الفصل الرابع عشر

توازن السوائل

تعـاريف :

تعرف الكثافة المطلقة أو الكتلة النوعية لمائع أو لغاز ونرمز لها بـ ϱ بانها نسبة كتلة m من هذا المائع أو الغاز إلى حجم هذه الكتلة ونكتب :

$$\varrho = m/V \qquad (14-1)$$

ووحدة ϱ هي وحدة كتلة على وحدة حجم فهي إما $slug/ft^3$ أو g/cm^3 أو kg/m^3 . وتعرف الكثافة النسبية لمائع والنرمز لها بـ γ بأنهـــا نسبة الكتلة النوعية لهذا المائع إلى الكتلة النوعية للماء في الدرجة $+4$ ولنرمز لها بـ ϱ' ونكتب :

$$\gamma = \varrho/\varrho' \qquad (14-2)$$

وهذا مقدار لاوحدة له أي أنه عديم الابعاد .

الضغط في سائل :

إن ضغط السائل على عمق h من سطحه يساوي الضغط عنـــد السطح وليكن p_a مضافاً اليه جداء الكتلة النوعية للسائل ϱ بالتسارع الارضي g

بالعمق h ونكتب ذلك رياضياً الشكل :

$$p = p_a + \varrho gh \qquad (14-3)$$

فاذا كان سطح السائل متصلاً بالجو كان p_a الضغط الجوي وهو يساوي :

$$p_a = 1\ \text{atm} = 1.013 \times 10^6\ \text{dynes/cm}^2 = 1.013\ \text{bar} = 1013\ \text{mbar} \qquad (14-4)$$

ونسمي المقدار $p - p_a$ في هذه الحالة الضغط القياسي أما p فتمثل الضغط المطلق . ويقدر الضغط في الوحدات الهندسية الانكليزية بالـ lb/ft^2 ، إلا أنه غالباً ما تستخدم الوحدة lb/in^2 والضغط الجوي بهذه الوحدات يساوي :

$$p_a = 14.7\ lb/in^2 = 2120\ lb/ft^2 \qquad (14-5)$$

مبدأ أرخميدس :

إذا انغمر حجم V من جسم في مائع أو غاز كتلتـــه النوعية ϱ تلقى الجسم قوة دافعة B محمولة على الشاقول وموجهة نحو الأعلى ومطبقة في مركز ثقل حجم المائع المزاح وتعطى بالعلاقة :

$$B = \varrho g V \qquad (14-6)$$

وهو ما يسمى بمبدأ أرخميدس .

* * *

مسالة رقم (١٤ ــ ١) :

تزن خليطة من الذهب والألمنيوم 10 lb . ولدى تعليق الخليطة بميزان ذي نابض وغمرها بالماء ، يشير الميزان إلى القراءة 8 lb ماهو وزن

الذهب في الخليطة اذا علمت ان الكثافة النسبية للذهب 19.3 وان الكثافة النسبية للالمنيوم 2.5 ؟

الحــل :

نفرض أن w_1 وزن الذهب في الخليطة وأن w_2 وزن الالمنيوم في الخليطة فلدينا اذن :

$$w_1 + w_2 = 10 \text{ lb} \tag{1}$$

ولدى غمر الخليطة بالماء تخضع هذه الخليطة الى دافعة B تساوي وزن حجم السائل الذي تزيحه الخليطة . فاذا فرضنا v_1 حجم الذهب و v_2 حجم الالمينوم كان لدينا :

$$B = \varrho g (v_1 + v_2) \tag{2}$$

وذلك بفرض ϱ الكتلة النوعية للماء .

إلا أن : $v_2 = \frac{w_2}{\varrho_2 g}$ ، $v_1 = \frac{w_1}{\varrho_1 g}$ بفرض ϱ_1 و ϱ_2 الكتلتان النوعيتـــان للذهب وللألمنيوم على الترتيب إذن يكون :

$$B = \varrho g \left(\frac{w_1}{\varrho_1 g} + \frac{w_2}{\varrho_2 g} \right)$$

وإذا استخدمنا الكثافات النسبية $\varrho_1' = \varrho_1/\varrho$ ، $\varrho_2' = \varrho_2/\varrho$ كان لدينا :

$$B = \frac{w_1}{\varrho_1'} + \frac{w_2}{\varrho_2'}$$

ولما كان الميزان ذو النابض يشير الى القراءة 8 lb لدى غمر الخليطة في

الماء فانه يكون :

$$B = 10 - 8 = 2 = \frac{W_1}{\varrho'_1} + \frac{10 - W_1}{\varrho'_2}$$

ومنها نجد :

$$2 - \frac{10}{\varrho_2'} = W_1 \left(\frac{1}{\varrho_1'} - \frac{1}{\varrho_2'} \right) = \frac{\varrho_2' - \varrho_1'}{\varrho_1' \varrho_2'} W_1$$

$$W_1 = \frac{\varrho'_1 \varrho'_2}{\varrho_2' - \varrho_1'} \left[\frac{2\varrho_2' - 10}{\varrho_2'} \right] = \frac{\varrho_1'}{\varrho_2' - \varrho_1'} (2\varrho_2' - 10)$$

وبالتعويض بالقيم العددية وهي $\varrho_2' = 2.5$ ، $\varrho_1' = 19.3$ نجد :

$$W_1 = \frac{19.3}{2.5 - 19.5} (5 - 10) = 5 \frac{19.3}{17} = 5.68 \text{ lb}$$

ويكون W_2 من العلاقة (1) مساوياً الى :

$$W_2 = 10 - 5.68 = 4.32 \text{ lb}$$

* * *

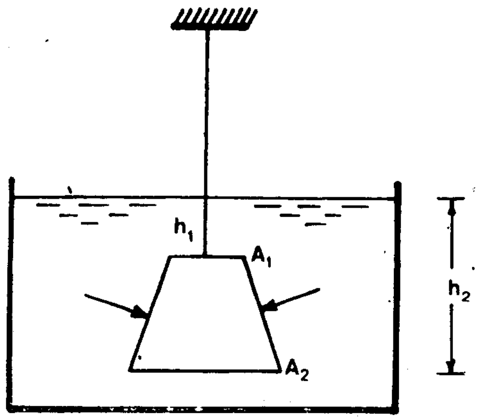
مسألة رقم (١٤ ــ ٢) :

يزن جسم على هيئة جذع مخروط 1000 lb في الخــلاء ويساوي حجمه $V = 12 \text{ ft}^3$ يعلق هذا الجسم بحبل ويوضع في سائل كتلته النوعية 2 slugs/ft^3 على النحو المبين في الشكل (١٤ ــ ١) . والمطلوب (أ) أوجد القوة الكلية التي يؤثر بها السائل على قمة الجسم اذا كانت مساحتها $A_1 = 2 \text{ ft}^2$ (ب) أوجد القوة الكلية التي يؤثر بهـا السائل على أسفل الجسم اذا كانت

مساحته $A_2 = 4\ ft^2$ (ح) أوجد التوتر في الحبل الحامل للجسم (د) لماذا لايساوي فرق القوتين عندما يطرح من الثقل قوة التوتر المحسوبة في (ح)؟ تعطى ϱg للماء وهي تساوي $62.4\ lb/ft^3$ كما يعطى الضغط الجوي ويساوي $14.7\ lb/in^2$.

الحـل :

(أ) نكتب أولاً الضغط على عمق h_1 من سطح السائل ونلاحظ أن هذا السطح خاضع للضغط الجوي P_a فيكون :



الشكل (١٤ – ١)

$$p_1 = p_a + \varrho g h_1 \qquad (1)$$

وتكون القوة F_1 المؤثرة على السطح A_1 للجسم هي :

$$F_1 = A_1 (p_a + \varrho g h_1) \qquad (2)$$

وبالتعويض بالقيم العددية وهي :

$$A_1 = 2\ ft^2\ ,\ p_a = 14.7\ lb/in^2 = 14.7 \times 144\ lb/ft^2\ ,\ h_1 = 2\ ft$$

$$\varrho g = 62 \cdot 4\ lb/ft^3$$

نجد :

$$F_1 = 2\ (\ 14.7 \times 144 + 62.4 \times 2\ ) = 4500\ lb$$

(ب) وبالمثل نكتب القوة F_2 المؤثرة على السطح A_2 فنجد :

$$F_2 = A_2\ (\ p_a + \varrho\ g\ h_2\ ) \qquad (3)$$

$$F_2 = 4\ (\ 14.7 \times 144 + 62.4 \times 6\ ) = 10\ 000\ lb$$

(جـ) ان القوة التي يخضع لها الحبل هي وزن الجسم w مطروحاً منه الدافعة B . فالتوتر T فيه اذن يساوي :

$$T = w - B$$

$$T = w - \varrho\ g\ V$$

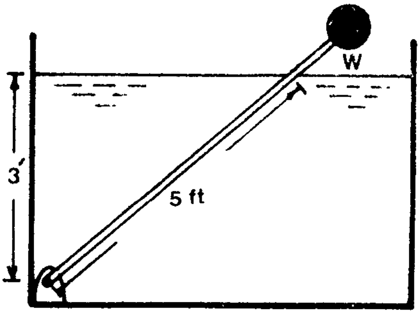
$$T = 1000 - 62.4 \times 12 = 230\ lb$$

(د) إن فرق القوتين $F_2 - F_1$ يساوي 5500 lb وهو اكبر من ثقل الجسم الذي يساوي 1000 lb . ويبدو لنا لأول وهلة أن الأمر غير طبيعي إلا أننا لو تأملنا في نقطتين متناظرتين على جانبي جذع المخروط لوجدنا أنه يمكن تحليل الضغط عند كل منهما إلى ضغط افقي وضغط شاقولي ويفني الضغط الافقي عند النقطة الأولى الضغط عند النقطة الثانية لتعاكسهما مباشرة ، في حين أن الضغط الشاقولي عند النقطتين متفقان في الاتجاه ، ولدينا اذن قوة محصلة تساعد الوزن وتضاف اليه عند كل من النقطتين . وهذا شأن جميع النقاط الأخرى الواقعة على الجدران الجانبية لجذع المخروط .

مسالة رقم (١٤ ــ ٣) :

يتمفصل قضيب منتظم طوله $L = 6\ ft$ ووزنه $\omega = 12\ lb$ و كثافته النسبية

$\varrho_1 = 0.50$ من إحدى نهايتيه في نقطة تقع تحت الماء بمسافة 3 ft ، وذلك على النحو الظاهر في الشكل (١٤ – ٢) . والمطلوب : (أ) ما هو الوزن w الذي يجب ربطه بالطرف الآخر من القضيب حتى ينغمر 5 ft من طوله بالماء ؟ (ب) أوجد شدة القوة التي يؤثر بها المفصل في القضيب وكذلك اتجاهها .



الشكل (١٤ – ٢)

الحـل :

(أ) لنكتب شروط توازن القضيب عندما ينغمر 5 ft من طوله بالماء .

إن القوى التي تفعل في القضيب عندما ينغمر 5 ft من طوله بالماء هي :

١ً – ثقل القضيب ω وهو مركز في منتصف طوله اي على بعد مقداره $\frac{L}{2} = 3$ ft من المفصل .

٢ً – الوزن w وهو مربوط في موضع يبعد مسافة $L = 6$ ft عن المفصل .

٣ً – دافعة ارخميدس B وهي تؤثر في منتصف الجزء المغمور من القضيب أي في نقطة تبعد مسافة 2.5 ft عن المفصل . ويلاحظ أن القوى الثلاث السابقة شاقولية ، و w و ω تتجهان نحو الاسفل أما B فتتجه نحو الأعلى .

٤ً – قوة رد الفعل R وهي القوة التي يؤثر بها المفصل على القضيب واتجاه هذه القوة مبدئياً مجهول ، إلا أنه لما كانت جميع القوى التي تؤثر بالقضيب شاقولية وكان القضيب متوازناً ، فانه يجب أن تكون R شاقولية ولدينا :

$$\omega + w - B - R = 0 \qquad (1)$$

والشرط الثاني للتوازن هو شرط انعدام عزوم القوى حول نقطـــة من القضيب . فاذا اخترنا المفصل لأخذ عزوم القوى حوله وجدنا بفرض θ زاوية القضيب مع الأفق :

١ – عزم الثقل ω : $\Gamma_1 = -\omega . \frac{L}{2} \cos\theta = -12\times 3 \cos\theta = -36 \cos\theta$

٢ – عزم الوزن w : $\Gamma_2 = -W . L \cos\theta = -6\, w \cos\theta$

٣ – عزم الدافعة B : $\Gamma_3 = +B . \frac{5}{2} \cos\theta = +2.5\, B \cos\theta$

إلا أن B تساوي وزن السائل الذي يشغله الجزء المغمور من القضيب ، فاذا فرضنا V حجم القضيب الكلي كان لدينا :

$$B = \varrho\, g \frac{5V}{6}$$

بفرض ϱ الكتلة النوعية للماء .

إلا أن : $V = \frac{\omega}{\varrho_1' g}$ بفرض ϱ_1' الكتلة النوعية لمادة القضيب اذن :

$$B = \varrho\, g \frac{5\,\omega}{6\,\varrho_1' g} = \frac{5\,\omega}{6\,\varrho_1} \qquad (2)$$

وذلك لأن $\varrho_1 = \varrho_1'/\varrho$ بالتعريف . ويكون عزم B اذن :

$$\Gamma_3 = 2.5 \frac{5\,\omega}{6\varrho_1} \cos\Theta = \frac{12.5}{6} \frac{\omega}{\varrho_1} \cos\Theta$$

٤ ـ أما عزم R حول المفصل فمعدوم لمروره منه . اذن : $\Gamma_4 = 0$

ويصبح شرط انعدام العزوم حول المفصل أي $\sum \Gamma = 0$ بالشكل :

$$-36\cos\theta - 6\,w\cos\theta + \frac{12.5}{6}\,\frac{\omega}{\varrho_1}\cos\theta = 0$$

وبالتقسيم على $\cos\theta$ نجد :

$$-36 - 6\,w + \frac{12.5}{6}\,\omega/\varrho_1 = 0$$

وهي تعطي :

$$w = \frac{12.5}{36}\,\frac{\omega}{\varrho_1} - 6$$

$$w = \frac{12.5}{36} \times \frac{12}{0.5} - 6 = 8.03 - 6 = 2.03 \text{ lb}$$

(ب) تعطي المعادلة (1) شدة R حيث نجد :

$$R = B - \omega - w$$

وبتعويض B بمساويها من (2) نجد :

$$R = \frac{5\,\omega}{6\varrho_1} - \omega - w$$

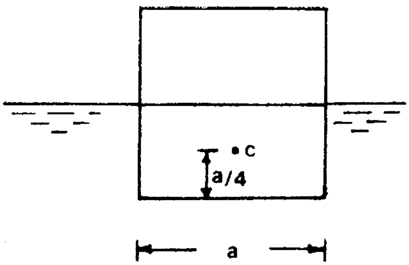
$$R = \frac{5 \times 12}{6 \times 0.5} - 2.03 - 12 = 20 - 14.03 = 5.97 \text{ lb}$$

ولما كانت R موجبة فان اتجاهها نحو الأسفل وهي شاقولية كما ذكرنا وهو ما يقتضيه شرط انعدام القوى المؤثرة في القضيب .

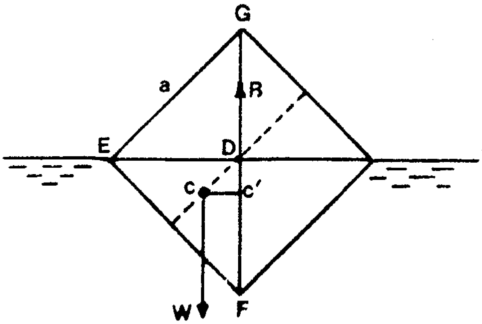
★ ★ ★

مسألة رقم (١٤ ـ ٤) :

تحمّل قطعة خشبية مكعبة الشكل طول حرفها $a = 1\ ft$ حتى يصبح مركز ثقلها في النقطة المبينة في الشكل (١٤ ـ ٣) ، أي بحيث يبعد عن أحد أحرفه مسافة تساوي $a/4$. ولدى وضع القطعة بالماء يطفو نصف حجمها وينغمر النصف الآخر . أوجد العزم المصحّح للقطعة اذا أميلت بزاوية مقدارها $45°$ على النحو المبين في الشكل (١٤ ـ ٤) . نفترض أن ρg للماء تساوي $62.4\ lb/ft^3$.



الشكل (١٤ ـ ٣)



الشكل (١٤ ـ ٤)

الحل :

تخضع القطعة عند امالتها بزاوية مقدارها $45°$ على النحو المبين في الشكل (١٤ ـ ٤) إلى قوتين هما : ثقلها W وهو مطبق في مركز الثقل C الذي

يبعد مسافة مقدارها a/4 عن الحرف EF ، كما تخضع إلى دافعة ارخميدس B وهي مطبقة في مركز ثقل حجم السائل المزاح . ويقضي التناظر أن تكون B محمولة على الخط الشاقولي GF . وعليه فالقطعة تخضع لمزدوجة L عزمها هو :

$$L = B \cdot CC' \qquad (1)$$

ولما كان نصف حجم المكعب ينغمر في الماء فان توازن المكعب يقضي بأن يكون B مساوياً وزن نصف حجم المكعب من الماء أي أن :

$$B = \varrho g \frac{a^3}{2} \qquad (2)$$

ويتضح من الشكل (١٤ – ٤) أن :

$$CC' = CD. \cos \frac{\pi}{4}$$

$$CC' = \frac{a}{4} . \cos \frac{\pi}{4}$$

$$CC' = \frac{a}{4\sqrt{2}} \qquad (3)$$

نعوض في العلاقة (1) فنجد :

$$L = \varrho g \frac{a^3}{2} \cdot \frac{a}{4\sqrt{2}} = \varrho g \frac{a^4}{8\sqrt{2}}$$

وبالتعويض بالقيم العددية وهي : $a = 1$ ft ، $\varrho g = 62.4$ lb/ft^3 نجد :

$$L = \frac{62.4}{8\sqrt{2}} = 5.5 \text{ lb.ft}$$

★ ★ ★