

الفصل العاشر

المرونة

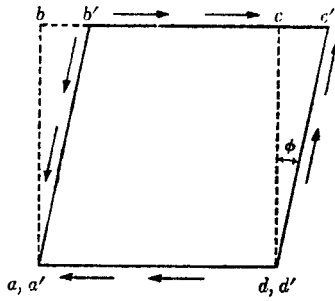
الإجهاد :

عندما يطبق على جسم ما قوى شد أو ضغط أو ثني فاننا نقول عن الجسم أنه في حالة توتر . وبما أن هذه القوى قوى تطبق على سطح الجسم فانه لا يكفي لوصف تأثير هذه القوى على الجسم أن نعرف اتجاه هذه القوى وإثنا علينا أن نعرف اتجاه السطح بالنسبة الى هذه القوى . نسمي القوة المطبقة على وحدة السطح بالاجهاد وهناك حالتان هامتان للاجهاد : الحالة الاولى عندما تكون القوة المطبقة عمودية على السطح فنقول عن الاجهاد في هذه الحالة انه إجهاد شدي أو ناظمي . والحالة الثانية عندما تكون القوة المطبقة موازية للسطح كالحالة التي نطبق فيها مزدوجة على إطار مربع محاولين تشويهه فنسمي الاجهاد إجهاداً مماسياً أو قصياً . وفي الحالة العامة اذا كانت القوة المطبقة تميل بزاوية معينة على السطح فاننا نستطيع تحليل هذه القوة الى قوتين ونعبر عن تأثيرها بعرفة التأثير الناتج عن الاجهادين . فاذا كانت مساحة السطح A' والقوة المطبقة F كان الاجهاد الناظمي $S_n = \frac{F_n}{A'}$ والاجهاد المماسي $S_t = \frac{F_t}{A'}$ حيث F_n المركبة الناظمية للقوة

و F_i مركبتها المماسية . وإذا أردنا أن نحدد الاجهاد الذي يخضع له عنصر حجمي صغير داخل جسم ما فإننا نحتاج إلى معرفة تسعة مقادير يسهل التعرف عليها إذا أخذنا الحجم العنصري عبارة عن مكعب ، فلتحديد الاجهاد علينا أن نحدد الإجهاد على كل وجه فنحتاج إلى ثلاثة مركبات من أجل كل وجه فيكون المجموع 18 عدداً ، أما إذا افترضنا تماثل الاجهاد (أي تساويه في أية نقطة داخل الجسم من أجل اتجاه السطح نفسه) فإننا نحتاج إلى تسعة أعداد لتحديد الاجهاد تماماً وإذا افترضنا توازن المكعب داخل الجسم يتنقص عدد المركبات اللازمة لتحديد الإجهاد إلى 6 مركبات ، وقد ينقص هذا العدد إذا وجد التناظر . لذلك يصنف الاجهاد في صنف المقادير الفيزيائية المسماة بالتسورات .

التشوه أو الانفعال :

لأخذ فكرة عن القوة المؤثرة وشدها قسمنا هذه القوة على السطح وعرفنا



الشكل (١٠ - ١)

الاجهاد . وكذلك لمعرفة مقدار التغير الناتج عن تأثير الاجهاد وتقديره دون النظر الى أبعاد الجسم نعرف التشوه الذي هو عبارة عن التغير النسبي الذي يطرأ على الجسم . فإذا كان التغير ازدياد طول كان

التشوه شديداً ويعرف بالنسبة $\frac{l - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$. ويكون التشوه انضغاطياً إذا كان هناك نقصان في الطول . ونلاحظ أن التشوه نسبة طول إلى طول أي

أنه عدد صرف . وإذا كان التشوه قصياً أمكن قياسه بظل الزاوية Φ الظاهرة في الشكل (١٠ - ١) أو بالزاوية نفسها مقدرة بالراديان . وإذا كان الإجهاد ضغطاً متساوياً من جميع الجهات أي ضغطاً راکسدياً عرفنا التشوه الحجمي $\frac{\Delta v}{v_0}$.

عامل المرونة :

إن التقريب الأول للعلاقة الكائنة ما بين الإجهاد والتشوه هو أن الإجهاد يتناسب مع التشوه ، وهذا ما يعرف بقانون هوك . ولكتابة هذا القانون بدقة نحتاج إلى كتابة كل من الإجهاد والتشوه على شكل تنسور ثم أن نربط بينهما بتنسور آخر هو تنسور المرونة . لكننا سنكتفي بتطبيق هذا القانون على حالات خاصة بسيطة أولها أن نكتب نسبة الإجهاد الشدي إلى التشوه الشدي مساوية إلى مقدار ثابت هو عامل بانغ في المرونة :

$$Y = \frac{F_n/A}{\Delta l/l_0} \quad (10-1)$$

والعلاقة الثانية هي تناسب الإجهاد القصي إلى التشوه القصي :

$$S = \frac{F_t/A}{\Phi} \quad (10-2)$$

ويسمى S عامل القص .

أما العلاقة الثالثة التي تعطي عامل المرونة الحجمي فهي :

$$B = \frac{-P}{\Delta v/v_0} \quad (10-3)$$

حيث ترمز P الى الضغط المطبق على المادة . وقد وضعت اشارة الناقص لأن ازدياد الضغط يسبب دائماً نقصاً في الحجم ، ولنحصل على قيم موجبة لـ B . وكثيراً ما يستخدم مقلوب العامل الحجمي الذي يسمى بالانضغاطية ويرمز له بـ K وعليه فان :

$$K = \frac{1}{B} = \frac{-\Delta v/v_0}{P} \quad (10-4)$$

وواضح أنه ليس لهذه العلاقات معنى دقيقاً إلا في حالة تناسب الإجهاد مع التشوه ، أي في حالة كون العلاقة خطية بينها . ويسمى المجال الذي تكون فيه العلاقة خطية بمجال المرونة وهو يتصف بخاصة أخرى هي أن الجسم يعود إلى حالته الابتدائية عندما يزول الإجهاد عنه . وتسمى آخر نقطة في هذا المجال حدّ المرونة .

ثابتة القوة :

تتميز عوامل المرونة المذكورة صفات المادة التي صنع منها الجسم سواء أكان قضيباً أو نابضاً أو غير ذلك . فهي لا تعطي مقدار التشوه لقضيب معين أو نابض معين إلا بعد معرفة أبعاد هذا القضيب أو النابض بالإضافة إلى القوة المطبقة واتجاهها . فنكتب في حالة نابض مثلاً أن : $F = kx$ حيث سمينا k ثابتة قوة النابض وبالمثل نستطيع أن نكتب المعادلة (10-1) بطريقة مشابهة فيكون :

$$F = \frac{YA}{l_0} \Delta l \quad (10-5)$$

$$F = k \Delta l \quad \text{أو :}$$

ونسمي هذه الثابتة ثابتة القوة للسلك المعطى مثلاً . فهي تختلف باختلاف طول السلك وسطح مقطعه ومادته في حين أن k كانت مستقلة عن الطول والمقطع ولا تتعلق إلا بنوع المادة .

* * *

مسألة رقم (١٠ - ١) :

يساوي الاجهاد عند حد المرونة لحبل فولاذي حامل لمصعد $40\,000 \text{ lb/in}^2$. أوجد أكبر تسارع يمكن أن يحرك به مصعد وزنه طنان إذا كان المصعد محمولاً بحبل مساحة مقطعه $\frac{1}{2} \text{ in}^2$ على أن لا يتجاوز الإجهاد $1/4$ الاجهاد عند حد المرونة .

الحل :

يتحدد أكبر تسارع بتحديد أكبر قوة شد يمكن أن يتحملها حبل المصعد من المعادلة :

$$T - w = m a \quad (1)$$

حيث T توتر الحبل و w وزن المصعد و a تسارعه (في حالة حركته نحو الأعلى بتسارع a أو حركته نحو الأسفل بتباطؤ a) . ومن جهة أخرى فإن جداء الاجهاد عند حد المرونة بسطح مقطع السلك يعطي

قوة الشد العظمى التي يمكن تطبيقها على الحبل الفولاذي الحامل للمصعد والتي إذا أزيلت عاد الحبل الى طوله الطبيعي ، إلا أننا نريد أن لا يتجاوز الاجهاد الذي يخضع له الحبل ربع حد المرونة فقوة الشد العظمى المسموح بها هي :

$$T_{\max} = \frac{1}{4} \times 40\,000 \times \frac{1}{2} = 5000 \text{ lb}$$

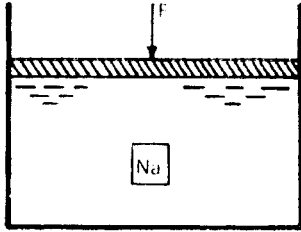
ونجد من العلاقة (١) أن :

$$a_{\max} = (T_{\max} - w) / m = \frac{5000 - 2 \times 2000}{2 \times 2000/32} = \frac{32\,000}{4000} = 8 \text{ ft/s}^2$$

* * *

مسألة رقم (١٠ - ٢) :

يراد قياس انضغاطية الصوديوم بملاحظة انتقال المكبس في الشكل (١٠ - ٢)



الشكل (١٠ - ٢)

عند تطبيق قوة عليه . فيغمر الصوديوم في زيت يملأ الاسطوانة تحت المكبس . فاذا فرضنا أن المكبس وجدران الاسطوانة صلبة تماماً وأنه لا يوجد احتكاك ولا تسرب في الزيت . فاحسب

انضغاطية الصوديوم بدلالة القوة F ، وانتقال المكبس x ومساحته A ، وحجم الزيت الابتدائي V_0 وحجم الصوديوم الابتدائي V' وانضغاطية الزيت k .

الحل :

إن انتقال المكبس مسافة x يقابل نقصاً في الحجم قدره Ax حيث

مساحة مقطع الاسطوانة . وهذا يساوي الى نقصان حجم الزيت مضافاً اليه نقصان حجم الصوديوم أي :

$$\Delta x = \Delta V + \Delta V'$$

وإذا فرضنا k' انضغاطية الصوديوم كان لدينا : $k' = \left| \frac{\Delta V'}{P \Delta V'_0} \right|$

ومنه : $\Delta V' = k' P \Delta V'_0$ وبالمثل نكتب : $\Delta V = k P \Delta V_0$

اذن يكون : $\Delta x = k' P \Delta V'_0 + k P \Delta V_0$ ومنه :

$$k' = \frac{1}{P \Delta V'_0} \left[\Delta x - k P \Delta V_0 \right] = \frac{A}{F \Delta V'_0} \left[\Delta x - k V_0 \frac{F}{A} \right]$$

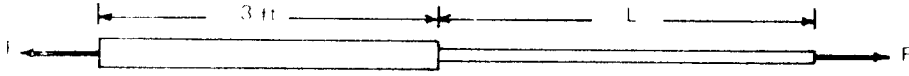
* * *

مسألة رقم (١٠ - ٣) :

يربط قضيب نحاسي طوله $L' = 3 \text{ ft}$ ومساحة مقطعه $A' = 0.5 \text{ in}^2$ ،
بقضيب فولاذي طوله L ومساحة مقطعه $A = 0.2 \text{ in}^2$. تخضع جملة
القضيين إلى قوتي جذب متعاكستين شدة كل منها $F = 6000 \text{ lb}$ مطبقتين
عند نهايتي الجملة والمطلوب (أ) أوجد طول قضيب الفولاذ L إذا كانت
استطالة القضيين واحدة . (ب) ما هو الاجهاد في كل من القضيين ؟
(ج) ما هو تشوه كل من القضيين ؟ يعطى عامل يانغ للفولاذ
 $Y = 29 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$ ويعطى عامل يانغ للنحاس وهو يساوي
 $Y' = 20 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$.

الحل :

(أ) نحسب أولاً استطالة القضيب الفولاذي نتيجة تأثير قوة مساوية لـ F



الشكل (١٠ - ٣)

لأن أي مقطع من القضيب عبارة عن جسم متوازن فهو يخضع إلى قوتين متعاكستين ومتساويتين بدءاً من النهاية الأولى وحتى النهاية الثانية، وعلى وجه الخصوص عند مقطع الربط بين القضيين . ولدينا بالنسبة للفولاذ العلاقة :

$$Y = \frac{F/A}{\Delta L/L} = \frac{F.L}{A.\Delta L}$$

ومنها نجد : $L = \frac{Y.A.\Delta L}{F}$ ، وبالمثل بالنسبة للنحاس يكون :

$$L' = \frac{Y'.A'.\Delta L'}{F}$$

وبأخذ النسبة بينها نجد :

$$\frac{L}{L'} = \frac{Y.A.\Delta L}{F} \cdot \frac{F}{Y'.A'.\Delta L'}$$

$$\frac{L}{L'} = \frac{Y}{Y'} \cdot \frac{A.\Delta L}{A'.\Delta L'} \quad \text{وبالاختصار نجد :}$$

فاذا كان $\Delta L = \Delta L'$ آلت العلاقة السابقة بعد الاختصار والترتيب إلى :

$$L = L' \frac{Y \cdot A}{Y' \cdot A'} = 1.8 \text{ ft}$$

$$\frac{F}{A'} = \frac{6000}{0.5} = 12\,000 \text{ lb/in}^2 \quad \text{(ب) الإجهاد في القضيب النحاسي :}$$

$$\frac{F}{A} = \frac{6000}{0.2} = 30\,000 \text{ lb/in}^2 \quad \text{وبالنسبة للقضيب الفولاذي :}$$

$$\frac{\Delta L'}{L'} = \frac{F/A'}{Y'} = \frac{12000}{20 \times 10^6} = 0.0006 \quad \text{(ح) تشوه القضيب النحاسي :}$$

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{F/A}{Y} = \frac{30000}{29 \times 10^6} = 0.001 \quad \text{تشوه قضيب الفولاذ :}$$

مسألة رقم (١٠ - ٤) :

بدور ثقل مقدار $w = 32 \text{ lb}$ مربوط بنهاية سلك فولاذي طوله الطبيعي $l = 2 \text{ ft}$ في دائرة شاقولية بسرعة زاوية ω تساوي دورتان في الثانية عند أسفل الدائرة . فإذا علمت أن مساحة مقطع السلك $A = 0.01 \text{ in}^2$ فاحسب مقدار استطالة السلك عندما يكون السلك في أسفل نقطة من مساره ؟ نفرض أن عامل يانغ للفولاذ يساوي $29 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$.

الحل :

إذا كانت ω السرعة الزاوية للجسم في أسفل نقطة من الدائرة ، فإن هذا الجسم لابد وأن يخضع إلى قوة مركزية شدتها $m l \omega^2$ باعتبار l نصف قطر الدائرة و m كتلة الجسم الدائر . وواضح من الشكل (١٠-٤)

أن هذه القوة المركزية هي $T - W$ إذن لدينا :

$$T - w = ml\omega^2 \quad \text{ومنه :}$$

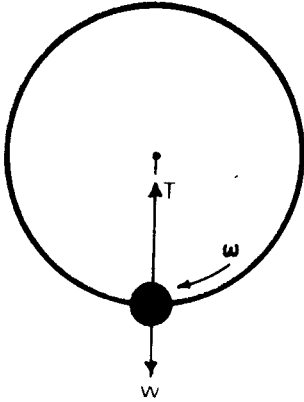
$$T = w + ml\omega^2 \quad (1)$$

فالسلك إذن مشدود بقوة T

تحدها العلاقة السابقة . ويستطيل

السلك بحسب العلاقة :

$$Y = \frac{F/A}{\Delta l/l}$$



التي تعطي مقدار الاستطالة Δl كما يلي: الشكل (١٠ - ٤)

$$\Delta l = \frac{F.l}{YA}$$

نعوض $F = T$ إذ أن $F = T$ فنجد :

$$\Delta l = \frac{l}{YA} (w + ml\omega^2)$$

$$l = 2 \text{ ft} \quad \text{ولدينا :}$$

$$Y = 29 \times 10^6 \text{ lb/in}^2$$

$$A = 0.01 \text{ in}^2$$

$$w = 32 \text{ lb}$$

$$m = 1 \text{ slug}$$

$$\omega = 2 \times 2\pi = 4\pi \text{ rad/s}$$

إذن يكون :

$$\Delta l = \frac{2}{29 \times 10^6 \times 0.01} (32 + 1 \times 2 \times 16 \pi^2) = \frac{2 \times 352}{29 \times 10^4} = 0.00242 \text{ ft}$$

$$\Delta l = 0.0024 \times 12 = 0.029 \text{ in}$$

* * *

- ١٤٤ -

مسألة رقم (١٠ - ٥) :

يستخدم رجل سلكاً نحاسياً لرفع جسم وزنه $w = 5 \text{ lb}$ موضوع على منضدة . فإذا علمت أن السلك يستطيل بمقدار $\Delta l = 0.06 \text{ in}$ نتيجة رفع الجسم مسافة $h = 6 \text{ in}$ فالمطلوب : (أ) أوجد الطاقة التي بذلها الرجل حتى شرع الجسم بالارتفاع عن المنضدة . (ب) ماهي الطاقة الكلية التي بذلها الرجل حتى انجز عملية الرفع ؟ (ج) ماهي نسبة الطائتين وماذا حدث لكل منهما ؟

الحل :

(أ) عندما يشرع الرجل برفع الجسم يخضع السلك من الطرف السفلي إلى ثقل الجسم ويخضع من طرفه العلوي إلى قوة شد مساوية ومعاكسة ويستطيل السلك بفعل القوتين بمقدار Δl متناسبة مع قوة الشد أو وزن الجسم المساوي لها . ونكتب بحسب قانون هوك ثابت مرونة السلك k كالنالي :

$$k = \frac{w}{\Delta l} \quad (1)$$

ويحتزن السلك فيه طاقة مرنة E_1 بفعل هذه الاستطالة ، وهي طاقة اكتسبها من الرجل . ونعلم أن هذه الطاقة تعطى بالعلاقة :

$$E_1 = \frac{1}{2} k (\Delta l)^2 \quad (2)$$

نعوض k بمساويها من العلاقة (1) فنجد :

$$E_1 = \frac{1}{2} w \cdot \Delta l \quad (3)$$

نعوض بالقيم العددية وهي :

$$\Delta l = 0.06 \text{ in} = 0.06/12 \text{ ft} = 0.005 \text{ ft} , \quad w = 5 \text{ lb}$$

فنجد :

$$E_1 = \frac{5}{2} \times 0.005 = 0.0125 \text{ lb}\cdot\text{ft}$$

(ب) ان الطاقة E_2 التي بذلها الرجل لرفع الجسم مسافة h هي كما نعلم :

$$E_2 = wh = 5 \times \frac{6}{12} = 2.5 \text{ lb}\cdot\text{ft}$$

وبالتالي فان الطاقة الكلية E التي بذلها الرجل حتى أنجز عملية الرفع هي :

$$E = E_1 + E_2 = 0.0125 + 2.5 = 2.512 \text{ lb}\cdot\text{ft}$$

(ج) إن النسبة بين الطاقتين هي :

$$E_1/E_2 = (0.0125 / 2.5) \times 100\% = 0.5 \%$$

أما مصير الطاقة E_1 فقد اختزنّت في السلك على صورة طاقة كامنة مرنة،
في حين أن الطاقة E_2 قد اختزنّت في الجسم على صورة طاقة كامنة
ثقالية .

* * *