

الفصل الرابع

الحركة المستقيمة

الحركة المستقيمة :

إن باستطاعتنا دراسة حركة جسم في الفراغ إذا علمنا حركة مساقطه على ثلاثة محاور متعامدة وهي ثلاث حركات على خطوط مستقيمة .

السرعة الوسطى في الحركة المستقيمة :

نعرف السرعة الوسطى لجسم يتحرك على خط مستقيم بحيث يكون في الموضع الذي فاصلته x_1 في اللحظة t_1 ثم يصبح في الموضع الذي فاصلته x_2 في اللحظة t_2 بأنها :

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (4-1)$$

السرعة الآنية :

نسمي سرعة الجسم في لحظة ما من الزمن ، أو في نقطة محددة من مساره بالسرعة الآنية ، وتعريف رياضياً بأنها نهاية النسبة $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ لما تنتهي Δt إلى الصفر أي أنها مشتق الفاصلة بالنسبة للزمن أو :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \quad (4-2)$$

التسارع الوسطي والتسارع الآني :

إذا تغيرت سرعة جسم قيل بأن له تسارعاً . فإذا كانت سرعته v_1 في لحظة t_1 وأضحت هذه السرعة في اللحظة t_2 مساوية v_2 فإن التسارع الوسطي للجسم ورمزه \bar{a} يعرف بالعلاقة :

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (4-3)$$

ونعرف التسارع الآني بالطريقة التي عرفنا بها السرعة الآنية فنكتب :

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} \quad (4-4)$$

وإذا كانت سرعة الجسم تزداد مع الزمن كان a موجباً ونقول بأن الجسم يتسارع أما إذا كانت السرعة تتناقص مع مرور الزمن فإن a يكون سالباً ونقول بأن الجسم يتباطأ .

الحركة الخطية بتسارع ثابت :

إذا كان الجسم يتحرك حركة خطية بتسارع ثابت a فإننا نستطيع أن نحدد موضع الجسم وسرعته في كل لحظة ويكون لدينا :

$$v = v_0 + a t \quad (4-5)$$

بفرض v_0 سرعة المتحرك البدائية . وإذا كان الجسم المتحرك في المبدأ في اللحظة $t=0$ ، كان :

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (4-6)$$

وإذا حذفنا t من المعادلتين (4-5) و (4-6) وجدنا العلاقة :

$$v^2 = v_0^2 + 2 a x \quad (4-7)$$

الاجسام الساقطة سقوطاً حراً :

تسقط الاجسام بتسارع ثابت نرمز له بـ g ولا يختلف الا اختلافاً ضئيلاً من مكان لآخر والقيمة العددية لـ g هي :

$$g = 32 \text{ ft/s}^2 = 9.8 \text{ m/s}^2$$

وتصلح في هذه الحالة المعادلات (4-5) و (4-6) و (4-7) لبيان موضع وسرعة الجسم الساقط بعد وضع g بدلاً من a في هذه العلاقات فيكون لدينا اذن :

$$v = v_0 + gt \quad (4-8)$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 \quad (4-9)$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 g x \quad (4-10)$$

الاجسام المقذوفة للأعلى :

تصلح القوانين (4-8) و (4-9) و (4-10) لمعالجة مسائل قذف الاجسام نحو الأعلى اذا راعينا الأمور التالية :

(أ) ابدال g بـ $-g$ بحيث تصبح هذه القوانين بالشكل :

$$v = v_0 - gt \quad (4-11)$$

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (4-12)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2 g x \quad (4-13)$$

(ب) تؤخذ نقطة القذف مبدأ لقياس المسافات وتعتبر المسافات أعلى نقطة القذف موجبة وأسفلها سالبة .

(ج) تعتبر السرعة في أثناء صعود الجسم موجبة واثناء هبوطه سالبة .

السرعة العددية والسرعة المتجهة :

السرعة العددية مقدار سلمي يحدد معدل قطع الجسم للمسافة دون أن يبين اتجاه حركة الجسم . أما السرعة المتجهة فهي مقدار شعاعي . والسرعة المتجهة نفس مقدار السرعة العددية إلا أن لها اتجاهاً محدداً . وتتغير السرعة المتجهة لجسم اذا تغير مقدارها أو تغير اتجاهها أو تغير كل من مقدارها واتجاهها .

السرعة المتجهة النسبية :

إذا تحرك جسم B بالنسبة لجسم A بسرعة متجهة \vec{V}_{BA} وتحرك الجسم A بالنسبة لجسم ثالث E بسرعة \vec{V}_{AE} ، فان سرعة الجسم الأول B بالنسبة للجسم الثالث E ونرمز لها بالرمز \vec{V}_{BE} تعطى بالعلاقة الشعاعية :

$$\vec{V}_{BE} = \vec{V}_{BA} + \vec{V}_{AE} \quad (4-14)$$

$$\vec{V}_{BE} = -\vec{V}_{EB} \quad \text{ويكون أيضاً:}$$

* * *

مسألة رقم (٤ - ١) :

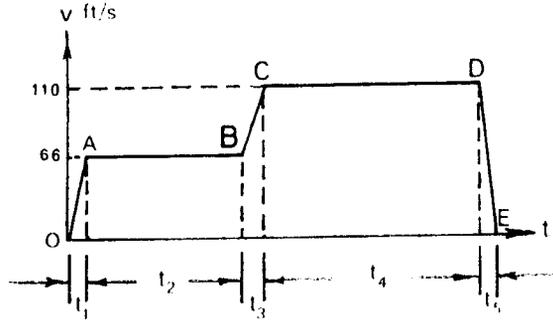
تتسارع سيارة بانتظام بادئة حركتها من السكون على طريق مستقيم فتصل

سرعتها إلى 45 ميلاً في الساعة في 11 ثانية . وتبقى على هذه السرعة مسافة ميل ونصف بسبب وجود جرار أمامها حيث يتاح لها بعد ذلك تجاوز الجرار فتتسارع السيارة بانتظام فتصل سرعتها إلى 75 ميلاً في الساعة وتحتاج لبلوغ هذه السرعة إلى 11 ثانية أيضاً . تسير السيارة بعد ذلك بهذه السرعة لمدة ثلاث دقائق ثم تتباطأ بانتظام بمعدل 11 ft/s^2 حتى تقف ، والمطلوب :

وضع الحركة برسم مناسب واحسب (أ) المسافة الكلية التي قطعتها السيارة (ب) الزمن الكلي للحركة (ج) السرعة الوسطى (د) التسارع الوسطى خلال الـ 142 ثانية الأولى من الحركة .

الحل :

لعل أفضل تمثيل للحركة هو المخطط الذي يبين تغير السرعة بدلالة الزمن



الشكل (٤ - ١)

وهو مبين في الشكل (٤ - ١) حيث استخدمنا عامل التحويل $88 \text{ ft/s} = 60 \text{ mi/hr}$ لتحويل السرعة إلى أقدام في الثانية . وحيث

: بحسب النص : $t_1 = 3 \text{ min}$ ، $t_2 = 11 \text{ s}$ ، $t_3 = 11 \text{ s}$

(أ) لنحسب المسافة الكلية التي قطعها السيارة :

إن المسافة s_1 التي قطعها السيارة في الفترة t_1 هي :

$$s_1 = v_0 t_1 + \frac{1}{2} a_1 t_1^2$$

وذلك بحسب قوانين الحركة المتسارعة بانتظام . إلا أن $v_0 = 0$ ليبدء
السيارة حركتها من السكون ثم إن :

$$a_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1} = \frac{66 - 0}{11} = 6 \text{ ft/s}^2$$

$$s_1 = \frac{1}{2} \times 6 \times (11)^2 = 3 \times 121 = 363 \text{ ft}$$

وبلاحظ أن هذا يساوي عددياً مساحة المثلث الواقع تحت الخط OA
وبالفعل فإن مساحة هذا المثلث في الاحداثيات v, t هي :

$$\frac{1}{2} \times 11 \text{ s} \times 66 \text{ ft/s} = 363 \text{ ft}$$

أما المسافة التي قطعها السيارة في المرحلة الثانية فهي تساوي بحسب النص
ميلاً ونصف ولما كان الميل يعادل 5280 قدماً فإن :

$$s_2 = 1.5 \times 5280 = 7920 \text{ ft}$$

وفي المرحلة الثالثة تتسارع السيارة من السرعة 66 ft/s إلى السرعة 110 ft/s خلال 11
ثانية وعليه فإن المسافة s_3 التي تقطعها في هذه المرحلة هي بحسب قوانين الحركة
المتسارعة بانتظام :

$$s_3 = v_0 t_3 + \frac{1}{2} a_3 t_3^2$$

ولدينا :

$$a_3 = \frac{110 - 66}{11} = \frac{44}{11} = 4 \text{ ft/s}^2 \quad \text{و } t_3 = 11 \text{ s} \quad \text{و } v_0 = 66 \text{ ft/s}$$

إذن يكون :

$$s_3 = 66 \times 11 + \frac{1}{2} \times 4 \times (11)^2$$

$$s_3 = 726 + 242 = 968 \text{ ft}$$

وهي تساوي عددياً المساحة الواقعة تحت الخط BC . وبالفعل فإن هذه المساحة تساوي مساحة مستطيل مضافاً إليها مساحة مثلث وهي تساوي :

$$66 \frac{\text{ft}}{\text{s}} \times 11 \text{ s} + \frac{1}{2} \times 11 \text{ s} \times (110 - 66)$$

$$66 \times 11 \text{ ft} + 22 \times 11 \text{ ft} = 88 \times 11 \text{ ft} = 968 \text{ ft}$$

وفي المرحلة الرابعة تسير السيارة بسرعة منتظمة مقدارها 110 ft/s لمدة ثلاث دقائق أي 180 s فهي تقطع خلال هذه الفترة مسافة s_4 تساوي :

$$s_4 = 110 \times 180 = 19800 \text{ ft}$$

وفي المرحلة الخامسة تسير السيارة بحركة متباطئة منتقلة من السرعة 110 ft/s إلى الصفر ، بمعدل 11 ft/s^2 ، ولايجاد المسافة التي تقطعها في هذه المرحلة نطبق القانون :

$$v^2 - v_0^2 = 2 a s$$

باعتبار $v = 0$ ، $v_0 = 110 \text{ ft/s}$ ، $a = -11 \text{ ft/s}^2$ ، $s = s_5$ فنجد :

$$s_5 = \frac{-(110)^2}{-11 \times 2} = 550 \text{ ft}$$

وتكون المسافة الكلية s التي قطعها السيارة مساوية إلى:

$$S = s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + s_5 = 363 + 7920 + 968 + 19800 + 550 \text{ ft}$$

$$S = 29601 \text{ ft}$$

(ب) إن الزمن الكلي للحركة وليكن T يساوي :

$$T = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 + t_5$$

ولدينا من النص $t_4 = 180 \text{ s}$ ، $t_3 = 11 \text{ s}$ ، $t_1 = 11 \text{ s}$ ونحسب t_2 و t_5 . لقد

سارت السيارة في المرحلة الثانية بسرعة منتظمة مسافة ميل ونصف أي

مايعادل 7920 ft وكانت السرعة في هذه المرحلة 66 ft/s إذن يكون :

$$t_2 = \frac{7920}{66} = 120 \text{ s}$$

وفي المرحلة الخامسة لدينا القانون : $v = v_0 + at$

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 110}{-11} = 10 \text{ s} \quad \text{ومنه :}$$

إذن : $t_5 = 10 \text{ s}$ ويكون :

$$T = 11 + 120 + 11 + 180 + 10 = 322 \text{ s}$$

(ج) إن السرعة الوسطى \bar{v} هي بالتعريف :

$$\bar{v} = \frac{S}{T}$$

$$v = \frac{29601}{322} = 89.16 \text{ ft/s} = 60.8 \text{ mi/hr} \quad \text{إذن يكون :}$$

(د) إن التسارع الوسطي في الفترة التي طولها 142 ثانية يساوي السرعة النهائية التي تسير بها السيارة في نهاية هذه الفترة على الزمن . وبما أن السيارة في نهاية هذه الفترة تكون قد اجتازت المرحلة الأولى والثانية والثالثة وبدأت بالمرحلة الرابعة فإن سرعتها في تلك اللحظة هي 110 ft/s وعليه فإن تسارع السيارة الوسطي في هذه الفترة هو :

$$a = \frac{110}{142} = 0.78 \text{ ft/s}^2$$

* * *

مسألة رقم (٤ - ٢) :

تقاس قيمة التسارع الأرضي g بدقة بالطريقة التالية : تطاق كرة بصورة شاقولية نحو الأعلى في أنبوب مفرغ من الهواء وتقاس لحظات مرور الكرة بطريقة الكترونية أثناء صعودها وكذلك أثناء هبوطها وذلك لدى قطعها لحزمتين ضوئيتين تبعدان مسافة معلومة h عن بعضها مقيسة بدقة . فإذا كانت لحظات مرور الكرة من الحزمتين الضوئيتين أثناء الصعود والهبوط هي t_0, t_1, t_2, t_3 فبرهن أن :

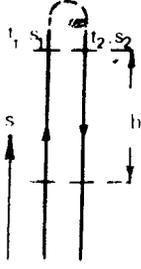
$$g = \frac{2h}{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)} = \frac{2h}{(t_3 - t_1)(t_1 - t_0)}$$

الحل :

يبين الشكل (٤ - ٢) مسار الكرة وقد فصلنا بين طريق الصعود وطريق الهبوط للتوضيح . نفرض v_0 السرعة البدائية التي انطلقت بها الكرة نحو

الأعلى في اللحظة صفر فيكون لدينا في الموضع الذي يبعد مسافة S_0 عن

نقطة الانطلاق :



الشكل (٤ - ٢)

$$S_0 = v_0 t_0 - \frac{1}{2} g t_0^2$$

$$S_1 = v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \quad \text{وفي الموضع } S_1 \text{ يكون :}$$

$$S_2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \quad \text{وفي الموضع } S_2 \text{ يكون :}$$

$$S_3 = v_0 t_3 - \frac{1}{2} g t_3^2 \quad \text{وفي الموضع } S_3 \text{ يكون :}$$

نحسب $S_1 - S_0 = h$ فنجد :

$$S_1 - S_0 = h = v_0 (t_1 - t_0) - \frac{1}{2} g (t_1^2 - t_0^2)$$

ومنه :

$$v_0 = \frac{h}{t_1 - t_0} + \frac{1}{2} g (t_1 + t_0) \quad (1)$$

نحسب الآن $S_2 - S_0 = h$ أيضاً فنجد :

$$S_2 - S_0 = h = v_0 (t_2 - t_0) - \frac{1}{2} g (t_2^2 - t_0^2)$$

ومنها نجد :

$$v_0 = \frac{h}{t_2 - t_0} + \frac{1}{2} g (t_2 + t_0) \quad (2)$$

نضع (1) = (2) فيكون :

$$\frac{h}{t_1 - t_0} + \frac{1}{2} g (t_1 + t_0) = \frac{h}{t_2 - t_0} + \frac{1}{2} g (t_2 + t_0)$$

$$h \left[\frac{1}{t_1 - t_0} - \frac{1}{t_2 - t_0} \right] = \frac{1}{2} g [t_2 + t_0 - t_1 - t_0]$$

$$\frac{2h}{t_2 - t_1} \left[\frac{t_2 - t_0 - t_1 + t_0}{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)} \right] = g \quad \text{أو :}$$

$$g = \frac{2h}{(t_1 - t_0)(t_2 - t_0)} \quad \text{إذن :}$$

وبطريقة مماثلة نجد :

$$g = \frac{2h}{(t_3 - t_1)(t_1 - t_0)}$$

وعليه فليس هناك ضرورة لمعرفة السرعة الابتدائية للذئبية .

* * *

مسألة رقم (٤ - ٣) :

يعاني قارب بعد إيقاف محركه تسارعاً معاكساً لاتجاه حركته و متناسباً مع مربع سرعته أي :

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2$$

حيث k ثابت . فاذا فرضنا أن إيقاف المحرك قد تم عندما كانت السرعة $v_0 = 20 \text{ ft/s}$ ، وأن السرعة تناقصت إلى 10 ft/s خلال 15 ثانية فالمطلوب :
(أ) برهن أن السرعة v في اللحظة t بعد توقف المحرك تعطى بالعلاقة :

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} + kt$$

(ب) أوجد قيمة k . (ج) أوجد قيمة التسارع لحظة إيقاف المحرك .

(د) برهن أن المسافة x المقطوعة في زمن t تساوي :

$$x = \frac{1}{k} \ln (v_0 kt + 1)$$

(هـ) برهن أن السرعة بعد قطع القارب مسافة x تعطى بالعلاقة :

$$v = v_0 e^{-kx}$$

الحل :

(أ) لدينا العلاقة :

$$\frac{dv}{dt} = -kv^2 \quad (1)$$

وهي علاقة نستطيع كتابتها بالشكل :

$$\frac{dv}{v^2} = -k dt$$

وباجراء عملية تكامل على الطرفين نجد :

$$-\frac{1}{v} = -kt + c_1 \quad (2)$$

حيث c_1 ثابت تكامل نحدده من شروط البدء . فلدينا $v = v_0$ في اللحظة

$t = 0$ إذن :

$$-\frac{1}{v_0} = 0 + c_1$$

نعوض في العلاقة (2) فنجد :

$$\frac{1}{v} = +kt + \frac{1}{v_0} \quad (3)$$

(ب) لايجاد قيمة k نضع المعطيات العددية للمسألة في المعادلة (3)

ف لدينا: $v_0 = 20 \text{ ft/s}$ ، $v = 10 \text{ ft/s}$ ، في اللحظة $t = 15$ ثانية إذن يكون :

$$\frac{1}{10} = 15k + \frac{1}{20}$$

$$k = \frac{1}{300} \quad \text{ومنه :}$$

(ج) ونجد قيمة التسارع لحظة ايقاف المحرك من العلاقة (1) فهي

تساوي $v_0^2 - k$ أي :

$$-\frac{1}{300} \times (20)^2 = -\frac{4}{3} \text{ ft/s}^2$$

(د) نريد الآن علاقة بين x و t ولدينا :

$$\frac{dx}{dt} = v$$

ومن العلاقة (3) نجد :

$$v = \frac{1}{kt + \frac{1}{v_0}}$$

إذن :

$$dx = \frac{dt}{kt + \frac{1}{v_0}}$$

تكامل الطرفين فنجد :

$$x = \frac{1}{k} \ln\left(kt + \frac{1}{v_0}\right) + c_2 \quad (4)$$

ونحسب ثابت التكامل c_2 من شروط البدء وهي تقضي أن يكون $x = 0$ في اللحظة $t = 0$ إذن :

$$0 = \frac{1}{k} \ln\left(\frac{1}{v_0}\right) + c_2$$

ومنه :

$$c_2 = -\frac{1}{k} \ln \frac{1}{v_0}$$

نعرض في العلاقة (4) فنجد :

$$x = \frac{1}{k} \left[\ln\left(kt + \frac{1}{v_0}\right) - \ln \frac{1}{v_0} \right]$$

$$x = \frac{1}{k} \ln \frac{kt + \frac{1}{v_0}}{\frac{1}{v_0}}$$

$$x = \frac{1}{k} \ln(v_0 kt + 1)$$

(*) نريد الآن علاقة بين x و v . من أجل ذلك نكتب استناداً إلى العلاقة (1) :

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = -kv^2$$

إلا أن $\frac{dx}{dt} = v$ إذن :

$$\frac{dv}{dx} = -k v$$

نعزل الآن المتحولات فنجد :

$$\frac{dv}{v} = -k dx$$

نكامل الطرفين فيكون :

$$\ln v = -kx + c_3 \quad (5)$$

حيث c_3 ثابت تكامل نحدده من شروط البدء . فلدينا $v=v_0$ من أجل $x=0$ ويعطي تعويض هذه القيم في المعادلة (5) ما يلي :

$$\ln v_0 = c_3$$

$$\ln v = -kx + \ln v_0 \quad \text{إذن :}$$

$$\ln \left(\frac{v}{v_0} \right) = -kx \quad \text{أو :}$$

$$\frac{v}{v_0} = e^{-kx} \quad \text{أو : ومنه :}$$

$$v = v_0 e^{-kx} \quad (6)$$

أي أن السرعة تتناقص بصورة أسية بازدياد المسافة .

* * *

مسألة رقم (٤ - ٤) :

تعطي المعادلة التالية حركة جسم يسقط سقوطاً حراً بدءاً من السكون في وسط مقاوم :

$$\frac{dv}{dt} = A - Bv$$

حيث A و B ثابتان . أوجد بدلالة A و B مايلي :

(أ) التسارع البدائي . (ب) السرعة التي تجعل التسارع معدوماً أي السرعة الحدية . (ج) برهن أن السرعة في أي زمن t تعطى بالعلاقة :

$$v = \frac{A}{B} (1 - e^{-Bt})$$

الحل :

(أ) لما كان التسارع معطى بالعلاقة $A - Bv$ فان التسارع البدائي هو $A - Bv_0$ بفرض v_0 هي قيمة السرعة البدائية . إلا أن $v_0 = 0$ بحسب النص حيث أن الجسم بدأ حركته من السكون وعليه فالتسارع البدائي هو A .

(ب) إن السرعة التي تجعل التسارع معدوماً هي السرعة التي تجعل المقدار $A - Bv$ معدوماً . فاذا كانت v_c هي هذه السرعة فان قيمتها هي :

$$v_c = \frac{A}{B}$$

(ج) لايجاد علاقة v ب t نكتب المعادلة التي تعطي التسارع بالشكل :

$$\frac{dv}{A - Bv} = dt$$

وبضرب الطرف الأيسر بـ B - والتقسيم على B - ثم بإدخال B - تحت رمز التفاضل نجد :

$$-\frac{1}{B} \frac{d(-Bv)}{A-Bv} = dt$$

ولما كان تفاضل مقدار لا يتغير بإضافة مقدار ثابت مثل A على المقدار الموجود وتحت رمز التفاضل فان باستطاعتنا أن نكتب العلاقة السابقة أيضاً بالشكل :

$$-\frac{1}{B} \cdot \frac{d(A-Bv)}{A-Bv} = dt$$

أو :

$$-\frac{1}{B} \ln(A-Bv) = t + c \quad (1)$$

حيث c ثابت تكامل نحدده من شروط البدء . وتقضي هذه الشروط أن يكون $v=0$ في اللحظة $t=0$ وذلك لأن الجسم يبدأ حركته من السكون اذن :

$$-\frac{1}{B} \ln(A) = 0 + c$$

نعوض c بقيمتها في العلاقة (1) فنجد :

$$-\frac{1}{B} \ln(A-Bv) = t - \frac{1}{B} \ln A$$

نضرب الطرفين بـ B - وننقل حدود اللوغرثم إلى نفس الطرف فيكون:

$$\ln(A-Bv) - \ln A = -Bt$$

$$\ln \frac{A-Bv}{A} = \ln \left(1 - \frac{B}{A} v \right) = -Bt$$

ومنه :

$$1 - \frac{B}{A} v = e^{-Bt}$$

وبالإصلاح نجد :

$$v = \frac{A}{B} (1 - e^{-Bt})$$

★ ★ ★

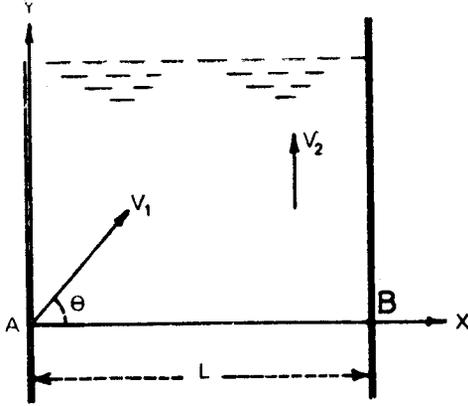
مسألة رقم (٤ - ٥) :

يريد رجل اجتياز نهر يجري ماؤه بسرعة 1200 m/hr وعرضه $L = 500$ m .
فاذا كانت سرعة تجذيف الرجل للقارب الذي يركب فيه هي 3000 m/hr
بالنسبة للماء ، وإذا كانت سرعته ماشياً هي $u = 5000$ m/hr فأوجد
(أ) الطريقة التي ينبغي أن يجزئها بها الرجل رحلته بين المشي والتجذيف
كي يصل إلى نقطة مقابلة لنقطة انطلاقه تماماً في أقصر زمن ممكن .
(ب) ما هو الزمن الذي يحتاجه لانجاز رحلته ؟ (ج) كيف يجب أن
يوجه الرجل قاربه إذا أراد بلوغ النقطة المقابلة لنقطة انطلاقه بطريقة
التجذيف فقط ؟

الحل :

نفرض \vec{v}_1 سرعة القارب بالنسبة للماء و \vec{v}_2 سرعة الماء بالنسبة للشاطئ وأن
 \vec{v} سرعة القارب بالنسبة للشاطئ فنكتب بحسب مبدأ تركيب السرعة :
سرعة الماء بالنسبة للشاطئ = سرعة القارب بالنسبة للماء + سرعة القارب بالنسبة للشاطئ
وباستخدام الرموز يكون :

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (1)$$



الشكل (٣ - ٤)

وإذا اتخذنا اعتباراً من نقطة الانطلاق A في الشكل (٣ - ٤) محورين متعامدين أحدهما باتجاه عرض النهر وهو المحور x والثاني عمودي عليه وهو المحور y ، وإذا فرضنا أن θ هي الزاوية التي اتجه بها الرجل بقاربه أمكننا أن نكتب العلاقة (1)

بعد إسقاطها على المحورين x و y بالشكل :

$$v_x = v_1 \cos \theta + 0 = v_1 \cos \theta \quad (2)$$

$$v_y = v_1 \sin \theta + v_2 \quad (3)$$

إن بإمكاننا أن نحسب الزمن الذي يحتاجه الرجل كي يقطع عرض النهر بالسرعة v_x ، فإذا فرضنا t_1 هذا الزمن فالتا نجد :

$$t_1 = L / v_x = \frac{L}{v_1 \cos \theta} \quad (4)$$

ويقطع الرجل خلال هذه الفترة مسافة y تساوي $v_y t_1$ بعيداً عن النقطة المقابلة لنقطة الانطلاق A أي أن :

$$y = v_y t_1 = \frac{L}{v_1 \cos \theta} [v_1 \sin \theta + v_2] \quad (5)$$

وحتى يصل إلى B عليه أن يمشي هذه المسافة وهو يحتاج لانجاز ذلك إلى زمن t_2 يساوي y/u إذن :

$$t_2 = \frac{L}{u v_1 \cos \theta} [v_1 \sin \theta + v_2] \quad (6)$$

ويكون الزمن الكلي t الذي يستغرقه الرجل في رحلته مساوياً $t_1 + t_2$ أي أن :

$$t = t_1 + t_2 = \frac{L}{v_1 \cos \theta} + \frac{L}{u v_1 \cos \theta} [v_1 \sin \theta + v_2]$$

$$t = \frac{L}{u v_1 \cos \theta} [u + v_1 \sin \theta + v_2] \quad (7)$$

نبحث الآن عن الزاوية θ التي تجعل t اصغرياً فنجد مشتق t بالنسبة لـ θ :

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{L v_1 \cos \theta (u v_1 \cos \theta) + u v_1 L \sin \theta (u + v_1 \sin \theta + v_2)}{u^2 v_1^2 \cos^2 \theta}$$

$$\frac{dt}{d\theta} = \frac{L u v_1^2 + (u + v_2) u v_1 L \sin \theta}{u^2 v_1^2 \cos^2 \theta}$$

وينعدم المشتق من أجل :

$$v_1 + (u + v_2) \sin \theta = 0$$

أي عندما :

$$\sin \theta = -\frac{v_1}{u + v_2} = -\frac{3000}{1200 + 5000} = -\frac{3}{6.2} = -0.484$$

$\theta = -29^\circ$ وهي تعطي :

وتشير الإشارة السالبة إلى أن على الرجل أن يجذف باتجاه معاكس لاتجاه جريان النهر . والنتيجة هي أن على الرجل أن يوجه قاربه باتجاه معاكس

لاتجاه جريان الماء وبزاوية قدرها 29° حتى يبلغ الضفة المقابلة ثم يمشي حتى يبلغ B . (ب) أما الوقت الذي يستغرقه الرجل في رحلته فنحسبه من العلاقة (7) بعد التعويض بالقيم العددية التالية :

$$L = 500 \text{ m} , v_1 = 3000 \text{ m/hr} = 50 \text{ m/min}$$

$$v_2 = 1200 \text{ m/hr} = 20 \text{ m/min}$$

$$u = 5000 \text{ m/hr} = 83.3 \text{ m/min}$$

$$\sin \theta = - 0.484 \quad , \quad \cos \theta = 0.874$$

وإذا ما استخدمنا السرعة المقدرة بالامتر في الدقيقة فإتينا نجد هذا الزمن مقدراً بالدقائق ويكون :

$$t = \frac{500}{83.3 \times 50 \times 0.874} [83.3 - 50 \times 0.484 + 20]$$

$$t = 0.137 \times 79.1 = 10.9 \text{ min} \simeq 11 \text{ min}$$

(ح) اما إذا أردنا أن يصل الرجل الى B مباشرة دون أن يمشي فيكفي ان نختار θ بحيث تنعدم y . ونجد من العلاقة (5) أن y تنعدم لما يكون :

$$\sin \theta = - \frac{v_2}{v_1} = - \frac{20}{50} = - 0.4$$

ومنه :

$$\theta = - 23.6^\circ$$

* * *