الفصل الحادي عشر

الحركة الاهتزازية التوافقية البسيطة

تعريف :

نقول عن جسم بأنه يقوم بحركة اهتزازية توافقية بسيطة اذا خضع إلى قوة مارة من نقطة ثابتة ومتجهة نحوها دوماً ومتناسبة مع بعد الجسم عنها . والامثلة على هذه الحركة متعددة نذكر منها حركة كتلة مثبتة في نهـــاية نصلة منشار ، وحركة كتلة معلقة بنابض، وحركة النواس البسيط وحركة النواس المركب وغيرها .

حركة كتلة مثبتة في نهاية نصلة منشار :

إذا رمزنا بـ k إلى ثابت مرونة النصلة ، وهي القوة التي تزيح النصلة عن وضع توازنها مسافة تساوي وحدة الطول ، وإذا كانت x احداثي الكتلة في أية لحظة أمكننا أن نجد العلاقة :

$$\frac{1}{2}\, mv^2 + \frac{1}{2}\, k\, x^2 = E \qquad (11-1)$$

وهي تعبر عن أن مجموع الطاقة الحركية للكتلة مضافاً اليها الطاقة الكامنة المختزنة في النصلة يساوي مقداراً ثابتاً E نسميه الطاقة الكلية

وينتج من العلاقة (1 - 11) أن :

$$v_{max} = \pm \sqrt{2E/m} \qquad (11-2)$$

$$x_{max} = A = \sqrt{2E/k} \qquad (11-3)$$

وتسمى A سعة الحركة الاهتزازية وهي أكبر احداثي تبلغه الكتلة اعتباراً من وضع توازنها .

أما علاقة سرعة الكتلة بدلالة احداثيها فهي :

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{A^2 - x^2} \qquad (11-4)$$

وهي تعطي x بدلالة الزمن t كما يلي :

$$x = A \sin \left(\sqrt{\frac{k}{m}} \; t + \Theta_0 \right) \qquad (11-5)$$

حيث Θ_0 زاوية الطور الابتدائي للحركة وهي تعطى بالعلاقة :

$$\Theta_0 = \text{Arc} \sin \frac{x_0}{A} \qquad (11-6)$$

وذلك بافتراض x_0 موضع الكتلة في اللحظة صفر .

وتشير العلاقة (5 - 11) إلى أن x تتغير بين A + و A - بصورة دورية وأن دور الحركة هو :

$$T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{m/k} = 2\pi/\omega \qquad (11-7)$$

وذلك بافتراض $\omega = \sqrt{k/m}$

وبامكاننا أن نكتب المعادلة (5 – 11) بدلالة ω و f و T على احـــد الاشكال التالية :

$$\left.\begin{aligned} x &= A \sin(2\pi ft + \Theta_o) \\ x &= A\sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \Theta_o\right) \\ x &= A \sin(\omega t + \Theta_o) \end{aligned}\right\} \quad (11-8)$$

أما تسارع الكتلة عندمـــا تكون على بعـــد x من موضع التوازن فيعطى بالعلاقة :

$$a = -\omega^2 x \qquad (11-9)$$

حركة كتلة معلقة في نهاية نابض :

تصلح العلاقات المذكورة اعلاه لوصف حركة كتلة معلقة بنابض شريطة أن نضع مكان k حيثما وردت قيمة ثابتة مرونة النابض التي تعطي القوة اللازمة كي يمتط النابض مسافة تساوي وحدة الطول .

حركة النواس البسيط :

اذا كانت سعة النوسان صغيرة امكننا البرهان على أن دور نواس طوله L هو :

$$T = 2\pi\sqrt{L/g} \qquad (11-10)$$

أما إذا كانت سعة النوسان كبيرة فان دور اهتزاز النواس يعطى بالعلاقـــة :

$$T=2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}\left[1+\frac{1^2}{2^2}\sin^2\frac{\Theta}{2}+\frac{1^2}{2^2}\,\frac{3^2}{4^2}\sin^4\,\frac{\Theta}{2}+\dots\right] \qquad (11-11)$$

حركة النواس المركب :

إن دور النواس المركب عندما تكون سعة اهتزازه صغيرة هو :

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{I/mg\,h} \qquad (11-12)$$

حيث ترمز I إلى عزم عطالة جسم النواس حول محور الاهتزاز وترمز m إلى كتلة النواس و h إلى بعـــد مركز ثقـــل النواس عن محور الاهتزاز

★ ★ ★

مسالة رقم (١١ ـ ١) :

يقوم جسم بحركة اهتزازية توافقية دورها 24 ثانيـــة وطورها الابتدائي معدوم . والمطلوب ماهو الزمن الذي يحتاجه الجسم كي تكون احداثيـته مساوية نصف سعته ؟

الحـل :

نكتب المعادلة (8 - 11) التي تعطي الشكل العام للحركة التوافقيـة :

$$x = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}\,t+\Theta_0\right)$$

وحسب شروط المسألة : $x=\frac{A}{2}$ ، $T = 24\,s$ ، $\Theta_0 = 0$

إذن : $0.5 = \sin\frac{\pi}{12}\,t$

ولما كان : $\text{Arc} \sin 0.5 = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$ فانه يكون لدينا :

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{\pi}{12} t$$

ومنه :

$$\frac{\pi}{6} + 2 n \pi = \frac{\pi}{12} t$$

التي تكتب بعد ضرب طرفيها بـ $12/\pi$ بالشكل :

$$t = 2 + 24 n \qquad (1)$$

ويمر الجسم اول مرة من الاحداثي $x = A/2$ في اللحظة t التي تجدها من العلاقة (1) بوضع $n = 0$ ، أي في اللحظة $t = 2\ s$.

* * *

مسالة رقم (١١ ـ ٢) :

إذا كانت سعة الحركة الاهتزازية التوافقية 5 cm و دورها 4 s فما هي السرعة العظمى للجسم المهتز وما هو تسارعه الأعظمي ؟

الحـل :

تعطى سرعة الحركة الاهتزازية كما نعلم بالعلاقة :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2 \pi A}{T} \cos \left(2 \pi \frac{t}{T} + \Theta_0 \right) \qquad (1)$$

وهذه السرعة تكون على أشدها ، أي عظمى ، عندما يكون :

$$\cos \left(2 \pi \frac{t}{T} + \theta_0 \right) = 1$$

أي أن السرعة العظمى هي :

$$v_{max} = \frac{2\pi A}{T}$$

وبما أن : $A = 5\ cm$ و $T = 4\ s$ فان :

$$v_{max} = 7.85\ cm/s$$

وبامكاننا أن نجد تسارع الجسم المهتز باشتقاق العلاقة (1) فنجد :

$$a = \frac{dv}{dt} = -\frac{4\pi^2 A}{T^2} \sin\left(\frac{2\pi}{T} t + \Theta_0\right)$$

وواضح أن القيمة العظمى لهذا المقدار هي :

$$v_{max} = \frac{4\pi^2 A}{T^2} = 12.3\ cm/s^2$$

كما أن بامكاننا أن نجد النتيجة نفسها باستخدام العلاقة (9-11) بعد تعويض x بـ A فنجد :

$$a_{max} = -\omega^2 A = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A = \frac{4\pi^2 A}{T^2} = 12.3\ cm/s^2$$

* * *

مسالة رقم (١١ ـ ٣) :

إذا كانت معادلة حركة جسم من الشكل :

$$x(cm) = \sin\frac{\pi}{6} t$$

فما هي اللحظات التي يبلغ فيها الجسم سرعته العظمى وتسارعه الأعظمي ؟

الحـــل :

لدينا : $x = \sin \frac{\pi}{6} t$ فالسرعة تساوي :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{6} \cos \left(\frac{\pi}{6} t \right)$$

وهي تصبح أعظمية عندما : $\cos \frac{\pi}{6} t = \pm 1$ أي عندما يتحقق الشرط :

$$\frac{\pi}{6} t = n\pi \qquad \text{وهو يعطي :} \qquad t = 6n$$

حيث $n = 0,1,2,\ldots$. وعلى هذا تأخذ السرعة قيمتهـــا العظمى في اللحظات :

$t = o$, $t = 6\,s$, $t = 12\ s$ .... الخ

أما التسارع فيكون أعظمياً عند تحقق الشرط $\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \pm 1$ وذلـك لأن قيم x العظمى تجعل التسارع أعظمياً كما يتضح من العلاقة (9–11) .
ويتحقق الشرط السابق عندما يكون :

$$\frac{\pi}{6}\ t = (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

وعلى هذا تأخذ النقطة تسارعها الأعظمي في اللحظات $t = 3(2n+1)$

أي في اللحظات :

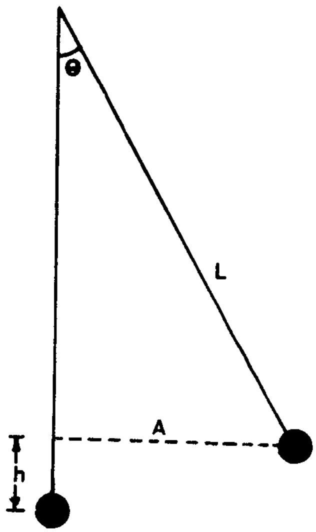
$t = 3\ s$ ، $t = 9\ s$ ، $t = 15\ s$ ... الخ

* * *

مسالة رقم (١١ ـ ٤) :

علقت كرة بخيط طوله $2\ m$ وازيحت بزاوية قدرهـا 30° وروقبت اهتزازاتها . أوجد سرعة الكرة اثناء مرورها بوضع التوازن وعلى فرض أن الاهتزازات توافقية .

وتحقق من الحل الناتج بايجاد سرعة الكرة أثناء مرورهـا بوضع التوازن من معادلات الميكانيك .



الشكل (١١ ـ ١)

الحـل :

إن دور اهـتزاز النواس البسيط هو :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{9.8}}\ s = 2.8\ s$$

أما سعة الاهتزازات الصغيرة فنجدها من الشكل (١١ ـ ١) بافـتراض أن حركة الكرة تتم على خط مستقيم :

$$A = L \sin \Theta = 2 \times 0.5 = 1\ m$$

وعلى هذا فان معادلة حركة الكرة تكتب بالشكل :

$$x = A \sin \left(\frac{2\pi}{T} t \right) = \sin \frac{2\pi t}{2.8}$$

على فرض أننا نقيس الزمن ابتداء من وضع التوازن ، وعلى ان نقدر المسافات بالأمتار . وتبلغ السرعة قيمتهـــا العظمى اثناء المرور من وضع التوازن وبما أن :

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{2.8} \cos \frac{2\pi}{2.8} t$$

فان : $$v_{max} = \frac{2\pi}{2.8} = 2.24 \text{ m/s}$$

ويمكن أن نجد هذه السرعة أيضاً من العلاقة $m\,gh = \frac{mv^2}{2}$ حيث h هو ارتفاع الكرة عن وضع توازنها . ومنه : $v = \sqrt{2gh}$ إلا أن $h = L(1 - \cos \Theta)$ حيث L طول الخيط . وعليه فان :

$$v = \sqrt{2gL(1 - \cos \Theta)}$$

وبالتبديل نجد أن السرعة تساوي 2.29 m/s . أي أنها اكبر قليلاً ممـــا وجدناه على فرض أن الحركة توافقية . وواضح من العبارة الأخيرة أنه كلما جعلنا Θ أصغر كلما صغرت السرعة واقتربت من القيمة المحسوبة سابقاً ، أي ازداد افتراضنا بأن الحركة توافقية صحة .

* * *

مسألة رقم (١١ ـ ٥) :

عُلقت كفة فيها أوزان بطرف نابض . فكان دور اهتزازاتها الشاقولية مساوياً $0.5\ s$. وبعد أن أضيف للكفة أوزان أخرى أصبح دور الاهتزازات الشاقولية مساوياً $0.6\ s$ فما هو مقدار استطالة النابض بسبب هذه الأوزان الإضافية ؟

الحل :

لدينا : $T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ **أو :**

$$T_1^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} \quad (1)$$

وبعد اضافة الوزن يصبح لدينا :

$$T_2^2 = 4\pi^2 \frac{m + \Delta m}{k} \quad (2)$$

وبطرح (1) من (2) نجد : $T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta m}{k}$

ولكن : $k = \frac{F}{\Delta l} = \frac{g\Delta m}{\Delta l}$

حيث تمثل F القوة التي سببت الاستطالة Δl . اذن :

$$T_2^2 - T_1^2 = 4\pi^2 \frac{\Delta l}{g} \quad \Rightarrow \quad \Delta l = \frac{g}{4\pi^2} (T_2^2 - T_1^2)$$

وبوضع القيم العددية هنا نجد ان : $\Delta l = \frac{980}{4\pi^2}(0.36 - 0.25)$ **أو :** $\Delta l = 2.7\ cm$

★ ★ ★

مسألة رقم (١١ ـ ٦) :

لدينا قطعة فولاذية وزنها 4 lb تهتز بحركة توافقية بسيطة سعتها $A = 9$ in ودورها $T = 3$ s أوجد :

(أ) التواتر f .

(ب) سرعتها العظمى ، وسرعتها عندما تكون الإزاحة مساوية $x = 6$ in .

(حـ) تسارعها الاعظمي ، وتسارعها عندماتكون الإزاحة مساوية $x = 6$ in .

(د) القوة المعيدة العظمى المؤثرة فيها ، والقوة المعيدة عندما $x = 5$ in

(هـ) طاقتها الحركية العظمى .

(و) طاقتها الكامنة العظمى .

(ز) الطاقة الكلية للقطعة المهتزة في أي وضع من أوضاعها .

الحــل :

(أ) التواتر: $f = 1/T = 1/3$ هزة / ثا

(ب) تحدث السرعة العظمى في مركز الاهتزاز ، أي في النقطـــة $x = 0$ وعليه :

$$V_{max} = \frac{2\pi}{T}\sqrt{A^2 - x^2} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\left(\frac{9}{12}\,\text{ft}\right)^2 - 0} = 1\ 57\ \text{ft/s}$$

$$V_{x=1/2\,\text{ft}} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{\left(\frac{9}{12}\,\text{ft}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,\text{ft}\right)^2} = 1.17\ \text{ft/s}$$

(حـ) يكون التسارع أعظمياً عند الإزاحة العظمى ، أي عند $x = 9$ in

$$a_{max} = -\frac{4\pi^2}{T^2}x = -\frac{4\pi^2}{(3\ s)^2}\left(\frac{3}{4}\ ft\right) = -3.29\ ft/s^2$$

$$a_{x=1/2\ ft} = -\frac{4\pi^2}{(3\ s)^2}\left(\frac{1}{2}\ ft\right) = 2.19\ ft/s^2$$

وهما طبعاً باتجاه مركز الاهتزاز .

وبطريقة أخرى نقول طالما أن التسارع a يتناسب مع الازاحة x . وأن $a = 3.29\ ft/s^2$ عندما $x = 9\ in$ فان التسارع a عندما تكون $x = 6\ in$ يكون مساوياً :

$$a = \frac{6}{9} \times 3.29 = 2.19\ ft/s^2$$

(د) $F_{max} = m\ a_{max} = 4/32\ slug \times 3.29\ ft/s^2 = 0.41\ lb$

وهذا في النقطـــة $x = 9\ in$. ولما كانت القوة المعيدة F تتناسب مع الإزاحة x ، وهي تساوي $F = 0.41\ lb$ في النقطـة $x = 9\ in$ ، فان F ، في النقطة $x = 5\ in$ تكون مساوية :

$$F = \frac{5}{9} \times 0.41 = 0.23\ lb$$

والقوة المعيدة موجهة نحو مركز الاهتزاز .

(هـ) تكون الطاقة الحركية في قيمتها العظمى في النقطة $x = 0$ ، أي :

$$K.E._{max} = \frac{1}{2}\, m\, v^2_{max} = \frac{1}{2}\,(4/32\ slug)(1.57\ ft/s)^2 = 0.154\ ft \cdot lb$$

(و) تكون الطاقة الكامنة في قيمتها العظمى في طرفي المجـال (حيث تنعدم السرعة والطاقة الحركية) أي أن :

$$P.E_{max} = 0.154\ ft.lb$$

وبشكل آخر : تتغير القوة الفاعلة بالقطعة بشكل خطي مع الازاحة x من القيمة $0\ lb$ ، في النقطة $x = 0$ ، إلى القيمة $0.41\ lb$ في النقطة $x = 9\ in$ ، فتكون القوة المتوسطة مساوية $\frac{1}{2}(0+0.41)\ lb$ ، وليست الطاقة الكامنة سوى عمل ازاحة القطعة بمقدار $9\ in$ ، اعتباراً من مركز الاهتزاز ، أي :

$$P.E_{max} = \frac{1}{2}(0+0.41)\ lb \times \frac{3}{4}\ ft = 0.154\ ft.lb$$

(ز) إن الطاقة الكلية في أي وضع من الأوضاع هي وضوحاً $0.154\ ft.lb$

* * *