

# الفصل السادس

## الحركة المستوية

تعريف :

نقول بأن جسماً يقوم بحركة مستوية اذا تحرك في مستوى ، ويكفي لتعيين وضع الجسم معرفة المركبتين القائمتين له مثلاً . يتحدد المستوي الذي يتحرك فيه الجسم بالقوى الفاعلة فيه وبالشروط الابتدائية التي تصف الحالة الحركية للجسم لحظة البدء . وان حركة القذيفة والحركة الدائرية مثالان على الحركة المستوية .

حركة القذيفة :

القذيفة هي أي جسم يخضع لقوة وزنه فقط ، أي أننا نهمل قوة مقاومة الهواء لحركة الجسم . نستنتج من قانون نيوتن الثاني ، إذا أخذنا المحور y ساقولياً متجهاً نحو الاعلى والمحوران x و z في المستوي الافقي ، أن :

$$\sum F_x = 0 = ma_x ، \sum E_y = - mg = m a_y ، \sum F_z = 0 = ma_z$$

أو أن :

$$a_x = 0 ، a_y = - g ، a_z = 0$$

لنفرض بعدئذ أن مبدأ الجملة الاحداثية هو نقطة الاطلاق ( أو النقطة

التي تبدأ القذيفة بالحركة عندها) وأتينا اخترنا المستوي oxy المستوي الشاقولي الذي يحتوي السرعة الابتدائية  $\vec{v}_0$ ، فتكون مركبات السرعة الابتدائية هي  $\vec{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, 0)$ . وتعني مركبة التسارع المساوية للصفر في اتجاه ما ثبات مركبة السرعة في ذلك الاتجاه، وتكون قيمة المركبة الثابتة للسرعة هي قيمة المركبة الابتدائية، لذلك يكون:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{0x} \\ v_y &= v_{0y} - gt \\ v_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6-1)$$

أما احداثيات القذيفة فهي:

$$x = v_{0x} t \quad , \quad y = v_{0y} t - \frac{1}{2} gt^2 \quad , \quad z = 0$$

لأننا اخترنا نقطة الاطلاق مبدأ للجملة الاحداثية. ونستنتج أن الحركة مستوية، حيث ان هناك احداثيان متغيران فقط. ويكون المحرك عبارة عن قطع مكافئ يتعين مستويه بشعاع السرعة الابتدائية والشاقول. وقد تعطى السرعة الابتدائية بدلالة قيمة السرعة  $v_0$  وزاوية الاطلاق  $\theta_0$ ، فتكون العلاقات ما بين هذين المقدارين والمركبتين المذكورتين هي:

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta_0 \quad , \quad v_{0y} = v_0 \sin \theta_0 \quad (6-2)$$

تسمى المسافة الافقية، أي المسافة من نقطة البدء الى النقطة التي تعود عندها القذيفة الى نفس الارتفاع، المدى الافقي R. وبما أن المبدأ هو نقطة الاطلاق، أي  $y_0 = 0$ ، فاننا نحصل على الفترة التي تستغرقها القذيفة حتى تعود

الى الارتفاع الأول بتعويض  $y = 0$  في معادلات القذيفة . ونستنتج من ذلك ان :

$$R = v_0 \cos \theta_0 \frac{2 v_0 \sin \theta_0}{g}$$

أو :

$$R = v_0^2 \sin 2 \theta_0 / g \quad (6-3)$$

أما أعلى نقطة تصل إليها القذيفة فنحصل عليها بجعل مركبة السرعة الشاقولية  $v_y$  مساوية للصفر ثم تعويض قيمة  $t$  المقابلة في معادلة  $y$  فنجد :

$$y = v_{0y} (v_{0y}/g) - \frac{1}{2} g (v_{0y}/g)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g} \quad (6-4)$$

### الحركة الدائرية :

في هذه الحركة نفترض أن الجسم يقوم بحركة دائرية فمحسب السرعة والتسارع المقابلين للحركة المفروضة ثم نستنتج القوى اللازمة حتى يقوم الجسم بهذا النوع من الحركة . وأول ما نستنتجه هو أن منحى شعاع السرعة الآتية مماس للدائرة . وعندما نفترض أن الحركة الدائرية منتظمة ، ونرمز للزمن اللازم للجسم حتى يقوم بدورة كاملة بـ  $T$  ، وهو ما نسميه بالدور، يكون :

$$v T = 2 \pi R$$

أو :

$$v = \frac{2\pi R}{T} = 2 \pi R f = R \omega \quad (6-5)$$

حيث  $f = \frac{1}{T}$  وهو التواتر، أي عدد الدورات في وحدة الزمن . و  $\omega$

السرعة الزاوية أي الزاوية التي يقطعها الجسم في وحدة الزمن . وعلى الرغم من ثبات قيمة السرعة الآنية فإن الحركة متسارعة بسبب تغير منحنى السرعة . ويعطى التسارع في هذه الحالة بالعلاقة :

$$a_R = \frac{v^2}{R} = R \omega^2 \quad (6-6)$$

ويتجه شعاع التسارع نحو مركز الدائرة ولذا ندعوه تسارعاً مركزياً أو جانبياً . بعد ذلك نستنتج أن القوة اللازمة حتى يقوم الجسم بحركة دائرية هي قوة مركزية مقدارها  $m v^2/R$  وتسمى القوة الجابذة ، فهي قوة حقيقية يجب تطبيقها حتى نغير منحنى السرعة . وما نشعر به عندما نربط حجراً بحيط وندورّه هي قوة رد الفعل أو القوة النابذة .

#### دوران الأرض وتسارع الثقالة :

يسبب دوران الأرض والأجسام المتأسكة معها نقصاناً في الوزن الحقيقي للأجسام، أي في قوة الجذب الثقالي، وذلك باستثناء منطقتي القطبين. فعند خط الاستواء مثلاً يختلف الوزن الذي نقيسه بواسطة نابض عن قوة جذب الأرض له بالمقدار :

$$F - w = m a_R$$

ذلك لأن الجسم يقوم بحركة دائرية تقريباً، فله تسارع، وعلمنا أن نطبق عليه قوة . والقوة هنا هي قوة الجذب العالمي ويكون :

$$G \frac{m m_E}{R^2} - m g = m a_R \quad \text{أو :}$$

$$g = \frac{G m_E}{R^2} - a_R \quad (6-7) \quad \text{( عند خط الاستواء ) .}$$

أما عند القطبين فان  $v$  و  $a_R$  يساويان الصفر لذلك فان :

$$g_0 = \frac{Gm_E}{R^2} \quad (6-8) \quad (\text{عند القطبين})$$

أما الاختلاف ما بين تسارعي النقالة في القطب وفي خط الاستواء، فيساوي  $a_R$  ونحسبه من العلاقة :

$$a_R = \frac{4\pi^2 R}{T^2}$$

ولدينا  $R = 6.4 \times 10^8 \text{ cm}$  وهو نصف قطر الارض و  $T = 8.64 \times 10^4 \text{ s}$  وهي مدة يوم كامل ، وعليه فان :

$$a_R = 3.37 \text{ cm/s}^2$$

حركة تابع :

إذا افترضنا أن تابعاً ما كتلته  $m$  يدور حول الارض في مدار دائري نصف قطره  $r$  ، فاننا نجد العلاقة ما بين سرعة التابع على مداره وبين نصف قطر هذا المدار اذا وضعنا قوة الجذب الثقالي مساوية القوة الجاذبة أي :

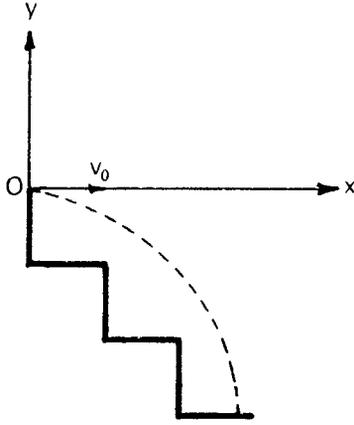
$$G \frac{mm_E}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v^2 = \frac{Gm_E}{r}$$

$$v^2 = \frac{g_0 R^2}{r} \quad (6-9)$$

★ ★ ★

مسألة رقم ( ٦ - ١ ) :

- تسحب كرة فتسقط من أعلى درج بسرعة أفقية قدرها  $5.0 \text{ ft/s}$  .  
ويبلغ ارتفاع الدرجة  $8.0 \text{ in}$   
وعرضها  $8.0 \text{ in}$  . والمطلوب بأي من  
الدرجات تصطدم الكرة أولاً ؟



الشكل ( ٦ - ١ )

**الحل :**

يبين الشكل ( ٦ - ١ ) الموضع  
الابتدائي للكرة ( عند الحرف )  
والجملّة الاحداثيّة التي اخترناها والتي  
تبسط حل المسألة ، فقد اخترنا  
مبدأ الجملّة عند الحرف والمحور x

أفقياً بحيث يكون للسرعة الابتدائية مركبة واحدة فقط . أي أن  
معادلات الحركة بالنسبة لهذه الجملّة ستكون بعد وضع :

$$v_{oy} = 0 \quad , \quad v_{ox} = v_0 \quad , \quad y_0 = 0 \quad , \quad x_0 = 0$$

على الشكل :

$$x = v_0 t \quad \quad y = \frac{1}{2} g t^2 \quad (1)$$

وإذا فرضنا أن رقم الدرجة التي سيحصل عندها الاصطدام الاول هو n ،  
تكون المسافة الشاقولية التي قطعها الكرة كي تبلغ هذه الدرجة مقدرة  
بالاقدام مساوية إلى :  $n = \frac{2}{3} n$  . لنحسب الزمن اللازم للكرة كي  
تهوي هذه المسافة فنضع :

$$-\frac{1}{2} g t^2 = -16 t^2 = -\frac{8}{12} n$$

$$t = \sqrt{\frac{n}{24}} \quad \text{ومنه :}$$

وتكون المسافة الافقية التي قطعها بحسب العلاقة (1) هي :

$$.x = 5 \sqrt{\frac{n}{24}} \quad (2)$$

إلا أن هذه المسافة يجب أن تكون أصغر من عرض  $n$  درجة أو تساويه كي يتم الاصطدام بالدرجة  $n$  . ولما كان عرض  $n$  درجة هو كارتفاع  $n$  درجة أي يساوي  $\frac{2}{3}n$  قدماً ، فيجب أن تتحقق المتراجحة :

$$\frac{2}{3} n \geq 5 \sqrt{\frac{n}{24}}$$

وبتربيع الطرفين والاختصار على  $n$  نجد :

$$n \geq \frac{25}{24} \times \frac{9}{4} = \frac{255}{96} = 2.3$$

وعليه فالكرة تصطدم بالدرجة الثالثة لأنه لاوجود للدرجة ذات الرقم 2.3 . وتعطي العلاقة (2) بُعد موضع الاصطدام الافقي عن نقطة الانطلاق إذا عوضنا  $n$  بـ 3 فنجد :

$$x = 5 \sqrt{\frac{3}{24}} = \frac{5}{\sqrt{8}} = 1.77 \text{ ft} = 21.2 \text{ in}$$

\* \* \*

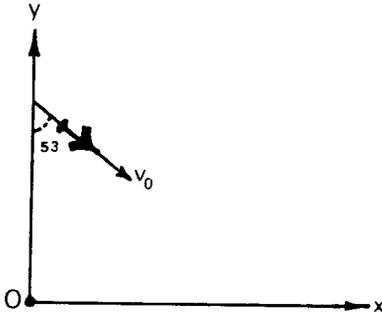
مسألة رقم ( ٦ - ٢ ) :

تحرر قاذفة قنابل منقضة بزاوية تصنع  $53^\circ$  مع الشاقول وعند الارتفاع 2400 ft ، قنبلة فتصطدم بالارض بعد انقضاء 5.0 s من تحريكها والمطلوب :  
( أ ) ماهي سرعة القاذفة ؟ ( ب ) ماهي المسافة الافقية التي قطعها القنبلة خلال طيرانها ؟ ( ح ) احسب المركبتين الافقية والشاقولية لمتجهة سرعة القنبلة لحظة اصطدامها بالارض ؟

**الحل :**

يبين الشكل ( ٦ - ٢ ) الجملة الإحداثية المختارة ، وقد اخترنا زمن بدء المراقبة لحظة إفلات القنبلة . فيكون موضع القنبلة الابتدائي :

$x_0 = 0$  ،  $y_0 = 2400$  ft  
أما السرعة الابتدائية فهي سرعة الطائرة نفسها فيكون لذلك :



الشكل ( ٦ - ٢ )

$$v_{0x} = v_0 \sin 53^\circ = 0.80 v_0$$

$$v_{0y} = - v_0 \cos 53^\circ = - 0.60 v_0$$

وتكون المعادلتان الوسيطيتان لمسار القنبلة هما :

$$x = 0.80 v_0 t \quad ، \quad y = 2400 - 0.60 v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

(أ) إن الزمن المذكور هو الفترة الزمنية الفاصلة ما بين لحظة تحرير القنبلة ولحظة اصطدام القنبلة بالأرض أي حتى تبلغ الموضع ( $y = 0$ ). فبكتابة

:  $y = 0$  ،  $t = 5.0 \text{ s}$  ،  $g = 32.0 \text{ ft/s}^2$  في المعادلة الثانية نجد :

$$0 = 2400 - 0.60 \times 5 v_0 - \frac{1}{2} \times 32 \times 25$$

$$0 = -3 v_0 + (2400 - 400)$$

$$v_0 = \frac{2000}{3} = 666 \text{ ft/s}$$

(ب) وتكون المسافة الأفقية التي قطعها القنبلة :

$$x = 0.80 \times 666 \times 5.0 = 2664 \text{ ft}$$

(ج) إن المركبة الأفقية للسرعة تبقى ثابتة ففي اللحظة  $t = 5$  يكون :

$$v_x = 0.80 \times 666 = 532.8 \text{ ft/s}$$

أما المركبة الشاقولية فتعطى بالمعادلة :

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$v_y = -0.60 \times 666 - 32.0 \times 5 = - (399.6 + 160) = -559.6 \text{ ft/s}$$

\* \* \*

مسألة رقم ( ٦ - ٣ ) :

يقذف مدفع من مدافع الخنادق قذيفة بزاوية تميل على الأفق بمقدار  $53^\circ$  وبسرعة فوهة تساوي  $200 \text{ ft/s}$ . وتتقدم دبابة مباشرة نحو المدفع على أرض مستوية وبسرعة تساوي  $10 \text{ ft/s}$ . كم ينبغي أن تكون المسافة بين المدفع والدبابة في لحظة القذف إذا أريد للقذيفة أن تصيب الدبابة ؟

## الحل :

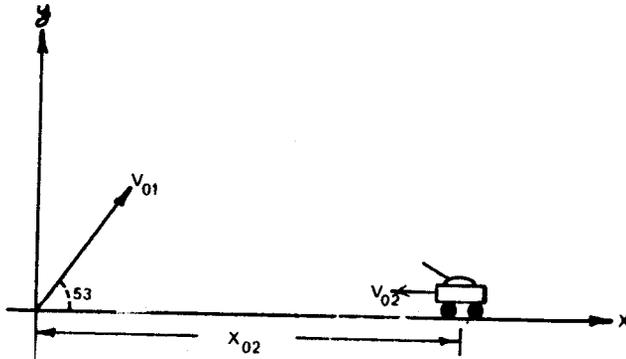
نختار مبدأ بجهة المقارنة عند فوهة المدفع والمحور  $ox$  أفقياً نحو اليمين والمحور  $oy$  شاقولياً نحو الاعلى . فتكون سرعة القذيفة الابتدائية وموضعها الابتدائي معطى بالمعادلات :

$$v_{oy} = 200 \times 0.80 = 160 \text{ ft/s} , v_{ox} = 200 \times 0.60 = 120 \text{ ft/s} , y_0 = 0 , x_0 = 0$$

أما المعادلات التي تعين موضع القذيفة بعد انقضاء زمن  $t$  على لحظة الاطلاق فهي :

$$x = 120 t \quad , \quad y = 160 t - 16.0 t^2$$

وتكون المعادلات التي تحدد موضع الدبابة هي :  $x = x_0 - v_0 t , y = 0$  وذلك واضح من الشكل ( ٦ - ٣ ) لان الدبابة تسير بسرعة منتظمة . وحيث  $x_0$  موضع الدبابة عند بدء الزمن ( أي لحظة اطلاق القذيفة ) وهي المسافة المطلوب تحديدها . أما  $v_0$  فهي سرعة الدبابة وهي في الاتجاه السالب لـ  $ox$  . وبالتالي فان معادلات حركة الدبابة في الجملة الاحداثية نفسها هي :



الشكل ( ٦ - ٣ )

$$x = x_0 - 10 t$$

$$y = 0$$

وحتى تصيب القذيفة الدبابة يجب أن تكونا في موضع واحد في نفس اللحظة ، أي أن يكون لركبتي شعاع الموضع لكل من المتحركين نفس القيمة ( في نفس الجملة ) ، فنحصل على معادلتين بجهولين  $t$  و  $x_0$  وهما :

$$x_0 - 10 t = 120 t \quad , \quad 0 = 160 t - 16.0 t^2$$

ونجد من المعادلة الثانية أن :  $t = 10 \text{ s}$  ، وبالتبديل في المعادلة الاولى نحصل على :

$$x_0 = 120 \times 10 + 10 \times 10 = 1300 \text{ ft}$$

فالإصابة تكون محققة ، في ظروف التوجيه المعطاة ، إذا اطلقت القذيفة عندما تكون الدبابة على بعد مقداره  $1300 \text{ ft}$  من المدفع وتحصل الإصابة بعد عشر ثوان من لحظة اطلاق القذيفة .

\* \* \*

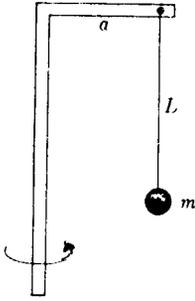
مسألة رقم ( ٦ - ٤ ) :

( أ ) ماهو عدد الدورات التي ينبغي أن يدور بها الجهاز المبين في الشكل ( ٦ - ٤ ) ، حول محور شاقولي ، في الثانية الواحدة ، حتى يصنع الحيط زاوية مقدارها  $45^\circ$  مع الشاقول ؟ ( ب ) ماهو توتر الجبل عندئذ ؟ ( نفرض أن  $m = 200 \text{ g}$  ،  $a = 10 \text{ cm}$  ،  $L = 20 \text{ cm}$  ) .

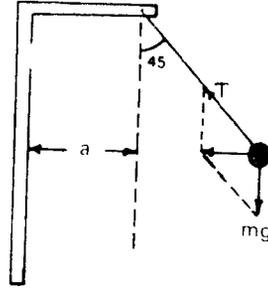
الحل :

( أ ) تخضع الكرة اثناء حركتها إلى قوتين هما الثقل  $m \vec{g}$  وتوتر الحيط

$\vec{T}$ ، انظر الشكل (٦ - ٥) . وتضع القوة  $T$  مع الشاقول في هذا



الشكل (٦ - ٤)



الشكل (٦ - ٥)

الشكل زاوية مقدارها  $45^\circ$  . إن الكرة بحسب المسألة تقوم بحركة دائرية منتظمة يقع مركزها على محور الدوران ، فيكون انصف قطر المسار  $(a + L \sin 45^\circ)$  . وإذا كتبنا تساوي القوة الجابذة مع محصلة القوى المؤثرة في الاتجاه القطري فإنا نجد بفرض أن  $\omega$  سرعة الدوران الزاوية :

$$m r \omega^2 = T \sin 45 \quad (1)$$

وليس هناك تسارع في الاتجاه الشاقولي لذلك يكون :

$$T \cos 45 = m g \quad (2)$$

أو : 
$$m(a + L \sqrt{2}/2) \omega^2 = m g$$

$$\omega^2 = g / (a + L \sqrt{2}/2)$$

نعوض بالقيم العددية وهي :  $g = 980 \text{ cm/s}^2$  ،  $a = 10 \text{ cm}$  ،  $L = 20 \text{ cm}$

فنجد :  $\omega^2 = 40.7$

ومنه :  $\omega = 6.4 \text{ rad/s}$  ويكون :

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{6.40}{6.28} = 1.02 \quad \text{دورة كل ثانية}$$

(ب) نعوض في العلاقة (2) لاجاد T فيكون :

$$T = mg / (\sqrt{2}/2) = 200 \times 980 \div 1.42/2 = 2.77 \times 10^5 \quad \text{دنة}$$

\* \* \*

مسألة رقم ( ٦ - ٥ ) :

نفرض أننا نريد إنشاء محطة فضائية أو وضع قمر صناعي بحيث يدور في مستوي خط الاستواء الأرضي ، وذلك على إرتفاع يجعله يدور مع الأرض وبحيث يبقى دوماً فوق النقطة نفسها ، أوجد ارتفاع المحطة الفضائية هذا .

**الحل :**

إن القوة الرئيسية المؤثرة في القمر الصناعي هي قوة جذب الأرض له أي :  $G mm_E / r^2$  . أما بقاء المحطة ( أو القمر ) فوق النقطة نفسها من سطح الأرض فلا يتم إلا إذا تساوى دور الارض مع دور المحطة ( أو القمر ) وبكتابة القوة الجاذبة مساوية إلى قوة التجاذب العالمي نجد :

$$G mm_E / (R + h)^2 = m (R + h) \omega^2 \quad (1)$$

حيث h هو ارتفاع القمر فوق سطح الارض و R نصف قطر الأرض .

إلا أن :  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  حيث T دور الأرض حول نفسها . نعوض في العلاقة

(1) فنجد :

$$G mm_E = m \frac{4\pi^2}{T^2} (R + h)^3$$

نختصر على m ونكتب العلاقة بالشكل :

$$(R + h)^3 = \frac{Gm_E}{4\pi^2} T^2$$

ومنه :

$$R + h = \left( \frac{Gm_E}{4\pi^2} T^2 \right)^{1/3}$$

$$h = \left( \frac{Gm_E}{4\pi^2} T^2 \right)^{1/3} - R$$

نعوض الآن بالقيم العددية وهي :

$$G = 6.67 \times 10^{-8} \text{ dyne} \cdot \text{cm}^2/\text{g}^2$$

$$R = 6.4 \times 10^8 \text{ cm}$$

$$T = 24 \times 3600 \text{ s}$$

$$m_E = 5.98 \times 10^{27} \text{ g}$$

اذن يكون :

$$h = \left[ \frac{(6.67 \times 10^{-8}) \times (5.98 \times 10^{27})}{4\pi^2} \times (24 \times 3600)^2 \right]^{1/3} - 6.4 \times 10^8 \text{ cm}$$

$$h = (75.8 \times 10^{27})^{1/3} - 6.4 \times 10^8 \text{ cm}$$

$$h = 4.25 \times 10^9 - 6.4 \times 10^8 = (42.5 - 6.4) \times 10^8 \text{ cm}$$

$$h = 36.1 \times 10^8 \text{ cm}$$

$$h = 36.1 \times 10^3 \text{ km}$$

\* \* \*