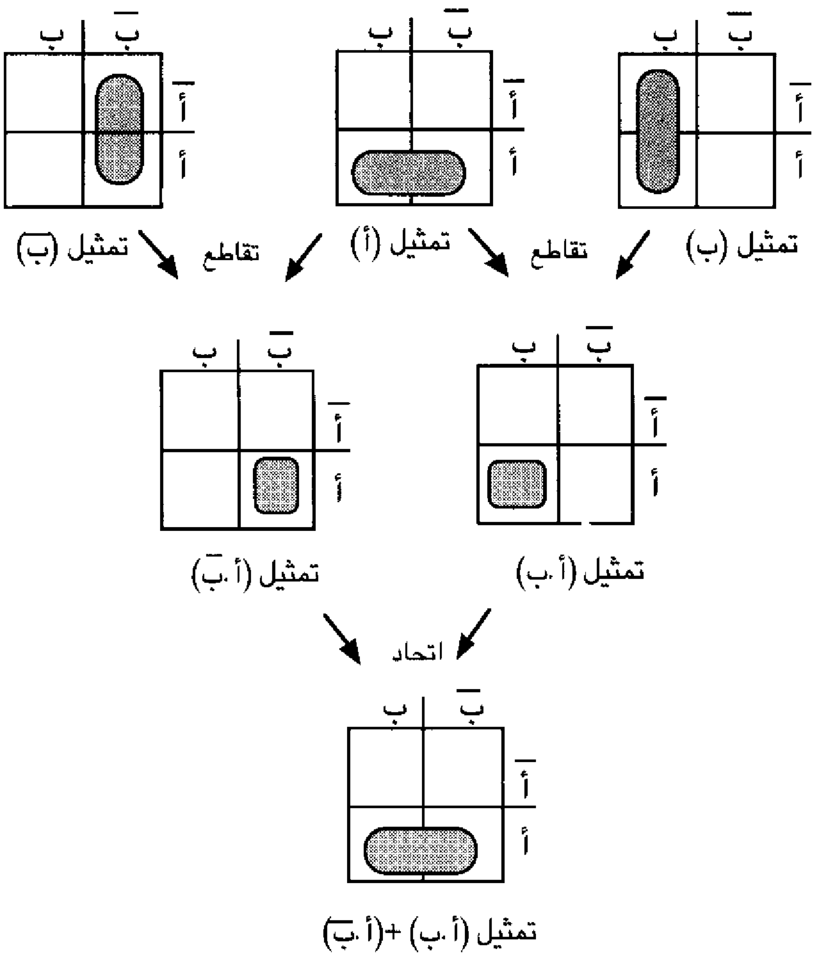


ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-13- المعادلة الأولى النظرية السابعة :

(أ.ب) + (أ. ب̄) = أ

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف ، لهذه المعادلة هو كالتالي :

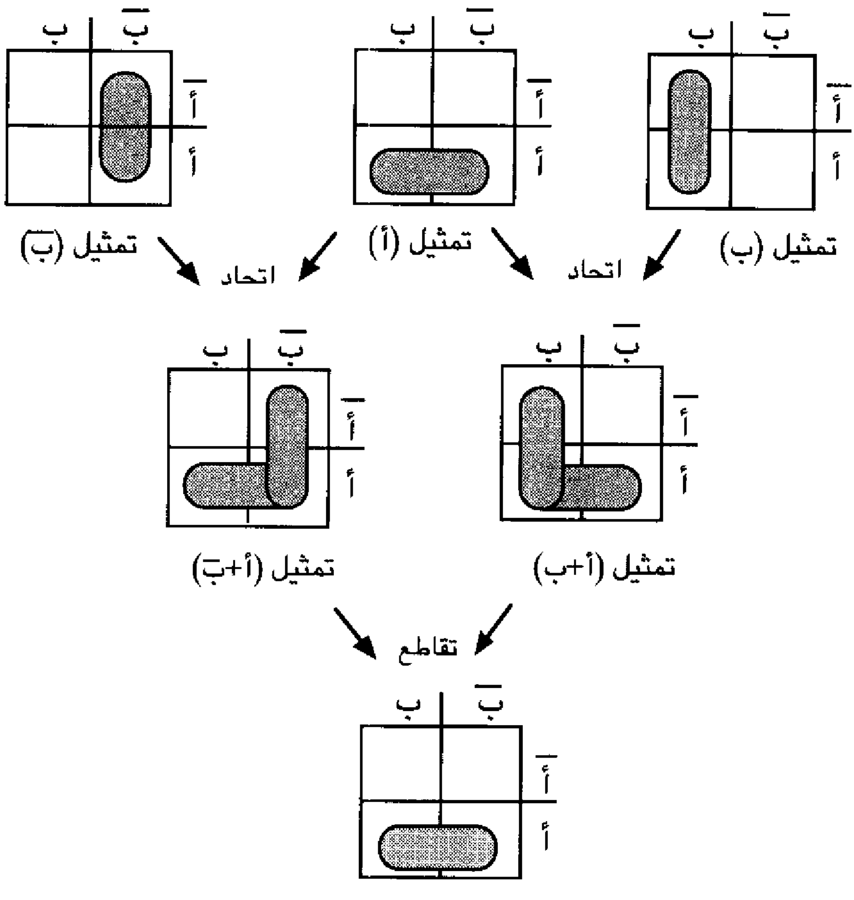


والشكل الأخير يمثل (أ)؛ وهو يكافئ الطرف الايسر من المعادلة .

3-14- المعادلة الثانية النظرية السابعة :

(أ+ب).(أ+$\overline{ب}$) = أ

والإثبات بواسطة خارطة كارنوف ، لهذه المعادلة هو كما يلي :



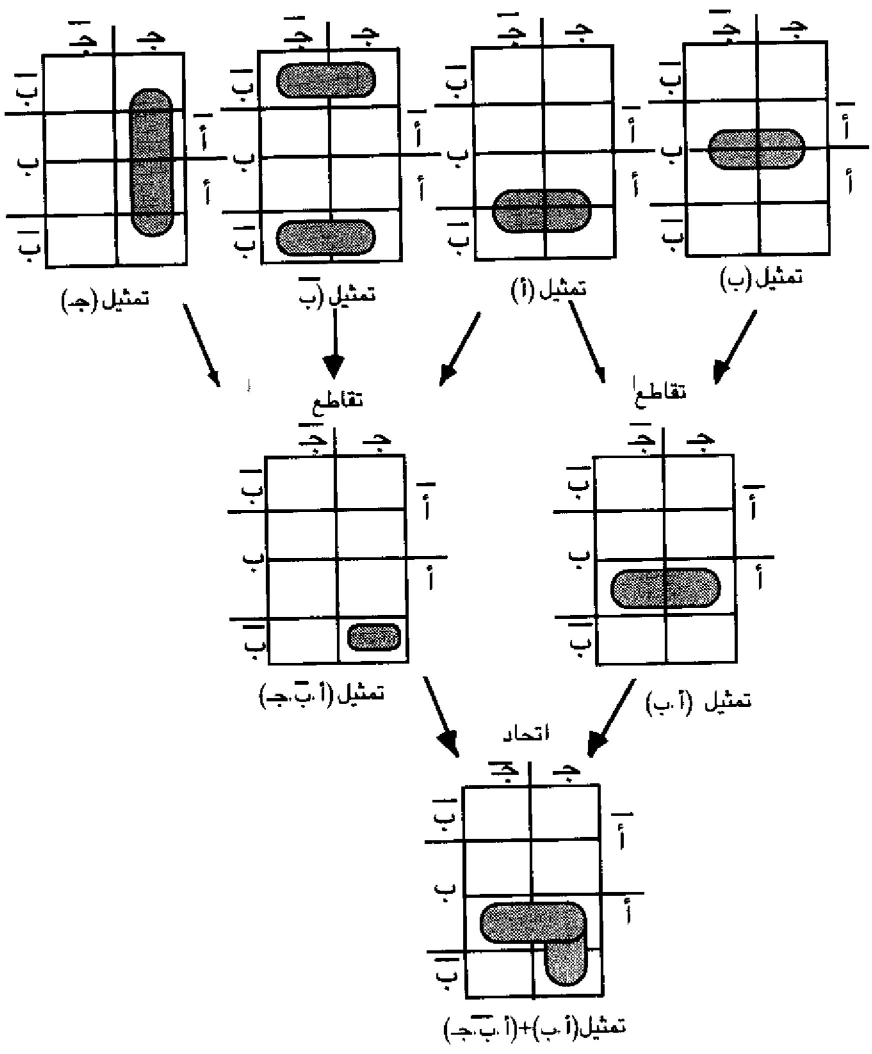
تمثيل (أ+ب) .(أ+$\overline{ب}$)

والشكل الاخير يمثل (أ) . وبذلك تحققت المعادلة . وهو المطلوب.

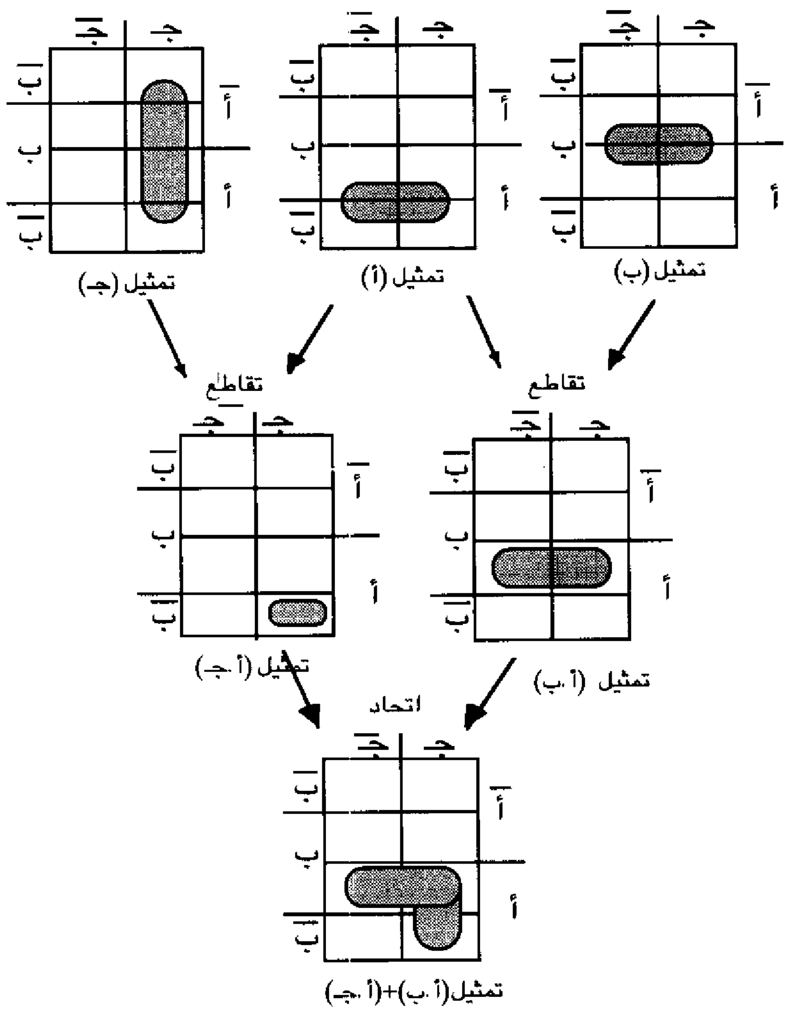
3-15- المعادلة الأولى النظرية الثامنة :

(أ . ب) + (أ . ب̄ . جـ) = (أ . ب) + (أ . جـ)

والتمـثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيمن للمعادلة هو كالتالي :



والتمثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيسر للمعادلة ، هو كالتالي :

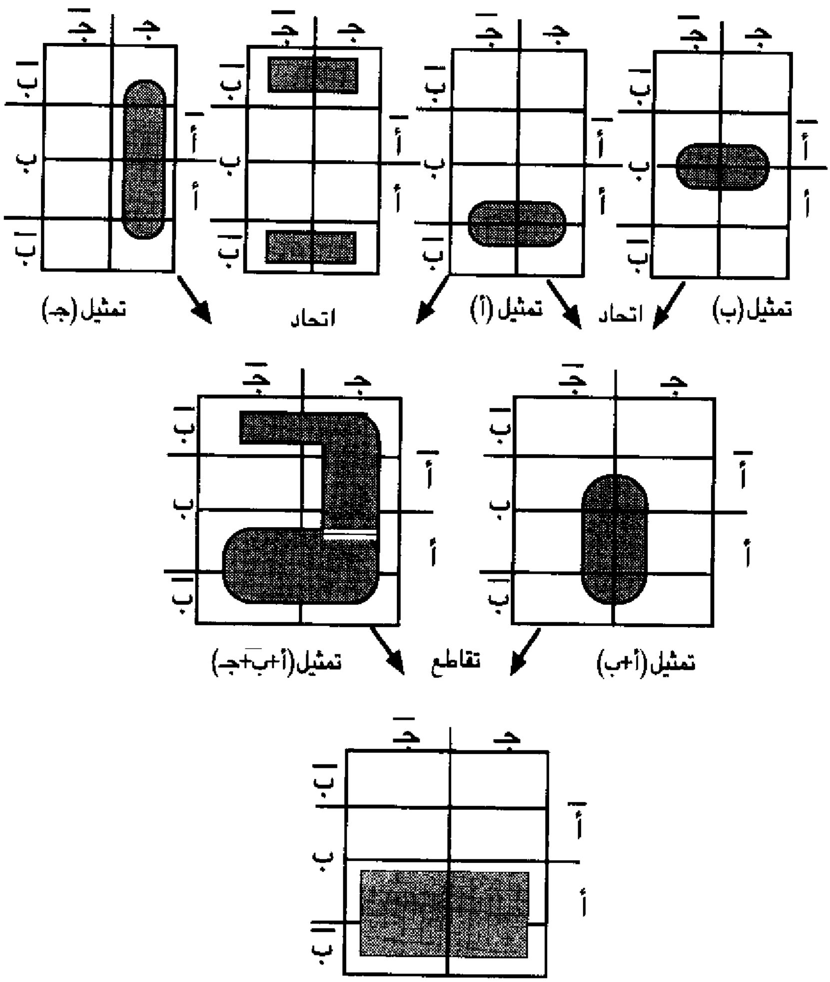


ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-16- المعادلة الثانية النظرية الثامنة :

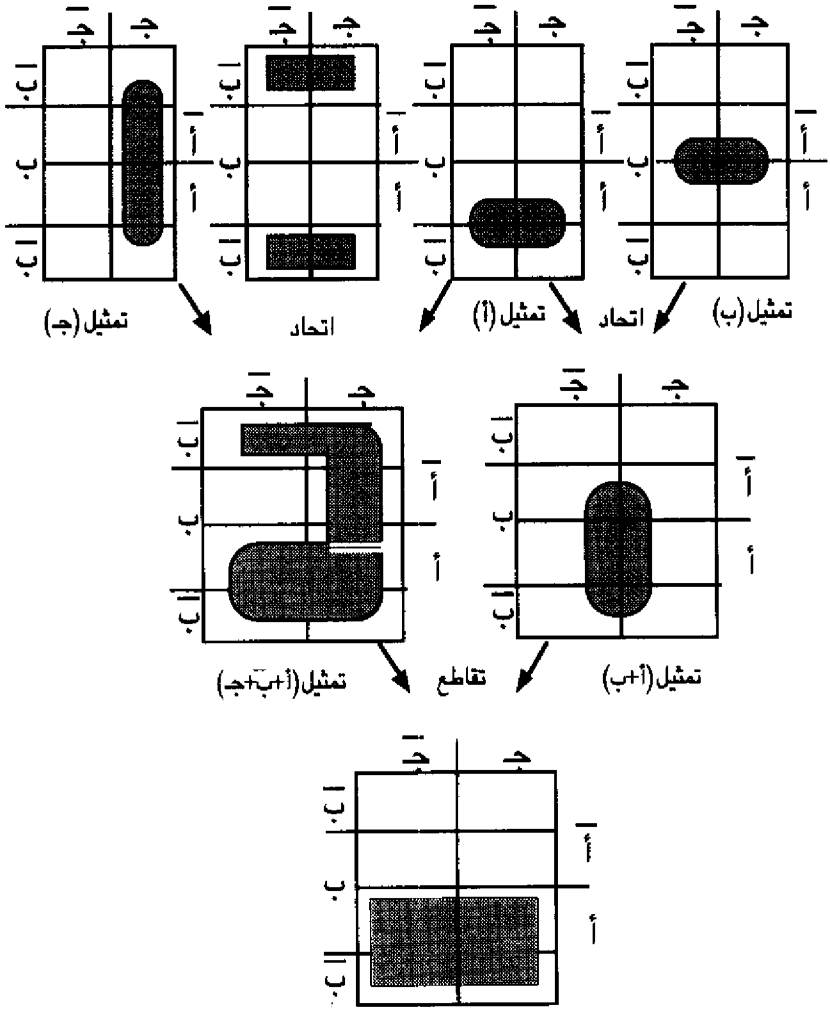
(أ + ب) . (أ + بَ + جـ) = (أ + جـ).(أ+جـ)

الإثبات للطرف الأيمن بواسطة خارطة كارنوف ، كما يلي :



تمثيل(أ+ب)(أ+بَ+جـ)

والتمثيل للطرف الأيسر لهذه المعادلة هو كما يلي :



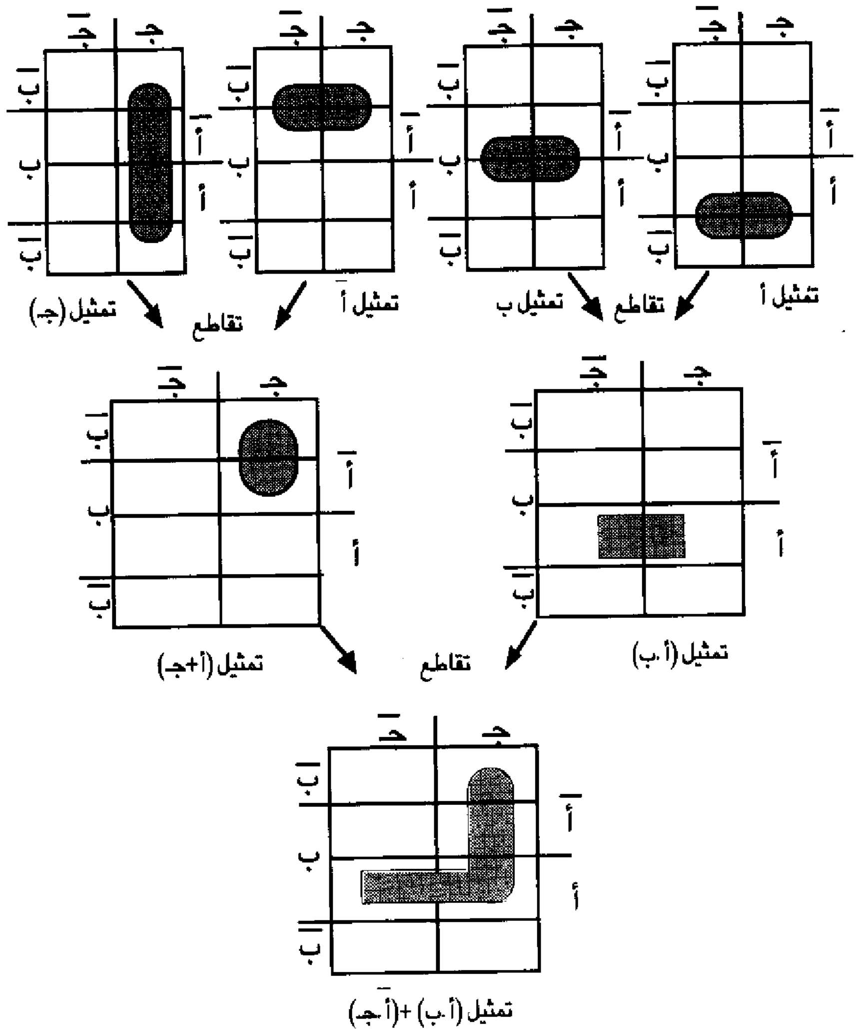
تمثيل(أ+ب)(أ+ب̄+جـ)

ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

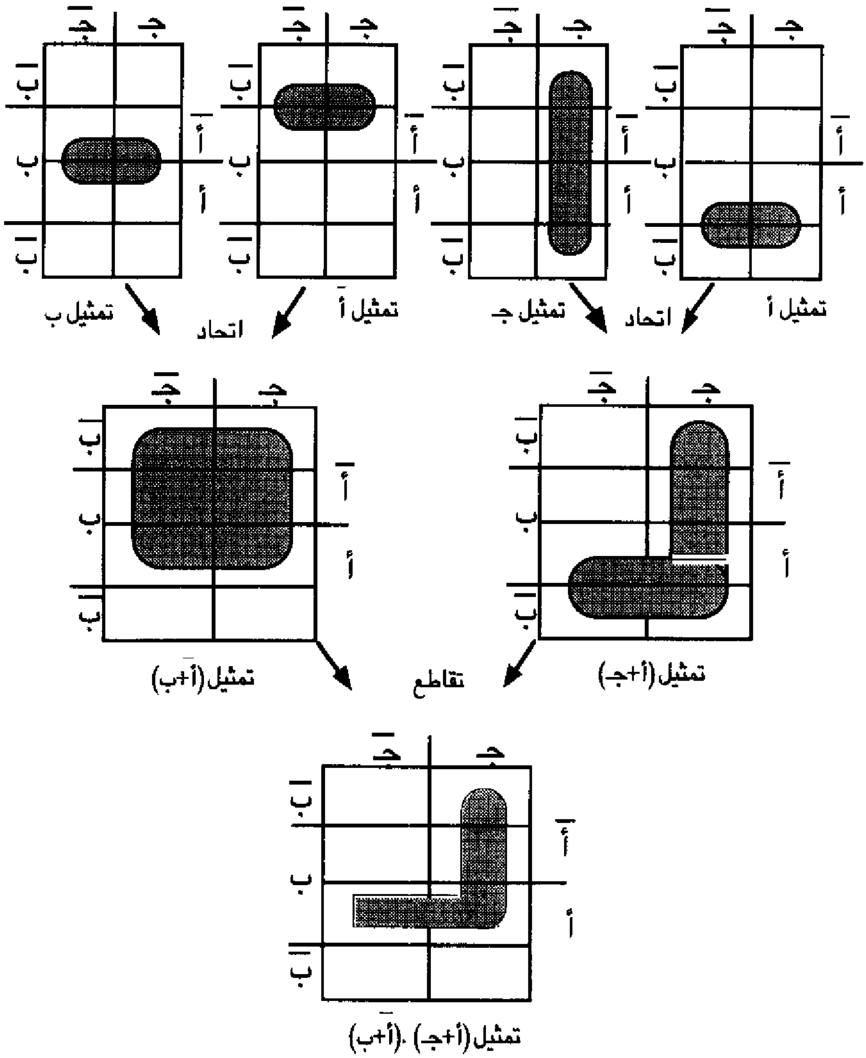
3-17- المعادلة الأولى النظرية التاسعة :

(أ . ب)+(أ̄. جـ) = (أ + جـ) . (أ̄+ ب)

التمثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيمن لهذه المعادلة ، هو كما يلي :



والتمثيل بواسطة خارطة كارنوف للطرف الأيسر ، هو كما يلي :

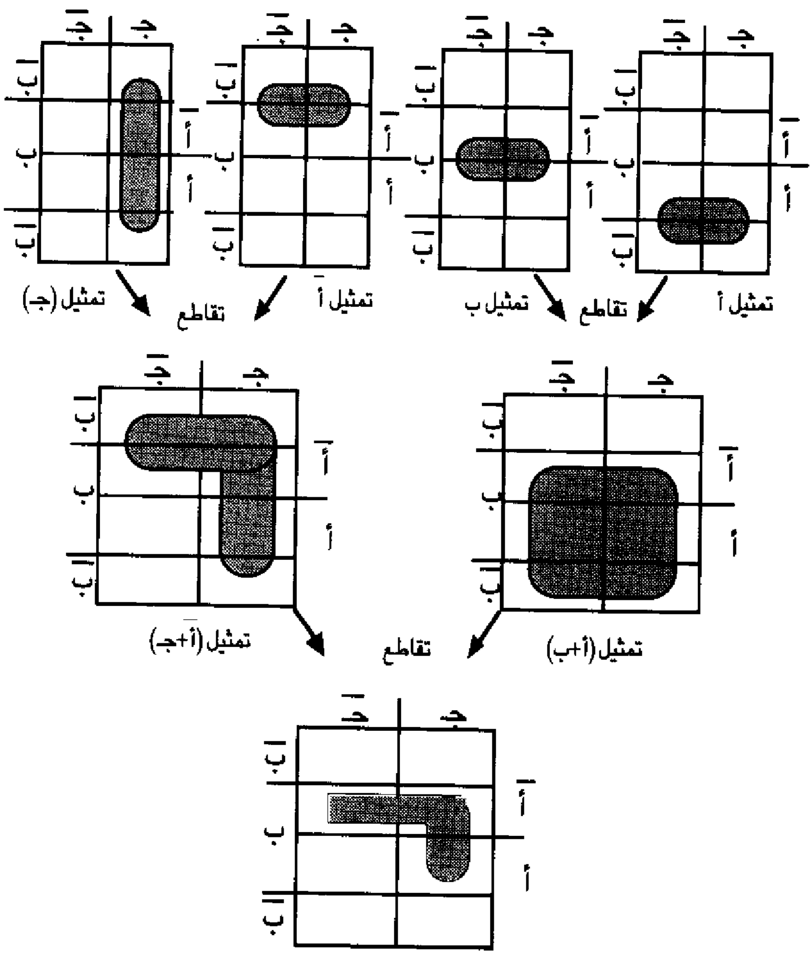


ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .

3-18- المعادلة الثانية النظرية التاسعة :

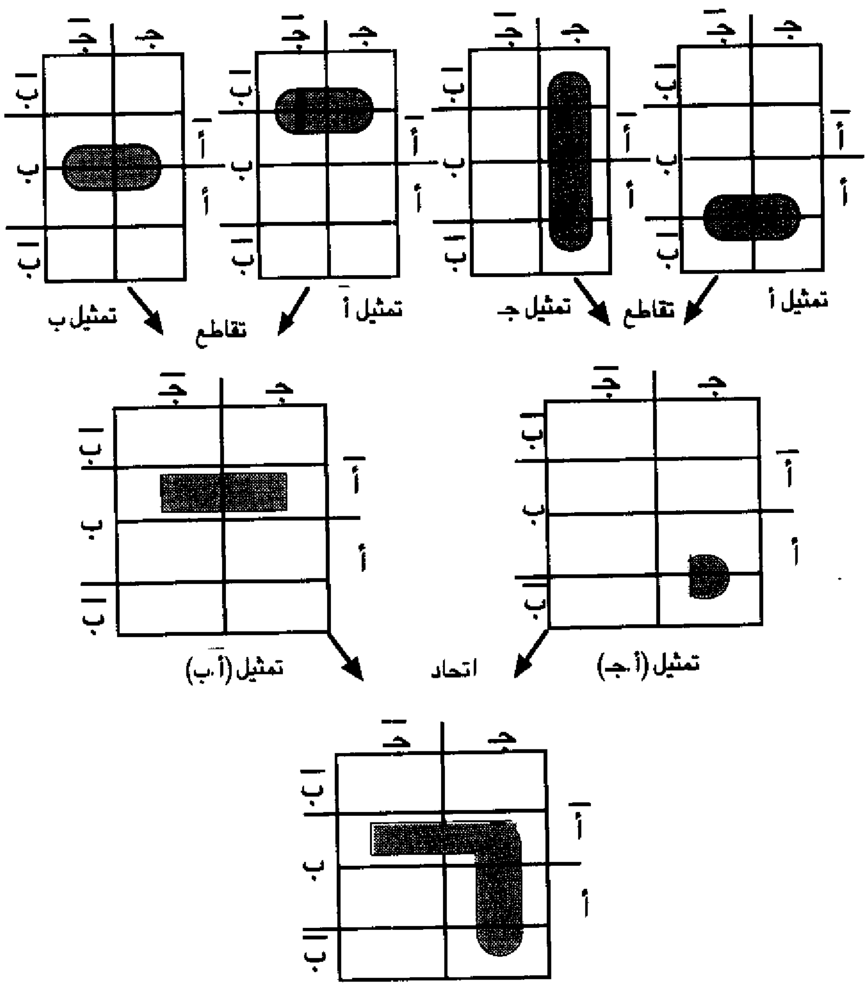
(أ + ب) . (أ̅ + جـ) = (أ . جـ)+(أ̅. ب)

والتمثيل للطرف الأيمن لهذه المعادلة بواسطة خارطة كارنوف هو كما يلي :



تمثيل (أ+ب) .(أ̅+جـ)

والتمثيل للطرف الأيسر من هذه المعادلة هو كما يلي :



تمثيل(أ.جـ)+(أ.ب)

ومن ذلك نلاحظ أن طرفي المعادلة متساويان . وهو المطلوب .