الفصل الثاني عشر

الامواج المتحركة

مقـدمة :

إذا ولّدنا اضطراباً في وسط تربط بين اجزائه قوى مرونة انتشر الاضطراب في الوسط بسرعة محدودة مستقلة عن سرعة توليد الاضطراب على صورة موجة . وترتبط سرعة انتشار الموجة بالخواص الفيزيائية لمادة الوسط . ونميز عادة بين نوعين من الامواج تسمى الأولى منها الأمواج الطولانية وتكون فيها جهة الانتشار متفقة مع جهة توليد الاضطراب . أما النوع الثـــاني والذي يطلق عليه اسم الامواج العرضانية فتكون فيه جهة انتشار الموجة عمودية على جهة توليد الاضطراب .

سرعة انتشار نبضة عرضانية في وسط :

إذا ولّدنا اضطراباً عرضانياً في وتر مشدود بقوة T ، انتشر هذا الاضطراب على طول الوتر بسرعة u تعطى بالعلاقة :

$$u = \sqrt{T/\mu} \qquad (12-1)$$

حيث ترمز μ إلى كتلة وحدة الطول من الوتر وهي تقدر بال kg/m أو g/cm أو slug/ft بحسب جملة الوحدات المستخدمة .

سرعة انتشار نبضة طولانية في وسط صلب :

اذا كان Y عامل يانغ لمادة الجسم الصلب الذي نولد فيه اضطراباً طولانياً ، وإذا كانت ϱ الكتلة النوعية لمـــادة الجسم الصلب ، فان سرعة انتشار الامواج الطولانية فيه تعطى بالعلاقة :

$$u = \sqrt{Y/\varrho} \qquad (12-2)$$

سرعة انتشار نبضة طولانية في وسط مائع او غازي :

تعطى سرعة انتشار الأمواج الطولانية في وسط مائع عامل حجمه B بالعلاقة :

$$u = \sqrt{B/\varrho} \qquad (12-3)$$

حيث ϱ الكتلة النوعية للوسط السائل .

أما إذا كان الوسط الذي تنتشر فيه الامواج وسطاً غازياً فانه يمكننا أن نبرهن على أن :

$$B = \gamma P \qquad (12-4)$$

حيث P الضغط الواقع على الغاز و γ النسبة بين السعة الحرارية للغاز تحت ضغط ثابت والسعة الحرارية تحت حجم ثابت أي أن :

$$u = \sqrt{\gamma P/\varrho} \qquad (12-5)$$

هذا في الشروط النظامية للضغط والحرارة . والقانون الذي يعطي u بدلالة درجة الحرارة المطلقة T للغاز هو :

$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad (12-6)$$

حيث R ثابت الغازات العام وقيمته هي :

$$R = 8.31 \times 10^7 \text{ ergs/mole} \qquad (12-7)$$

و M كتلة الجزيء الغرامي من مادة الغاز .

العلاقة بين طول الموجة وسرعة انتشارها :

تقطع الموجة خلال زمن يساوي الدور مسافة تسمى طول الموجة λ وعليه فان :

$$\lambda = u \cdot \frac{1}{f} \qquad (12-8)$$

وذلك بفرض f تواتر الموجة . وهي علاقة صالحة في الحركات الموجية على اختلاف اشكالها ونكتبها عادة بالشكل :

$$u = f\lambda \qquad (12-9)$$

التمثيل الرياضي لموجة متحركة :

إذا انتشرت موجة في وسط ، قامت كل نقطة من الوسط بالاهتزاز بحيث تعيد النقطة التي تبعد مسافة تساوي طول الموجة λ عن نقطة ما نفس الحركة الاهتزازية لهذه النقطة ولكن بعد زمن يساوي λ/u ، وهو الزمن الذي تحتاجه الحركة الموجية كي تبلغ النقطة الثانية اذا انتشرت بالسرعة u . ونعبّر عن ذلك رياضياً بأحد الشكلين المتكافئين التاليين :

$$y = A \sin \left(\omega t \pm \frac{2\pi x}{\lambda} \right) \qquad (12-10)$$

$$y = A \sin \left[2\pi f \left(t \pm \frac{x}{u} \right) \right] \qquad (12-11)$$

حيث x فصل النقطة التي ندرسها و y بعد هذه النقطة عن وضع الاستقرار وحيث A سعة الاهتزاز العظمى .

وتعطي العلاقتان المذكورتان هيئة الوسط الذي تنتشر فيه الموجة في كل لحظة t وفي كل موضع يبعد مسافة x عن نقطة توليد الاهـــتزاز في الوسط . أما الاشارتان (−) و (+) فهما تعبران عن جهة انتشار الموجة أهي نحو اليمين ، أي في اتجاه قيم x المتزايدة ، أم هي نحو اليسار ، أي في اتجاه قيم x المتناقصة .

* * *

مسألة رقم (١٢ ـ ١) :

ثُبت طرف سلك نحاسي رفيع ومُمرر طرفه الآخر فوق بكرة تبعد عن نقطة التثبيت ثمانية أمتار . وربط في طرفه المتـدلي حمل قدره 2 kg . فاذا كانت كتلة السلك المشدود بين نقطة التعليق والبكرة تبلغ 600 g ، فما هي سرعة موجة عرضية صغيرة السعة تولّد في هذا السلك ؟

الحـل :

إن قوة شد السلك تساوي ثقل الحمل 2 kg أي :

$$T = 2 \times 9.8 = 19.6 \text{ newtons}$$

أما كتلته النوعية الخطية أي كتلة وحدة الطول منه فتساوي :

$$\mu = \frac{m}{L} = \frac{0.60\ kg}{8\ m} = 0.075\ \frac{kg}{m}$$

وعليه فان سرعة الانتشار تكون :

$$u = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{19.6\ nt}{0.075\ kg/m}} = 16\ m/s$$

* * *

مسألة رقم (١٢ ـ ٢) :

اذا فرضنا أن موجة جيبية ، سعتها $A = 10\ cm$ وطول موجتها $\lambda = 3\ m$ ، تنتشر في السلك السابق ، أي بسرعة $16\ m/s$ ومن اليسار إلى اليمين . فما هي السرعة العرضية العظمى لنقطة من هذا السلك ؟

الحل :

إن معادلة الموجة المتحركة هي : $y = A \sin(\omega t - kx)$

أما السرعة العرضية فتساوي :

$$\frac{dy}{dt} = v = \omega A \cos(\omega t - kx)$$

وعليه فان السرعة العرضية العظمى v_{max} تساوي ωA أي :

$$v_{max} = \omega A = 2\pi f A = 2\pi \frac{u}{\lambda} A$$

$$v_{max} = 2\pi \times \frac{16\ m/s}{3\ m} \times 0.10\ m = 4.9\ m/s$$

* * *

مسألة رقم (١٢ ـ ٣) :

قدّر سرعة الأمواج الانضغاطيـــة (الطولانية) في الهواء في الشروط العادية ، أي قدّر سرعة الأمواج الصوتية في الهواء بفرض أنه غاز كامل ($C_p/C_v = \gamma = 1.41$) ، علماً بـــأن الكتلة النوعيـــة للهواء : $\varrho = 1.29 \times 10^{-3}\ g/cm^3$ ؟

الحـل :

تعطى سرعة انتشار الاهتزازات الطولانية في الموائع والغازات بالعلاقة :

$$u = \sqrt{\frac{B}{\varrho}} \qquad (1)$$

وفي حالة الهواء الذي يمكن اعتباره غازاً كاملاً ، يمكن أن نعـــبر عن العامل الحجمي B بدلالة ضغطه المطلق P ، فبالتعريف لدينا :

$$B = -V\frac{\Delta P}{\Delta V} = -V\frac{dP}{dV} \qquad (2)$$

لأن التغيرات صغيرة جداً . ولما كان :

$$PV^{\gamma} = \text{ثابت} \qquad (3)$$

في التحولات الكظومة ، وهي السائـدة في الواقع أثنـاء انتشار الامواج الصوتية في الهواء لأن الاهتزازات أسرع من أن تسمح بحدوث التبادلات

الحرارية ، فاننا نجد بمفاضلة العلاقة (3) أن :

$$P\gamma V^{\gamma-1}\, dV + V^{\gamma}\, dP = o$$

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{P\gamma}{V} \qquad (4)$$

نعوض في العلاقة (2) فنجد :

$$B = -V\left(-\frac{P\gamma}{V}\right) = \gamma P \qquad (5)$$

وبوضع قيمة عامل الحجم الكظوم في العلاقة (1) نجد أن سرعة انتشار الامواج الطولانية في الهواء هي :

$$u = \sqrt{\frac{B}{\varrho_o}} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\varrho_o}} \qquad (6)$$

ولما كان الضغط السائد هو الضغط الجوي أي $P = 1\ atm = 1.013 \times 10^6 dynes/cm^2$

فاننا نجد : $u = \sqrt{\frac{1.41 \times 1.013 \times 10^6}{1.29 \times 10^{-3}}} = \sqrt{1.108 \times 10^9} = 3.33 \times 10^4$

$$u = 3.33 \times 10^4\ cm/s = 333\ m/s$$

وهي قيمة تتفق مع النتائج التجريبية اتفاقاً حسناً .

* * *

مسألة رقم (١٢ ـ ٤) :

قدّر سرعة الصوت في غاز الهليوم في الدرجة 800 مئوية وتحت ضغط

يساوي 2.3 ضغطاً جويـــاً اذا علمت أن الوزن الجزيئي للهليوم (أي كتلة المول الواحد منه) هو 4.00 g وأن $\gamma = 1.66$ للهليوم . يعطى الثابت العام للغاز ، أي R ، وهو يساوي 8.31×10^7 ergs/mole .

الحـل :

تعطى سرعة الصوت في غاز بالعلاقة :

$$u = \sqrt{\frac{\gamma P}{\varrho}} \qquad (1)$$

وإذا ضربنا صورة ومخرج المقدار الموجود تحت الجذر بحجم المول الواحد V وجدنا :

$$u = \sqrt{\frac{\gamma PV}{\varrho V}} \qquad (2)$$

إلا أن :

$$PV = RT \qquad (3)$$

حيث T درجة الحرارة المطلقة للغاز و R ثابت الغازات العام .

كما أن :

$$\varrho V = M \qquad (4)$$

أي كتلة المول الواحد وهي تساوي بحسب النص 4 g اذن :

$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \qquad (5)$$

نعوض الآن بالقيم العددية وهي كما يلي :

$$\gamma = 1.66$$

$$R = 8.31 \times 16^7 \text{ ergs/mole}$$

$$T = 800 + 273 = 1073^{\circ}K$$

$$M = 4.00$$

فنجد :

$$u = \sqrt{\frac{1.66 \times 8.31 \times 10^7 \times 1073}{4}} = \sqrt{3.7 \times 10^{10}}$$

$$u = 1.92 \times 10^5 \text{ cm/s} = 1920 \text{ m/s}$$

★ ★ ★

مسالة رقم (١٢ ـ ٥) :

مامقدار القوة التي يجب أن نشد بها وتر نحاسي مساحة مقطعه $10^{-2}\,cm^2$ حتى تكون سرعة انتشار الأمواج الطولية فيه مساوية الى سرعة انتشار الأمواج العرضية ؟ يعطى عامل يانغ للنحاس وهو يساوي 9.1×10^{11} دينة / سم^2 . هل من الممكن فيزيائياً تحقيق ذلك ؟

الحل :

إن سرعة انتشار الامواج العرضية في سلك مشدود بقوة T هي كما نعلم :

$$u = \sqrt{T/\mu} \qquad (1)$$

حيث ترمز μ إلى كتلة وحدة الطول من السلك .

اما سرعة انتشار الامواج الطولية في السلك فهي تعطى بدلالة عامل يانغ لمادة السلك وبدلالة كتلته النوعية بالعلاقة :

$$u' = \sqrt{Y/\varrho} \qquad (2)$$

ولكي تكون $u = u'$ يجب أن يكون :

$$\sqrt{T/\mu} = \sqrt{Y/\varrho}$$ أو :

$$T = \mu . \frac{Y}{\varrho} \qquad (3)$$

وبما أن مساحة مقطع السلك تساوي A فان كتلة وحدة الطول منه هي :

$$\mu = \varrho \times A \qquad (4)$$ اذن :

$$T = A\,Y = 10^{-2}\ cm^2 \times 9{\cdot}1 \times 10^{11}\ dynes \qquad (5)$$

ونعلم من جهة اخرى أن نسبة الاجهاد الى التشوه تساوي عامل يانغ أي أن :

$$Y = \frac{F/A}{\Delta l/l}$$

وعليه فان :

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{AY} \qquad (6)$$

فاذا خضع السلك الى قوة شد معطاة بالعلاقة (5) فان ذلك يقضي في ضوء العلاقة (6) أن يكون التشوه النسبي $\Delta l/l$ مساوياً الواحد . ولا يتحقق ذلك أبداً إذ أن السلك ينقطع قبل أن يبلغ ذلك الحد من التشوه ، وعليه فان T لايمكن أن تبلغ الحد الذي تعطيه العلاقة (5) وبالتالي فان سرعة انتشار الامواج العرضية في السلك هي دوماً أقل من سرعة انتشار الامواج الطولية فيه .

★ ★ ★