

الفصل الخامس

قانون نيوتن الثاني . الثقالة

علم التحريك :

إن علم التحريك هو العلم الذي يربط ما بين الحركة ومسبباتها . فنستطيع بدءاً من معرفة القوى المؤثرة في جسم ومعرفة خاصة من خواصه ، وهي ما نسميها بالكتلة ، أن نحدد موضع الجسم وسرعته في أية لحظة أخرى تلي لحظة معينة نعرف عندها سرعة الجسم وموضعه . نسمي القيم التي نعرفها في اللحظة المعنية الشروط الابتدائية . فالتحريك إذن يربط ما بين مفهومين الأول مفهوم القوة (المسبب) والثاني هو مفهوم التسارع .

قانون نيوتن الثاني :

لا تبدأ الاجسام بالحركة (أي بالتسارع) من تلقاء نفسها ولا بد من وجود قوة لتسريع جسم أو إبطائه . كذلك نلاحظ أننا نحتاج إلى قوة حتى نحرف جسمًا عن مساره المستقيم . وهكذا نجد أننا في الحالات الثلاث (تسريع أو إبطاء أو تغيير منحى) نحتاج إلى قوة وأننا نستطيع أن نمثل جميع هذه التغيرات بتحديد التسارع . فالتسارع هو نتيجة تطبيق قوة معينة . تدل التجربة على أن اتجاه التسارع هذا هو اتجاه القوة ، وأن نسبة

مقدار القوة إلى مقدار التسارع يساوي إلى مقدار ثابت من أجل الجسم نفسه . فيمكن أن نعتبر أن هذه النسبة الثابتة خاصة من خواص الجسم نسميها الكتلة وهي مقدار سلبي فيكون لدينا :

$$\vec{F} = m \vec{a} \quad (5-1)$$

يدعى هذا القانون أحياناً قانون التحريك الأساسي ، ويدعى تعريف الكتلة بهذا الشكل التعريف التحريكي . إن المعادلة (5-1) معادلة شعاعية يمكن أن نطبق على كل طرف من طرفيها قواعد تركيب الاشعة وتحليلها . فإذا أثرت في جسم ما على سبيل المثال عدة قوى وكانت حركة الجسم في مستوى ، نستطيع أن نكتب :

$$\vec{\Sigma F} = m \vec{a} \quad \text{أو} \quad \Sigma F_x = m a_x , \quad \Sigma F_y = m a_y \quad (5-2)$$

قانون نيوتن الأول :

نلاحظ من العلاقة (5-2) أنه إذا كانت القوة الحاصلة الفاعلة في جسم ($\vec{\Sigma F}$) مساوية للصفر كان تسارع الجسم صفراً ، أي أن سرعته تبقى ثابتة (في المنحنى والمقدار) . فإذا كان الجسم ساكناً فإن الثابت يساوي الصفر ويبقى مساوياً للصفر . أما إذا كان متحركاً بسرعة ثابتة ، فيبقى متحركاً على خط مستقيم وبسرعة عددية ثابتة إلى ما لا نهاية .

الكتلة والوزن :

إن وزن جسم ما هو القوة التي تجذب الأرض بها هذا الجسم نحوها

ونسُميها قوة الثقالة . في حالة السقوط وعند إهمال مقاومة الهواء تكون
محصلة القوى الفاعلة بالجسم هي وزنه $\vec{w}$ فقط ، ويكون تسارع الجسم هو
تسارع الثقالة $\vec{g}$. أما كتلته فتساوي إلى :

$$m = \frac{\vec{\Sigma F}}{\vec{a}} = \frac{w}{g} \quad (5-3)$$

نلاحظ أن كتلة الجسم مقدار ثابت لا يتغير بتغير موضعه أما وزنه
فيتغير بسبب تغير g من مكان لآخر على سطح الأرض .

قانون نيوتن في الثقالة العالمية :

إن خاصة جذب الأرض للأجسام القريبة منها لا تقتصر على الأرض وحدها
وإنما هي خاصة تتمتع بها الأجسام كلها لأن لكل منها كتلة . وهذا
ما اكتشفه السير اسحق نيوتن حين قال : إن كل جزيئة من المادة في
الكون تجذب كل جزيئة أخرى بقوة متناسبة مع جداء كتلي الجزيئتين
ومتناسبة عكساً مع مربع المسافة بينهما أي أن :

$$F = G \frac{mm'}{r^2} \quad (5-4)$$

حيث G ثابتة تسمى ثابتة الثقالة وهي تساوي الى :

$$G = 6.670 \times 10^{-8} \text{ dyne cm}^2/\text{g}^2$$

$$G = 6.670 \times 10^{-11} \text{ newton} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2 \quad \text{أو :}$$

الجملة الإحداثية وجملة المقارنة والجمال المطالية :

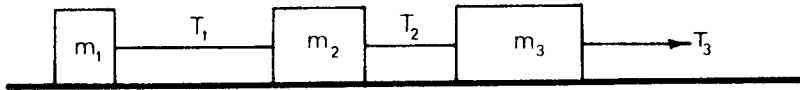
إن المعادلة (5-1) معادلة شعاعية تحتاج إلى جملة احداثية حتى نعين كلاً

من شعاعي التسارع والقوة . وبما أن الحركة نسبية فيمكن لمراقبين متحركين بالنسبة لبعضهما أن يقيسا مرعاً وتسارعات مختلفة . علينا إذن تحديد الجملة الاحداثية منذ البداية ووصف كل الحوادث بالنسبة لها . ندعو الجملة الاحداثية المتأسكة مع المراقب ، الذي يقيس المقادير كلها ، جملة مقارنة المراقب . في الواقع إن قوانين نيوتن المذكورة لاتصح إلا إذا كان المراقب ساكناً أو متحركاً بسرعة منتظمة (ثابتة في المقدار والاتجاه). نسمي الجمل المتحركة بالنسبة لبعضها بعضاً بسرعة ثابتة الجمل العطالية .

* * *

مسألة رقم (٥ - ١) :

توصل ثلاثة قوالب على النحو المبين في الشكل (٥ - ١) ، والقوالب موجودة على طاولة أفقية عديمة الاحتكاك . وتجر هذه القوالب نحو اليمين



الشكل (٥ - ١)

بقوة $T_3 = 60 \text{ newton}$. أوجد التوترين T_1 و T_2 إذا كانت $m_1 = 10 \text{ kg}$ و $m_2 = 20 \text{ kg}$ و $m_3 = 30 \text{ kg}$.

الحل :

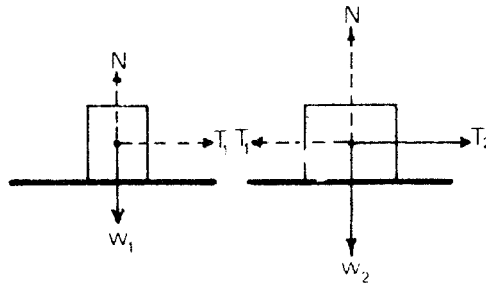
إذا اعتبرنا الجسم أو الجملة مكونة من القوالب الثلاثة ، تكون القوى

الخارجية المؤثرة على هذه الجملة هي : قوة الشد $\vec{T}_3$ ، واثقال القوالب الثلاثة المتجهة نحو الأسفل والعمودية على الطاولة ، ورد فعل الطاولة الشاقولي والمتجه نحو الأعلى (لأن الطاولة عديمة الاحتكاك) . ويكون لقوة الشد T_3 فقط مركبة باتجاه الحركة الأفقي ، لذلك فإن تسارع الجسم في الاتجاه الأفقي يعطى من العلاقة :

$$M a = T_3 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (1)$$

حيث ترمز M إلى الكتلة الكلية ، وهي تساوي مجموع كتل القوالب الثلاثة إذا أهملنا كتلة الحبال . إن التسارع a المستنتج هو تسارع القوالب الثلاثة (لأننا افترضنا ضمناً أن الحبال ثابتة الطول فيكون عملها بالتالي نقل نقطة تطبيق القوة فقط) .

لنرسم بعدئذ مخطط الجسم الحر لكل من m_1 و m_2 كما في الشكل (٥ - ٢) ، ثم نكتب معادلة الحركة في الاتجاه الأفقي لكل من القالبين



الشكل (٥ - ٢)

فنحصل على : $m_1 a = T_1$. وبتعويض قيمة a من العلاقة (1) نجد :

$$T_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3} T_3 = \frac{10}{60} 60 = 10 \text{ newton}$$

ويكون : $m_2 a = T_2 - T_1$ أو :

$$T_2 = m_2 a + T_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1 + m_2 + m_3} T_3 = \frac{10 + 20}{60} \times 60 = 30 \text{ newton}$$

★ ★ ★

مسألة رقم (٥ - ٢) .

لدينا قالبان متساويان مستقران على طاولة أفقية عديمة الاحتكاك . تطبق قوة أفقية على أحد القالبين ، كما هو مبين في الشكل (٥ - ٣) والمطلوب : (أ) أوجد قوة التماس ما بين القالبين إذا كان : $m_1 = 2.0 \text{ kg}$ و $m_2 = 1.0 \text{ kg}$ و $F = 3.0 \text{ nt}$. (ب) بيّن أنه إذا طبقت القوة نفسها على m_2 بدل m_1 فإن قوة التماس ما بين القالبين ستكون 2.0 nt . (ج) كم تكون قوة التماس إذا لم تكن الطاولة عديمة الاحتكاك ، وكان عامل الاحتكاك بين القطعتين والطاولة 0.052 في الحالة الأولى ، أي حالة الشكل (٥ - ٣) ؟

الحل :

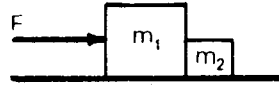
(أ) نبدا كما في المسألة السابقة بحساب التسارع المشترك للقالبين في الاتجاه الأفقي فتجد :

$$F = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{3.0}{2.0 + 1.0} = 1.0 \text{ m/s}^2$$



الشكل (٤ - ٥)



الشكل (٣ - ٥)

ثم نعتبر أن الجسم المدروس هو القالب m_2 فقط ، فتكون القوى المؤثرة فيه ثقله ورد فعل الطاولة وفعل القالب m_1 عليه . وهذه القوة الأخيرة في الاتجاه الأفقي (عمودية على سطح التماس) وهي التي تعطي القالب ذا الكتلة m_2 التسارع السابق . لذلك فإن :

$$F_t = m_2 a = (1.0 \text{ kg}) (1.0 \text{ m/s}^2) = 1.0 \text{ newton}$$

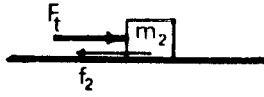
(ب) عندما نطبق F على m_2 كما في الشكل (٤ - ٥) يبقى التسارع الأفقي المشترك نفسه ، إلا أن قوة التماس في هذه الحالة هي التي تسبب التسارع الأفقي للقالب m_1 فهي تساوي إلى :

$$F'_t = m_1 a = (2.0 \text{ kg}) (1.0 \text{ m/s}^2) = 2.0 \text{ newton}$$

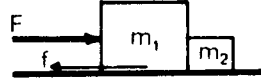
(ج) تكون مركبة القوى الخارجية في الاتجاه الأفقي في هذه الحالة القوة المطبقة F وقوة الاحتكاك f التي تساوي إلى $f = \mu N$ ، حيث N القوة الضاغطة ، وتساوي في هذه الحالة إلى وزن القالبين ، انظر الشكل (٥ - ٥) وهذه القوة تعاكس الحركة لذلك يكون

$$F - f = (m_1 + m_2) a$$

$$a = \frac{3.0 - 0.052 \times 3.0 \times 9.8}{3.0} = 0.5 \text{ m/s}^2 \quad \text{أو :}$$



الشكل (٦-٥)



الشكل (٥ - ٥)

وتكون قوة التماس F_t التي تدفع الكتلة m_2 ، انظر الشكل (٦-٥) :

$$F_t = m_2 a + f_2 = (1.0) (0.5) + 0.052 \times 1.0 \times 9.8$$

$$F_t = 2.0 \text{ newton}$$

فهي قوة التماس نفسها كما كانت في حالة عدم وجود احتكاك .

* * *

مسألة رقم (٥ - ٣) :

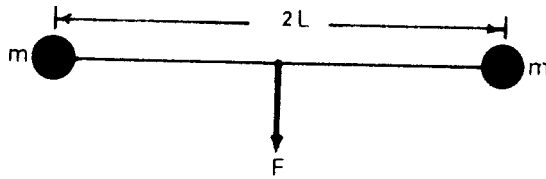
يربط جسيان ، كتلة كل منها m ، بسلك خفيف طوله $2L$ على النحو المبين في الشكل (٧-٥) . تطبق بصورة مستمرة قوة $\vec{F}$ عند منتصف السلك ($x = 0$) بحيث تبقى عمودية على وضع السلك الابتدائي . بين أن تسارع m في الاتجاه الذي يصنع زاوية قائمة مع $\vec{F}$ ، أي الاتجاه ox ، يعطى بالعلاقة :

$$a_x = \frac{F}{2m} \cdot \frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}}$$

حيث ترمز x الى البعد العمودي لأحد الجسيمين عن خط فعل القوة F

الحل :

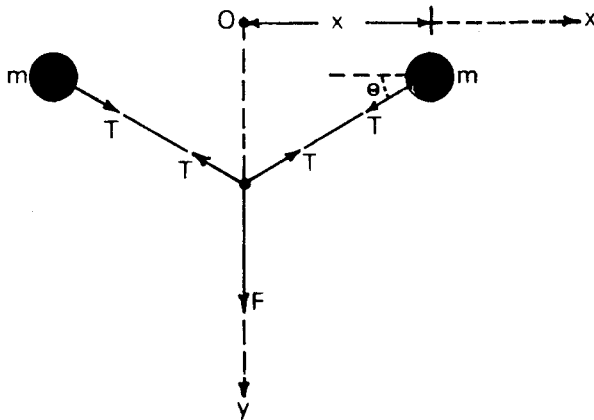
لنأخذ منتصف السلك في الوضع الابتدائي مبدأ للجزمة التي نقيس التسارعات بالنسبة لها . واتجاه ox هو اتجاه السلك الابتدائي والاتجاه oy منطبق على خط عمل



الشكل (٧ - ٥)

القوة F . بعد لحظة من تطبيق القوة يأخذ السلك الوضع المبين في الشكل (٨ - ٥) وتكون القوة المطبقة على كل من الجسمين هي قوة شد السلك T بسبب تناظر المسألة . فلو اسقطنا قانون التحريك الاسامي أي المعادلة (٥ - ١) على ox حصلنا على :

$$m a_x = T \cos \theta = T \frac{x}{L}$$



الشكل (٨ - ٥)

كما أنه لدينا دوماً بسبب التناظر :

$$F = 2 T \sin \Theta = 2 T \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{L}$$

أو : $T = \frac{F}{2} \frac{L}{\sqrt{L^2 - x^2}}$ وذلك بفرض

أن السلك لا يقبل الاستطالة .

وبالتعويض في المعادلة الاولى نحصل على :

$$m a_x = \frac{F}{2} \frac{L}{\sqrt{L^2 - x^2}} \frac{x}{L}$$

أو : $a_x = \frac{F}{2 m} \frac{x}{\sqrt{L^2 - x^2}}$

* * *

مسألة رقم (٥ - ٤) :

تتعلق مقاومة الهواء لحركة الأجسام عندما تسقط سقوطاً حراً بعدة عوامل مثل :

حجم الجسم وشكله ، وكثافة الهواء ودرجة حرارته ، وكذلك سرعة الجسم

في الهواء . ومن الافتراضات التقريبية المفيدة هي أن قوة المقاومة $\vec{f}_R$

تناسب مع السرعة وتتجه بصورة معاكسة لها ، أي أن : $\vec{f}_R = -k \vec{v}$ حيث

R ثابت تتحدد قيمته بعوامل أخرى غير السرعة وفق الحالة المدروسة .

نفترض جسماً يسقط سقوطاً حراً بدءاً من السكون ، والمطلوب : (أ) يبين أن

قانون نيوتن الثاني يعطي :

$$mg - k \frac{dy}{dt} = m \frac{d^2y}{dt^2} \quad (1)$$

$$mg - kv = ma \quad \text{أو :}$$

(ب) يبين أن تسارع الجسم ينعدم عندما يصل إلى السرعة $v_T = mg/k$ والتي تدعى بالسرعة الحدية .

(ج) برهن أن السرعة تتغير مع الزمن بحسب العلاقة :

$$v = v_T (1 - e^{-kt/m})$$

الحل :

(أ) نختار أولاً جملة إحداثية وليكن مبدأ الجملة نقطة ترك الجسم ، والمحور ox أفقي والمحور oy شاقولي متجه نحو الأسفل . ثم نطبق قانون نيوتن الثاني .
إن القوى المؤثرة على الجسم هي وزنه وقوة مقاومة الهواء فنكتب :

$$m \vec{g} + \vec{f}_R = m \vec{a}$$

$$m \vec{g} - k \vec{v} = m \vec{a} \quad \text{أو :}$$

وبالاسقاط على المحور oy نجد :

$$mg - k v_y = m a_y \quad (2)$$

ولما كان الجسم يسقط سقوطاً حراً بدون سرعة ابتدائية بالاتجاه y فإن $v_{ox} = 0$. ويقضي قانون نيوتن الأول بأن تبقى v_x معدومة وذلك لانعدام القوى المؤثرة في الجسم بالاتجاه x ، وعليه فإن $v = v_y$ ، وباستطاعتنا اذن كتابة المعادلة (2) بالشكل :

$$m g - k v = m a_y \quad (3)$$

(ب) نجد من المعادلة (3) أن $a_y = 0$ عندما : $v = \frac{m g}{k}$. ولا يمكن أن تزداد السرعة بعد هذا لان التسارع كما نرى هو المجموع الجبري لحدين الاول ثابت ، والثاني يزداد بازدياد السرعة ، أي كلما ازداد التسارع ، وإشارته سالبة لذلك لا بد وأن تصل السرعة الى قيمة ينعدم من أجلها التسارع ويبقى بعدها معدوماً فيتابع الجسم سقوطه بسرعة منتظمة .

(ح) يمكن أن نكتب المعادلة (3) على الشكل :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g \quad (4)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى بالنسبة لـ v ذات طرف ثان . نحلها أولاً بدون طرف ثان أي نحل المعادلة :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = 0$$

التي نكتبها بالشكل :

$$\frac{dv}{v} = - \frac{k}{m} dt$$

وبكاملة الطرفين نجد :

$$\ln \frac{v}{\mu} = - \frac{k}{m} t$$

وذلك بفرض μ ثابت التكامل . وباستطاعتنا أيضاً كتابة العلاقة السابقة بالشكل :

أو :

$$\frac{v}{\mu} = e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$v = \mu e^{-\frac{k}{m}t} \quad (5)$$

نحدد الآن قيمة μ بحيث تحقق العلاقة (4) . فنشتق العلاقة (5) باعتبار أن μ قد يكون تابعاً لـ t ونعوض في العلاقة (4) فنجد :

$$\frac{dv}{dt} = \mu' e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m} \mu e^{-\frac{k}{m}t}$$

اذن :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = \mu' e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{k}{m} \mu e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{k}{m} \mu e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = \mu' e^{-\frac{k}{m}t}$$

واخيراً نجد بالتعويض في العلاقة (4) أن :

$$\mu' e^{-\frac{k}{m}t} = g$$

$$\mu' = g e^{\frac{k}{m}t}$$

$$\therefore \mu = g \int e^{\frac{k}{m}t} dt = g \frac{m}{k} \int e^{\frac{k}{m}t} d\left(\frac{k}{m}t\right)$$

$$\mu = \frac{gm}{k} e^{\frac{k}{m}t} + c$$

حيث c ثابت تكامل محدد من شروط البدء . نعوض في العلاقة (5) فنجد :

$$v = \frac{gm}{k} + c e^{-\frac{k}{m}t}$$

وتقضي شروط البدء أن تكون $v=0$ عندما $t=0$ إذن :

$$0 = \frac{gm}{k} + c$$

ومنه : $c = -\frac{gm}{k}$ وأخيراً يكون :

$$v = \frac{gm}{k} [1 - e^{-\frac{k}{m}t}] = v_T [1 - e^{-\frac{k}{m}t}]$$

* * *

مسألة رقم (٥ - ٥) :

(أ) أوجد السرعة التي يجب أن يطلق بها جسم شاقولياً نحو الأعلى كي يصعد الى اللانهاية فوق سطح الارض وذلك باهمال الاحتكاك . أوجد هذه السرعة بدلالة تسارع الثقالة عند سطح الارض g_0 ونصف قطر الارض R ، تسمى هذه السرعة بسرعة الفرار . (ب) أوجد بدلالة نفس المقادير السرعة التي يصدم بها جسم الارض إذا هوى من نقطة تبعد بعداً لانهاياً . (ح) أحسب كلتي سرعتين بالاميال في الساعة . (د) فسر عدم كون سرعتين لانهايتين .

الحل :

(أ) ينحضع الجسم في هذه الحالة الى قوة الثقالة التي تتغير مع تغير البعد بين الجسم ومركز الارض ، وتعطى هذه القوة بقانون نيوتن في التجاذب. إن القوة والتسارع شافوليان في هذه الحالة ، أو بالاحرى قطريان ، لذلك يكون :

$$m a = - G \frac{m m_E}{r^2}$$

$$a = - G \frac{m_E}{r^2} \quad \text{أو :}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \frac{dr}{dt} = v \frac{dv}{dr} \quad \text{وبما أن .}$$

$$v \frac{dv}{dr} = - \frac{Gm_E}{r^2} \quad \text{فان :} \quad \text{أو :}$$

$$v dv = - \frac{Gm_E}{r^2} dr \quad (1)$$

$$\left[\frac{v^2}{2} \right]_{v_1}^{v_2} = G m_E \left[\frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} \quad \text{وبالمكاملة نجد :}$$

$$v_2^2 - v_1^2 = 2 G m_E \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) \quad \text{أو :}$$

وتكون سرعة الفرار هي السرعة الابتدائية اللازمة حتى يصل الجسم الى اللانهاية أي ($r_2 = \infty$) وبدون سرعة ، أي ($v_2 = 0$) ، وهي أصغر سرعة

يجب أن يطلق بها الجسم من سطح الارض حيث $r_1 = R$. اذن :

$$v_1^2 = 2 G m_E / R$$

وبما أن التسارع عند سطح الارض يساوي الى : $g_o = G m_E / R^2$

فان : $v_1^2 = 2 g_o R$. وتكون أخيراً سرعة الفرار معطاة بالعلاقة :

$$v_1 = \sqrt{2 g_o R}$$

(ب) يتسارع الجسم في حالة السقوط ، ويعطي قانون نيوتن الثاني في هذه الحالة علاقة بمائلة للعلاقة (1) ، إلا أن الاختلاف يكمن في حدود التكامل الذي نجريه . ونصبح هذه الحدود في حالة سقوط جسم من اللانهاية بسرعة معدومة كالآتي :

عندما $r = \infty$ تكون v مساوية للصفر ، ونفرض v هي سرعة الجسم
 لما $r = R$ فيكون :

$$\int_0^v v dv = \int_{\infty}^R - G \frac{m_E}{r^2} dr$$

$$\left[\frac{v^2}{2} \right]_0^v = - G m_E \left[- \frac{1}{r} \right]_{\infty}^R$$

$$\frac{v^2}{2} = + \frac{G m_E}{R}$$

$$v^2 = 2 \frac{G m_E}{R} = 2 g_o R \quad \text{ومنه :}$$

وهي نفس السرعة السابقة .

(ج) نحسب v بالتعويض بالقيم العددية . لدينا :

$$R = 6.38 \times 10^6 \text{ m} \quad \text{و} \quad g_0 = 9.8 \text{ m/s}^2 \quad \text{اذن :}$$

$$v = \sqrt{2 \times 9.8 \times 6.38 \times 10^6} = \sqrt{1.25 \times 10^8} = 1.12 \times 10^4 \text{ m/s}$$

وتعطي جداول التحويل أن في كل ميل في الساعة يوجد 0.44704 متراً في الثانية اذن :

$$v = \frac{1.12 \times 10^4}{0.44704} = 2.5 \times 10^4 \text{ mi/hr}$$

(د) إن التناسب العكسي بين قوة التجاذب و r^2 يجعل قوة التجاذب تضمحل مع ازدياد البعد بين الجسمين المتجاذبين ، أضف إلى ذلك صغر قيمة ثابت التجاذب العالمي G . وبقي قانون نيوتن الأول أنه اذا انعدمت القوة الفاعلة في جسم فان تسارعه ينعدم أي أن سرعته تثبت فاذا تمكن الجسم المقذوف ، بفضل سرعة قذفه البدائية ، من الابتعاد لمسافة تجعل تأثير الجاذبية مهملاً فان هذا الجسم يسير بسرعه التي بلغها حتى اللانهاية . هذا في حالة القذف للأعلى أما في حالة السقوط فنقول بأن بعد الجسم ، وهو كبير في البدء ، يجعل تأثير قوة الجذب صغيراً ولا تزداد سرعة الجسم الا قليلاً لان التسارع يكون قليلاً ، ثم تعمل قوة الثقالة على زيادة سرعة الجسم لدى اقترابه من سطح الارض ، والمسافة التي يكون تأثير قوة الثقالة فيها ملموساً هي مسافة محدودة ، ولذا فان سرعة وصول الجسم الى سطح الارض محدودة ، أضف الى ذلك أن أصغر قيمة لـ r ليست صفراً بل هي نصف قطر الارض R .

* * *