

الفصل السادس عشر

تحريك السوائل واللزوجة

الغزارة :

إذا انساب سائل في أنبوب مساحة مقطعه A وكانت سرعة جريانه v فان كمية السائل التي تخرج منه في الثانية الواحدة نسميها غزارة ونومز لها بـ Q ويكون :

$$Q = A v \quad (16-1)$$

ويعبر عن Q بالوحدات التالية : ft^3/s أو m^3/s أو cm^3/s .

معادلة الاستمرار :

تقضي معادلة الاستمرار بأن تكون غزارة السائل Q ثابتة في أي مقطع من مقاطع الأنبوب الذي يجري فيه سائل لايقبل الانضغاط أي أن :

$$Q = A_1 v_1 = A_2 v_2 \quad (16-2)$$

حيث A_i مساحة مقطع الأنبوب في الموضع i و v_i سرعة السائل في ذلك الموضع . وبالطبع فاننا نفترض أن السائل يملأ مقطع الأنبوب بكامله .

نظرية برنولي :

تصلح هذه النظرية في وصف نوع من الجريان يطلق عليه اسم الجريان

الانسيابي أو الجريان الصفيحي . وهي تقضي بأن يكون مجموع طاقة الضغط والطاقة الحركية والطاقة الكامنة في أية نقطة من خط جريان في سائل مساوياً بمجموع الطاقات عند أية نقطة أخرى من خط الجريان نفسه أي أن :

$$p_1 \frac{m}{\rho} + \frac{1}{2} m v_1^2 + m g h_1 = p_2 \frac{m}{\rho} + \frac{1}{2} m v_2^2 + m g h_2 \quad (16-3)$$

حيث ترمز m الى كتلة السائل المدروس و g الى تسارع الثقالة .
وحيث p_1 ، v_1 ، h_1 هي الضغط والسرعة والارتفاع عند النقطة الأولى من خط الجريان .

وحيث p_2 ، v_2 ، h_2 هي الضغط والسرعة والارتفاع عند النقطة الثانية من خط الجريان .

ونورد في الجدول التالي وحدات المقادير المختلفة الواردة في العلاقة (3-16) وذلك في جل الوحدات الثلاث :

g	m	h	v	ρg	ρ	p	المقدار الجملة
9.8	kg	m	m/s	newton/m ³	kg/m ³	newton/m ²	المكثية
980	g	cm	cm/s	dyne/cm ³	g/cm ³	dyne/cm ²	السغنية
32ft/s ²	slug	ft	ft/s	lb/ft ³	slug/ft ³	lb/ft ²	الهندسية الانكليزية

وإذا قسمنا طرفي المعادلة (3) على m/ρ وجدنا :

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho gh_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho gh_2 \quad (16-4)$$

وهي شكل آخر من أشكال نظرية برنولي تكون فيه أبعاد كل حد من حدود المعادلة هي ابعاد ضغط .

وإذا قسمنا طرفي العلاقة (16-3) على mg وجدنا :

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} + h_1 = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} + h_2 \quad (16-5)$$

حيث تكون ابعاد كل حد من حدود المعادلة هي أبعاد طول وهي شكل ثالث من أشكال نظرية برنولي .

سرعة خروج السائل من فتحة :

لقد برهن توريشلي على أن سرعة خروج المائع من ثقب في جانب وعاء تتعلق بارتفاع المائع h فوق الثقب وهي تعطى بالعلاقة :

$$v = \sqrt{2gh} \quad (16-6)$$

حيث g تسارع الثقالة .

اللزوجة :

تنشأ اللزوجة من احتكاك طبقات السائل بعضها ببعض ومن احتكاك السائل بجدار الوعاء الذي ينساب فيه . وبفعل هذه اللزوجة تتناقص سرعة انسياب السائل في انبوب ما عند الجدران وتزداد كلما انتقلنا باتجاه مركز الانبوب بحسب العلاقة :

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4 L \eta} (R^2 - r^2) \quad (16-7)$$

حيث L طول الانبوب الذي ينساب فيه السائل . و η عامل لزوجة السائل ويقاس بوحدة البواز وهي تساوي (دينة \times ثا / سم²) .

p_1 الضغط عند مدخل الانبوب .

p_2 الضغط عند مخرج الانبوب .

R نصف القطر الداخلي للانبوب .

r البعد الذي ندرس عنده السرعة v .

وتعطى غزارة السائل اللزج المنساب في أنبوب نصف قطره R وطوله L بالعلاقة :

$$Q = \frac{1}{\eta} \frac{\pi R^4}{8 L} (p_1 - p_2) \quad (16-8)$$

حيث p_1 الضغط عند مدخل الانبوب و p_2 الضغط عند مخرجه و η عامل لزوجة السائل .

قانون ستوكس في اللزوجة :

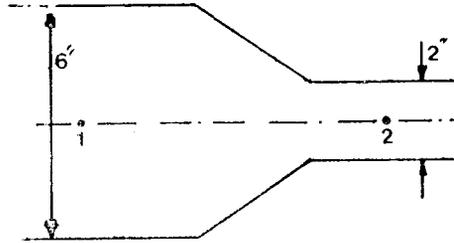
يخضع الجسم الكروي الذي نصف قطره r والذي يهوي في وسط عامل لزوجته η الى قوة F معاكسة لحركته متناسبة مع سرعته v . ونعبر عن ذلك بقانون ستوكس وهو :

$$F = 6 \pi \eta r v \quad (16-9)$$

★ ★ ★

مسألة رقم (١٦ - ١) :

لدينا أنبوب أفقي قطر مقطعه في النقطة ١ يساوي 6 in ، فيه اختناق قطر مقطعه 2 in (في النقطة 2) . فإذا علمت أن سرعة جريان الماء في الأنبوب تساوي 2 ft/s وأن الضغط فيه 15 lb/in² فما هي السرعة v_2 والضغط P_2 عند الاختناق ؟ تعطى ρ_g للماء وهي تساوي 62.4 lb/ft³ .



الشكل (١٦ - ١)

الحل :

لدينا من معادلة الاستمرار : $A_1 v_1 = A_2 v_2$ مايلي :

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{\pi d_1^2/4}{\pi d_2^2/4} v_1 = \left(\frac{d_1}{d_2} \right)^2 v_1$$

وبالتعويض بالقيم العددية نجد : $v_2 = \left(\frac{6}{2} \right)^2 \times 2 = 18 \text{ ft/s}$

ثم إنه لما كان الانبوب أفقياً فان $h_1 = h_2$ وتؤول معادلة برنولي أي

المعادلة رقم (4 - 16) إلى :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad \text{وهي تعطي :}$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) + P_1$$

نعوض بالقيم العددية وهي : $P_1 = 15 \text{ lb/in}^2 = 15 \times 144 \text{ lb/ft}^2$

$$\text{فنجد : } \rho = \frac{62.4}{32} \text{ slug/ft}^3 \quad , \quad v_1 = 2 \text{ ft/s} \quad , \quad v_2 = 18 \text{ ft/s}$$

$$P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{62.4}{32} [(2)^2 - (18)^2] + 15 \times 144 \text{ lb/ft}^2$$

$$P_2 = - 0.975 \times 320 + 2160 = - 310 + 2160 = 1850 \text{ lb/ft}^2$$

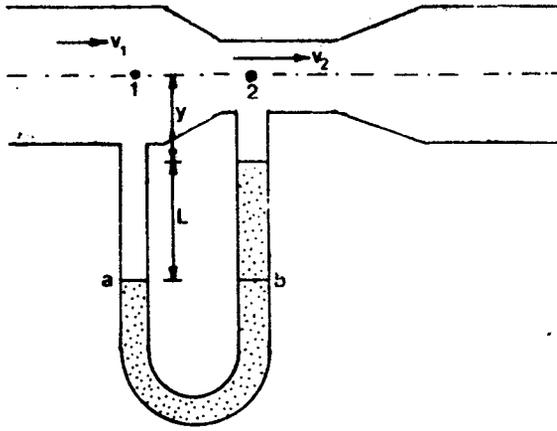
$$P_2 = \frac{1850}{144} = 12.8 \text{ lb/in}^2$$

ويلاحظ ان ازدياد السرعة يرافقه انخفاض في الضغط .

★ ★ ★

مسألة رقم (١٦ - ٢) :

يتألف مقياس فتوري المبين في الشكل (١٦ - ٢) من أنبوب يدخل منه السائل نصف قطره $r_1 = 6 \text{ in}$ ومن اختناق نصف قطره $r_2 = 3 \text{ in}$. ويصل بين الانبوب والاختناق انبوب ذي شعبتين يحتوي على الزئبق الذي تبلغ كثافته النسبية 13.6 . فاذا علمت أن جريان الماء في الانبوب يجعل الفرق بين سويتي الزئبق في الانبوب ذي الشعبتين يساوي $L = 9 \text{ in}$ فأوجد غزارة الماء الذي يتدفق في الانبوب .



الشكل (١٦ - ٢)

الحل :

تغطي غزارة السائل الذي ينساب في انبوب مساحة مقطعه A_1 وسرعة السائل فيه v_1 بالعلاقة (16-1) وهي :

$$Q = A_1 v_1 = \pi r_1^2 v_1 \quad (1)$$

فلنحسب إذن v_1 .

ان تطبيق معادلة برنولي وهي المعادلة (16-4) على النقطتين (1) و (2) الظاهرتين في الشكل (١٦ - ٢) والواقعتين على خط جريان أفقي واحد على محور الأنبوب يعطي ما يلي باعتبار أن الانبوب أفقي ، بمعنى ان $h_1 = h_2$ ، إذن يكون :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (2)$$

الا أن v_2 بحسب معادلة الاستمرار ، وهي المعادلة (2 - 16) ، تساوي

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 \text{ أو أن :}$$

$$v_2 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} v_1 = \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 v_1 \quad (3)$$

نعوض v_2 في العلاقة (2) بمساويها فنجد :

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 v_1^2$$

ومنها نجد :

$$v_1^2 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 \right] = \frac{2}{\rho} (P_2 - P_1) \quad (4)$$

ولحساب الفرق $(P_2 - P_1)$ نقول أن النقطتين a و b واقعتان في الزيتق وعلى سوية واحدة فالضغط عندهما متساو . والضغط عند a يساوي P_1 مضافاً إليه $\rho g(y + L)$ بفرض ρ الكتلة النوعية للماء ، وذلك واضح من الشكل (١٦ - ٢) . كما أن الضغط عند b يساوي P_2 مضافاً إليه $\rho g y$ و $\rho' g L$ بفرض ρ' الكتلة النوعية للزيتق إذن لدينا :

$$P_1 + \rho g (y + L) = P_2 + \rho g y + \rho' g L$$

ومنه نجد :

$$P_2 - P_1 = \rho g L - \rho' g L = \rho g L \left(1 - \frac{\rho'}{\rho} \right) \quad (5)$$

نعوض في العلاقة (4) فيكون :

$$v_1^2 \left[1 - \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^4 \right] = 2gL \left(1 - \frac{Q'}{Q} \right)$$

نستخدم الآن القيم العددية وهي :

$$r_1 = 6 \text{ in} , r_2 = 3 \text{ in} \quad \frac{r_1}{r_2} = 2$$

$$g = 32 \text{ ft/s}^2$$

$$L = 9 \text{ in} = \frac{9}{12} \text{ ft} = 0.75 \text{ ft}$$

$$Q'/Q = 13.6$$

فنجند :

$$v_1^2 [- 15] = 2 \times 32 \times 0.75 \times (1 - 13.6)$$

$$v_1^2 = \frac{2 \times 32 \times 0.75 \times 12.6}{15} = 40.3$$

$$v_1 = 6.35 \text{ ft/s} \quad \text{ومنه :}$$

نعوض الآن في العلاقة (1) فنجد الغزارة Q ويكون :

$$Q = \pi \times \left(\frac{6}{12} \right)^2 \times 6.35$$

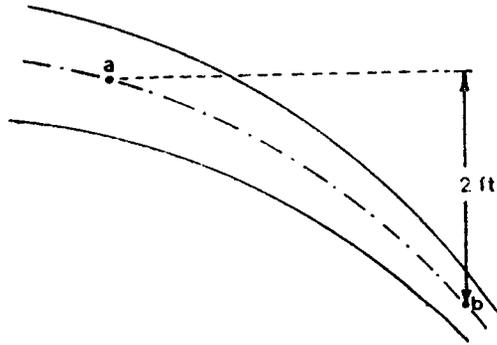
$$Q = 4.99 \text{ ft}^3/\text{s} \quad \text{ومنه :}$$

* * *

مسألة رقم (١٦ - ٣) :

إذا كانت مرعة تدفق السائل في نقطة a من انبوب هي 4 ft/s وكان

الضغط القياسي في هذه النقطة 2 lb/in^2 فوق الضغط الجوي فاحسب الضغط القياسي في نقطة ثانية b من الأنبوب أخفض من النقطة الأولى بـ 2 ft علماً بأن مساحة مقطع الأنبوب في النقطة الثانية أصغر منه في الأولى بمرتين ، وأن السائل المتدفق هو ماء البحر الذي تساوي وزن وحدة الحجم منه 64 lb/ft^3 ، مهمل تأثير اللزوجة ونفترض أن الضغط الجوي يساوي 14.7 lb/in^2 .



الشكل (١٦ - ٣)

الحل :

يمكن أن نتصور الشكل تخطيطياً كما هو مبين في الشكل (١٦ - ٣) حيث نكتب معادلة برنولي من أجل النقطتين a و b الواقعتين على خط جريان واحد منطبق على محور الأنبوب :

$$p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (1)$$

ونجد عبارة v_2 بسهولة من معادلة الاستمرار : $A_1 v_1 = A_2 v_2$ ومنه :

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = 2 v_1$$

نستخدم القيم العددية ونختار الحظ الافقي المار من b مبدءاً لقياس الارتفاعات h فنجد :

$$p_1 = p'_1 + p_a = 2 + 14.7 \text{ lb/in}^2 = 16.7 \times 144 \text{ lb/ft}^2$$

$$h_1 = 2 \text{ ft}$$

$$h_2 = 0$$

$$v_1 = 4 \text{ ft/s}$$

$$v_2 = 2 v_1 = 8 \text{ ft/s}$$

$$\rho g = 64 \text{ lb/ft}^3$$

$$\rho = \frac{64}{32} = 2 \text{ slugs/ft}^3$$

نعوض في المعادلة (1) فيكون :

$$16.7 \times 144 \text{ lb/ft}^2 + 64 \times 2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 16 = p_2 + \frac{1}{2} \times 2 \times 64$$

$$P_2 = 2406 + 64 + 16 = 2486 \text{ lb/ft}^2 \approx 17.26 \text{ lb/in}^2$$

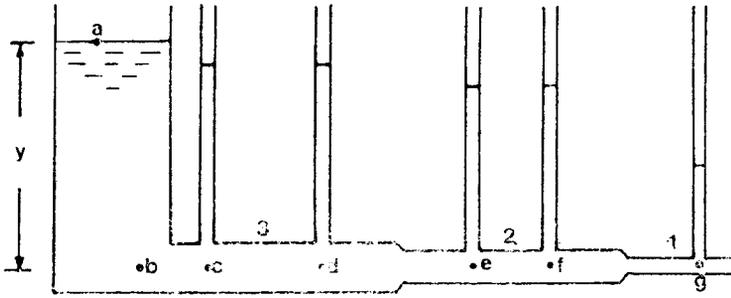
ويكون الضغط القياسي المطلوب : $p_2' = 17.26 - 14.7 = 2.56 \text{ lb/in}^2$

* * *

مسألة رقم (١٦ - ٤) :

إذا كان الوعاء على يسار الشكل (١٦ - ٤) مفتوحاً للجو واه

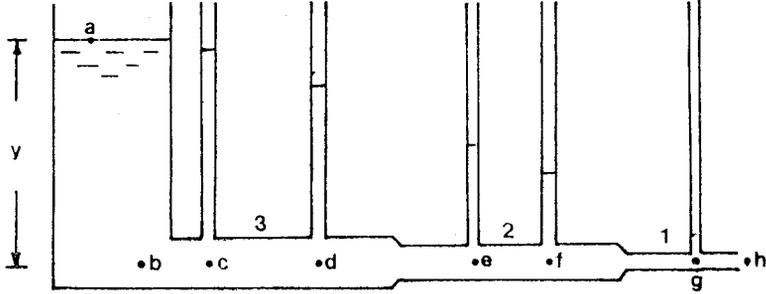
مقطع كبير جداً نسبياً ، وكان عمقه $y = 40 \text{ cm}$ ، وكانت مقاطع
الانبوب الأفقي الموصول به هي على الترتيب : 1.0 cm^2 ، 0.5 cm^2 ،
 0.2 cm^2 ، وكان المائع مثاليًا عديم اللزوجة كئلته النوعية 2 g/cm^3 ،
فيطلب (أ) إيجاد معدل التدفق الحجمي الخارج من الوعاء أي الغزارة ؟
(ب) سرعة الانسياب في كل جزء من أجزاء الأنبوب ؟ (ح) حساب
ارتفاعات المائع في الأنابيب الجانبية الشاقولية ؟ وإذا افترض أن للمائع



الشكل (١٦ - ٤)

في هذا الوعاء لزوجة تساوي 0.5 poise ، انظر الشكل (١٦ - ٥) ،
وأن كئلته النوعية تساوي 0.8 g/cm^3 وأن عمق المائع في الوعاء الكبير
هو بحيث يكون معدل التدفق الحجمي مساوياً لما في الطلب (أ) أعلاه .
وأن المسافة بين الانبوين الشاقولين الجانبيين في c و d وكذلك في e و f
تساوي 20 cm . وأن المقاطع العرضانية للانبوب الأفقي هي ذاتها كما في
في الشكل (١٦ - ٤) فالمطلوب : (د) أوجد فرق سويتي ارتفاع المائع
في الانبوين الشاقولين في c و d ؟ (هـ) وكذلك الفرق بين القممتين في

الانبوبين الجانبيين في f و e ؟ (و) اوجد سرعة التدفق على محور كل قسم من أقسام الأنبوب الأفقي ؟



الشكل (١٦ - ٥)

الحل :

(أ) نعلم أن سرعة تدفق المائع من فتحة جانبية واقعة على عمق y في وعاء كبير ، هي كسرعة السقوط الحر من ارتفاع يساوي عمق الماء وذلك ما تقتضيه المعادلة (6 - 16) أي أن :

$$v_1 = \sqrt{2gy} = \sqrt{2 \times 980 \times 40} = \sqrt{78400} = 280 \text{ cm/s}$$

أما معدل التدفق فيساوي مساحة المقطع A_1 في السرعة v_1 :

$$Q = A_1 v_1 = 0.2 \times 280 = 56 \text{ cm}^3/\text{s}$$

(ب) لايجاد سرع التدفق في المقاطع المختلفة نستفيد من معادلة الاستمرار

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = A_3 v_3 \quad \text{وهي : فنجد :}$$

$$v_2 = \frac{A_1}{A_2} v_1 = \frac{0.2}{0.5} \times 280 = 112 \text{ cm/s}$$

$$v_3 = \frac{A_1}{A_3} v_1 = \frac{0.2}{1} \times 280 = 56 \text{ cm/s}$$

(ح) لحساب ارتفاعات المائع في الأنابيب الجانبية نلجأ إلى معادلة برنولي اي إلى المعادلة (4 - 16) فنكتب :

$$P + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{ثابت}$$

وإذا تذكرنا أن P يمثل الضغط المطلق ، أي الضغط القياسي x مضافاً إليه الضغط الجوي P_a أمكن أن نكتب هذه العلاقة بالشكل :

$$(P_a + x) + \rho gh + \frac{1}{2} \rho v^2 = \text{ثابت}$$

وهي تصبح من أجل المقاطع المختلفة ، إذا أخذنا محور الانبوب مبدئاً لقياس الارتفاعات $h = 0$ ، على الشكل :

$$(P_a + x_1) + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = \text{ثابت} \quad (1)$$

$$(P_a + x_2) + \frac{1}{2} \rho v_2^2 = \text{ثابت} \quad (2)$$

$$(P_a + x_3) + \frac{1}{2} \rho v_3^2 = \text{ثابت} \quad (3)$$

ونجد قيمة الثابت بتطبيق المعادلة في نقطة a من الوعاء الكبير تقع على خط الجريان المار من النقاط b, c فنجد :

$$(P_a + 0) + \rho gy + 0 = P_a + \rho g \times 40$$

$$\text{الثابت} = P_a + 78400 \text{ dynes/cm}^2$$

وبوضع هذه القيمة في الجانب الثاني من المعادلات (1)، (2)، (3) نجد:

$$x_1 + v_1^2 = x_1 + (280)^2 = 78400 \text{ dynes/cm}^2$$

ومنه:

$$x_1 = 0 \quad \text{وبالتالي} \quad h_1 = 0 \quad \text{وهو متوقع.}$$

$$x_2 + v_2^2 = x_2 + (112)^2 = 78400 \quad \text{ثم ان:}$$

ومنه:

$$x_2 = 65850 \text{ dynes/cm}^2$$

ويكون ارتفاع عمود السائل الذي يولد هذا الضغط هو:

$$h_2 = \frac{x_2}{\rho g} = \frac{65850}{1960} = 33.6 \text{ cm}$$

$$x_3 + v_3^2 = x_3 + (56)^2 = 78400 \text{ dynes/cm}^2 \quad \text{واخيراً:}$$

$$x_3 = 75265 \text{ dynes/cm}^2$$

ويكون ارتفاع عمود السائل الذي يولد هذا الضغط هو:

$$h_3 = \frac{x_3}{\rho g} = \frac{75265}{1960} = 38.7 \text{ cm}$$

(د) لايجاد فرق الضغط بين النقطتين c و d أي الفرق بين ارتفاعي

قمتي المائع في الانبويين نستفيد من معرفة معدل التدفق ومن العلاقة

$$A = \pi r^2 \quad \text{ف لدينا بحسب العلاقة} \quad (8 - 16):$$

$$Q = \frac{\pi R^4}{8 \eta} \frac{P_1 - P_2}{L} = \frac{A^2}{8\pi\eta} \frac{\Delta P}{L}$$

$$\Delta P = \frac{8\pi\eta L}{A^2} Q \quad \text{او:}$$

ويكون فرق الارتفاع من المائع الذي يولد هذا الضغط هو :

$$\Delta h_1 = \frac{\Delta P}{\rho g} = \frac{8\pi\eta L}{\rho g A^2} Q$$

وبتطبيق هذه العلاقة على القسم الثالث من الانبوب الافقي بين النقطتين c و d نجد :

$$\Delta h_3 = \frac{8 \times 3.14 \times 0.5 \times 20}{0.8 \times 980 \times 1} \times 56 = 17.95 \neq 18 \text{ cm}$$

(ه) وبتطبيقها مرة أخرى من أجل القسم الثاني نجد فرق سويتي الارتفاع بين e و f :

$$\Delta h_2 = \frac{8 \times 3.14 \times 10}{0.8 \times 980 \times 0.25} \times 56 = 71.8 \neq 72 \text{ cm}$$

(و) لاجداد سرعة التدفق نلجأ لعبارة السرعة العامة وهي العلاقة (7-16) فنجد :

$$v = \frac{\Delta P}{4 \eta L} (R^2 - r^2) = \frac{\Delta P}{4 \eta L} R^2$$

نظراً لأن $r = 0$ من أجل المحور الأفقي . وبلاستفادة مرة أخرى من $A = \pi R^2$ تصبح عبارة السرعة :

$$v = \frac{\Delta P}{4 \eta L} \frac{A}{\pi}$$

ومن أجل القسم الثالث نجد :

$$v_3 = \frac{\Delta P_3}{4 \eta L} \frac{A_3}{\pi} = \frac{\Delta h_3 \rho g A_3}{5 \eta L \pi}$$

$$v_3 = \frac{18 \times 0.8 \times 980 \times 1}{4 \times 0.5 \times 20 \times 3.14} = \frac{1765}{15.7} = 112 \text{ cm/s}$$

ونجد مرة أخرى من أجل القسم الثاني أن :

$$v_2 = \frac{\Delta h_2 \rho g A_2}{4.7L \eta} = \frac{72 \times 0.8 \times 980 \times 0.5}{4 \times 3.14 \times 20 \times 0.5} = 224 \text{ cm/s}$$

ونحصل على النتيجة نفسها باستخدام معادلة الاستمرار حيث نجد :

$$v_2 = \frac{A_3}{A_1} v_3 = \frac{1}{0.5} 112 = 224 \text{ cm/s}$$

ويمكن أن نجد أيضاً السرعة في القسم الأول بالطريقة نفسها فيكون :

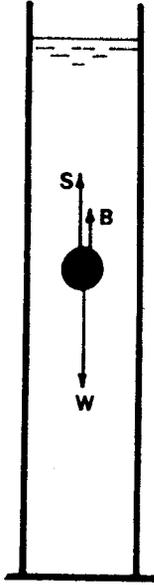
$$v_1 = \frac{A_3}{A_1} v_3 = \frac{1}{0.5} 112 = 560 \text{ cm/s}$$

★ ★ ★

مسألة رقم (١٦ - ٥) :

لدينا كرة صلبة نصف قطرها $r = 3 \text{ mm}$ ، نترك هذه الكرة تسقط في سائل بدون سرعة ابتدائية . فاذا فرضنا أن الكرة تبلغ سرعة $v = 6 \text{ cm/s}$ في الوقت الذي يكون تسارعها قد أصبح نصف تسارع الثقالة أي $\frac{g}{2}$ فأوجد : (أ) العلاقة التي تعطي لزوجة السائل η بدلالة r و v وبدلالة الكتلة النوعية لمادة الكرة ρ' التي تساوي 8.64 g/cm^3 وبدلالة الكتلة النوعية للسائل وهي $\rho = 1.32 \text{ g/cm}^3$. ثم احسب قيمة عامل اللزوجة . (ب) احسب السرعة الحدية التي تبلغها الكرة أثناء السقوط .

الحل :



الشكل (٦ - ١٦)

(أ) تخضع الكرة الساقطة إلى ثقلها w وإلى قوة دافعة أرخميدس B وإلى قوة احتكاك ناشئة عن لزوجة السائل وقد رمزنا لها بـ S على الشكل (١٦ - ٦) وهي القوة التي عبر عنها ستوكس بقانونه (٩-١٦) فإذا فرضنا F محصلة هذه القوى أمكننا أن نكتب :

$$F = w - S - B \quad (1) \text{ ولدينا:}$$

$$w = \rho' g \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$S = 6 \pi r \eta v$$

$$B = \rho g \times \frac{4}{3} \pi r^3$$

وذلك باعتبار أن حجم الكرة V هو $\frac{4}{3} \pi r^3$. نعوض في العلاقة (١) فنجد :

$$F = \frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho' - \rho) - 6 \pi r \eta v \quad (2)$$

نكتب الآن بحسب قانون نيوتن الثاني أن $F = ma$ ونضع $a = g/2$ كما نصت المسألة فيكون :

$$\frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho' - \rho) - 6 \pi r \eta v = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho' \frac{v}{2}$$

التي نكتب بعد الاختصار والترتيب بالشكل :

$$\frac{4}{3} \pi r^3 g \left(\frac{\rho'}{2} - \rho \right) = 6 \pi r \eta v$$

وتكون η بدلالة المقادير الأخرى معطاة بالعلاقة :

$$\eta = \frac{2 r^2 g}{9 v} \left(\frac{\rho'}{2} - \rho \right) \quad (3)$$

نعوض الآن بالقيم العددية وهي :

$$r = 3 \text{ mm} = 0.3 \text{ cm} \quad , \quad \rho' = 8.64 \text{ g/cm}^3 \quad , \quad g = 980 \text{ cm/s}^2$$

$$v = 6 \text{ cm/s} \quad , \quad \rho = 1.32 \text{ g/cm}^3$$

ف نجد :

$$\eta = \frac{2 \times (0.3)^2 \times 980}{9 \times 6} (4.32 - 1.32) = 9.8 \text{ poise}$$

(ب) تبلغ الكرة سرعتها الحدية عندما تنعدم محصلة القوى الفاعلة فيها

أي عندما يكون :

$$w - S - B = 0$$

فاذا فرضنا v_c السرعة الحدية أمكننا عندئذ أن نكتب :

$$\frac{4}{3} \pi r^3 \rho' g - 6 \pi r \eta v_c - \frac{4}{3} \pi r^3 \rho g = 0$$

ومنها نجد :

$$v_c = \frac{1}{6\pi r \eta} \times \frac{4}{3} \pi r^3 g (\rho' - \rho) = \frac{2 r^2 g}{9 \eta} (\rho' - \rho)$$

وبالتعويض بالقيم العددية نجد :

$$v_c = \frac{2}{9} - \frac{(0.3)^2 \times 980}{9.8} (8.64 - 1.32) = 2 \times 7.32 = 14.64 \text{ cm/s}$$

* * *