الفصل السابع عشر

مسائل عامة

مسألة رقم (١٧ ـ ١) :

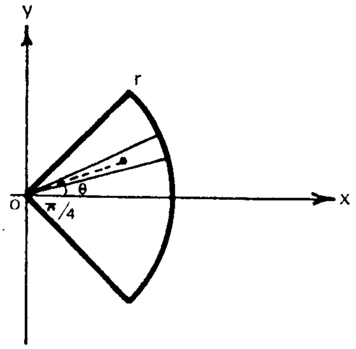
برهن أن احداثيا مركز ثقل صفيحة بشكل ربع دائرة كالمبينة في الشكل (١٧ — ١) هما :

$$\bar{x} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r \quad , \bar{y} = o$$

الحـل :

إن التناظر يقضي بأن يكون مركز الثقل على محور تناظر الجسم وهو المحور ox في مسألتنا ولذا فإن $\bar{y} = o$.

أما بالنسبة لـ $\bar{x}$ فنكتب بحسب العلاقة (1 — 2) :



الشكل (١٧ — ١)

$$\bar{x} = \frac{\Sigma\, \omega_i\, x_i}{\Sigma\, \omega_i} = \frac{\Sigma\, \omega_i\, x_i}{\omega} \qquad (1)$$

حيث ترمز ω_i إلى اثقال عناصر صغيرة من الجسم و x_i إلى مراكز ثقل هذه العناصر . وحيث ترمز ω إلى وزن الصفيحة كاملة .

نطبق القانون (I) باعتبار أن العنصر الصغير من الجسم هو مثلث زاوية رأسه $d\Theta$ ويميل حرفه السفلي على المحور ox بزاوية Θ .

فنحن نعلم أن مركز ثقل مثلث يبعد بمقدار ثلثي الارتفاع عن رأسه o ، وعليه فبعد مركز ثقل المثلث المخطط عن o هو $\frac{2}{3}$ r واحداثيته على x هي $\frac{2}{3} r \cos \Theta$. ثم إن وزن المثلث يساوي وزن وحدة السطح منه ولتكن λ مضروبة بمساحة المثلث وهي تساوي $\frac{1}{2} r\, d\Theta \times r$ حيث $r\, d\Theta$ هي قاعدة المثلث وعليه فان :

$$\omega_i = \frac{1}{2} \lambda r^2 d\Theta$$

$$x_i = \frac{2}{3} r \cos \Theta$$

ويكون :

$$\Sigma \omega_i x_i = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} \lambda r^2 d\Theta\right) \left(\frac{2}{3} r \cos \Theta\right)$$

$$\Sigma \omega_i x_i = \frac{1}{3} \lambda r^3 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \cos \Theta\, d\Theta = \frac{\lambda r^3}{3} \Big[\sin \Theta \Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}$$

$$\sum \omega_i x_i = \frac{\lambda r^3}{3}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] = \frac{\lambda r^3 \sqrt{2}}{3} \qquad (2)$$

ثم إن : $\omega = \lambda \cdot \frac{\pi r^2}{4}$ باعتبار أن مساحة ربع الدائرة هي $\pi r^2/4$

اذن يكون :

$$x = \frac{\sum \omega_i x_i}{\omega} = \frac{\lambda r^3 \sqrt{2}}{3} \cdot \frac{4}{\lambda \pi r^2}$$

$$\bar{x} = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r$$

★ ★ ★

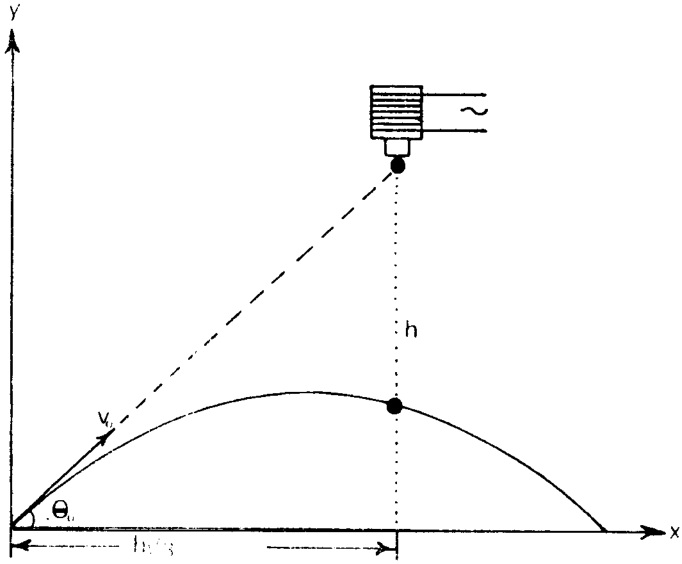
مسالة رقم (١٧ ــ ٢) :

تُصوّب بندقية نحو كرة محمولة بمغناطيس كهربائي . وعند انطلاق القذيفة من البندقية ينقطع التيار الكهربائي عن المغنـــاطيس فتسقط الكرة نحو الأرض . برهن أن القذيفة تلتقي بالكرة الساقطة وعين موضع التـلاقي واللحظة التي يتم فيها ذلك اعتباراً من لحظة انطلاق القذيفة نفرض h هو ارتفاع الكرة عن سوية الارض وأن بعد مسقط الكرة عن موضع الانطلاق هو $h\sqrt{3}$ وأن v_0 هي سرعة انطلاق القذيفة من البندقية .

الحــل :

يبين الشكل (١٧ ــ ٢) رسماً المسألة ، ويتضح من هـذا الشكل أنـه

كي يتم التلاقي بين الكرة والقذيفة يجب أن تمر الكرة والقذيفة من نقطة تقاطع مساريها في نفس اللحظة . فلنبحث اذن عن احداثيي كل من الكرة والقذيفة بدلالة الزمن .



الشكل (١٧ — ٢)

إن الكرة تسقط من ارتفاع h بدون سرعة بدائية ولذا فهي تهبط مسافة تساوي $\frac{1}{2}gt^2$ في زمن t ، ويكون بعدهـــا عن المستوي الافقي ، أي ترتيبها وليكن y_1 ، معطى بالعلاقة :

$$y_1 = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad (1)$$

وواضح أن الكرة لاتغادر خط سيرها الشاقولي وعليه وحسب نص المسألة فان :

$$x_1 = h\sqrt{3} \qquad (2)$$

أما بالنسبة للقذيفة فحركتها محددة بقوانين القذائف المعروفة ، واذا كان x_2 وy_2 هما فاصلة وترتيب القذيفة في لحظة t ، فنحن نعلم من قوانين القذائف أن :

$$x_2 = v_0 \cos \Theta_0 \, t \qquad (3)$$

$$y_2 = v_0 \sin \Theta_0 \, t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (4)$$

حيث Θ_0 هي زاوية انطلاق القذيفة مع الأفق . وواضح من هندسة الشكل أن $\tan \Theta_0 = \frac{h}{h\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، وعليه فان $\Theta_0 = 30°$ و $\sin 30° = \frac{1}{2}$ و $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ اذن يكون :

$$x_2 = v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} t \qquad (5)$$

$$y_2 = \frac{v_0}{2} t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (6)$$

لنبحث عن اللحظة التي تصبح فيها القذيفة على بعد أفقي مساو $h\sqrt{3}$. فنكتب :

$$v_0 \frac{\sqrt{3}}{2} t = h\sqrt{3}$$

ومنها :

$$t = \frac{2h}{v_0} \qquad (7)$$

لنر الآن ما اذا كان ترتيب الكرة مساو لترتيب القذيفة في هذه اللحظة ، فاذا تحقق ذلك كان التلاقي محتماً بين الكرة والقذيقة . وبالفعل فان ترتيب الكرة في هذه اللحظة هو ، من العلاقة (1) ، كما يلي :

$$y_1 = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{2h}{v_o} \right)^2 \qquad (8)$$

وترتيب القذيفة في هذه اللحظة من العلاقة (6) هو :

$$y_2 = \frac{v_o}{2} \left(\frac{2h}{v_o} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{2h}{v_o} \right)^2$$

وبعد الإختزال :

$$y_2 = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{2h}{v_o} \right)^2 \qquad (9)$$

ويتضح من العلاقتين (8) و (9) أن الترتيبين متساويان ، وعليه فالكرة والقذيفة تتلاقيان ، وتحدد العلاقة (7) لحظة التلاقي في حين تحدد العلاقة (8) ترتيب نقطة التلاقي ، أما فصل هذه النقطة فهو $h\sqrt{3}$.

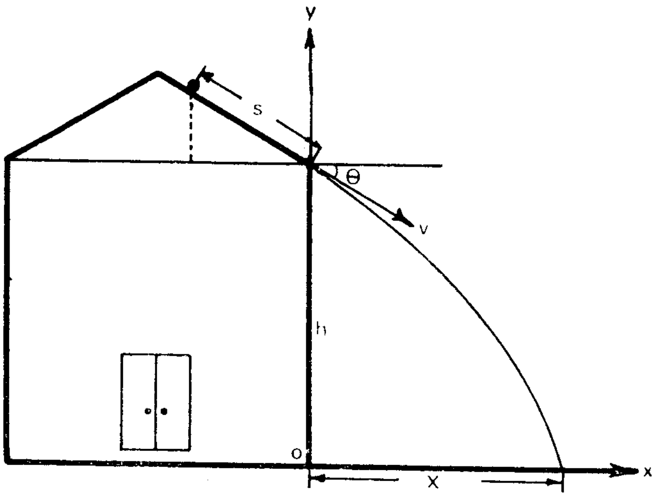
★ ★ ★

مسألة رقم (١٧ — ٣) :

تفلت مطرقة من يد عامل يعمل على سطح بدون سرعة ابتدائية ، فتنزلق بدون احتكاك عليه مسافة $s = 32$ ft ، ثم تغادر السطح الذي يميل على الافق بزاوية $\Theta = 30°$ وتهوي في الهواء لتصطدم بالارض . فاذا علمت أن ارتفاع اسفل السطح عن سوية الأرض هو $h = 64$ ft فاوجد بعد نقطة اصطدام المطرقة عن جدار البناء . نفرض ان التسارع الارضي $g = 32$ ft/s^2 .

الحـل :

لندرس أولاً حركة المطرقة على المستوي المائل فنحسب السرعة v التي تصل بها المطرقة الى اسفل المستوي . ان مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية يعطي عند تطبيقه على الوضع البدائي للمطرقة لحظة انفلاتها من بد العامل وعلى الوضع النهائي لحظة بلوغها أسفل المستوي باعتباره مبدأ لقياس الطاقات الكامنة ، مايلي :



الشكل (١٧ — ٣)

الطاقة الحركية + الطاقة الكامنة في الوضع الثاني	=	الطاقة الحركية + الطاقة الكامنة في الوضع الأول

أي أن :

$$mgs \sin \Theta + 0 = 0 + \frac{1}{2} m v^2$$

إذن :

$$v = \sqrt{2 gs \sin \Theta} = \sqrt{2 \times 32 \times 32 \times \frac{1}{2}} = 32 \text{ ft/s} \qquad (1)$$

ننظر الآن للمطرقة وكأنها قذيفة تنطلق من نهاية السقف السفلي بحيث تميل بزاوية على الأفق مقدارها 60° وبسرعة ابتدائية تساوي 32 ft/s . إن موضع هذه القذيفة بالنسبة للمحورين ox وoy المبينين في الشكل (١٧-٣) يتحدد بحسب قوانين القذائف بالعلاقتين :

$$x = v \cos 30\, t = 32 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\, t = 16\sqrt{3}\, t \qquad (2)$$

$$y = h - \left(v \sin \Theta\, t + \frac{1}{2} g t^2 \right)$$

$$y = 64 - \left(32 \times \frac{1}{2}\, t + 16 t^2 \right)$$

$$y = 64 - 16\, t - 16\, t^2 \qquad (3)$$

لنحسب الآن الزمن الذي تحتاجه المطرقة كي تصل الارض، أي كي تصبح $y = 0$ ، ونجد ذلك من المعادلة (3) :

$$64 - 16\, t - 16\, t^2 = 0$$

$$t^2 + t - 4 = 0$$

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

والحل السالب مرفوض اذن يكون :

$$t = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} = 1.56 \qquad (4)$$

وتقطع المطرقة خلال هذه الفترة مسافة X نحسبها من العلاقة (2) فنجد :

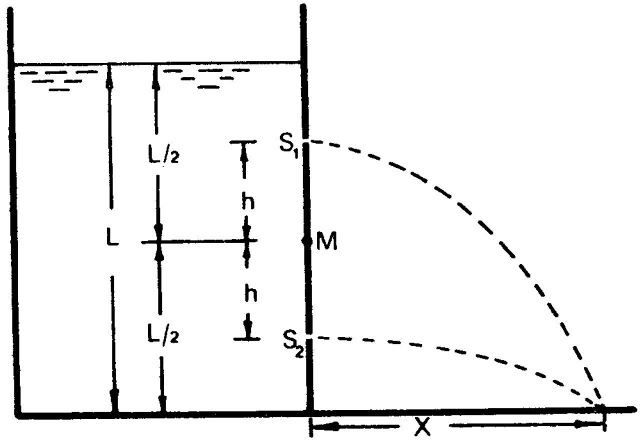
$$X = 16\sqrt{3} \times 1.56 = 43.2 \text{ ft}$$

* * *

مسالة رقم (١٧ ــ ٤) :

يمثل الشكل (١٧ ــ ٤) وعاء واسعاً ترتفع سوية الماء فيه عن قعره بمقدار L . فاذا فتح في جدار الوعاء ثقبان S_1 وS_2 يبعدان بمسافة واحدة h عن النقطة M التي تقع على عمق $\frac{L}{2}$ من سطح الماء فبرهن أن المدى الافقي X للماء الخارج من الثقب S_1 مساو للمدى الأفقي للماء الخارج من الثقب S_2 .

الحل :



الشكل (١٧ ــ ٤)

ننظر أولاً في الماء الخارج من الثقب S_1 . فللماء الموجود فوق هذا

الثقب طاقة كامنة E_p قبل فتح الثقب . فاذا فتحنا الثقب S_1 وخرجت منه كمية صغيرة من الماء m بسرعة v_1 فان سوية الماء تنقص بمقدار صغير وتنقص الطاقة الكامنة للماء بمقدار يساوي وزن كمية الماء التي نقصت في ارتفاعها عن سوية الثقب وهو $(\frac{L}{2} - h)$ كما هو واضح في الشكل .

نكتب بحسب مبدأ انحفاظ الطاقة الكلية مايلي :

$$\boxed{\text{الطاقة الحركية للسائل + الطاقة الكامنة للسائل، بعد فتح الثقب}} = \boxed{\text{الطاقة الحركية للسائل + الطاقة الكامنة للسائل، قبل فتح الثقب}}$$

$$E_p + 0 = E_p - mg\left(\frac{L}{2} - h\right) + \frac{1}{2} m v_1^2$$

أو :

$$v_1^2 = 2g\left(\frac{L}{2} - h\right)$$

$$v_1 = \sqrt{g(L - 2h)} \qquad (1)$$

واذا خرج الماء من الثقب S_1 بهذه السرعة فان حركته بعد خروجه من الثقب ستكون مماثلة لحركة قذيفة تنطلق بصورة أفقية بهذه السرعة . ولايجاد المدى X يكفي أن نحسب الزمن الذي تحتاجه الكتلة كي تهبط شاقولياً المسافة $(\frac{L}{2} + h)$ ، وهي المسافة الفاصلة بين سوية الثقب S_1 وقعر الاناء ، ثم أن نضرب ذلك الزمن بـ v_1 .

وفي الواقع فان الزمن اللازم يتحدد من قوانين السقوط الحر حيث لدينا في هذه الحالة :

$$\frac{L}{2} + h = \frac{1}{2} g t^2$$

ومنه :

$$t = \sqrt{\frac{1}{g}(L+2h)} \qquad (2)$$

وعليه فان المدى الأفقي للماء الخارج من الثقب S_1 هو :

$$X = v_1 t = \sqrt{g(L-2h)} \cdot \sqrt{\frac{1}{g}(L+2h)}$$

$$X = \sqrt{(L^2 - 4h^2)} \qquad (3)$$

وباسلوب مماثل نجد في حالة الماء الخارج من الثقب S_2 أن :

$$v_2 = \sqrt{(L + 2h)}$$

وان الزمن اللازم للماء كي يهبط المسافة $(\frac{L}{2} - h)$ هو :

$$t = \sqrt{\frac{1}{g}(L-2h)}$$

وعليه فان المدى الأفقي للماء الخارج من الثقب S_2 هو :

$$X = v_2 t = \sqrt{g(L+2h)} \sqrt{\frac{1}{g}(L-2h)}$$

$$X = \sqrt{L^2 - 4h^2}$$

وعليه فالمدى في الحالتين واحد . وتذكّر المسألة هنا ، بمسألة اطلاق قذيفة بسرعة بدائية واحدة بزاويتي انطلاق مع الافق مجموعها $\frac{\pi}{2}$ حيث يبرهن على أن المدى الافقي للقذيفتين في هاتين الحالتين واحد أيضاً .

* * *

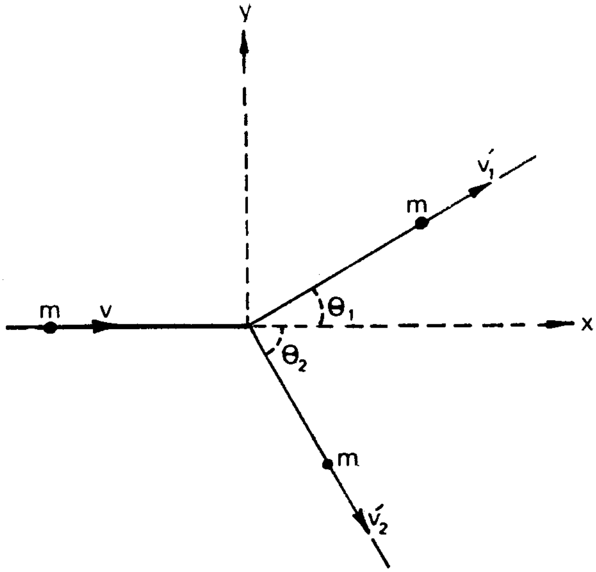
مسألة رقم (١٧ – ٥) :

تتحرك جزيئة غاز كتلتها m بسرعة v وتصطدم اصطداماً مرناً مع جزيئة ساكنة من نفس النوع . وتتحرك الجزيئة الواردة بعد التصادم بحيث تصنع زاوية Θ_1 مع خط سيرها الاصلي . فاذا كانت Θ_2 هي الزاوية بين الاتجاه الذي تنطلق به الجزيئة الثانية واتجاه ورود الجزيئة الأولى ، وإذا كانت v'_1 سرعة الجزيئة الواردة بعد التصادم و v'_2 سرعة انطلاق الجزيئة التي كانت في الأصل ساكنة فبرهن أن :

(أ) $\Theta_1 + \Theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ، (ب) إذا كانت $\Theta_1 = 30°$ و $v = 500$ cm/s فاحسب v'_1 و v'_2 .

الحـل :

(أ) يوضح الشكل (١٧ – ٥) الرموز الواردة في المسألة وقد افترضنا في هذا الشكل ان اتجاه ورود الجزيئة الأولى منطبق على المحور x كما اتخذنا محوراً y عمودياً على المحور x وجعلنا مبدأ المحورين منطبقاً على نقطة التصادم .



الشكل (١٧ — ٥)

لما كان التصادم مرناً فان انـــدفاع جملة الجزيئتين قبل التصادم يساوي اندفاع الجملة بعد التصادم وهو مبدأ انحفاظ الإندفاع المعروف . ونعبر عن هذا المبدأ بعلاقة رياضية هي :

$$\overrightarrow{mv} = \overrightarrow{mv'_1} + \overrightarrow{mv'_2}$$

وذلك لتساوي كتلتي الجزيئتين ، ولأن الاندفاع $m\vec{v}$ مقدار متجـــه . نختصر على m فنجد العلاقة :

$$\vec{v} = \vec{v'_1} + \vec{v'_2} \qquad (1)$$

ومن جهة أخرى فان الطاقة الحركية في التصادمات المرنة تبقى أيضاً

محفوظة أي أن الطاقة الحركية لجملة الجزيئتين قبل التصادم تساوي الطاقة الحركية لهما بعد التصادم . ونعبر عن ذلك رياضياً بالعلاقة :

$$\frac{1}{2}\, mv^2 = \frac{1}{2}\, mv_1'^2 + \frac{1}{2}\, mv_2'^2$$

وبضرب الطرفين بـ $\frac{2}{m}$ نجد :

$$v^2 = v_1'^2 + v_2'^2 \qquad (2)$$

واذا ربعنا طرفي العلاقة الشعاعية (1) وجدنا :

$$v^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\, v'_1\, v'_2 \cos(\vec{v'_1}\,,\, \vec{v'_2})$$

حيث رمزنا بـ $(\vec{v'_1}\,,\, \vec{v'_2})$ الى الزاوية بين الشعاعين $\vec{v'_1}$ و $\vec{v'_2}$ وهي كما يظهر من الشكل مساوية إلى $\Theta_1+\Theta_2$ اذن يكون :

$$v^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2\, v'_1\, v'_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2) \qquad (3)$$

إن مقارنة العلاقتين (2) و (3) تشير إلى أن من الضروري انعدام الحد $2\, v'_1\, v'_2 \cos(\Theta_1 + \Theta_2)$ ، ولا يمكن أن يتم ذلك إلا إذا كان :

$$\cos(\Theta_1 + \Theta_2) = 0 \qquad \text{ومنه :} \qquad \Theta_1 + \Theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

(ب) نسقط العلاقة (1) على المحورين x و y فنجد :

$$v = v'_1 \cos\Theta_1 + v'_2 \cos\Theta_2 \qquad (4)$$

$$0 = v'_1 \sin\Theta_1 - v'_2 \sin\Theta_2 \qquad (5)$$

وباجراء التعويضـــات : $\Theta_1 = 30^\circ$ ، $\Theta_2 = 60^\circ$ ، $v = 500\ cm/s$ في العلاقة (4) نجـد :

$$500 = v'_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + v'_2 \frac{1}{2}$$

أو :

$$1000 = v'_1 \sqrt{3} + v'_2 \qquad (6)$$

وبالتبديل في العلاقة (5) نجد :

$$0 = v'_1 \frac{1}{2} - v'_2 \frac{\sqrt{3}}{2}$$

أو :

$$0 = v'_1 - v'_2 \sqrt{3} \qquad (7)$$

وبضرب المعادلة (6) بـ $\sqrt{3}$ وجمعها مع العلاقة (7) نجد :

$$1000 \sqrt{3} = 4\, v'_1$$

أي :

$$v'_1 = 250 \sqrt{3} = 433\ cm/s$$

ومن العلاقة (7) نجد :

$$v'_2 = \frac{v'_1}{\sqrt{3}} = 250\ cm/s$$

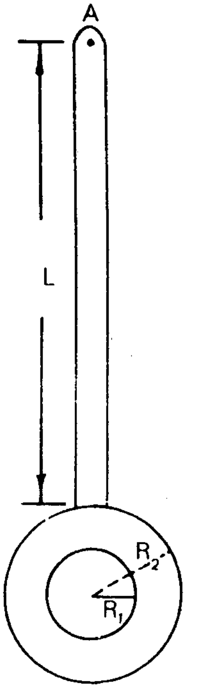
* * *

مسألة رقم (١٧ ــ ٦) :

يدار الجسم المبين في الشكل (١٧ ــ ٦) بسرعة زاوية ω حول المحور المار من نهـاية القضيب ذي الطول L . والمطلوب أوجـد طاقة الجسم

الحركية الدورانية بافتراض أن m_1 هي كتلة القضيب و m_2 كتلة القرص وأن القرص على هيئة اسطوانة نصف قطرها الداخلي R_1 ونصف قطرها الخارجي R_2 .

الحـل :



الشكل (١٧ — ٦)

إن قانون الطاقة الحركية الدورانية هو :

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (1)$$

حيث ترمز I إلى عزم عطالة الجسم حول محور الدوران و ω إلى السرعة الزاوية التي يدور بها الجسم حول هذا المحور . وهو يقابل القانون $\frac{1}{2} mv^2$ في حالة الحركة الانسحابية لجسم .

ولحساب عزم عطالة الجسم حول محور الدوران المار من A ننظر إلى الجسم باعتباره مؤلفاً من قسمين هما القضيب والقرص . فاذا فرضنا I_1 هو عزم عطالة القضيب حول A و I_2 عزم عطالة القرص حول A فانه يكون :

$$I = I_1 + I_2 \qquad (2)$$

$$I_1 = m_1 \frac{L^2}{3} \tag{3}$$

كما هو معلوم وهو يمثل عزم عطالة قضيب طويل حول محور مار من نهايته وعمودي عليه .

أما بالنسبة لـ I_2 فنستخدم لحسابه العلاقة :

$$I_2 = I_o + m_2 h^2 \tag{4}$$

حيث ترمز I_o الى عزم عطالة القرص حول محور مار من مركزه وعمودي عليه وهو كما نعلم معطى بالعلاقة :

$$I_o = \frac{m_2}{2} \left(R_1^2 + R_2^2 \right) \tag{5}$$

وحيث ترمز h إلى البعد بين مركز ثقل القرص ومحور الدوران أي أن :

$$h = R_2 + L \tag{6}$$

اذن :

$$I_2 = \frac{m_2}{2} \left(R_1^2 + R_2^2 \right) + m_2 \left(R_2 + L \right)^2 \tag{7}$$

نعود إلى العلاقة (2) ونستخدم العلاقتين (3) و (7) فنجد :

$$I = m_1 \frac{L^2}{3} + \frac{m_2}{2} \left[\left(R_1^2 + R_2^2 \right) + 2 \left(R_2 + L \right)^2 \right] \tag{8}$$

وبالتعويض في العلاقة (1) نجد :

$$E_k = \frac{\omega^2}{2} \left\{ m_1 \frac{L^2}{3} + \frac{m_2}{2} \left[(R_1^2 + R_2^2) + 2 (R_2 + L)^2 \right] \right\}$$

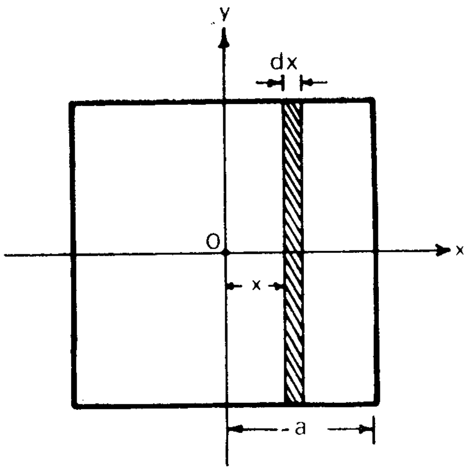
★ ★ ★

مسألة رقم (١٧ — ٧) :

(أ) برهن أن عزم عطالة صفيحة بشكل مربع طول ضلعه $2\,a$ حول محور مار من مركزها وواقع في مستويها وموازٍ لأحد أضلاعها هو : $I_o = \frac{m\,a^2}{3}$ حيث ترمز m إلى كتلة الصفيحة . ثم برهن أن عزم عطالة الصفيحة نفسها حول محور مار من مركزها وعمودي على مستويها هو $2\,I_o$.

(ب) يدور مكعب مفرّغ طول حرفه $2\,a$ حول حرف من حروفه بسرعة زاوية ω . أحسب الطاقة الحركية الدورانية للمكعب بفرض m كتلة الوجه الواحد من المكعب .

الحل :



الشكل (١٧ — ٧)

(أ) ان المحور oy في الشكل (١٧ — ٧) هو محور مار من مركز الصفيحة وواقع في مستويها وموازٍ لأحد اضلاعها فلنحسب أولاً عزم عطالة الصفيحة بالنسبة لهذا المحور . نتخذ لذلك شريحة موازية له تبعد مسافة x عنه وثخنها dx . إن عزم عطالة هذه

الشريحـــة ولنرمز له بـ dI_o يساوي جداء كتلة هذه الشريحة في مربـع بعدها عن المحور . وإذا فرضنا ϱ كتلة وحدة السطح من الصفيحـة فان كتلة هذه الشريحة تساوي $\varrho\, 2a\, dx$ إذن :

$$dI_o = (\varrho\, 2a\, dx)\, x^2$$

التي نكتبها بالشكل :

$$dI_o = 2a\, \varrho\, x^2\, dx$$

ونحصل على عزم عطالة الصفيحة بكاملها باجراء عملية تكامل بين $x=-a$ و $x=+a$ فنجد :

$$I_o = 2a\, \varrho \int_{-a}^{+a} x^2\, dx = 2a\, \varrho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^{+a}$$

$$I_o = 2a\varrho \left[\frac{a^3}{3} - \left(-\frac{a^3}{3} \right) \right] = \frac{4a^4}{3}\, \varrho$$

إلا أن : $2a \times 2a \times \varrho = m$

أو : $\varrho = \dfrac{m}{4a^2}$

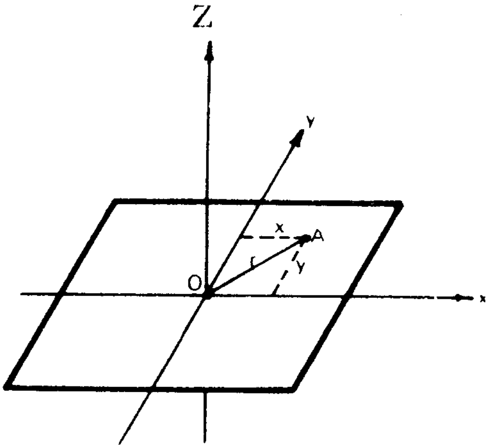
ويكون بالتالي :

$$I_o = \frac{4a^4}{3} \times \frac{m}{4a^2} = \frac{ma^2}{3} \qquad (1)$$

وبالطبع فان النتيجة لاتتغير فيما لو أردنا حساب عزم العطالة حول المحور ox.

أما من أجل عزم عطالة الصفيحة حول محور عمودي على مستويها ومـار

من مركزها كالمحور oz المبين في الشكل (١٧ — ٨) فاننا نرى أن



الشكل (١٧ — ٨)

عزم عطالة جزء الصفيحة المركّز في A يساوي جداء كتلة هذا الجزء في مربع بعده عن o أي r^2 ، إلا أن $r^2 = x^2 + y^2$ وعليه فان عزم عطالة هذا الجزء من الصفيحة يساوي :

$$dI_z = (x^2 + y^2) \, dm \qquad (2)$$

حيث رمزنا بـ dm الى كتلة هذا العنصر و بـ dI_z إلى عزم عطالة هذا العنصر حول المحور oz .

إن بامكاننا كتابة العلاقة (2) بشكل آخر هو :

$$dI_z = x^2 \, dm + y^2 \, dm$$

إلا أن : $x^2 \, dm$ يمثل جداء كتلة العنصر في مربع بعده عن المحور oy فهو اذن يمثل dI_y . وبالمثل فان $y^2 \, dm$ يمثل جداء كتلة العنصر في مربع

بعده عن المحور ox فهو إذن يمثل dI_x وعليه فإن :

$$dI_z = dI_y + dI_x$$

ومنه :

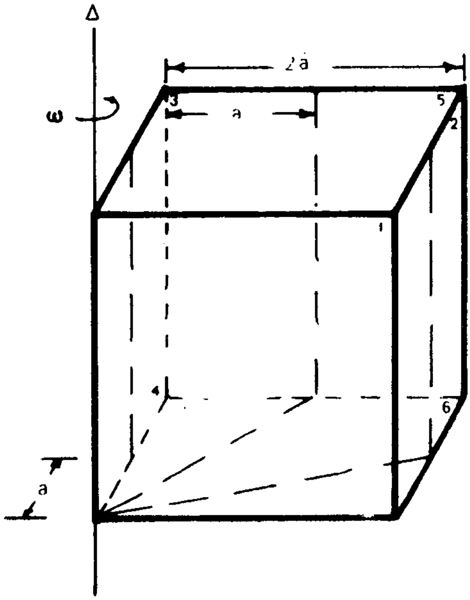
$$I_z = I_y + I_x \qquad (3)$$

أي أن عزم عطالة الصفيحة حول المحور oz يساوي مجموع عزمي عطالة الصفيحة حول محورين متعامدين واقعين في مستويها . وقد حسبنا في الجزء الأول من المسألة عزم عطالة الصفيحة حول محور واقع في مستويها هو المحور oy وبيّنا أن النتيجة لاتختلف فيما لو حسبنا عزم عطالة الصفيحة حول المحور ox العمودي عليه ولذا فان :

$$I_z = 2\,I_o = \frac{2ma^2}{3} \qquad (4)$$

(ب) لننظر الآن في مسألة دوران المكعب حول حرف من حروفه وهي مسألة نوضحها في الشكل (١٧ — ٩) . إن حساب الطاقة الحركية الدورانية وهي تعطى بالعلاقة $E_k = \frac{1}{2}\ I\omega^2$ يتطلب معرفة عزم عطالة أوجه المكعب الست حول محور الدوران الذي رمزنا له بـ Δ في الشكل ، حيث نلاحظ أن هذا المحور واقع في مستوي الوجهين (1) و (4) وهو مواز لمستوي الوجه (2) وكذلك لمستوي الوجه (3) . وهو عمودي على مستويي الوجهين (5) و (6) . ولما كنا نعلم عزم عطالة صفيحة مربعة حول محور مار من مركزها وواقع فيها أو عمودي عليها فان باستطاعتنا أن نحسب

عزوم عطالة الأوجه الست حول Δ إذا أخذنا بعين الاعتبار بُعْد هـذا المحور عن المحاور المارة من مركز كل وجه من الوجوه . وواضح من الشكل أن :



الشكل (١٧ – ٩)

$$I_1 = I_o + ma^2$$

$$I_2 = I_o + m\ (a^2 + 4a^2)$$

$$I_3 = I_o + m\ (a^2 + 4a^2)$$

$$I_4 = I_o + m\ a^2$$

$$I_5 = 2I_o + m\ (a^2 + a^2)$$

$$I_6 = 2I_o + m\ (a^2 + a^2)$$

وبالجمع نجد I :

$$I = 8\,I_o + 16\,ma^2$$

$$I = 8\,m\frac{a^2}{3} + 16\,ma^2$$

$$I = 56\,\frac{ma^2}{3}$$

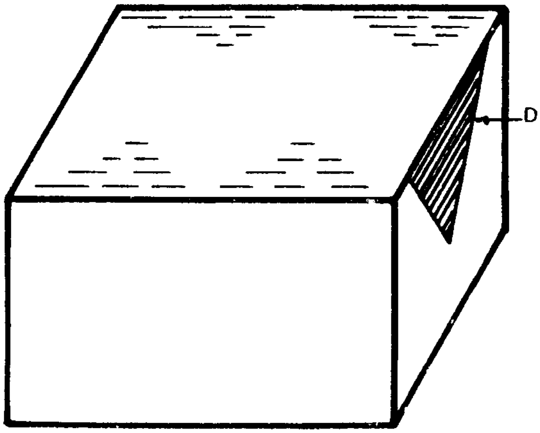
وعليه فان الطاقة الحركية الدورانية للمكعب إذا دار حول Δ بسرعة زاوية ω هي :

$$E_k = \frac{1}{2}\,I\omega^2 = 28\,\frac{ma^2}{3}\,\omega^2$$

★ ★ ★

مسألة رقم (١٧ ـ ٨) :

لدينا مصب مائي على شكل مثلث قائم الزاوية متساوي الساقين طول ساقه 8 ft كما يظهر على يمين الشكل(١٧-١٠) . احسب القوة الكلية المؤثرة على بوابة D تغطي المصب اذا فرضنا أن سوية الماء تصل الى قمة البوابة . تعطى وزن وحدة الحجم من الماء وتساوي $62.5\ lb/ft^3$.



الشكل (١٧ ـ ١٠)

الحـل :

يوضح الشكل (١٧ – ١٠) المسألة وفيه يرى منظر جانبي للبوابة أمـــا الشكـــل (١٧ – ١١) فيبين منظراً أمامياً للبوابة وقد حجز وراءها المـاء .

نعلم أن ضغط المـاء الساكن في نقطة منه تزيد عن الضغط على سطحـه بمقـدار يتناسب مع عمق النقطـة تحت سطح الماء ونعبر عن ذلك رياضيـاً بالعلاقة :

$$p - p_a = \varrho gh \qquad (1)$$

بفرض h هو عمق النقطة تحت سطح الماء و ϱg وزن وحدة الحجم من المـــاء و p_a الضغط الجوي عند سطح المـاء و p الضغط عند العمق h .

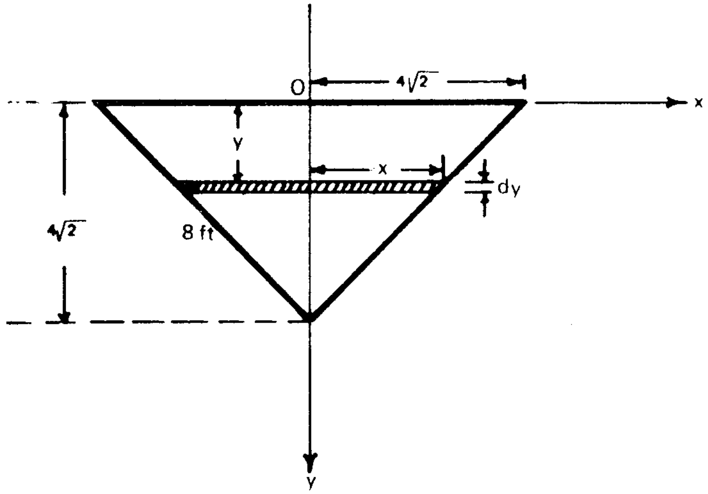
فاذا رمزنا بـ P للضغط القياسي في المـاء آلت العلاقة (1) إلى :

$$P = \varrho gh \qquad (2)$$

واذا اتخـذنا محورين متعامـدين ينطبق أولهما وهو ox على قمة البوابـــة والثاني وهو oy على محور تناظرها كان الضغط على عمق y من قمة البوابة مساوياً إلى :

$$P = \varrho gy \qquad (3)$$

لننظر في شريحة موازية لحرف البوابة وموجودة على عمق y وثخنها dy . إن الضغط عند هذه الشريحـة ومساحتها 2xdy يولد قوة dF عمودية على البوابة ، مقدارها :



الشكل (١٧ – ١١)

$$dF = \varrho g y\,(2x\,dy) \qquad (4)$$

الا أن x ليست مستقلة عن y وبينهما علاقة هي معادلة المستقيم الذي يقطع المحور ox في نقطة فصلها $4\sqrt{2}$ ويقطع المحور oy في نقطة ترتيبها $4\sqrt{2}$ ، انظر الشكل (١٧ – ١١) ، وعليه فمعادلته هي :

$$\frac{x}{4\sqrt{2}} + \frac{y}{4\sqrt{2}} = 1$$

أو :

$$x = (4\sqrt{2} - y) \qquad (5)$$

نعوض في العلاقة (4) قيمة x بمساويها من العلاقة (5) فنجد :

$$dF = \varrho g y \left[8 \sqrt{2} - 2y \right] dy$$

$$dF = 8\varrho g \sqrt{2}\, y dy - 2\varrho g\, y^2 dy \qquad (6)$$

ونحصل على القوة الكلية F باجراء عملية تكامل على طرفي العلاقــة (6) مغيرين y بين o و $4\sqrt{2}$ ، وذلــك لأن جميع القوى dF عمودية على مستوي البوابة فهي تجمع جمعاً عددياً على الرغم من أنها بالفعل قوى . اذن :

$$F = 8\varrho g \sqrt{2} \int_0^{4\sqrt{2}} y\, dy - 2\varrho g \int_0^{4\sqrt{2}} y^2 dy$$

$$F = 8\,\varrho g \sqrt{2} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{4\sqrt{2}} - 2\varrho g \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{4\sqrt{2}}$$

$$F = 8\,\varrho g \frac{\sqrt{2}}{2} \left(4\sqrt{2} \right)^2 - 2\varrho g \frac{\left(4\sqrt{2}\right)^3}{3}$$

$$F = \varrho g \left[\left(4\sqrt{2}\right)^3 - \frac{2}{3} \left(4\sqrt{2} \right)^3 \right] = \frac{\varrho g}{3} \left(4\sqrt{2} \right)^3$$

$$F = \frac{62{\cdot}5}{3} \times 64 \times 2\sqrt{2} = 3771 \text{ lb}$$

★ ★ ★

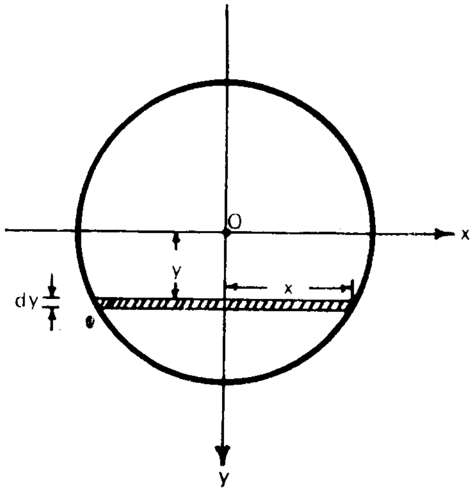
مسالة رقم (١٧ ـ ٩) :

تغطي بوابة أنبوباً لجر مياه الشرب نصف قطره r . فاذا كان الانبوب

أفقياً ومملوءاً حتى نصفه بالماء فأوجد القانون الذي يعطي القوة الكليـة التي تؤثر في البوابة بفعل الماء المحجوز وراءها . نفرض ϱ الكتلة النوعية للماء.

الحــل :

يبين الشكل (١٧ – ١٢) منظراً أمامياً للبوابة التي تحجز الماء وراءهـا .



الشكل (١٧ – ١٢)

إن الضغط القياسي الذي يولده الماء على عمق y من سطحه هو :

$$P = \varrho gy \qquad (1)$$

واذا اخذنا شريحة من سطح البوابة على عمق y من سطحـــه ثخنهـا dy فان هذا الضغط يؤثر بقوة dF على هذه الشريحة يساوي مقدارهـا جداء الضغط بالسطح أي أن .

$$dF = \varrho gy \, (2x \, dy) \qquad (2)$$

والقوة dF عمودية على سطح الشريحة .

إن x ليست مستقلة عن y ويربط بينهما معادلة الدائرة وهي :

$$x^2 + y^2 = r^2$$

إذن :

$$x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

نعوض في العلاقة (2) فنجد :

$$dF = 2\,\varrho g y \sqrt{r^2 - y^2}\, dy$$

ونحصل على القوة الكلية بجمع المقادير المماثلة أي باجراء عملية تكامل نغير فيها y بين 0 و r فنجد :

$$F = 2\varrho g \int_0^r y \sqrt{r^2 - y^2}\, dy$$

واذا فرضنا $r^2 - y^2 = u^2$ فان : $-2y\,dy = 2u\,du$ أي : $y\,dy = -u\,du$

و : $\sqrt{r^2 - y^2} = u$ وتصبح حدود التكامل بين r و o وذلك لأن $u = r$ لما $y = 0$ و $u = 0$ لما $y = r$ ، اذن باجراء تغيير المتحول يكون :

$$F = 2\varrho g \int_r^0 (-u^2)\, du = 2\varrho g \left[\frac{-u^3}{3} \right]_r^0 = \frac{2\varrho g}{3}\, r^3$$

★ ★ ★

مسالة رقم (١٧ ـ ١٠) :

يُعلق قضيب CD منتظم المقطع طوله 12 ft من نهايته D بخيط ، ويحمّل

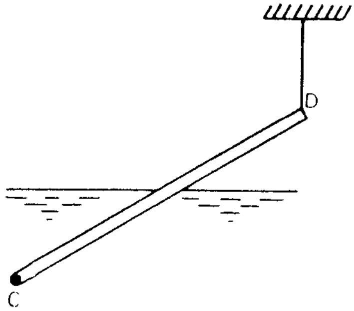
في نهايته C بكرة رصاصية وزنها 12 lb . يُغطس القضيب في الماء فيطفو نصفه وينغمر نصفه الآخر ، انظرالشكل (١٧ — ١٣) ، فاذا أهملنا الدافعة المطبقة على كرة الرصاص المدفونـــة في القضيب فالمطلوب :

(أ) بيِّن جميع القوى المؤثرة على القضيب .

(ب) ماهي قيمة شد الخيط ؟

(حـ) ماهي قيمة دافعة ارخميدس؟

(د) ماهو حجم القضيب الكلي ؟



الشكل (١٧ — ١٣)

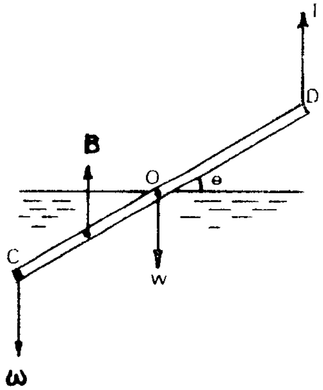
تعطى ϱg للماء وتساوي $62.5\ lb/ft^3$. وزن القضيب يساوي 24 lb .

الحــل :

(أ) يبين الشكل (١٧ — ١٤) القوى المؤثرة في القضيب ومواضع تطبيقها وهذه القوى هي :

١ — قوة شـــد الخيط T وهي مطبقة في النهاية D للقضيب وتتجه نحو الأعلى .

٢ — ثقل القضيب w وهو مطبق في منتصف طوله ويتجه نحو الأسفل.



الشكل (١٧ — ١٤)

٣ — الدافعة B وهي مطبقة في مركز الحجم المغمور من القضيب وتتجه نحو الأعلى .

٤ – ثقل الرصاص ω وهو مطبق في النهاية C للقضيب ويتجه نحو الأسفل .

(ب) نكتب شروط توازن القضيب باعتباره جسماً صلباً وهذه الشروط هي في حالتنا $\sum \vec{F} = o$ و $\sum \Gamma = o$ وسنأخذ العزوم حول o منتصف القضيب أي أننا سنضع $\sum \Gamma_o = o$.

إن الشرط الأول يعطي :

$$T + B - \omega - w = o \qquad (1)$$

أما الشرط الثاني فنكتبه بافتراض أن Θ هي زاوية ميل القضيب على الافق وباعتبار العزوم التي تسبب تدوير القضيب حول o باتجــاه عقارب الساعة سالبة وبالاتجاه المعاكس موجبة على النحو التالي :

إن عزم $\vec{T}$ حول o هو : $+ T \frac{l}{2} \cos \Theta$ بفرض l هو طول القضيب

وعزم $\vec{w}$ حول o هو : o

وعزم $\vec{B}$ حول o هو : $- B \frac{l}{4} \cos \Theta$

وعزم $\vec{\omega}$ حول o هو : $+ \omega \frac{l}{2} \cos \Theta$

إذن : $\sum \Gamma_o = T \frac{l}{2} \cos\Theta - B \frac{l}{4} \cos\Theta + \omega \frac{l}{2} \cos \Theta = o$

نضرب بـ $\frac{4}{l \cos \Theta}$ فنجد :

$$2T - B + 2\omega = 0 \qquad (2)$$

وبجمع الشرطين (1) و (2) نجد :

$$3T + \omega - w = 0$$

$$T = \frac{w - \omega}{3} = \frac{24 - 12}{3} \text{ lb} = 4 \text{ lb}$$

(ح) ونجد قيمة الدافعة من العلاقة (2) التي تعطي :

$$B = 2T + 2\omega$$

وبالتعويض بالقيم العددية نجد :

$$B = 8 + 24 = 32 \text{ lb}$$

(د) ان قيمة الدافعة تساوي وزن حجم السائل المزاح ، ولكن حجم السائل المزاح هو بحسب النص نصف حجم القضيب وليكن هـذا الحجم V اذن :

$$B = \varrho g \frac{V}{2}$$

اذن :

$$V = \frac{2B}{\varrho g} = \frac{2 \times 32}{62.5} = 1.02 \text{ ft}^3$$

★ ★ ★

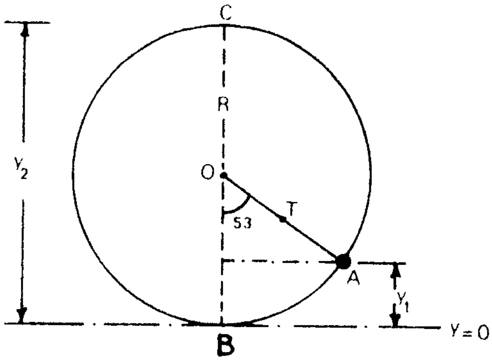
مسألة رقم (١٧ ـ ١١) :

تعلّق كرة صغيرة A وزنها 4 lb بخيط لاوزن له طوله 5 ft وذلك إلى

النقطة o الظاهرة في الشكل (١٧ — ١٥) ، تُزاح الكرة جانباً حتى يصنع الخيط مع الشاقول زاوية مقدارها $53°$ والمطلوب : (أ) ما هي السرعة المماسية التي يجب أن ندفع الكرة بها وهي في الوضع A كي تبلغ أعلى نقطة من مسارها الدائري ، أي النقطة C ، بسرعة مماسية قدرها 10 ft/s. (ب) ماهي السرعة التي تمر بها الكرة من أدنى نقطة من مسارها ، أي النقطة B ، اذا انطلقت من A بالسرعة التي تحصل عليها في (أ) ؟ (حـ) ما هي قيمة شد الخيط عند النقطة B ؟ (د) إذا بدأت الكرة حركتها من A بالسرعة المماسية المحسوبة في (أ) متجهة نحو الأعلى فما هي سرعتها المماسية عند النقطة C ؟

الحل :

(أ) نفرض أن v_1 هي السرعة المماسية التي يجب أن تدفع بها الكرة من



الشكل (١٧ — ١٥)

الوضع A كي تبلغ النقطة C بسرعة $v_2 = 10$ ft/s . ولنطبق مبدأ العمل

والطاقة عند الوضعين A و C للكرة ، ويقضي هذا المبدأ بأن تكون أعمال جميع القوى الفاعلة في جسم ، ماعدا قوة الثقالة مساوية إلى تغير الطاقة الميكانيكية الكلية . ويتضح من الشكل أننا إذا استثنينا قوة الثقالة فان القوة الوحيدة التي تؤثر في الكرة هي قوة شد الخيط T ، وهذه القوة عمودية على المسار دوماً فعملها معدوم . وعليه فان باستطاعتنا أن نكتب :

$$\left(\frac{1}{2} mv_2^2 + mgy_2 \right) - \left(\frac{1}{2} m v_1^2 + mgy_1 \right) = 0 \qquad (1)$$

باعتبار أن y_1 و y_2 هما ارتفاعا وضعي الكرة عن السوية $y = 0$ الظاهرة في الشكل والتي نتخذها مبدأ لقياس الأبعاد الشاقولية . ونجد من العلاقة (1) بعد ضرب طرفيها بـ $\frac{2}{m}$ واعادة الترتيب أن :

$$v_1^2 = v_2^2 + 2g\,(y_2 - y_1)$$

أو :

$$v_1 = \sqrt{v_2^2 + 2g\,(y_2 - y_1)} \qquad (2)$$

ولدينا بحسب النص : $v_2 = 10\ ft/s$ ونجد من الشكل :

$$y_2 - y_1 = CO + OA \cos 53^\circ$$

$$y_2 - y_1 = 5 + 5 \cos 53^\circ = 5 + 5 \times 0.6 = 8\ ft$$

اذن :

$$v_1 = \sqrt{100 + 2 \times 32 \times 8} = \sqrt{100 + 512} = \sqrt{612} = 24.8\ ft/s$$

(ب) لايجاد السرعة التي تمر بها الكرة من النقطة B ، ولتكن v_3 هذه السرعة ، نطبق العلاقة (1) على الوضعين A و B فنجد :

$$\left(\frac{1}{2} mv_3^2 + mgy_3 \right) - \left(\frac{1}{2} mv_1^2 + mgy_1 \right) = 0$$

إلا أن : $y_3 = 0$ وعليه فان :

$$v_3 = \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}$$

ونجد من الشكل أن : $y_1 = BO - AO \cos 53^\circ$

$$y_1 = 5 - 5 \cos 53^\circ = 5 - 5 \times 0.6 = 2 \text{ ft}$$

ولدينا من القسم (أ) من المسألة : $v_1^2 = 612$ إذن :

$$v_3 = \sqrt{612 + 2 \times 32 \times 2} = \sqrt{612 + 128} = \sqrt{740}$$

$$v_3 = 27.2 \text{ ft/s}$$

(حـ) لحساب قيمة شد الخيط عند B نقول انه لما كانت الكرة ترسم دائرة فانه لابد من خضوعها إلى قوة جاذبة مركزية . وتأتي هذه القوة عند النقطة B من قوة شد الخيط ولنرمز لها بـ T ، ومن الثقل mg . وهما قوتان متعاكستان بالاتجاه ولذا فمحصلتها $T - mg$. ويجب أن تساوي هذه القوة جداء m بمربع سرعة الكرة عند B مقسومة على نصف قطر الدائرة R ، اذن لدينا :

$$T - mg = \frac{mv_3^2}{R}$$ ومنه :

$$T = mg + \frac{mv_3^2}{R} \qquad (3)$$

نعوض الآن بالقيم العددية وهي :

$$R = 5 \text{ ft} \ ، \ v_3 = 27.2 \text{ ft/s} \ ، \ m = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} \text{ slug} \ , \ mg = 4 \text{ lb}$$

فنجد :

$$T = 4 + \frac{(27.2)^2}{8 \times 5} = 4 + 18.5 = 22.5 \text{ lb}$$

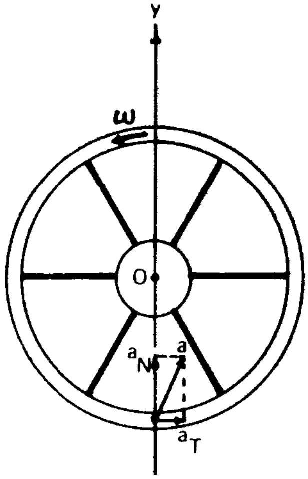
(د) إذا انطلقت الكرة من A متجهة نحو الأعلى بالسرعة المحسوبة في (أ) وهي 24.8 ft/s فانها ستصل الى C بسرعة مساوية الى 10 ft/s وذلك لأن العلاقة (2) التي تربط بين سرعتي الكرة في الوضعين A و C ليس فيها ما يشير الى اتجاه هذه السرعة المماسية أهي نحو الأعلى أو نحو الاسفل .

* * *

مسألة رقم (١٧ ــ ١٢) :

يبلغ قطر دولاب 1 ft، وهو يدور بتسارع زاوي ثابت بدءاً من السكون . فاذا بلغ الدولاب سرعة زاوية ω تساوي 900 دورة في الدقيقة بعد 5 ثوان فالمطلوب : (أ) أوجد موضع نقطة من الدولاب كانت في أعلاه عند بدء الحركة وذلك بعد ثانية واحدة . (ب) بيّن بالرسم شعاع التسارع بعد ثانية واحدة واحسب طوله وحدّد اتجاهه .

الحـل :



الشكل (١٧ – ١٦)

(أ) لما كان الدولاب يـدور بتسارع زاوي ثابت فاننا نستخدم قوانين الحركة الدورانية المتسارعة بانتظام فنكتب :

$$\Theta = \Theta_o + \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

حيث Θ هي الزاوية التي تـدور بها نقطة من الدولاب في زمن t بعـد بـدء الحركـة . وحيث Θ_o هي الزاوية البدائية و ω_o السرعـة الزاوية البدائية و α التسارع الزاوي .

وإذا اتخذنا المحور oy محوراً نقيس الزوايا معه فان $\Theta_o = o$ ولدينا بحسب النص $\omega_o = o$ لبدء الدولاب حركته من السكون اذن :

$$\Theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 \qquad (1)$$

الا أن α تعطى بدلالة السرعة الزاوية ω في اللحظة t والسرعة الزاوية ω_o في اللحظة $t = o$ بالعلاقة :

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} \qquad (2)$$

ولدينـا بحسب النص $\omega_o = o$ و $\omega = 900$ دورة في الدقيقـة أي :

$30\,\pi = \frac{2\pi}{60} \times 900$ راديان/ثانية ، وذلك بعد 5 ثوان ، وعليه فان α تساوي :

$$\alpha = \frac{30\,\pi}{5} = 6\,\pi\ \mathrm{rad/s^2} \qquad (3)$$

نعوض في العلاقة (1) ، التسارع الزاوي بقيمته من العـلاقة (3) ونعوض قيمة t بـ 1 فنجد :

$$\Theta = \frac{1}{2} \times 6\,\pi \times (1)^2 = 3\pi$$

وعليه فان النقطة تدور دورة كاملة ونصف دورة ، ولذا فهي تصبح في موضع أدنى نقطة من الدولاب .

(ب) إذا دار الدولاب بتسارع زاوي α فان لكل نقطة منه تسارعان احدهما مماسي ونرمز له بالرمز a_T والآخر ناظمي ونرمز له عـادة بالرمز a_N . وتعطى قيمة هذين التسارعين بالعلاقتين :

$$a_T = R\alpha \qquad (4)$$

$$a_N = \frac{V^2}{R} = R\omega^2 \qquad (5)$$

بفرض R نصف قطر الدولاب و ω السرعة الزاوية في اللحظة التي نريد معرفة التسارع فيها .

إن قيمة a_T بحسب العلاقة (4) هي :

$$a_T = \frac{1}{2} \times 6\pi = 3\pi\ \ \mathrm{ft/s^2} \qquad (6)$$

ونحتاج لمعرفة ω بعد ثانية واحدة كي نحسب a_N . ونجد من العلاقـــة

(2) أن $\omega = \alpha$ بعد ثانية واحدة إذن : $\omega = 6\pi \text{ rad/s}$ ويكون :

$$a_N = \frac{1}{2} \times (6\pi)^2 = 18\,\pi^2 \text{ ft/s}^2 \qquad (7)$$

ويكون طول الشعاع $\vec{a}$ وهو الشعاع المبين في الشكل (١٧ — ١٦) مساوياً الى :

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{(3\pi)^2 + (18\,\pi^2)^2}$$

$$a = 3\pi\sqrt{1 + 36\,\pi^2} = 3\pi\sqrt{361} = 179 \text{ ft/s}^2$$

أما زاوية هذا الشعاع مع الشاقول ولتكن Φ فتعطى من العلاقة :

$$\tan\Phi = \frac{a_T}{a_N} = \frac{3\pi}{18\,\pi^2} = \frac{1}{6\pi} = 0.053$$

ونجد من جداول النسب المثلثية أن :

$$\Phi = 3^\circ$$

* * *

مسألة رقم (١٧ — ١٣) :

يدور قضيب مقطعه منتظم كتلته $M = 30 \text{ g}$ وطوله $L = 20 \text{ cm}$ في مستو أفقي حول محور شاقولي ثابت مار من مركزه . يوضع جسمان صغيران كتلة كل منهما $m = 20 \text{ g}$ على القضيب بحيث يمكنهما الانزلاق عليه . يمسك الجسمان في البدء بماسك خاصة على بعد $d = 5 \text{ cm}$ وعلى طرفي مركز

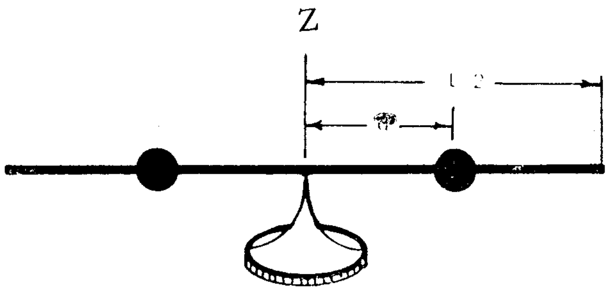
القضيب ، وتدور الجملة بسرعة زاوية ω_1 مقدارها 15 دورة في الدقيقة . فاذا انزلق الجسمان الصغيران على القضيب حتى غادراه من نهايتيه فالمطلوب:

(أ) ماهي السرعة الزاوية للجملة لحظة وصول القطعتين الى نهايتي القضيب؟

(ب) ماهي السرعة الزاوية للقضيب عندما تغادره الكتلتان .

الحـل :

يبين الشكل (١٧ — ١٧) القضيب الدائر حول المحور Z . ان مركز ثقل القضيب يمر من هذا المحور وكذلك محصلة ثقلي الجسمين ، ولذا فان



الشكل (١٧ — ١٧)

عزوم جميع القوى الفاعلة في الجملة حول محور الدوران معدومة . ويقضي قانون نيوتن الثاني في حالة الجسم الدائر أن يكون : $I\,\alpha = 0$ وباعتبار أن : $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ فان العلاقة السابقة تعطي بالتكامل :

$$I\,\omega = \text{ثابت} \qquad (1)$$

وهو مبدأ انحفاظ الاندفاع الزاوي . فاذا تغير عزم عطالة الجسم الدائر وجب أن تتغير سرعة دورانه الزاوية بحيث يبقى دوماً جداء عزم عطالة الجسم

حول محور الدوران في سرعته الزاوية ثابتاً .

لننظر في الجملة في أوضاع ثلاثة ونكتب شرط بقاء المقدار $I\omega$ ثابتاً في هذه الاوضاع الثلاثة أي أن :

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2 = I_3 \omega_3 \tag{2}$$

ومن هذه العلاقة نجد :

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2} \omega_1 \quad , \quad \omega_3 = \frac{I_1}{I_3} \omega_1 \tag{3}$$

ويكفي اذن لايجاد السرعتين الزاويتين ω_2وω_3 أن نحسب I_1 و I_2 و I_3 .

إن I_1 هو عزم عطالة جملة القضيب والكتلتين وهما على بعد $d=5\ cm$ عن محور الدوران . ونعلم أن عزم عطالة قضيب حول محور مار من منتصفه هو $I_o = M \frac{L^2}{12}$ ، أما عزم عطالة الكتلتين فهو $2md^2$ ،وبالتعويض بالقيم العددية نجد :

$$I_o = M \frac{L^2}{12} = 30 \times \frac{(20)^2}{12} = 1000\ g.cm^2 \tag{4}$$

وكذلك نجد :

$$2md^2 = 2 \times 20 \times (5)^2 = 40 \times 25 = 1000\ g \cdot cm^2$$

اذن :

$$I_1 = 2000\ g \cdot cm^2 \tag{5}$$

ويمثل I_2 عزم عطالة الجملة عندما تكون الكتلتين عند نهايتي القضيب فهو

يساوي اذن I_0 مضافاً إليه $2m(\frac{L}{2})^2$ وهو عزم عطالة الكتلتين عندما تكونان عند نهايتي القضيب ، وبالتعويض بالقيم العددية نجد :

$$2m(\frac{L}{2})^2 = 2 \times 20 \times (10)^2 = 4000 \text{ g cm}^2$$

إذن :

$$I_2 = 1000 + 4000 = 5000 \text{ g}\cdot\text{cm}^2 \qquad (6)$$

ويمثل I_3 عزم عطالة الجملة بعد انفصال الكتلتين عن القضيب فهو يساوي I_0 ولدينا اذن :

$$I_3 = I_0 = 1000 \ g\cdot\text{cm}^2 \qquad (7)$$

نعوض الآن في العلاقتين (3) فنجد :

$$\omega_2 = \frac{2000}{5000} \times 15 = 6 \ \text{r}\cdot\text{p}\cdot\text{m}$$

أي أن السرعة الزاوية تهبط الى 6 دورات في الدقيقة عندما تنزلق الكتلتان إلى نهاية القضيب . ونجد أيضاً :

$$\omega_3 = \frac{2000}{1000} \times 15 = 30 \ \text{r}\cdot\text{p.m}$$

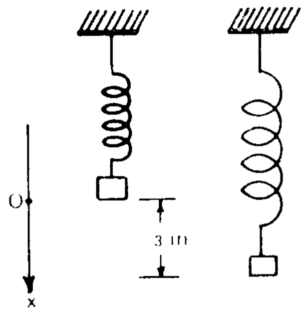
أي أن السرعة الزاوية تزداد إلى 30 دورة في الدقيقة عندما تغادر الكتلتان القضيب .

* * *

مسألة رقم (١٧ ـ ١٤) :

يمتط نابض بمقدار 9 in عند تحميله بوزن قدره 6 lb والمطلوب : (أ) ما هو الوزن الواجب تعليقه بالنابض كي يهتز هذا الوزن بدور مدته $\frac{\pi}{4}$ ثانية ؟ (ب) اذا علمت أن سعة الاهتزاز تساوي 3 in فما هو موضع الجسم وبأي اتجاه يتحرك بعد $\frac{\pi}{12}$ ثانية من مروره من وضع توازنه متجهاً للأسفل ؟ (ح) ماهي القوة التي يؤثر بها النابض على الجسم عندما يكون على بعد 1.8 in تحت وضع التوازن ومتحركاً نحو الأعلى ؟

الحـل :



الشكل (١٧ — ١٨)

(أ) نعلم أن دور اهتزاز كتلة تعلق بنابض ثم تزاح عن وضع توازنها وتترك هو :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (1)$$

حيث m كتلة الجسم المعلق بالنابض و k ثابت مرونة النابض و T دور الاهتزاز . بتربيع طرفي العلاقة (1) نجد :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} = 4\pi^2 \frac{mg}{kg} = 4\pi^2 \frac{W}{kg}$$

وذلك بفرض w هو وزن الجسم . وباستطاعتنا أن نكتب العلاقة السابقة بالشكل :

$$w = \frac{T^2\, kg}{4\pi^2} \tag{2}$$

ويلزمنا اذن معرفة قيمة k كي نحسب الوزن w .

لدينا من النص ان قوة $F = 6\ lb$ تسبب امتطاط النابض مسافة $x=9\ in$ أي $\frac{9}{12}\ ft$ وعليه فان :

$$k = \frac{6}{9/12} = 8\ lb/ft \tag{3}$$

نعوض في العلاقة (2) كل مقدار بمساويه فنجد :

$$w = \frac{\frac{\pi^2}{16} \times 8 \times 32}{4\ \pi^2} = 4\ lb$$

(ب) نريد الآن ايجاد العلاقة التي تعطي موضع الكتلة بدلالة الزمن ، ويجب أن تحقق هذه العلاقة شروط البدء المفروضة في المسألة . ونحن نعلم ان العلاقة العامة التي تحدد موضع الجسم المهتز بـــدلالة الزمن في الحركة الاهتزازية التوافقية هي :

$$x = A \sin (\omega t + \Theta_o)$$

حيث A سعة الاهتزاز و $\omega = \frac{2\pi}{T}$ وتتحدد Θ_o من موضع الجسم المهتز

في لحظة البدء وهي تعطى من العلاقة :

$$\Theta_0 = \text{Arc}\sin\frac{x_0}{A}$$

ولدينا من شروط المسألة ما يلي : $A = 3\text{ in}$ ، $T = \frac{\pi}{4}$

اذن :
$$\omega = \frac{2\pi}{\pi/4} = 8$$

كما أن $x_0 = 0$ تعطي $\Theta_0 = 0$ وعليه فان :

$$x = 3\sin 8t \qquad (4)$$

ونفترض ضمناً في هذه العلاقة أن x موجبة نحو الأسفل وهي مقـــدرة بالانشات ، لأننا استخدمنا A بالانشات ، انظر الشكل (١٧ – ١٨) .

ويتحدد الآن موضع الجسم بعد $\frac{\pi}{12}$ ثانية بتعويض t بـ $\frac{\pi}{12}$ في العلاقة (4) فنجد :

$$x = 3\sin 8\frac{\pi}{12} = 3\sin\frac{2\pi}{3} = 3\sin\frac{\pi}{3} = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = 2.59\text{ in}$$

فالجسم اذن يكون تحت وضع التوازن لكون x موجبة وعلى بعد 2.59 إنشاً من وضع التوازن . أما اتجاه الحركة فيتحدد من اتجاه السرعة أي من اشارة x' ولدينا من العلاقة (4) بالاشتقاق :

$$x' = 3 \times 8\cos 8t$$

ومن أجل $t = \frac{\pi}{12}$ يكون :

$$x' = 24 \cos \frac{8\pi}{12} = 24 \cos \frac{2\pi}{3} = -24 \cos \frac{\pi}{3} = -12$$

فالسرعة سالبة والجسم اذن يتجه نحو الأعلى ·

(ح) نعلم أن القوة التي تعيد الجسم المهتز المرتبط بالنابض والذي يبعد مسافة x عن وضع التوازن تعطى بالعلاقة :

$$F = m\,\omega^2\,x$$

و F في هذه العلاقة هو محصلة قوة شدة النابض والثقل . فاذا رمزنا بـ T لقوة شد النابض و بـ w الى ثقل الجسم امكننا أن نكتب :

$$F = T - w$$

وذلك لأن جهة T تحت وضع التوازن هي نحو الأعلى . اذن يكون :

$$T - w = m\omega^2 x$$

$$T = w + m\omega^2 x \qquad (5)$$

نعوض بالقيم العددية وهي :

$$x = \frac{1.8}{12}\ \text{ft}\ ,\quad \omega = 8\ ،\ m = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}\ \text{slug}\ ،\ w = 4\ \text{lb}$$

فنجد :

$$T = 4 + \frac{1}{8} \times (8)^2 \times \frac{1.8}{12}$$

$$T = 4 + 1.2 = 5.2\ \text{lb}$$

ملاحظـة :

إن بامكاننا أن نصل إلى نفس النتيجة اذا لاحظنا أن القوة التي تعيد الكتلة إلى وضع توازنها عندما تكون هذه الكتلة على بعد x من وضع التوازن تساوي kx . الا ان هذه القوة لاتمثل القوة الوحيـدة التي يؤثر بها النابض . فالكتلة تخضع لقوة شد النابض حتى ولو كانت متوازنة، وفي هذه الحالة تكون القوة مساوية وزن الجسم w . وعليه فان القوة الـكلية التي يؤثر بها النابض والتي رمز لها اعلاه بالرمز T تساوي .

$$T = w + kx$$

$$T = 4 + 8 \times \frac{1.8}{12} = 4 + 1.2 = 5.2 \text{ lb}$$

* * *

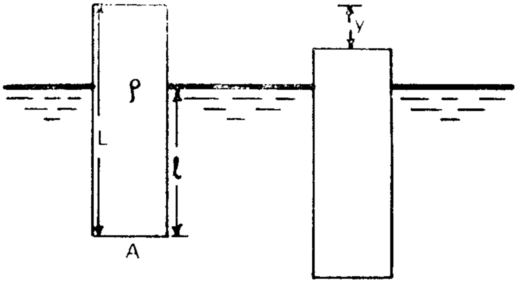
مسالة رقم (١٧ ـ ١٥) :

تُغطس اسطوانة معدنية طولها $L=14$ cm في حوض من الزئبق بشكل قـائم وتُترك لتتوازن فيطفو قسم منهـا فوق سطح الزئبق وينغمر القسم الآخر . تُغمر الاسطوانة بعد ذلك مسافة اضافية في الزئبق ثم تـترك فيلاحظ أنها تقوم بحركة اهتزازية توافقية دورها $T = 0.56$ ثانية . أوجد الكتلة النوعية ϱ لمادة الاسطوانة اذا علمت أن الكتلة النوعيـة للزئبق $\varrho' = 13\,600$ kg/m^3 . اعتبر ثابت التسارع الأرضي $g=\pi^2$ m/s^2 .

الحـل :

يبين الشكل (١٧ – ١٩) وضع الكتلة عندما تكون متوازنة على اليسار

وعندما تكون على بعد y من وضع توازنها على اليمين . وقد فرضنا A مساحة قاعدة الاسطوانة و l طول الجزء الذي ينغمر من الاسطوانة في الزئبق عندما تكون متوازنة .



الشكل (١٧ — ١٩)

لنكتب أولاً شرط توازن الأسطوانة . إن القوى التي تفعل في الاسطوانة والتي تجعلها متوازنـــة هي ثقلهـــا ودافعة ارخميدس . أمـا الثقل فيساوي $\varrho g\, AL$ لأن AL يمثل حجم الاسطوانـة و يمثل ϱg وزن وحـدة الحجم من مادة الاسطوانة . أما الدافعة فهي تساوي وزن السائل الذي يزيحه الجزء المغمور من الاسطوانة . وحجم هذا الجزء هو Al ووزن وحدة الحجم من الزئبق هي $\varrho' g$ إذن فالدافعة تساوي $\varrho' gAl$ ويكون شرط التوازن اذن :

$$\varrho gAL = \varrho' g\, Al \qquad (1)$$

أما إذا دُفعت الاسطوانة نحو الاسفل مسافة اضافية y فانها ستخضع إلى قوة دافعة تساوي $\varrho' gA\,(l + y)$ ، وتتجه هذه القوة نحو الأعلى وتكون

محصلة القوى التي تؤثر في الاسطوانة مساوية الى الدافعة مطروحاً منها الوزن أي :

$$F = \varrho' g\, A\, (l + y) - \varrho g A L$$

$$F = \varrho' g\, A l + \varrho' g\, A y - \varrho g\, A L$$

وباعتبار أن $\varrho g A L$ يساوي $\varrho' g A l$ بحسب العلاقة (1) فان القوة المعيدة للاسطوانة هي :

$$F = (\varrho' g A)\, y \qquad (2)$$

وهذه القوة تتناسب مع y وثابت تناسبها هو $\varrho' g A$.

واذا قارنا المسألة الآن بمسألة الكتلة المعلقة بنابض حيث نجد أن دور الحركة الاهتزازية التي تقوم بها كتلة" متصلة" بنابض أزيحت عن وضع توازنها هو :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (3)$$

حيث ترمز m الى كتلة الجسم و k الى ثابت مرونة النابض ، اذا قمنا بهذه المقارنة ادركنا أن حركة الاسطوانة هي حركة اهتزازية يعطى دورها بعلاقة مماثلة للعلاقة (3) إلا أنه ينبغي استبدال m بكتلة الاسطوانة و k بـ $\varrho' g A$ أي ثابت تناسب القوة المعيدة التي تخضع لها الاسطوانة اذن :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\varrho AL}{\varrho' gA}} \qquad = 2\pi\sqrt{\frac{\varrho L}{\varrho' g}} \qquad (4)$$

حيث بدلنا m بـ ϱLA .

وبتربيع طرفي العلاقة (4) نجد :

$$T^2 = 4\pi^2 \frac{\varrho L}{\varrho' g}$$

ومنها نجد :

$$\varrho = \frac{T^2 \varrho' g}{4\pi^2 L}$$

نعوض بالقيم العددية وهي : $T = 0.56$ ثانية ، $\varrho' = 13600\ kg/m^2$ ، $g = \pi^2$ ، $L = 0.14\ m$ ، فنجد :

$$\varrho = \frac{(0.56)^2 \times 13600 \times \pi^2}{4\pi^2 \times 0.14} = 7616\ kg/m^3$$

* * *

مسألة رقم (١٧ ــ ١٦) :

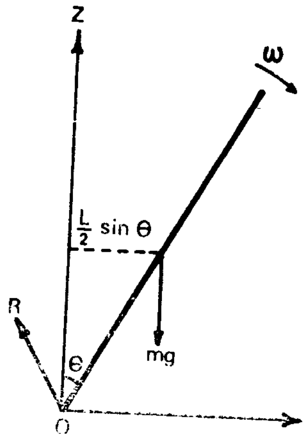
يقف قضيب منتظم المقطع طوله L وكتلته m بصورة شاقولية على أرض خشنة . فاذا هوى القضيب من وضعه الشاقولي ، دون أن ينزلق عند نقطة استناده بالأرض ، فبرهن أن سرعة القضيب الزاوية ω ، عندما يصنع مع الشاقول زاوية Θ ، تعطى بالعلاقة :

$$\omega^2 = \frac{2g}{L}(1 - \cos\Theta)$$

وذلك بفرض g التسارع الأرضي .

الحـل :

يبين الشكل (١٧ — ٢٠) القضيب في وضع مائل على الشاقول بزاوية θ وتؤثر فيه قوتان هما R و mg . أما R فتمر من محور الدوران المار من O والعمودي على مستوي الورقـة . وأما الثقل mg فيقع على بعد قـدره $L/2$ من O .



الشكل (١٧ — ٢٠)

ان قانون نيوتن الثاني في حـالة جسم يدور حول محور ، كما معلوم ، هو :

$$\Gamma = \mathrm{I}\,\alpha \qquad (1)$$

حيث تمثل Γ عزوم القوى الفاعلة في الجسم الدائر حول محور الدوران . وحيث تمثل I عزم عطالة الجسم حول محور الدوران ، و تمثل α التسارع الزاوي أي $\frac{d\omega}{dt}$.

وفي مسألتنا يكون العزم الوحيد الباقي هو عزم mg ومقـــداره $mg\,\frac{L}{2}\sin\theta$ ، كما هو واضـح من الشكل ، ذلـك لأن R تمر من محور الدوران .

و : $I = \frac{mL^2}{3}$ كما هو معلوم وهو يمثل عزم عطالة قضيب طويـل حول

محور مار من نهايته وعمودي عليه . ثم إن باستطاعتنا أن نكتب العلاقة (١) بالشكل :

$$\Gamma = I\,\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\ \frac{d\omega}{d\Theta}\cdot\frac{d\Theta}{dt}$$

إلا أن $\omega = \frac{d\Theta}{dt}$ اذن :

$$\Gamma = I\,\omega\,\frac{d\omega}{d\Theta} \qquad (2)$$

نعوض كل مقدار بمساويه فنجد :

$$mg\frac{L}{2}\sin\Theta = m\frac{L^2}{3}\,\omega\,\frac{d\omega}{d\Theta}$$

او :

$$\frac{3g}{L}\sin\Theta\, d\Theta = 2\,\omega\, d\omega \qquad (3)$$

وباجراء التكامل بين الوضع $\Theta = 0$ ،حيث $\omega = 0$ ، والوضع Θ ، حيث السرعة الزاوية ω ، نجد :

$$\frac{3g}{L}\int_0^{\Theta}\sin\Theta\, d\Theta = \int_0^{\omega} 2\omega\, d\omega$$

$$\frac{3g}{L}\Big[-\cos\Theta\Big]_0^{\Theta} = \Big[\omega^2\Big]_0^{\omega}$$

$$\frac{3g}{L}\left(-\cos\Theta + 1\right) = \omega^2$$

التي تكتب بالشكل :

$$\omega^2 = \frac{3g}{L} (1 - \cos \Theta)$$

★ ★ ★

مسألة رقم (١٧ ـ ١٧) :

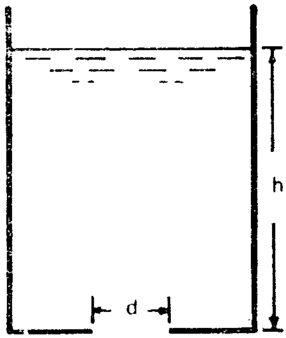
نفرض وعاء اسطوانياً مساحة قاعدته A مملوءاً بالماء حتى ارتفاع h . نفتح من أسفله ثقباً قطره d . برهن أن الزمن T اللازم لانفراغ الوعاء من الماء يعطى بالعلاقة :

$$T = \frac{A}{\pi} \sqrt{\frac{h}{d^2}}$$

وذلك بافتراض أن احتكاك الماء ببعضه وبالجدار مهمل . وأن $g = 32 \ ft/s^2$.

الحل :

لنحسب سرعة خروج الماء من الفتحة في أسفل الوعاء وهي بالطبع تتغير بتغير ارتفاع الماء فوق الفتحة . والطريقة التي نتبعها لبلوغ ذلك سبق أن استخدمناها في المسألة (١٧ـ ٤) حيث استخدمنا مبدأ انحفاظ الطاقة.



الشكل (١٧ – ٢١)

ولا بأس من اعادة تطبيق هذه الطريقة

على مسألتنا هذه . فعندما يكون ارتفاع الماء فوق سوية الفتحة مساوياً h دعنا نفترض أن الطاقة الكامنة للماء تكون مساوية E_p . فاذا فتحنا الثقب الآن خرجت كمية m من الماء الموجود في الاسطوانة ونقصت بذلك الطاقة الكامنة بمقدار mgh . لنكتب شرط انحفاظ الطاقة الكلية في الحالتين ، باعتبار v سرعة خروج السائل من الفتحة ، فيكون :

$$E_p + 0 = (E_p - mgh) + \frac{1}{2} mv^2 \qquad (1)$$

ومنه نجد :

$$v = \sqrt{2gh} \qquad (2)$$

فاذا اصبح ارتفاع السائل فوق الفتحة بمقدار y مثلاً خرج السائل من الفتحة بسرعة تعطى بالعلاقة :

$$v = \sqrt{2gy} \qquad (3)$$

واضح اذن أن سرعة خروج الماء من الفتحة تابع لارتفاع الماء فوق سوية الفتحة .

لننظر الآن في الماء عندما يكون ارتفاعه y فوق سوية الفتحة ثم بعد فترة قصيرة dt من ذلك ، فاذا فرضنا dy هو مقدار انخفاض سوية الماء في الوعاء بعد مرور الزمن dt فان حجم كمية الماء التي تكون قد نقصت من الوعاء تساوي A dy . وهذه الكمية نفسها خرجت من اسفل الوعاء بسرعة v محددة بالعلاقة (3) . ولما كانت مساحة مقطع الفتحة

هي $\frac{\pi d^2}{4}$ فان حجم السائل الذي يخرج في وحدة الزمن من أسفل الوعاء هو : $v \; \frac{\pi d^2}{4}$ ، وخلال فترة dt يخرج حجم مقداره $\frac{\pi d^2}{4} vdt$. لنضع مقدار ما نقص من الوعاء مساوياً مقدار ماخرج من الفتحة خلال هذه الفترة فنجد :

$$-A\,dy=\frac{\pi d^2}{4}\,v\,dt \qquad (4)$$

وقد وضعنا اشارة (–) كي نعبر عن أن y ينقص بمرور الزمن . وبتعويض v بمساويها من العلاقة (3) نجد :

$$-A\,dy=\frac{\pi d^2}{4}\sqrt{2gy}\,dt$$

التي نكتبها أيضاً بالشكل :

$$dt=-\frac{4A}{\pi d^2}\,\frac{dy}{\sqrt{2gy}}$$

$$dt=-\frac{A}{2\pi d^2}\;y^{-1/2}dy$$

وذلك باعتبار أن $g=32$. وباجراء التكامل ، بين $y=h$ و $y=o$ ، نجد :

$$\int_o^T dt=-\frac{A}{2\pi d^2}\int_h^o y^{-1/2}dy$$

$$\Big[\;t\;\Big]_o^T=-\frac{A}{2\pi d^2}\Big[\;2y^{1/2}\;\Big]_h^o$$

ومنه :

$$T = \frac{A}{\pi} \frac{\sqrt{h}}{d^2}$$

حيث h و d بالاقدام ، و T بالثواني .

* * *

مسالة رقم (١٧ ـ ١٨) :

يحمل قضيب طوله L ووزنه مهمل بسلكين A و B متساويين في الطول على النحو المبين في الشكل (١٧ – ٢٢) . يفترض أن مساحة مقطع السلك A هي A_1 ومساحة مقطع السلك B هي A_2 ، فاذا علمت أن عامل يانغ لمادة السلك A هو Y_1 وان عامل يانغ لمادة السلك B هو Y_2 فعند أية نقطة من القضيب ينبغي تعليق ثقل w حتى يكون : (أ) الاجهاد في السلك A مساوياً الاجهاد في السلك B . (ب) تشوه السلك A مساوياً تشوه السلك B . تطبيق عددي : $L = 105\ cm$ ، $A_1 = 1\ mm^2$ ، $A_2 = 2\ mm^2$.

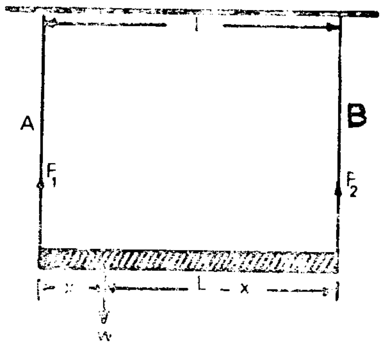
$$Y_1 = 30 \times 10^6\ lb/in^2 \text{ ، } Y_2 = 20 \times 10^6\ lb/in^2$$

الحـل :

(أ) نفرض أن x هو بعد نقطة تعليق الوزن w عن نهاية السلك الأيسر . بما أن القضيب متوازن ، وباعتبار أن F_1 و F_2 هما قوتا شدي السلكين A و B ، فانه لدينا :

$$F_1 + F_2 = w \qquad (1)$$

أما العزوم حول النهاية اليسرى للقضيب فتعطي :



$$- w\,x + L\,F_2 = o \qquad (2)$$

نجد من (1)و(2) أن :

$$F_2 = \frac{wx}{L} \qquad (3)$$

$$F_1 = w - F_2 = w - \frac{wx}{L}$$

$$F_1 = \frac{wL - wx}{L} \qquad (4)$$

ويخضع السلك A إلى قوة شد الشكل (١٧ – ٢٢) تساوي وتعاكس القوة F_1 الظاهرة في الشكل (١٧ – ٢٢) وبالمثل يخضع السلك B إلى قوة شد تساوي وتعاكس لتلك الظاهرة في الشكل، F_2

ولما كان تعريف الاجهاد هو نسبة القوة الى السطح فان تساوي الاجهادين يقضي بأن يكون :

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \qquad (5)$$

وبالتعويض في العلاقتين (3) و (4) نجد :

$$\frac{wL - wx}{LA_1} = \frac{wx}{LA_2}$$

التي تكتب أيضاً ، بعد ضرب الطرفين بالوسطين و الاختصار على Lw ، بالشكل :

$$A_2 (L - x) = A_1 x$$

ومنه :

$$x = \frac{A_2}{A_1 + A_2} L$$

وبالتعويض بالقيم العددية نجد :

$$x = \frac{2\ mm^2}{3\ mm^2} \times 105\ cm = 70\ cm$$

(ب) وإذا أردنا أن يتساوى التشوهان فاننا نرجع إلى التعريف :

$$\text{عامل يانغ} = \frac{\text{الاجهاد}}{\text{التشوه}}$$

اذن :

$$\text{التشوه} = \frac{\text{الاجهاد}}{\text{عامل يانغ}}$$

فتساوي التشوهين يقضي اذن بأن يكون :

$$\frac{F_1/A_1}{Y_1} = \frac{F_2/A_2}{Y_2}$$

أي :

$$\frac{w\ (L-x)}{LA_1\ Y_1} = \frac{wx}{LA_2Y_2}$$

وباختصار L و w وضرب الطرفين بالوسطين نجد :

$$A_2Y_2\ (\ L - x\ ) = A_1\ Y_1\ x$$

ومنه :

$$x = \frac{A_2 Y_2}{A_1 Y_1 + A_2 Y_2} L$$

وبالتعويض بالقيم العددية نجد :

$$x = \frac{2\ mm^2 \times 20 \times 10^6\ lb/in^2}{1\ mm^2 \times 30 \times 10^6 lb/in^2 + 2 mm^2 \times 20 \times 10^6 lb/in^2} \times 105\ cm$$

$$x = \frac{4}{7} \times 105\ cm = 60\ cm$$

★ ★ ★

مسالة رقم (١٧ ــ ١٩) :

تنطلق قذيفة بحيث تصنع زاوية θ_o فوق الأفق وبسرعة ابتدائية v_o . وفي أعلى نقطة من مسارها تنفجر فتنشطر إلى شطرين متساويين يسقط أحدهما شاقولياً بدون سرعة ابتدائية . على أي بعد من نقطة الانطلاق يصطدم الشطر الثاني بالأرض بافتراض أنها أفقية ؟

تطبيق عددي : $g = 32\ ft/s^2$ ، $v_o = 1200\ ft/s$ ، $\theta_o = 60°$

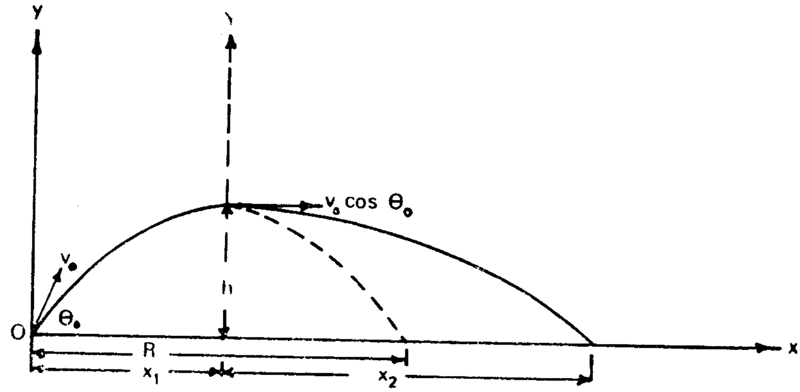
الحــل :

لنفرض أن X هو بعد نقطة اصطدام الشطر الثاني للقذيفة بالارض فيكون بحسب الشكل (١٧ – ٢٣) :

$$X = x_1 + x_2 \qquad (1)$$

ثم إن x_1 هو نصف مدى القذيفة فيما لو لم تنشطر أي أن :

$$x_1 = \frac{R}{2} = \frac{v_o^2 \sin 2\theta_o}{2g} \qquad (2)$$



الشكل (١٧ – ٢٣)

وفي أعلى نقطة من مسار القذيفة تكون السرعة أفقية وتكون قيمتها $v \cos \theta_o$ ويكون اندفاع القذيفة بفرض m كتلة القذيفة $m v \cos \theta_o$. وبعد انشطار القذيفة إلى نصفين يكون اندفاع الشطر الساقط شاقولياً معدوماً بحسب النص ، فيجب أن يكون اذن اندفاع الشطر الثاني الذي كتلته $\frac{m}{2}$ مساوياً الى اندفاع القذيفة قبل انشطارها وذلك بحسب مبدأ انحفاظ الاندفاع . فاذا فرضنا v' سرعة الشطر الثاني وجب أن يكون :

$$\frac{m}{2} v' = m v_o \cos \theta_o$$

ومنه :

$$v' = 2 v_o \cos \theta_o \qquad (3)$$

فالشطر الثاني ينطلق بسرعة v' محددة بالعلاقة (3) ومن الارتفاع h المقابل لأعلى نقطة من مسار القذيفة . لنحسب h :

في أعلى نقطة من المسار تنعدم مركبة السرعة الشاقولية أي أن :

$$v_0 \sin \theta_0 - gt = 0$$

ويتم ذلك في اللحظة :

$$t = \frac{v_0 \sin \theta_0}{g} \qquad (4)$$

وتحتاج القذيفة إلى نفس هذا الزمن كي تسقط المسافة الشاقولية h ، ولما كانت سرعة الشطر الثاني محددة بالعلاقة (3) وهي سرعة أفقية فان المسافة x_2 التي يقطعها الشطر الثاني كي يصطدم بالارض هي :

$$x_2 = v't = 2 v_0 \cos \theta_0 t$$

نعوض t من العلاقة (4) فنجد :

$$x_2 = 2 v_0 \cos \theta_0 \frac{v_0 \sin \theta_0}{g}$$

$$x_2 = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g} \qquad (5)$$

وبضم النتيجتين (2) و (5) نجد :

$$X = x_1 + x_2 = \frac{3}{2} \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

نعوض الآن بالقيم العددية فيكون :

$$X = \frac{3}{2} \frac{(1200)^2 \times \sin 120^\circ}{32}$$

$$X = \frac{3 \times 1440000 \times \sqrt{3}}{4 \times 32} = 58\ 700 \text{ ft}$$

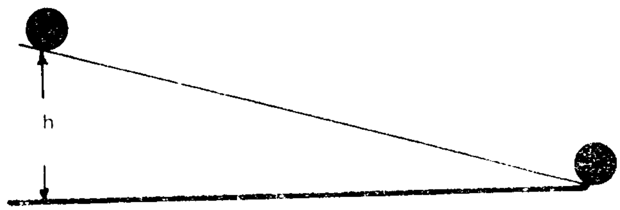
★ ★ ★

مسالة رقم (١٧ ـ ٢٠) :

تتدحرج كرة مصمتة واسطوانة مصمتة واسطوانة فارغة على مستو مائل بدون انزلاق فتهبط من نفس الارتفاع h ، المبين في الشكل (١٧ – ٢٤) ، حتى تبلغ اسفل المستوي . احسب السرعات التي تصل بها الاجسام الثلاثة الى اسفل المستوي اذا تركت بدون سرعة ابتدائية . قارن هذه النتائج بالزمن اللازم لجسم كي يسقط سقوطاً حراً من نفس الإرتفاع .

الحـل :

نفرض m كتلة الكرة و r نصف قطرها . لنكتب شرط انحفـاظ الطاقة الكلية في الوضعين البدائي والنهائي . ففي الوضع البدائي تترك الكرة



الشكل (١٧ – ٢٤)

بدون سرعة ابتدائية ولذا فان طاقتها الحركية معدومة . أما طاقتهـا

الكامنة فهي تساوي mgh وذلك بفرض السوية الأفقية هي سوية الطاقة الكامنة المعدومة .

وفي الوضع النهائي تنعدم الطاقة الكامنة وتكتسب الكرة طاقة حركية انسحابية وطاقة حركية دورانية . وإذا فرضنا أن v هي سرعة الكرة في وضعها النهائي فان طاقتها الحركية الانسحابية هي $\frac{1}{2}mv^2$ ، أما الطاقة الحركية الدورانية فهي تساوي $\frac{1}{2}I\omega^2$ بفرض I عزم عطالة الكرة حول قطرها و ω سرعة الدوران الزاوية ، اذن نكتب :

$$mgh = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, I\omega^2 \qquad (1)$$

ولما كان التدحرج يتم بدون انزلاق فان الزمن الذي تحتاجه الكرة كي تدور دورة كاملة هو $\frac{2\pi}{\omega}$ ، باعتبار ω السرعة الزاوية ، وتقطع الكرة مسافة على المستوي مقدارها $2\pi r$ فسرعتها الخطية v اذن هي :

$$v = \frac{2\pi r}{2\pi/\omega} = r\omega$$

نعوض في العلاقة (1) $\frac{v}{r}$ بـ ω فنجد:

$$mgh = \frac{1}{2}\, m\, v^2 + \frac{1}{2}\, I\, \frac{v^2}{r^2} \qquad (2)$$

إلا أن :

(3) $I = \frac{2}{5}\, mr^2$ أذن :

$$mgh = \frac{1}{2} m\, v^2 + \frac{1}{5} m\, v^2 = \frac{7}{10} m\, v^2$$

وأخيراً يكون :

(4) $v = \sqrt{\frac{10}{7} gh} = 1.195 \sqrt{gh}$

ويلاحظ أن النتيجة مستقلة عن كتلة الكرة m وعن نصف قطرها r .

وبالمثل فاننا نجد في حالة الاسطوانة المصمتة وبفرض M كتلة الاسطوانة و R نصف قطرها :

$$Mgh = \frac{1}{2} M\, v^2 + \frac{1}{2}\, I\, \frac{v^2}{R^2}$$

إلا أن I بالنسبة للاسطوانـة المصمتة يساوي $\frac{MR^2}{2}$ اذن :

$$Mgh = \frac{1}{2} Mv^2 + \frac{1}{4} Mv^2 = \frac{3}{4} Mv^2$$

ومنه :

(5) $v = \sqrt{\frac{4}{3} gh} = 1.155 \sqrt{gh}$

وهو مستقل أيضاً عن كتلة الاسطوانة M وعن نصف قطرها R .

واخيراً فاننا نجد في حالة الاسطوانة المفرّغة بفرض M' كتلتهـا و R' نصف قطرها أن :

$$M'gh = \frac{1}{2} M'v^2 + \frac{1}{2} I \frac{v^2}{R'^2}$$

وبتعويض I بـ $M'R'^2$ ، وهو عزم عطالة اسطوانة مفرغة حول قطرهـا يكون :

$$M'gh = \frac{1}{2} M'v^2 + \frac{1}{2} M'v^2 = M'v^2$$

ومنه :

$$v = \sqrt{gh} \qquad (6)$$

أما سرعة جسم يهوي من الإرتفاع h بدون سرعة ابتدائية ، بفرض v' هي هذه السرعة ، فتعطى كما نعلم بالعلاقة :

$$v' = \sqrt{2gh} = 1.41 \sqrt{gh} \qquad (7)$$

وعليه فاننا نجد بالمقارنة :

(للكرة المصمتة) $v = 1.195 \sqrt{gh} = \frac{1.195}{1.41} v' = 0.845 v'$

(للاسطوانة المصمتة) $v = 1.155 \sqrt{gh} = \frac{1.155}{1.41} v' = 0.817 v'$

(للاسطوانة الفارغة) $v = \sqrt{gh} = \frac{1}{1.41} v' = 0.707 v'$

فالكرة المصمتة اذن تصل باكبر سرعة . ويليها في ذلك الاسطوانة المصمتة فالاسطوانة الفارغة . وكلها أصغر من السرعة v' التي يصل بها جسم يهوي من الارتفاع h بدون سرعة ابتدائية .

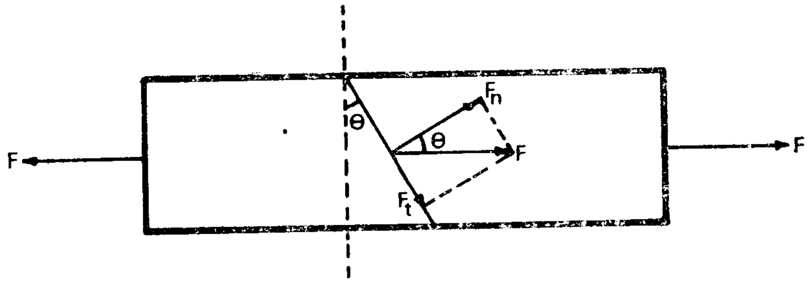
★ ★ ★

مسالة رقم (١٧ ـ ٢١) :

يُشدقضيب مساحة مقطعه A وذلك بقوتي شد F متعاكستين مطبقتين على نهايتيه. نفترض مستوياً في القضيب ، يصنع زاوية Θ مع مستو عمودي على القضيب كما هو مبين في الشكل (١٧ — ٢٥) والمطلوب : (أ) ما هو الاجهاد الشدي (الناظمي) في هذا المستوي وذلك بدلالة F و A و Θ ؟ (ب) ماهو الاجهاد القصي (المماسي) عند المستوي بدلالة F و A و Θ ؟ (حـ) ماهي قيمة Θ التي تجعل الاجهاد الشدي أعظمياً ؟ (د) ماهي قيمة Θ التي تجعل اجهاد القص أعظمياً ؟

الحـل :

(أ) لننظر في الجزء الواقع إلى يسار المقطع المبين في الشكل . إن هذا



الشكل (١٧ — ٢٥)

المقطع متوازن تحت تأثير قوتي الشد F عند المقطع ويمكن تحليل F إلى قوتين احداهما ناظمية F_n والاخرى مماسية F_t ولدينا من الشكل :

$$F_n = F \cos \Theta \quad , \quad F_t = F \sin \Theta \qquad (1)$$

ويكون الاجهاد الناظمي عند المقطع بفرض A' مساحة المقطع المائل مساوياً إلى :

$$\text{الاجهاد الناظمي} = \frac{F_n}{A'}$$

إلا أن : $A' \cos \Theta = A$ ، أي $A' = \frac{A}{\cos \Theta}$ إذن :

$$\text{الاجهادالناظمي أو الاجهادالشدي} = \frac{F_n}{A'} = \frac{F \cos \Theta}{A/\cos \Theta} = \frac{F}{A} \cos^2 \Theta \qquad (2)$$

(ب) أما الاجهاد القصي أو الاجهاد المماسي فيعطى بالعلاقة :

$$\text{الاجهاد القصي} = \frac{F_t}{A'} = \frac{F \sin \Theta}{A/\cos \Theta} = \frac{F}{2A} \sin 2\Theta \qquad (3)$$

(حـ) لما كان الاجهاد الشدي معطى بالعلاقة (2) وكانت أكبر قيمة لـ $\cos\Theta$ هي الواحد وتحصل هذه القيمة لما تأخذ Θ القيمة صفر فإن الاجهاد الشدي يكون اعظمياً عندما $\Theta = 0$.

(د) أما الاجهاد القصي فيصبح أعظمياً لما يكون :

$$\sin 2\Theta = 1$$

كما هو واضح من العلاقة (3) . وهذا يتم عندما $2\Theta = 90^\circ$ أو $\Theta = 45^\circ$.

* * *

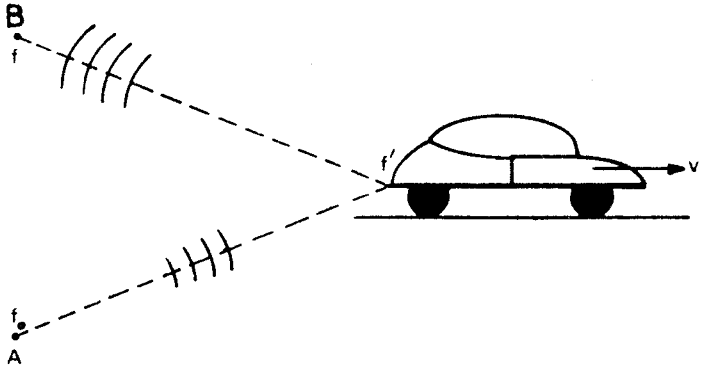
مسالة رقم (١٧ – ٢٢) :

يُصدر منبع ساكن أمواجاً بتواتر قدره f_0 وتنتشر هذه الامواج بسرعة c. وترد هذه الأمواج بصورة ناظمية على سطح عاكس يتحرك بعيداً عن المنبع بسرعة v ،

ويستقبل الامواج المنعكسة ذات التواتر f راصد ساكن موجود عند المنبع والمطلوب :

(أ) برهن أن : $f/f_o = (c-v)/(c+v)$. وبفرض أن $c \gg v$ برهن أن : $(f_o - f)/f_o = 2v/c$ (ب) يستخدم في تحديد سرعة السيارات بالرادار جهاز بث ساكن يرسل حزمة من الامواج الراديوية باتجـاه طريق عام ، ويتم استقبال الامواج المنعكسة على سيارة متحركة بجهاز استقبال ساكن موضوع قرب المنبع . أوجد قيمة $f_o - f$ عندما تبتعد السيارة العاكسة عـــن المنبـع بسرعة 35 ميل في الساعة (أي $15.6\ m/s$) . تعطى قيمة c وتساوي $3\times10^8\ m/s$ ونفترض أن $f_o = 2460\times10^6\ c/s$.

الحــل :



الشكل (١٧ – ٢٦)

(أ) يعطي قانون دوبلر التواتر f الذي يسمعه راصد متحرك بالنسبة لمنبع متحرك ، ونعبر عن هذا القانون رياضياً بالشكل :

$$f = f_o \frac{u + v_L}{u + v_s} \qquad (1)$$

حيث f_o التواتر الصادر عن المنبع و u سرعة انتشار الصوت في الوسط و v_L سرعة الراصد و v_s سرعة المنبع . والقانون صالح في جميع الحالات على أن نعتبر u موجبة دوماً ، ونعتبر الاتجـــاه الموجب للسرع من الراصد الى المنبع .

سنطبق القانون (1) على راصـــد في السيارة يستقبل الامواج الصادرة من المنبع الساكن بتواتر f_o وبسرعة c . فاذا فرضنا f' التواتر الذي يستقبله هذا الراصد فاننا نجد :

$u \rightarrow c$ وهي سرعة انتشار الامواج .

$f \rightarrow f'$ وهو التواتر الذي يستقبله الراصد الراكب في السيارة .

$v_s = 0$ وذلك لكون المنبع ساكن .

$v_L \rightarrow v$ وهي اصغر من الصفر باعتبار ان اتجاه v معاكس للاتجاه الموجب للسرع ، وهو كما ذكرنا من الراصد الى المنبع أي من السيارة الى A .

لنطبق العلاقة (1) آخذين بعين الاعتبار التعديلات الملائمة للوضع فنجد :

$$f' = f_o \frac{c - v}{c + 0} = f_o \frac{c - v}{c} \qquad (2)$$

ثم لننظر في التواتر الذي يستقبله راصد ساكن في B من منبع يصـدر امواجاً بتواتر f' وهو التواتر المنعكس على جسم السيارة . ان الاتجـاه الموجب الآن هو من B إلى السيارة ، وعليه فان v أكبر من الصفر ويكون :

$$f = f' \frac{c + o}{c + v} = f' \frac{c}{c + v} \qquad (3)$$

نعوض f' بمساويها من العلاقة (2) فنجد :

$$f = f_o \frac{c - v}{c} \times \frac{c}{c + v} = f_o \frac{c - v}{c + v}$$

وأخيراً يكون :

$$\frac{f}{f_o} = \frac{c - v}{c + v} \qquad (4)$$

وإذا فرضنا أن $v \ll c$ فاننا نجد :

$$\frac{f_o - f}{f_o} = 1 - \frac{f}{f_o} = 1 - \frac{c - v}{c + v} = \frac{c + v - c + v}{c + v}$$

$$\frac{f_o - f}{f_o} = \frac{2v}{c + v} \simeq \frac{2v}{c} \qquad (5)$$

وذلك باهمال v أمام c في المخرج ،

(ب) إن العلاقة (5) تعطي :

$$f_o - f = f_o \frac{2v}{c}$$

نعوض بالقيم العددية فنجد :

$$f_o - f = 2460 \times 10^6 \, \frac{2 \times 15.6}{3 \times 10^8} = 256 \ c/s$$

وهو في حدود التواترات المسموعة .

★ ★ ★

مسألة رقم (١٧ ـ ٢٣) :

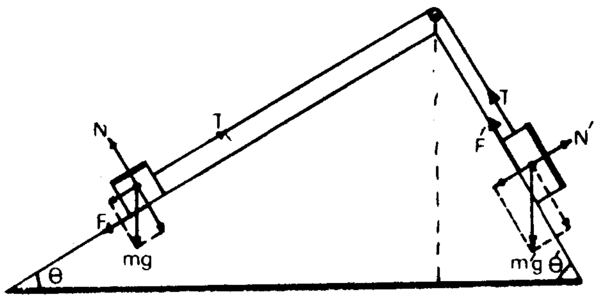
يميل مستو A ذي سطح خشن على الأفق بزاوية Θ ، ويستندعلى مستو خشن آخر B يميل بزاوية على الأفق Θ' وله نفس الارتفـــاع . تثبت بكرة في أعلى نقطة من المستويين ويمر عليها خيط تتصل نهايتاه بكتلتين الأولى منها موضوعة على المستوي A وكتلتها m ، والثانية موضوعة على المستوي B وكتلتها m' . فاذا فرضنا أن عامل الاحتكاك الانزلاقي على كل من المستويين هو μ فاحسب تسارع الجملة .

تطبيق عددي :

$$m = 0.2\ \text{slug} \quad ، \quad \mu = 1/\sqrt{3} \quad ، \quad \Theta = 30^\circ$$

$$m' = 0.6\ \text{slug} \quad ، \quad \Theta' = 60^\circ$$

الحـل :



الشكل (١٧ — ٢٧)

رسمنا في الشكل (١٧ — ٢٧) القوى التي تخضع لهـــا كل من الكتلتين m و m' وذلك اثناء تحركهما على المستويين A و B . وطبيعي أن تجر الكتلة

الكتلة m بسبب كبرها و كبر ميل المستوي الذي تتحرك عليه m' ، ويلاحظ أن F و F' وهما قوتا الاحتكاك على المستويين ، هما بعكس اتجاه الحركة .

لنكتب معادلتي حركة الكتلتين استناداً إلى قانون نيوتن الثاني وبفرض a هو تسارع كل من الكتلتين ، باتجاه المستوي المائل وهو واحد بالقيمة المطلقة بالنسبة للكتلتين . فبالنسبة للكتلة m' لدينا :

$$m'g \sin \theta' - (T + F') = m'a \qquad (1)$$

حيث ترمز T الى قوة شد الخيط . ونعلم من قوانين الاحتكاك أن :

$$F' = \mu\, m'g \cos \Theta' \qquad (2)$$

وذلك لأن القوة الناظمية التي تضغط السطحين على بعضهما هي مركبة $m'g$ بالاتجاه العمودي على المستوي ، وقيمة هذه المركبة هي $m'g \cos \theta'$.

نعوض فنجد :

$$m'g \sin \Theta' - T - \mu m'g \cos \Theta' = m'a \qquad (3)$$

اما بالنسبة للكتلة m فنكتب بالمثل العلاقة :

$$T - (F + mg \sin \theta) = ma$$

وباعتبار أن $F = \mu\, mg \cos \theta$ يكون :

$$T - \mu\, mg \cos \theta - mg \sin \theta = ma \qquad (4)$$

وبجمع العلاقتين (3) و (4) الى بعضهما نختصر T ونجد :

$$m'g \sin \Theta' - \mu m'g \cos \theta' - \mu\, mg \cos \theta - mg \sin \theta = (m + m')\, a$$

$$m'g(\sin\Theta' - \mu\cos\Theta') - mg(\mu\cos\Theta + \sin\Theta) = (m+m')a$$

ومنه :

$$a = \frac{m'}{m+m'}g(\sin\Theta' - \mu\cos\Theta') - \frac{m}{m+m'}g(\mu\cos\Theta + \sin\Theta)$$

نعوض الآن بالقيم العددية فنجد :

$$a = \frac{0.6}{0.8}\times 32\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3\times 2}\right) - \frac{0.2}{0.8}\times 32\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$$a = 24\left(\frac{2\sqrt{3}}{6}\right) - 8 = 8(\sqrt{3} - 1) = 5.9\ \text{ft/s}^2$$

★ ★ ★

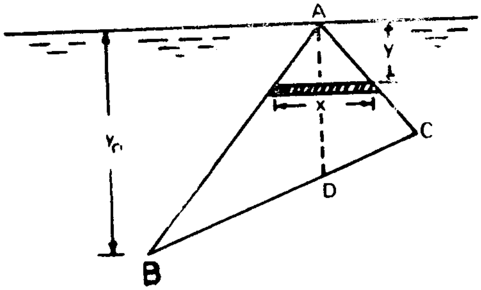
مسألة رقم (١٧ ـ ٢٤) :

نغمر صفيحة ABC مثلثية الشكل في الماء بحيث يبقى رأسها A عند سطح الماء أما رأساها الآخران فيقعان على العمقين 6 in و 12 in تحت سطح الماء . أوجد القوة الكلية المؤثرة على الصفيحة إذا علمت أن مساحتها $63\ \text{in}^2$ وان الكتلة النوعية للماء هي $1.94\ \text{slug/ft}^3$ ؟

الحـل :

نعلم أن ضغط السائل على عمق y من سطحه يساوي $\varrho g y$ حيث ترمز ϱ الى الكتلة النوعية للماء . فاذا أخذنا شريحة من سطح الصفيحة كالمبينة في الشكـــل (١٧ – ٢٨) عرضها dy ، على عمق y ، كانت القوة المؤثرة

فيها هي : $$dF = \varrho g y\, x\, dy$$



الشكل (١٧ — ٢٨)

وذلك بفرض x هو طول الشريحـــة على العمق y . ونحصل على القوة الكلية F باجراء عملية تكامل نغير فيها y بين o و y_o . اذن :

$$F = \varrho g \int_{o}^{y_o} y\, x\, dy$$

وهي علاقة نستطيع أن نكتبها بشكل آخر بعد ضرب الطرف الأيمن منها بـ $\int_{o}^{y_o} x\, dy$ الذي يمثل مساحة المثلث والتقسيم على نفس المقدار فنجد :

$$F = \varrho g \left[\frac{\int_{o}^{y_o} y x\, dy}{\int_{o}^{y_o} x\, dy} \right] \times \int_{o}^{y_o} x\, dy \qquad (1)$$

إن المقدار الموجود ضمن قوسين ليس إلا ترتيب مركز ثقل المثلث كما هو معلوم . ونعلم أن مركز ثقل المثلث يقسم الخط المتوسط فيه بنسبة

ثلثين وثلث . فلنحسب اذن ترتيب مركز الثقل وهو يساوي ثلثي ترتيب النقطة D المنصفة للضلع BC . وترتيب النقطة D هو :

$$y_D = \frac{y_C + y_B}{2}$$

حيث y_C هو ترتيب الرأس C وy_B ترتيب الرأس B . وبالتعويض بالقيم العددية نجد :

$$y_D = \frac{6 + 12}{2}\ \text{in} = 9\ \text{in}$$

ويكون بالتالي ترتيب مركز الثقل :

$$\frac{2}{3} \times 9\ \text{in} = 6\ \text{in} = \frac{1}{2}\ \text{ft}$$

نعوض الآن في العلاقة (1) فنجد :

$$F = 1.94\ \text{slug} \times 32\ \text{ft/s}^2 \times \frac{1}{2}\ \text{ft} \times \frac{63}{144}\ \text{ft}^2$$

$$F = 15.58\ \text{lb}$$

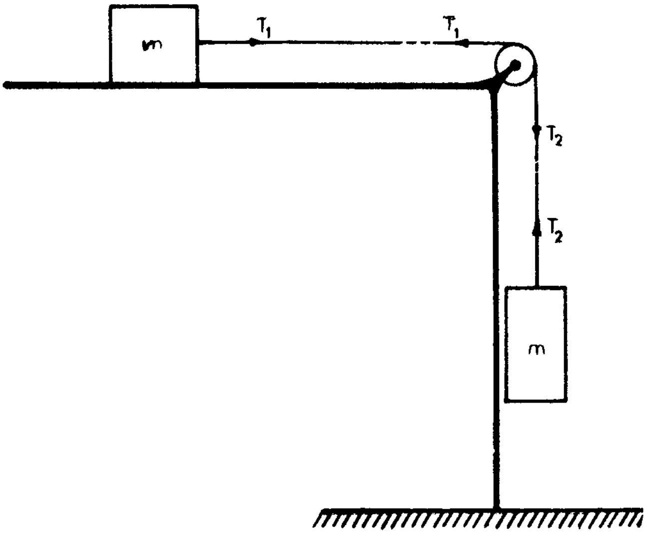
ويلاحظ ان العلاقة (1) علاقة عامة وهي تفيد في أن القوة الكلية تساوي الضغط على عمق يساوي عمق مركز الثقل مضروباً بمساحة الصفيحة المغمورة .

★ ★ ★

مسالة رقم (١٧ ـ ٢٥) :

تستقر قطعة كتلتها m على سطح أفقي أملس . ويمر حبل يتصل بالقطعة على بكرة نصف قطرها r ويتدلى من نهايته قطعة أخرى لها نفس الكتلة على النحو المبين في الشكل (١٧ – ٢٩) . تترك الجملة من السكون فيلاحظ أن كل قطعة تنتقل مسافة 16 ft في ثانيتين والمطلوب : (أ) ما هو عزم عطالة البكرة ؟ (ب) ماهو شد الحبل في كل من جزأيه ؟ نفرض $m = 0.5$ slug ، $r = 3$ in .

الحـل :



الشكل (١٧ – ٢٩)

لنكتب معادلات حركة كل من الكتلتين والبكرة وذلك بكتابة القوى

المؤثرة باتجاه الحركة او القوى التي لها عزوم حول محور الدوران في حالة البكرة .

يبين الشكل (١٧ – ٢٩) القوى المؤثرة في كل من العناصر الثلاثة لذا نكتب :

$$T_1 = ma \qquad (1)$$

$$mg - T_2 = ma \qquad (2)$$

$$\sum \Gamma = T_2 r - T_1 r = I\alpha \qquad (3)$$

حيث ترمز α الى التسارع الزاوي للبكرة و $\sum \Gamma$ إلى عزوم القوى الفاعلة فيها . ولدينا $a = r\alpha$ وذلك باعتبار أن التسارع الخطي للكتلتين هو تسارع مماسي للنقط التي تقع على محيط البكرة اذن يكون :

$$T_2 r - T_1 r = I \frac{a}{r} \qquad (4)$$

بجمع (1) و (2) نجد :

$$T_1 - T_2 + mg = 2\,ma$$

$$T_2 - T_1 = mg - 2ma \qquad (5)$$

نعوض في (4) فنجد :

$$(mg - 2\,ma)\, r = I \frac{a}{r}$$

ومنه :

$$I = \frac{mg - 2ma}{a}\, r^2 \qquad (6)$$

ولما كانت كل قطعة قد قطعت بعد انطلاقها من السكون مسافة تساوي 16 ft في ثانيتين فان العلاقة $s = \frac{1}{2} at^2$ تعطي :

$$a = \frac{2s}{t^2} = \frac{2 \times 16}{4} = 8 \text{ ft/s}^2$$

اذن :

$$I = \frac{0.5 \times 32 - 2 \times 0.5 \times 8}{8} \times \left(\frac{3}{12}\right)^2$$

$$I = \frac{1}{16} = 0.0625 \text{ slug . ft}^2$$

ويكون شد الخيط T_1 من العلاقة (1) مساوياً إلى :

$$T_1 = 0.5 \times 8 = 4 \text{ lb}$$

في حين أن شد الخيط T_2 من العلاقة (2) هو :

$$T_2 = mg - ma$$

$$T_2 = 0.5 \times 32 - 0.5 \times 8 = 12 \text{ lb}$$

★ ★ ★

مسألة رقم (١٧ ــ ٢٦) :

يتألف نواس مركب من كتلتين M وm مركزتين في نقطتين P و Q واقعتين في نهايتي قضيب صلد مهمل الكتلة قابل للدوران حول محور أفقي عمودي عليه مار من O ، انظر الشكل (١٧ ــ ٣٠) . والمطلوب :

أحسب بدلالة الكتلتين M و m والمسافتين $OP = x$ و $OQ = y$ ، (أ) البعد h بين مركز ثقل الجملة وبين محور الدوران المـــار من O . (ب) عزم العطالة I لجملة الكتلتين حول O . (جـ) دور الاهتزاز T لجملة الكتلتين عندما تكون سعة الاهتزاز صغيرة . (د) السرعة الزاوية والطاقة الحركية عندما تمر الجملة في الوضع الشاقولي وذلك إذا تركت من وضع يميل على الشاقول بزاوية Θ_n بدون سرعة ابتدائيـة وبفرض أن الاحتكاك مهمل . (هـ) تنفصل لدى مرور الجملة من الوضع الشـــاقولي كتلة $\mu = 10\ g$ من الكتلة M . فاذا فرضنا أن ارتفاع M عن الأرض 5 m، عندما يكون القضيب في الوضع الشاقولي فاوجد موضع النقطـــة S التي تصـــدم بها الكتلة μ الارض . (و) ماذا يصبح دور الاهتزاز T بعد مغـادرة الكتلة μ ؟ احسب التغير الطارىء على الدور .

تطبيق عددي : $M = 1800\ g$ ، $m = 200\ g$ ، $x = 10\ cm$ ، $y = 20\ cm$ ، $\Theta_n = 0.1\ rad$ ، $g = 9.8\ m/s^2$.

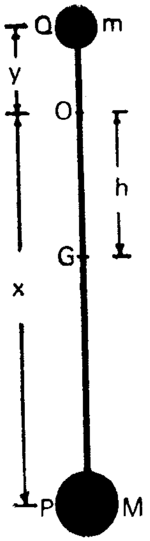
الحـل :

(أ) نفرض G مركز ثقل الكتلتين M و m . واضح من الشكل أن :

$$PG = x - h \quad ، \quad QG = y + h$$

واذا أدرنا الشكل بزاوية قـدرها $\frac{\pi}{2}$ اتضح لنا أن مسألة ايجاد مركز الثقل هي مسألة ايجاد محصلة الثقلين Mg و mg . وقيمة هـذه المحصلة هي $(m+M)g$ ويتحدد موضع تطبيقها بكتابة معادلة العزوم حول G فنجد :

$$Mg\,(x-h) - mg\,(y+h) = o$$



الشكل (١٧ — ٣٠)

ومنه :

$$Mx - Mh - my - mh = o$$

$$Mx - my = (M+m)\,h$$

$$h = \frac{Mx - my}{M+m} \qquad (1)$$

نعوض بالقيم العددية وهي :

$$x = 0.1\ m \ ، \ y = 0.2\ m$$

$$M = 1.8\ kg \ . \ m = 0.2\ kg$$

فنجد :

$$h = \frac{1.8 \times 0.1 - 0.2 \times 0.2}{1.8 + 0.2} = \frac{0.18 - 0.04}{2} = 0.07\ m = 7\ cm \qquad (2)$$

(ب) لما كانت كتلة القضيب مهملة فان عزم عطـــالة الجملة حول محور الدوران هو مجموع عزمي عطالة الكتلتين m و M ، أي أن :

$$I = Mx^2 + my^2 \qquad (3)$$

نعوض بالقيم العددية فنجد :

$$I = 1.8 \times (0.1)^2 + 0.2 \times (0.2)^2$$

$$I = 0.018 + 0.008 = 0.026\ kg.m^2 \qquad (4)$$

(حـ) نعلم أن دور النواس المركب يعطى بالعلاقة :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \qquad (5)$$

ولدينا :

$I = 0.026\ kg.m^2$ وهو عزم عطالة النواس حول محور الاهتزاز .

$h = 0.07\ m$ وهو بعد مركز ثقل النواس عن محور الاهتزاز .

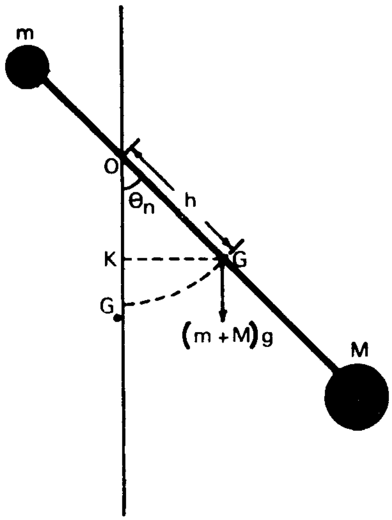
ولما كانت m تمثل في العلاقة (5) كتلة النواس فهي اذن $1.8+0.2 = 2kg$.

وعليه فان :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{0.026}{2\times 9.8 \times 0.07}} = 2\pi\sqrt{1.9\times 10^{-2}}$$

$$T = 2\pi \times 0.137 = 0.865\ s$$

(د) نكتب بحسب مبدأ العمل والطاقة أن أعمال جميع القوى الفاعلة في الجملة من جراء دورانها بزاوية Θ_n يساوي تغير الطاقة الحركية لها . وواضح من الشكل (١٧ – ٣١) ان القوة الوحيدة التي تقوم بعمل هي قوة الثقالة وأن عملها يساوي :



الشكل (١٧ – ٣١)

$$W = (M+m)\, g \times kG_o$$

$$W = (M + m)\, g \times h\,(1 - \cos\theta_n)$$

$$W = 2\,(M+m)\, gh \sin^2 \frac{\theta_n}{2} \qquad (6)$$

ولما كانت الطاقة الحركية البدائية للجملة صفر وطاقتها الحركية النهائية هي $\frac{1}{2}\, I\omega^2$ ، فان لدينا :

$$W = 2\,(M + m)\, gh \sin^2 \frac{\theta_n}{2} = \frac{1}{2}\, I\omega^2$$

ومنه :

$$\omega^2 = 4\, \frac{M + m}{I}\, gh \sin^2 \frac{\theta_n}{2}$$

أو :

$$\omega = 2 \sin \frac{\theta_n}{2} \sqrt{\frac{M + m}{I} gh} \qquad (7)$$

نضع في العلاقة (7) القيم العددية ، فلدينا :

$$\theta_n = 0.1 \text{ rad} \;,\; \frac{\theta_n}{2} = 0.05 \text{ rad}$$

فالزاوية صغيرة ويمكن اذن الباس جيبها بها ، أي :

$$\sin \frac{\theta_n}{2} \simeq 0.05$$

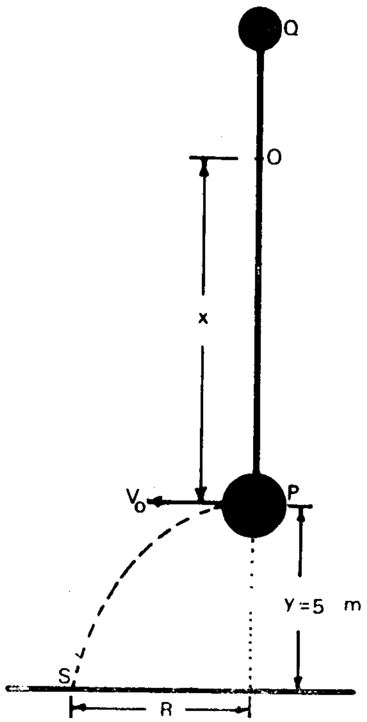
فيكون :

$$\omega = 2 \times 0.05 \sqrt{\frac{2}{0.026} \times 9.8 \times 0.07}$$

$$\omega = 0.1\sqrt{52.8} = 0.726 \text{ rad/s}$$

وتكون الطاقة الحركية اذن :

$$E = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} \times 0.026 \times 0.528 = 6.86 \times 10^{-3} \text{Joules}$$



الشكل (١٧ – ٣٢)

(ﻫ) لنحسب أولاً السرعة التي تخرج بها الكتلة μ . وهذه السرعة هي :

$$v_o = x\omega$$

وذلك باعتبار أن بعد الكتلة عن محور الدوران اثناء الانفصال هو x وأن السرعة الزاوية اثناء ذلك هي ω اذن لدينا :

$$V_o = 0.1 \times 0.726 = 0.0726 \text{ m/s}$$

والمسألة اذن هي مسألة قذيفة تطلق من ارتفاع 5 m بصورة أفقية بسرعة مقدارها 0.0726 m/s . ويكفي لحساب موضع اصطدامها بالأرض أن نجد الزمن الذي تحتاجه الكتلة كي تسقط مسافة 5 m وأن نضرب هذا الزمن بالسرعة v_o .

نحسب زمن السقوط من العلاقة : $y = \frac{1}{2} g t^2$ فنجد :

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

وعليه فان :

$$R = v_o\, t = v_o \sqrt{\frac{2y}{g}} = 0.0726 \sqrt{\frac{2\times5}{9.8}}$$

$$R = 0.0726 \times 1.01 = 0.073 \text{ m}$$

(و) اذا غادرت النواس كتلة $\mu = 0.1$ kg نقصت كتلته بهذا المقدار واصبحت 1.9 ويصبح الدور T' :

$$T' = 2\pi \sqrt{\frac{0.025}{1.9 \times 9.8 \times 0.07}} = 2\pi \sqrt{1.993\times10^{-2}}$$

$$T' = 0.889 \text{ s}$$

ويكون :

$$T' - T = 0.889 - 0.865 = 0.024 \text{ s}$$

فدور الاهتزاز اذن يزداد بمقدار 0 024 ثانية .

* * *

مسالة رقم (١٧ — ٢٧) :

يخضع قضيب طوله L ومساحة مقطعه A وعامل يانغ بالنسبة له Y إلى قوة شد F. نفرض S الاجهاد و P التشوه النسبي .يطلب استخراج عبارة الطاقة الكامنة

المرنة لكل وحدة حجم من القضيب وذلك بدلالة S و P .

الحـل :

نستطيع أن نكتب عامل يانغ بدلالة المقادير الاخرى على الشكل :

$$Y = \frac{S}{P} = \frac{F/A}{\Delta L/L}$$

أو بالشكل :

$$F = (\frac{Y.A}{L})\Delta L$$

وتعبر هذه العلاقة عن تناسب الاستطالة مع القوة المطبقة وهي علاقـــة شبيهة بتلك التي نجدها في حالة نابض وهي $F = kx$ حيث نعلم أن الطاقة المرنة للنابض الذي يمتط مسافة x هي $\frac{1}{2}kx^2$ ، وبالمثـل تكون الطاقة الكامنة المرنة للقضيب مساوية الى :

$$E_p = \frac{1}{2}(\frac{YA}{L})(\Delta L)^2$$

ولما كان حجم القضيب مساوياً AL فان الطاقة الكامنة لوحـــدة الحجم تساوي :

$$\frac{E_p}{AL} = \frac{1}{2}\frac{Y}{L}\frac{(\Delta L)^2}{L} = \frac{1}{2}Y(\frac{\Delta L}{L})^2 = \frac{1}{2}Y.P^2$$

إلا أن : $Y = \frac{S}{P}$ اذن يكون :

$\frac{1}{2}\,\frac{S}{P}\,.\,P^2 = \frac{1}{2}\,S\,P$ = الطاقة الكامنة لوحدة الحجم من القضيب .

★ ★ ★

مسالة رقم (١٧ ــ ٢٨) :

يعلـّق ثقل $w = 320\ lb$ بسلك طوله الطبيعي $l_0 = 10\ ft$ فيلاحظ أن السلك يستطيل بمقدار $\Delta l = 0.12\ in$. وتساوي مساحة مقطع السلك التي نستطيع أن نفرضها ثابتة $A = 0.016\ in^2$ والمطلوب : (أ) إذا جُذب الثقل نحو الأسفل مسافة صغيرة ثم تُرك فأوجد تواتر اهتزازه . (ب) أوجد عامل يانغ لمادة السلك .

الحـل :

اذا خضع السلك إلى وزن w استطال بمقدار Δl يتحدد من العلاقة :

$$Y = \frac{w/A}{\Delta l / l_0} \qquad (1)$$

أي أن :

$$\Delta l = \frac{w l_0}{YA} \qquad (2)$$

وإذا جذب السلك بقوة إضافية F وكان x مقدار الاستطالة الاضافية كان :

$$(x + \Delta l) = \frac{(w+F) l_0}{YA} = \frac{w l_0}{YA} + \frac{l_0}{YA}\,F \qquad (3)$$

وبطرح العلاقتين (3) و (2) من بعضهما نجد :

$$F = \left(\frac{YA}{l_o} \right) x$$

أي أن الثقل يخضع إذا ترك وشأنه الى قوة F متناسبة مع الاستطالة ويكون عامل التناسب $\frac{YA}{l_o}$ ، فالثقل اذن يقوم بحركة اهتزازية توافقية دورها T يعطى بالعلاقة :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{(YA/l_o)}} = 2\pi \sqrt{\frac{ml_o}{YA}}$$

وذلك أسوة بحركة ثقل معلق في نهاية نابض .

ونجد من العلاقة (2) أن : $YA = wl_o/\Delta l$ اذن ، يكون :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{ml_o\,\Delta l}{wl_o}} = 2\pi \sqrt{\frac{\Delta l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0{\cdot}01\,\text{ft}}{32}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{3{\cdot}12 \times 10^{-4}} = 0{\cdot}111\ \text{s}$$

ويكون تواتر الاهتزاز مساوياً مقلوب الدور أي :

$$f = \frac{1}{T} = 9\ \ \text{c/s}$$

(ب) أما بالنسبة لعامل يانغ فنحسبه من العلاقة (1) فنجد :

$$Y = \frac{w \cdot l_o}{A.\,\Delta l} = \frac{320 \times 10}{0{\cdot}016 \times 0{\cdot}01\ \text{ft}} = 20 \times 10^6\ \ \text{lb/in}^2$$

★ ★ ★

الملحق الاول

عوامل التحويل من جملة وحدات لاخرى

الزمن :

$1\ s = 1.667\times10^{-2}\ min = 2.778\times10^{-4}\ hr = 3.169 \times 10^{-8}\ yr$

$1\ min = 60\ s = 1.667 \times 10^{-2}\ hr = 1.901 \times 10^{-6}\ yr$

$1\ hr = 3600\ s = 60\ min = 1.141 \times 10^{-4}\ yr$

$1\ yr = 3.156 \times 10^{7}\ s = 5.259 \times 10^{5}\ min = 8.766 \times 10^{3}\ hr$

الطول :

$1\ m = 10^{2}\ cm = 39.37\ in = 6.214 \times 10^{-4}\ mile$

$1\ mile = 5280\ ft = 1.609\ km$

$1\ in = 2.540\ cm$

1 A° (انغستروم) $= 10^{-8}\ cm = 10^{-10}\ m = 10^{-4}\ \mu$ (ميكرون)

1 μ (ميكرون) $= 10^{-6} m$

1 AU (وحدة فلكية) $= 1.496 \times 10^{11}\ m$

السنة الضوئية $= 9.46 \times 10^{15}\ m$

الزاوية :

1 rad (راديان) $= 57.3^{\circ}$

$1^{\circ} = 1.74 \times 10^{-2}\ rad$

$1' = 2.91 \times 10^{-4}$ rad

$1'' = 4.85 \times 10^{-6}$ rad

المساحة :

$1\ m^2 = 10^4\ cm^2 = 1.55 \times 10^{-5}\ in^2 = 10.76\ ft^2$

$1\ in^2 = 6.452\ cm^2$

$1\ ft^2 = 144\ in^2 = 9.29 \times 10^{-2}\ m^2$

الحجم :

$1 m^3 = 10^6\ cm^3 = 10^3$ liters (ليتر) $= 35.3\ ft^3 = 6.1 \times 10^4\ in^3$

$1\ ft^3 = 2.83 \times 10^{-2}\ m^3 = 28.32$ liters (ليتر)

$1\ in^3 = 16.39\ cm^3$

السرعة :

$1\ m/s = 10^2\ cm/s = 3.281\ ft/s$

$1\ ft/s = 30.48\ cm/s$

1 mile/min= ميل في الدقيقة $= 60$ mi/hr $= 88$ ft/s

التسارع :

$1\ m/s^2 = 10^2\ cm/s^2 = 3.281\ ft/s^2$

$1\ ft/s^2 = 30.48\ cm/s^2$

الكتلة :

1 kg $= 10^3$ g $= 0.0689$ slug (سلَغ)

1 slug = 14 594 g = 14.594 kg

1 amu (وحدة الكتلة الذرية) $= 1.6604 \times 10^{-27}$ kg

القوة :

1 N (نيوتن) $= 10^5$ dyne (دينة) $= 0.2248$ lb $= 0.102$ kgf (كيلو غرام قوة)

1 dyne $= 10^{-5}$ N $= 2.248 \times 10^{-6}$ lb

$1\ lb = 4.448\ N = 4.448 \times 10^5$ dynes $= 16$ ounces (أوقية)

$1\ kgf = 9.81\ N$

الضغط :

$1\ N/m^2 = 9.265 \times 10^{-6}$ atm (ضغط جوي) $= 1.450 \times 10^{-4}\ lb/in^2$
$= 10\ dyne/cm^2$

1 atm (ضغط جوي) $= 14.7\ lb/in^2 = 1.013 \times 10^5\ N/m^2$

1 bar (بار) $= 10^6\ dyne/cm^2$

الطاقة :

1 J (جول) $= 10^7$ ergs $= 0.239$ cal (حريرة)
$= 6.242 \times 10^{18}$ ev (الكترون فولط)

$1\ ev = 10^{-6}$ Mev $= 1.60 \times 10^{-12}$ erg $= 1.07 \times 10^{-9}$ amu
(وحدة كتلة ذرية)

1 amu $= 1.492 \times 10^{-10}$ J $= 3.564 \times 10^{-11}$ cal (حريرة) $= 931.0$ Mev

درجة الحرارة :

°K (الدرجة كلفن) $= 273.1 + °C$

°C (الدرجة المئوية) $= \frac{5}{9}(°F - 32)$

°F (الدرجة فرنهايت) $= \frac{9}{5}°C + 32$

الاستطاعة :

1 w (وات) $= 1.341 \times 10^{-3}$ hp (حصان)

1 hp (حصان) $= 745.7$ w (وات)

★ ★ ★

الملحق الثاني

جدول النسب المثلثية

الزاوية					الزاوية				
درجة	راديان	الجيب	جيب التمام	الظل	درجة	راديان	الجيب	جيب التمام	الظل
0°	.000	0.000	1.000	0.000					
1°	.017	.018	1.000	.018	46°	0.803	0.719	0.695	1.036
2°	.035	.035	0.999	.035	47°	.820	.731	.682	1,072
3°	.052	.052	.999	.052	48°	.838	.743	.669	1.111
4°	.070	.070	.998	.070	49°	.855	.755	.656	1.150
5°	.087	.087	.996	.088	50°	.873	.766	.643	1.192
6°	.105	.105	.995	.105	51°	.890	.777	.629	1.235
7°	.122	.122	.993	.123	52°	.908	.788	.616	1.280
8°	.140	.139	.990	.141	53°	.925	.799	.602	1.327
9°	.157	.156	.988	.158	54°	.942	.809	.588	1.376
10°	.175	.174	.985	.176	55°	.960	.819	.574	1.428
11°	.192	.191	.982	.194	56°	.977	.829	.559	1.483
12°	.209	.208	.978	.213	57°	.995	.839	.545	1.540
13°	.227	.225	.974	.231	58°	1.012	.848	.530	1.600
14°	.244	.242	.970	.249	59°	1.030	.857	.515	1.664
15°	.262	.259	.966	.268	60°	1.047	.866	.500	1.732
16°	.279	.276	.961	.287	61°	1.065	.875	.485	1.804
17°	.297	.292	.956	.306	62°	1.082	.883	.470	1.881
18°	.314	.309	.951	.325	63°	1.100	.891	.454	1.963
19°	.332	.326	.946	.344	64°	1.117	.899	.438	2.050
20°	.349	.342	.940	.364	65°	1.134	.906	.423	2.145
21°	.367	.358	.934	.384	66°	1.152	.914	.407	2.246
22°	.384	.375	.927	.404	67°	1.169	.921	.391	2.356
23°	.401	.391	.921	.425	68°	1.187	.927	.375	2.475
24°	.419	.407	.914	.445	69°	1.204	.934	.358	2.605
25°	.436	.423	.906	.466	70°	1.222	.940	.342	2.747
26°	.454	.438	.899	.488	71°	1.239	.946	.326	2.904
27°	.471	.454	.891	.510	72°	1.257	.951	.309	3.078
28°	.489	.470	.883	.532	73°	1.274	.956	.292	3.271
29°	.506	[illegible]	.875	.554	74°	1.292	.961	.276	3.487
30°	.524	.500	.866	.577	75°	1.309	.966	.259	3.732
31°	.541	.515	.857	.601	76°	1.326	.970	.242	4.011
32°	.559	.530	.848	.625	77°	1.344	.974	.225	4.331
33°	.576	.545	.839	.649	78°	1.361	.978	.208	4.705
34°	.593	.559	.829	.675	79°	1.379	.982	.191	5.145
35°	.611	.574	.819	.700	80°	1.396	.985	.174	5.671
36°	.628	.588	.809	.727	81°	1.414	.988	.156	6.314
37°	.646	.602	.799	.754	82°	1.431	.990	.139	7.115
38°	.663	.616	.788	.781	83°	1.449	.993	.122	8.144
39°	.681	.629	.777	.810	84°	1.466	.995	.105	9.514
40°	.698	.643	.766	.839	85°	1.484	.996	.087	11.43
41°	.716	.658	.755	.869	86°	1.501	.998	.070	14.30
42°	.733	.669	.743	.900	87°	1.518	.999	.052	19.08
43°	.751	.682	.731	.933	88°	1.536	.999	.035	28.64
44°	.768	.695	.719	.966	89°	1.553	1.000	.018	57.29
45°	.785	.707	.707	1.000	90°	1.571	1.000	.000	∞

مراجع الكتاب

(1) Problems and solutions in general physics
for science and engineering students
by Simon G.G. Mac Donald
Addison–Wesley

(2) Analytical experimental physics
by Michael Ference, Jr.
Harvey B. Lemon
Reginald J. Stephenson
The university of Chicago press

(3) Modern university Physics
by James A. Richards, JR.
Francis weston Sears
M. Russell wehr
Mark W. Zemansky
Addison-Wesley

(4) Theory and problems of college physics
Schaum publishing company

(5) Journal de mathematiques élémentaires
Librairie VUIBERT

(6) Problems in General Physics
V.S. wolkenstein
MIR Publishers . Moscow