الفصل التاسع

الدوران

السرعة الزاوية :

إذا ثبتت نقطة في جسم صلد فاننا نقول عن الجسم أنه يتحرك حركة دورانية حول تلك النقطة ، وإذا ثبتت نقطتان من الجسم فاننا نقول عن الجسم أنه يتحرك حركة دورانية حول المستقيم الواصل مابين النقطتين والذي نسميه محور الدوران . أما الجسم الحر فيمكن أن يتحرك في الحالة العامة حركة انسحابية بحتة مضافاً اليها حركة دورانية صرفة حول نقطة قد يتغير موضعها مع الزمن بالنسبة للجسم الصلد . وعندما يقوم الجسم بحركة دورانية حول محور ثابت تتحرك كل نقطة من نقاطه على دائرة يقع مركزها على محور الدوران ، ويكون من الأسهل وصف وضع الجسم في أية لحظة بوصف الزاوية التي يصنعها خط من الجسم مع مستقيم ثابت لذلك نعرف السرعة الزاوية بالعلاقة :

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\Theta}{\Delta t} = \frac{d\Theta}{dt} \qquad (9-1)$$

التسارع الزاوي :

إذا لم تكن السرعة الزاوية ثابتة مع الزمن فاننا نستطيع تعريف مقدار

يشبه التسارع الخطي ، هو التسارع الزاوي ، على أنه :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (9-2)$$

الدوران بتسارع زاوي ثابت :

ان التقابل ما بين السرعة والتسارع الزاويين والسرعة والتسارع الخطيين يجعلنا ندرس حالات مماثلة للحركة المتسارعة بانتظام فنستنتج علاقات مماثلة لتلك المستنتجة في حركة القذائف . وتنتج هذه العلاقات إذا كان :

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} =$ ثابت   وهذه العلاقات هي :

$$\omega = \int \alpha \, dt = \alpha t + \omega_0 \qquad (9-3)$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 + \theta_0 \qquad (9-4)$$

حيث ω_0 السرعة الزاوية الابتدائية (عندما $t = 0$) و θ_0 الزاوية الابتدائية .

العلاقة بين السرعة الزاوية والسرعة الخطية والعلاقة ما بين التسارع الزاوي والتسارع الخطي :

إن السرع الخطية للجسيمات المكونة للجسم الصلد تختلف باختلاف موضع النقطة وبعدها عن محور الدوران ، غير أن لجميع الجسيمات سرعة زاوية ثابتة . وترسم كل نقطة من الجسم دائرة يساوي نصف قطرها بعد النقطة عن محور الدوران .

ويكون طول القوس s الذي ترسمه نقطة تبعد مسافة r عن محور الدوران عندما يدور الجسم حول المحور زاوية Θ معطى بالعلاقة :

$$s = r\Theta$$

وتكون قيمة السرعة الخطية للنقطة : $\frac{ds}{dt} = r\,\frac{d\theta}{dt}$ لأن r ثابت بالنسبة للنقطة أو أن :

$$v = r\,\omega \qquad (9\text{–}5)$$

وباشتقاق هذه المعادلة ثانية نحصل على التسارع المماسي ونرمز له بـ a_T و يكون :

$$\frac{dv}{dt} = a_T = r\,\frac{d\omega}{dt} = r\,\alpha \qquad (9\text{–}6)$$

أما المركبة القطرية للتسارع أو التسارع القطري فيساوي :

$$a_R = \frac{v^2}{r} = r\omega^2 \qquad (9\text{–}7)$$

الطاقة الحركية الدورانية وعزم العطالة :

إن الطاقة الحركية لجسم ما تساوي مجموع الطاقات الحركية للجسيمات المكونة له :

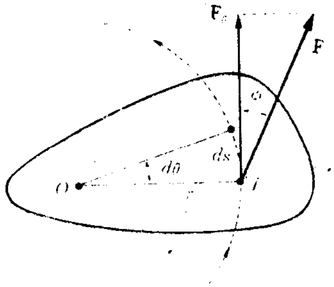
$$E_k = \sum \frac{1}{2}\,m\,v^2$$

ولما كانت ω واحدة لجميع الجسيمات فاننا نستطيع أن نكتب :

$$E_k = \sum \frac{1}{2}\,m\,r^2\,\omega^2 = \frac{1}{2}\,\omega^2\,[\,\sum mr^2\,] \qquad (9\text{–}8)$$

ونلاحظ أن المقدار داخل القوس ثابت بالنسبة الى جسم صلب يدور حول محور

دوران معين ، لذلك نسميه عزم عطالة الجسم حول محور الدوران هذا ونكتب :



الشكل (٩ — ١)

$$I = \sum mr^2 = M\,k_o^2 \quad (9-9)$$

وذلك بفرض M كتلة الجسم بكامله و نسمي k_o نصف قطر الدوران ويكون:

$$E_k = \frac{1}{2}\; I\,\omega^2 \qquad (9-10)$$

العمل والاستطاعة في الحركة الدورانية :

لحساب العمل الذي تقوم به قوة تؤثر في نقطة مثل P واقعة في مستوي الشكل (٩ — ١) نبحث عن العمل العنصري فنجد أن :

$$dw = \vec{F}\ .\ \vec{ds} = F \cdot r\, d\Theta\ .\ \cos\varphi$$

لكن $F\ r\cos\varphi$ يساوي عزم F حول المحور ونرمز له بـ Γ لذلك فان :

$$dw = \Gamma\, d\Theta$$

وبهذا يحل العزم في الحركة الدورانية محل القوة ، ويحل التغير الزاوي محل التغير في الموضع ، ويكون العمل المنجز :

$$w = \int dw = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \Gamma\, d\Theta \qquad (9-10)$$

واذا كانت Γ ثابتة كان لدينا :

$$w = \Gamma\,(\,\theta_2 - \theta_1\,) \qquad (9-11)$$

أما الاستطاعة فتساوي :

$$P = \frac{dw}{dt} = \Gamma \frac{d\Theta}{dt} = \Gamma \omega \qquad (9-12)$$

المزدوجة والتسارع الزاوي :

إذا فعلت في الجسم عدة مزدوجات يكون :

$$dw = (\sum \Gamma) \cdot d\theta$$

وإذا كتبنا قانون العمل والطاقة من أجل جسم صلد ، ولاحظنا أن القوى الداخلية وكذلك القوى التي تمر حواملها بمحور الدوران لاتقوم بأي عمل فاننا نجد :

$$(\sum \Gamma) d\Theta = d (\frac{1}{2} I \omega^2) = I \omega d\omega$$ أو أن :

$$\sum \Gamma = I \omega \frac{d\omega}{d\Theta}$$ أو :

$$\sum \Gamma = I \alpha \qquad (9-13)$$ لأن : $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\Theta} \times \frac{d\Theta}{dt}$

الاندفاع الزاوي :

نعرف الآن مايقابل الإندفاع في الحركة الخطية فنكتب العلاقة (13 9) على الشكل :

$$\sum \Gamma = I \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} (I\dot{\omega}) = \frac{d}{dt} L \qquad (9-14)$$

وهي تكتب بالشكل : $(\Sigma \Gamma) dt = dL$

أي أن مجموع الدفع الزاوي للمزدوجات الفاعلة في الجسم $[(\Sigma \Gamma)dt]$ يساوي تغير

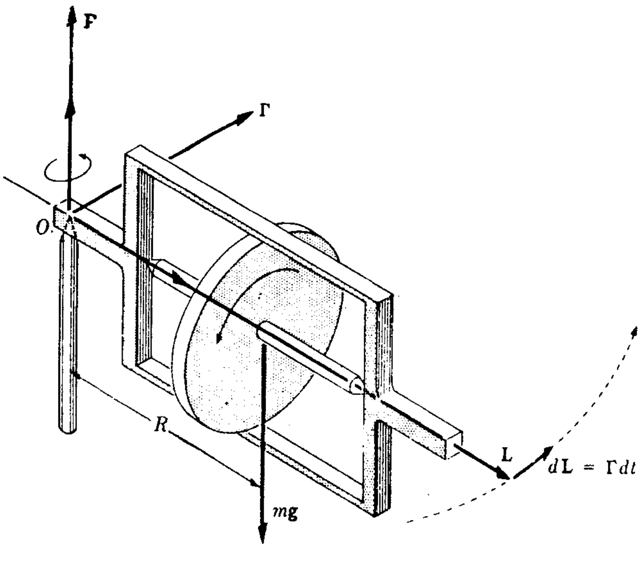
الإندفاع الزاوي للجسم أي dL

والشكل الأصح هو :

$$\Sigma \vec{\Gamma}\, dt = \vec{dL} \tag{9-15}$$

الدوران حول محور متحرك :

إن أبسط الحركات الدورانية التي تلي دوران جسم حول محور ثابت من حيث الصعوبة هي دوران الجسم حول محوره ، ثم دوران هذا المحور بدوره حول مستقيم لايمر بمركز ثقل الجسم ، نسمي جسماً من هذا النوع البلبل . اما اذا كانت النقطة الثابتة التي يمر منها المحور هي مركز كتلة الجسم فنسمي الجسم جيروسكوباً . وفي الحالتين تكون السرعة الزاوية للجسم مساوية المجموع الشعاعي للسرعتين الزاويتين (سرعة حول كل محور). نسمي



الشكل (٩ — ٢)

السرعة الزاوية لمحور الجسم حول المحور الثاني السرعة الزاوية المبـــادرة ونرمز لها بـ Ω . وهي كما يظهر من الشكل (٩ – ٢) تساوي :

$$\Omega = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{L}\,\frac{dL}{dt} = \frac{\Gamma}{L} \qquad (9-16)$$

وعندما يكون البلبل خاضعاً لوزنه فقط يكون : $\Gamma = m\,g\,R$

حيث R بعد مركز كتلته عن النقطة الثابتة .

★ ★ ★

مسألة رقم (٩ ـ ١) :

تتناقص السرعة الزاوية لدولاب معدّل بانتظام من 1000 دورة في الدقيقة الى 400 دورة في الدقيقة خلال 5 ثوان والمطلوب إيجاده :

(أ) التسارع الزاوي وعدد الدورات التي يقوم بها الدولاب خلال الثواني الخمس . (ب) الزمن الإضافي اللازم انقضاؤه مقدراً بالثواني ، كي يقف الدولاب عن الدوران ؟

الحـــل :

(أ) إن الحركة دورانية بتسارع زاوي منتظم لذلك يكون :

$$\omega = \alpha t + \omega_0$$

ومنه :

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t}$$

نعوض بالقيم العددية وهي : $t = 5\ s$ ، $\omega = 400 \times \frac{2\pi}{60}$ ،

$\omega^\circ = 1000 \times \frac{2\pi}{60}$ فنجد :

$$\alpha = \frac{400 - 1000}{5} \times \frac{2\pi}{60} = -4\,\pi \text{ rad/s}^2$$

أي دورتان في الثانية تربيع .

ونستنتج عدد الدورات من معرفة الزاوية المقطوعة خلال الخمس ثواني وهي تعطى بالعلاقة :

$$\theta - \theta_\circ = \omega_\circ t - \frac{1}{2} \alpha t^2$$

حيث $\omega_\circ = \frac{1000}{60}$ دورة في الثانية . نعوض بالقيم العددية فنجد :

$$\frac{1000}{60} \times 5 - \frac{1}{2} \times 2 \times 25 = 58.3 \quad \text{دورة}$$

(ب) يتوقف الدولاب عن الدوران عند ما تنعدم ω ، ونحسب الزمن الاضافي من العلاقة : $\omega = \omega_\circ - \alpha t$ وذلك بإبدال ω بصفر و $\omega_\circ$ بـ $400 \times \frac{2\pi}{60}$ فنجد :

$t = \frac{\omega_\circ}{\alpha}$. وبالتعويض يكون :

$$t = (\,400 \times \frac{2\pi}{60}\,) / 4\,\pi = 3.3 \text{ s}$$

★ ★ ★

مسالة رقم (٩ ــ ٢) :

يبدأ دولاب معدّل ، نصف قطره 30 cm ، حركته من السكون ويتسارع بتسارع زاوي ثابت مقداره 0.50 rad/s^2 . احسب التسارع المماسي والتسارع

القطري والتسارع المحصل لنقطة واقعة على حافة الدولاب (أ) عند البدء ، (ب) بعددورانه زاوية مقدارها $120°$ ، (جـ) بعد دورانه بزاوية مقدارها $240°$.

الحــل :

لدينا من أجل هذه المسألة : $\omega = 0.5\ t$ ، $\theta = \frac{1}{4}\ t^2$

ويعطى كل من التسارع المماسي والقطري في أية لحظة بالعلاقتين : $a_T = r\ \alpha$ و $a_R = r\ \omega^2$ إذن يكون :

(أ) $a_T = 30 \times \frac{1}{2} = 15\ cm/s^2$ و $a_R = 0$ ويكون بالتالي : $a = 15\ cm/s^2$

(ب) نحسب أولاً t فنجد أن $t = 2\sqrt{\theta} = 2\sqrt{\frac{2\pi}{3}}$ ويكون :

$a_T = 15\ cm/s^2$ ، وأما a_R فيساوي :

$$a_R = 30 \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \sqrt{\frac{2\pi}{3}} \right)^2 = 62.8\ cm/s^2$$

ويكون التسارع المحصل : $a = 63\ cm/s^2$

(جـ) إن a_T تبقى كما سبق أما $a_R = r\ \omega^2$ فهي تعطى بالعلاقة :

$a_R = r \times (0.5\ t)^2$ حيث : $t = 2\sqrt{\theta} = 2\sqrt{\frac{4\pi}{3}}$ إذن :

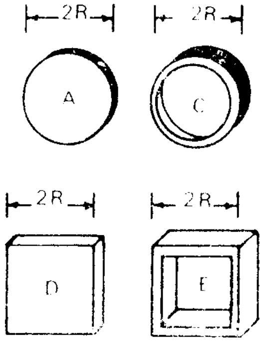
$$a_R = r \times \left(\frac{1}{2} \times 2 \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \right)^2$$

وهي تعطي : $a_R = 125.6\ cm/s^2$ ويكون بالتالي : $a = 126\ cm/s^2$

★ ★ ★

مسألة رقم (٩ ــ ٣) :

تساوي كتلة كل من الأجسام الأربعـــة المبينة في الشكل (٩ ــ ٣) المقـــدار m نفسه . والجسم A اسطوانة مصمتة نصف قطرها R . والجسم C قشرة اسطوانية جوفاء نصف قطرها R . والجسم D مربع مصمت طول ضلعه 2R . والجسم E له أبعاد الجسم D إلا أنه أجوف (اي أنه مؤلف من أربعـة جدران رقيقة) . وللأجسام محور دوران عمودي على الصفحة ومار من مركز ثقل كل منها . والمطلوب : (أ) أي الأجسام له عزم العطالة الاصغر ؟ (ب) أي الاجسام له عزم العطـالة الاكبر ؟



الشكل (٩ ــ ٣)

الحــل :

من الواضح أن عزم عطالة الاسطوانة المصمتة A أصغر من عزم عطالة القشرة الاسطوانية ، بسبب وجود عناصر كتلة في A تبعد عن محور الدوران بعداً أقل من نصف القطر R ، في حين أن عناصر كتلة القشرة كلهـا تبعـد بنفس المقدار . وكذلك فان عزم عطالة المربع المصمت D أصغر من عزم عطالة المربع الأجوف E ، لأن جميع الكتل في الحالة الثانية متباعدة عن المركز في حين أن هناك كتلاً قريبة واخرى بعيدة عن المركـز في الحالة الاولى . بقي أن نقارن عزم عطالة E مع عزم عطالة C وواضح

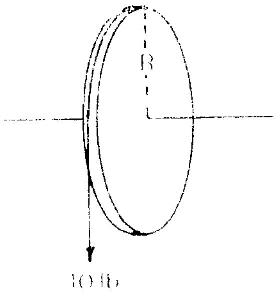
ان عزم عطالة E أكبر لأن هناك كتلا تبعد مسافة تساوي 2 |R عن المركز وهي الكتل المتوضعة في زوايا الشكل . اذن فالجسم E له عزم العطالة الاكبر ، والجسم A له عزم العطالة الاصغر .

مسألة رقم (٩ ــ ٤) :

يستند دولاب معدّل قطره 3 ft على محور أفقي . ويلف حبل حول حافة الدولاب وتؤثر في الحبل قوة جاذبة ثابتة شدتها 10 lb فيلاحظ أن 24 ft من الحبل تفك في أربع ثوان والمطلوب (أ) ماهو التسارع الزاوي للدولاب ؟ (ب) ما هي سرعته الزاوية النهائية ؟ (حـ) ما هي طاقته الحركية النهائية ؟ (د) ما هو عزم عطالته ؟

الحــل :

(أ) نعين أولاً القوى المؤثرة على الدولاب ، فلدينا ثقله وقوى رد الفعل عند المساند إذا اعتبرنا المحور جزءاً منه ، وقوة جر الحبل إن حركة الدولاب حركة دورانية حول المحور الافقي فلنحسب عزوم هذه القوى بالنسبة للمحور : إن عزم قوة الثقالة معدوم لأننا يمكن



الشكل (٩ ــ ٤)

أن نستعيض عن قوى الثقالة المؤثرة على أجزاء الدولاب المختلفة بقوة وحيدة مطبقة عند مركز ثقل الدولاب ، بما أن مركز الثقل هذا يقع على

المحور فالقوة تقطـــع المحور ويكون عزمها صفراً . كذلك فان عزوم قوى الاستناد معدومـــة . ويبقى لدينا عزم القوة المؤثرة الذي يساوي القوة مضروبة بنصف القطر . ونرى أن هـذا العزم ثابت وبالتـالي فنحن بصدد حركة متسارعة تسارعاً زاوياً ثابتاً ، ونجد قيمة التـارع الزاوي α من العلاقة : $\sum \Gamma = I\,\alpha$

وفي هذه الحركة يكون : $\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 + \theta_0$

أو : $\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

إلا أن : $\theta - \theta_0 = S/R$ بفرض S طول الحبل المفكوك . وباعتبار أن $\omega_0 = 0$ بحسب النص فاننا نجد :

$$\frac{S}{R} = \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad \text{ومنه :} \quad \alpha = \frac{2S}{R t^2}$$

وبالتعويض بالقيم العددية نجد :

$$\alpha = \frac{2 \times 24}{1.5 \times (4)^2} = 2\ \mathrm{rad/s^2}$$

(ب) $\omega = \omega_0 + \alpha t = 2 \times 4 = 8\ \mathrm{rad/s}$

(ﺤ) $E_k = W$ (عمل القوى المؤثرة) $= F.S = 10 \times 24 = 240\ \mathrm{ft.lb}$

(د) $I = \frac{\Gamma}{\alpha} = \frac{1.5 \times 10}{2} = 7.5\ \mathrm{slug.ft^2}$

★ ★ ★

مسألة رقم (٩ ــ ٥) :

يزن جيروسكوب التوازن في باخرة 50 طناً ، ويساوي نصف قطر دورانه 5 ft ويدور حول محور شاقولي بسرعة زاوية مقدارهـا 900 دورة في الدقيقة والمطلوب (أ) ما هو الزمن اللازم كي ينتقل الدولاب من السكون الى السرعة الزاوية المذكورة وذلك إذا طبقت عليه استطاعة مقدارها 100 حصان ؟ (ب) أوجد العزم اللازم كي يقوم المحور بحركة مبادرة في مستو شاقولي مار من مقدمة الباخرة ومؤخرتها بمعدل درجة واحدة في الثانية .

الحل :

(أ) نكتب : العمل المنجز = ازدياد الطاقة الحركية

$$\frac{1}{2} I \omega^2 = P t$$

ويكون :

$$t = \frac{I \omega^2}{2 P} = \frac{M k_o^2 \omega^2}{2 P}$$

وذلك باعتبار $I = M k_o^2$ حيث k_o نصف قطر الدوران .

نعوض بالقيم العددية فلدينا :

$$k_o = 5 \text{ ft} \quad ، \quad M = 50 \times 2000/32 \text{ slug} = 10^5/32 \text{ slug}$$

$$\omega = 900 \times \frac{2\pi}{60} = 30\pi \text{ rad/s}$$

$$P = 100 \times 550 \text{ ft . lb/s}$$

اذن يكون : $t = 6400\ s = 1.8\ hr$

(ب) ان القانون الذي يعطي السرعة الزاوية لحركة المبادرة هو :

$$\Gamma = \Omega\, L \qquad \text{ومنه} \qquad \Omega \quad \frac{\Gamma}{L}$$

إلا أن $L = I\,\omega = Mk_0^2\,\omega$ ومنه :

$$\Gamma = \Omega\, M\, k_0^2\, \omega$$

$$\Gamma = 1^\circ \times \frac{2\pi}{360} \times \frac{10^5}{32} \times (5)^2 \times 30\,\pi$$

$$\Gamma = 130\,000\ lb \cdot ft$$

* * *