الفصل الثامن

الدفع والاندفاع

الدفع والاندفاع :

نعرف الآن مقدارين جديدين يفيدان في حالات كثيرة أهمها حالتان :

(أ) عندما يكون تأثير القوى لفترات زمنية قصيرة كحوادث الصدم .

(ب) عندما تكون القوى الخارجية معدومة . نستنتج تعريف هذين المقدارين من قوانين نيوتن أيضاً فنكتب :

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\,\frac{d\vec{v}}{dt}$$

وهي علاقة نستطيع كتابتها بالشكل :

$$\vec{F}\,dt = d\,(m\vec{v}) \qquad (8-1)$$

لأن m ثابتة في الميكانيك النيوتني . نسمي المقدار $\vec{F}\,dt$ دفع القوة والمقدار $m\vec{v}$ اندفاع الجسيم . وتصاغ هذه العلاقة على شكل مبدأ يسمى مبدأ الدفع والإندفاع وهو ينص على تساوي الدفع خلال أية فترة زمنية مع التغير الشعاعي لاندفاع الجسيم أو :

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \qquad (8-2)$$

وعندما تكون $\vec{F}$ ثابتة يكون :

$$\vec{F} \cdot (t_2 - t_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 \qquad (8-3)$$

أما إذا كانت محصلة القوى الخارجية المؤثرة على الجسيم معدومة فان ذلك يعدم الدفع ويكون الإندفاع ثابتاً لايتغير ، ونحصل على مبدأ انحفاظ الإندفاع . وينبغي أن نتذكر أن الدفع والاندفاع مقداران شعاعيان . وتعطي علاقة الدفع والاندفاع الشعاعية ثلاث علاقات سلمية هي مساقطها على ثلاثة محاور متعامدة في الحالة العامة .

مبدا انحفاظ الاندفاع لجملة جسيمات :

عندما يكون لدينا جملة جسيمات لاتفعل فيها أية قوة خارجية ، يمكن أن يتفاعل أي جسيمين من الجملة بقوتين متساويتين ومتعاكستين حسب قانون نيوتن الثالث . وعندما نحسب دفع القوتين ونجمعها نحصل على دفع مساو للصفر ، وبالتالي فان اندفاع جملة جسيمات (الذي يساوي مجموع اندفاع جسيماتها فرادى) لايتغير بتأثير القوى الداخلية فهو يبقى ثابتاً أو محافظاً

الاصطدامات المرنة وغير المرنة :

نقول عن اصطدام كتلتين أنه اصطدام رأسي إذا كانتا تتحركان على مستقيم واحد أي اذا كان لكل منهما مركبة سرعة واحدة . فاذا كانت محصلة القوى الخارجية الفاعلة على مجموعة الجسيمين معدومة كان اندفاع الجملة ثابتاً ويكون اندفاع الجملة قبل الإصطدام مساوياً اندفاع الجملة بعد

الاصطدام (لأن القوى الفاعلة خلال الاصطدام هي عبارة عن قوى داخلية بالنسبة للجملة) . وتعطينا المعادلة (3-8) علاقة واحدة فقط بين السرع قبل التصادم وبعده هي :

$$m_A \vec{v}_{A_1} + m_B \vec{v}_{B_1} = m_A \vec{v}_{A2} + m_B \vec{v}_{B_2} \qquad (8\text{-}4)$$

أما إذا لم تتحرك الكتلتان على مستقيم واحد فنقول عن الاصطـــدام أنه جانبي .

إن العلاقة الشعاعية (4-8) تعطي في حالة التصادم في المستوي ، علاقتين اثنتين فيهما أربع مجاهيل هي سرعة الجسم الاول بعد التصادم v_{A_2} وسرعة الجسم الثاني بعد التصادم v_{B_2} وزاوية شعاع سرعة الجسم الأول وزاوية شعاع سرعة الجسم الثاني مع اتجاه نختاره لقياس الزوايا كاتجـــاه ورود الجسم الأول مثلاً . ولا تكفي معرفة احدى الزاويتين لحل المسألة حلاً كاملاً ، ولا بد لنا من علاقة ثالثة في هذه الحالة . وإذا كان الاصطدام مرناً كانت الطاقة الحركية للجملة قبل الإصطدام مساوية الى الطاقـــة الحركية بعد الاصطدام . وهذا يحدث عندما تكون قوى التفاعل محافظة . والاصطدام غير المرن أبداً هو الاصطدام الذي يلتصق فيه الجسمان ويتحركان ككتلة واحدة بعد الاصطدام بسرعة واحـدة v_2 مثلاً . وتصبح العلاقـة (4-8) في حالة الاصطدام غير المرن أبداً على الشكل :

$$m_A \vec{v}_{A1} + m_B \vec{v}_{B1} = (m_A + m_B)\ \vec{v}_2 \qquad (8\text{-}5)$$

والعلاقة التالية تكون صحيحة في حالة الاصطدام المرن تماماً .

$$\frac{1}{2}\ m_A\ v_{A1}^2 + \frac{1}{2}\ m_B\ v_{B1}^2 = \frac{1}{2}\ m_A\ v_{A2}^2 + \frac{1}{2}\ m_B\ v_{B2}^2 \qquad (8\text{-}6)$$

وإذا كان التصادم رأسياً ومرناً في آن واحد أمكننا حل مسألة التصادم حلّاً تاماً بالاستعانة بالمعادلتين (8-4) و (8-6) أو بالاستعانة بالمعادلة (8-4) والمعادلة التالية التي تنتج من جملة المعادلتين وهي :

$$\vec{v}_{B2} + \vec{v}_{B1} = \vec{v}_{A2} + \vec{v}_{A1} \qquad (8-7)$$

التي تعبر عن أن المجموع الشعاعي لسرعتي كل من الجسمين قبل التصادم وبعده متساويتان .

الجمل متغيرة الكتلة (الصاروخ) :

يعمل الصاروخ على مبدأ الفعل ورد الفعل فتنطلق من مؤخرتـــه غازات الاحتراق ويتقدم جسم الصاروخ بالاتجاه المعاكس . فاذا كانت سرعة انطلاق الغازات بالنسبة للصاروخ هي v_r ،وكان معدل نقص كتلته بسبب احتراق الوقود هو $\frac{dm}{dt}$ أمكننا أن نستنتج اعتماداً على مـــبدأ الدفع والاندفاع (مطبقاً على الجملة المؤلفة من الصاروخ والغازات المحترقة وهي جملة كتلتها ثابتة) علاقة تعطي معدل تغير سرعة الصاروخ أي $\frac{dv}{dt}$ وهي :

$$m \frac{dv}{dt} = - v_r \frac{dm}{dt} - mg \qquad (8-8)$$

وهي تعطي بفرض m_0 كتلة الصاروخ الابتدائية تغير السرعة v بدلالة الزمن بحسب العلاقة :

$$v = v_r \ln \frac{m_o}{m} - gt \qquad (٩ \ 8)$$

وذلك بافتراض أن الصاروخ ينطلق من السكون .

★ ★ ★

مسالة رقم (٨ ـ ١) :

تبلغ كتلة رصاصة 0.05 kg وتتحرك بسرعة 400 m/s ، فاذا اخترقت الرصاصة مسافة 0.1 m في قطعة خشبية مثبتة تثبيتاً جيداً في الأرض ، وإذا فرضنا أن التباطؤ الناشيء عن الاحتكاك ثابت فاحسب (أ) تباطؤ الرصاصة (ب) القوة المسببة للتباطؤ (ﺣ) زمن التباطؤ (د) دفع الاصطدام . قارن جواب الجزء (د) مع اندفاع الرصاصة الابتدائي .

الحـل :

بماأن الحركة متباطئة بانتظام فرضاً فإننا نطبق قوانين هذه الحركةفيكون :

(أ) $$v^2 - v_o^2 = 2\,ax$$ ومنه :

$$a = \frac{v^2 - v_o^2}{2\,x}$$

ولدينا $v_o = 400$ m/s ، $v = 0$ ، $x = 0.1$ m فبالتعويض نجد :

$$a = \frac{0 - (400)^2}{2 \times 0.1} = -8 \times 10^5 \ m/s^2$$

والإشارة السالبة تدل على أن الحركة متباطئة .

(ب) إن القوة المطبقة على الرصاصة والتي تسبب هـذا التباطؤ تساوي جداء التباطؤ في كتلة الرصاصة أي :

$$F = ma = -0.05 \times 8 \times 10^5 = -4 \times 10^4 \text{ newton}$$

(حـ) ونستنتج زمن التباطؤ من العلاقة :

$$v = v_0 + at$$

فيكون :

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 400}{-8 \times 10^5} = 5 \times 10^{-4} \text{ s}$$

(د) إن دفع قوة الاصطدام يساوي الى $F \cdot t$ بسبب ثبات F لذلك فان:

$$F \cdot t = -4 \times 10^4 \times 5 \times 10^{-4} = -20 \text{ newton.s}$$

وإذا حسبنا اندفاع الرصاصة الإبتدائي نرى أن :

$$m\,v = 0.05 \times 400 = 20 \text{ newton}\cdot\text{s}$$

فهو يساوي دفع قوة الاصطدام ويعاكسها بالإشارة .

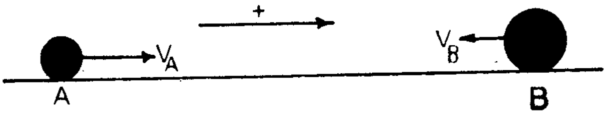
* * *

مسالة رقم (٨ ـ ٢) :

تتحرك قطعتان A و B ، كتلة الاولى منها 300 g والثانية 200 g باتجاه بعضها على منضدة أفقية لا احتكاك فيها . فاذا كانت سرعـــة الأولى (50 cm/s) وسرعة القطعـــة الثانية (100 cm/s) فالمطلوب (أ) إذا اصطدمت القطعتان ببعضها والتصقتا بعد الاصطدام فأوجد سرعتها النهائية .
(ب) أوجد مقدار الخسارة في الطاقة الحركية من جراء التصـــادم .
(حـ) أوجد السرعة النهائية لكل من القطعتين إذا كان التصادم مرناً تماماً

الحـل :

(أ) إن القطعتين تتصادمان رأسياً ، فهما تتحركان على نفس المنحى . فاذا فرضنا v_A وv_B السرعتين قبل التصادم وفرضنا V سرعة القطعتين عندما تتحركان معاً بعد التصادم كان لدينا :



الشكل (٨ – ١)

$$m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = (m_A + m_B) \vec{V}$$

وإذا اتخذنا الاتجاه الموجب للسرع من A إلى B ، انظر الشكل (٨–١)، كانت v_B سالبة وأصبحت العلاقة جبرياً بالشكل :

$$m_A v_A - m_B v_B = (m_A + m_B) V$$ ومنه :

$$V = \frac{m_A v_A - m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{300 \times 50 - 200 \times 100}{300 + 200}$$

أو : $$V = \frac{-5000}{500} = -10 \text{ cm/s}$$

فهما تتحركان بالاتجاه السالب بسرعة 10 cm/s أي بالاتجاه الذي كانت تسير فيه القطعة B .

(ب) نحسب الطاقة الحركية للقطعتين قبل التصادم ونطرح منها الطاقة الحركية للقطعتين بعد التصادم فنجد الخسارة في الطاقة الحركية بفعل التصادم .

$$\frac{1}{2}\times 300\times(50)^2+\frac{1}{2}\times 200\times(100)^2-\frac{1}{2}(300+200)(10)^2=1.35\times 10^6 \text{ ergs}$$

(ح) إذا كان التصادم مرناً ورأسياً في الوقت نفسه أمكننا استخـــدام المعادلتين (4-8) و (7-8) وهما :

$$m_A\vec{v}_{A1}+m_B\vec{v}_{B1}=m_A\vec{v}_{A2}+m_B\vec{v}_{B2} \qquad (1)$$

$$\vec{v}_{A1}+\vec{v}_{A2}=\vec{v}_{B1}+\vec{v}_{B2} \qquad (2)$$

وبالتعويض بالقيم العددية والانتباه للاشارات نجد أن العلاقة (1) تصبح :

$$300\times 50-200\times 100=300\ \vec{v}_{A2}+200\ \vec{v}_{B2}$$

التي تصبح بعد الاختصار :

$$3\ \vec{v}_{A2}+2\ \vec{v}_{B2}=-50 \qquad (3)$$

أما العلاقة (2) فتصبح :

$$50+\vec{v}_{A2}=-100+\vec{v}_{B2}$$

أو :

$$\vec{v}_{A2}-\vec{v}_{B2}=-150 \qquad (4)$$

نضرب طرفي العلاقة (4) بـ 2 ونجمع العلاقة الناتجة مع العلاقة (3) فنجد :

$$5\ \vec{v}_{A2}=-50-300=-350$$

إذن $\vec{v}_{A2}=-70$ cm/s . ومن العلاقة (4) نجد أن $\vec{v}_{B2}=+80$ cm/s

ويتحرك الجسم الاول بالاتجاه السالب في حين أن الجسم الثاني يتحرك بالاتجاه الموجب .

* * *

مسالة رقم (٨ ـ ٣) :

يصطدم نيوترون كتلته $m_1=1.67\times10^{-24}$ g ويسير بسرعة $v_1=2\times10^6$cm/s ، اصطداماً رأسياً بنواة البورون ذات الكتلة $m_2=17.0\times10^{-24}$g وهي ساكنة في البدء . والمطلوب (أ) إذا كان التصادم غير مرن أبداً ، فما هي الطاقة الحركية للجملة معبراً عنها كجزء من الطاقة الحركية الاصليــة ؟ (ب) إذا كان التصادم مرناً تماماً فما هو جزء الطاقة الحركية الذي ينتقل من النيوترون الى نواة البورون ؟

الحـل :

(أ) نحسب أولاً سرعة نواة البورون والنيوترون من المعادلة :

$$\overrightarrow{m_1 v_1} + \overrightarrow{m_2 v_2} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

فنجد باعتبار أن $v_2 = 0$ أن :

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

وتكون نسبة الطاقة الحركية للجملة الى الطاقة الحركية الاصلية :

$$\frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = \frac{\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2}{m_1 v_1^2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{1.67 \times 10^{-24}}{18.67 \times 10^{-24}} = 8.94\%$$

(ب) في حالة التصادم المرن يكون :

(1) $$m_1 \vec{v}_1 + 0 = m_1 \vec{v'}_1 + m_2 \vec{v'}_2$$ ، وكذلك :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

وواضح أن الطاقة الحركية التي تنتقل الى البورون الساكن هي :

$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2$ ويكون :

(2) $$\frac{1}{2} m_2 v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 (v_1^2 - v_1'^2)$$

ونحتاج لحساب هذا الجزء إلى ايجاد قيمة v'_1 . فاذا استخدمنا المعادلة (7-8) في حالتنا هذه وجدنا العلاقة :

$$\vec{v}_1 + \vec{v'}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v'}_2$$

إلا أن $v_2 = 0$ إذن :

$$\vec{v'}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v'}_1$$ وهي تكتب بالشكل :

(3) $$\vec{v'}_2 - \vec{v'}_1 = \vec{v}_1$$

ولدينا من العلاقة (1) : $m_2 \vec{v'}_2 + m_1 \vec{v'}_1 = m_1 \vec{v}_1$

فاذا ضربنا المعادلة (3) بـ m_2 – وجمعنا حصلنا على :

$$(m_1 + m_2) \vec{v'}_1 = (m_1 - m_2) \vec{v}_1$$ أو :

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad (4)$$

وبالعودة الى العلاقة (2) وتعويض v'_1 بما يساويها من (4) نجد :

$$\frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = \frac{1}{2} m_1 [v_1^2 - (\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2})^2 v_1^2]$$

$$= \frac{m_1 v_1^2}{2} [\frac{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2 - m_1^2 - m_2^2 + 2 m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}]$$

$$\frac{1}{2} m_2 v'^2_2 = 2 m_1 v_1^2 [\frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}] = 2 m_2 (\frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2})^2$$

ولما كانت الطاقة الاصلية هي $\frac{1}{2} m_1 v_1^2$ فان جزء الطاقة الذي ينتقل الى نواة البورون هو :

$$f = \frac{\frac{1}{2} m_2 v'^2_2}{\frac{1}{2} m_1 v_1^2} = 4 \frac{m_2 m_1}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$f = 4 \times \frac{17.0 \times 10^{-24} \times 1.67 \times 10^{-24}}{(18.67 \times 10^{-24})^2} = 33\%$$

* * *

مسالة رقم (٨ ــ ٤) :

يبلغ وزن صياد وبندقيتـــه 160 lb وهو يقف على مزالج قابلة للتدحرج ويطلق 10 طلقات بصورة أفقية من بندقية آلية . فاذا كان وزن الرصاصة

0.0257 lb وكانت سرعة خروجها 2500 ft/s فالمطلوب (أ) إذا تحرك الصياد للخلف بدون احتكاك ، فما هي سرعته بعد اطلاقــــه الرصاصات العشر ؟ (ب) إذا تم اطلاق الرصاصات خلال عشر ثوان ، فما هي القوة الوسطى المؤثرة فيه ؟ (حـ) قارن بين طاقته الحركية والطاقة الحركية للرصاصات العشر .

الحــل :

(أ) لما كان الرجل واقفاً على مزلجة وكان الاحتكاك مهملاً بين المزلجـة والأرض الافقية فان اندفاع الجملة لايتغير بعد انطلاق الرصاص ويكون لدينا بحسب العلاقة (8–8) باعتبار أن القوى الخارجية الفاعلة في الجملة في اتجاه الحركة معدومة :

$$dv = -\, v_r \frac{dm}{m}$$

وباجراء التكامل بين $v = 0$ و v وبين m و $m - 10\,m'$ حيث ترمز m' الى كتلة الرصاصة الواحدة نجد :

$$\int_0^v dv = -\, v_r \int_m^{m-10m'} \frac{dm}{m}$$

$$[\,v\,]_0^v = -\, v_r\, [\ln\, m\,]_m^{m-10m'}$$

$$v = -\, v_r \ln \frac{m - 10\, m'}{m}$$

$$v = -v_r \ln\left(1 - 10\frac{m'}{m}\right)$$

ولما كان الحد $\frac{10\,m'}{m}$ اصغر بكثير من الواحد فان باستطاعتنا اعتماداً على منشور $\ln(1-x)$ وهو :

$$\ln(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \;\ldots.$$

أن نكتب : $$\ln\left(1 - 10\frac{m'}{m}\right) \simeq -\frac{10\,m'}{m}$$

ويكون :

$$v = -v_r\left[-\frac{10\,m'}{m}\right] = \frac{10\,m'}{m}\,v_r = \frac{10\,m'\,g}{m\,g}\,v_r$$

$$v = \frac{0.257}{160} \times 2500 = 4 \text{ ft/s}$$

(ب) نستنتج القوة الوسطى التي تؤثر في الصياد من العلاقة :

$$Ft = m\,v - 0$$

ومنها : $$F = \frac{mv}{t} = \frac{160 \times 4}{32 \times 10} = 2 \text{ lb}$$

(حـ) ان الطاقة الحركية للرصاصات هي :

$$\frac{1}{2}(10\,m')\,v_r^2 = \frac{1}{2} \times \frac{0{\cdot}257}{32} \times (2500)^2 = 25000 \text{ ft.lb}$$

والطاقة الحركية للصياد وبندقيتـــه هي :

$$\frac{1}{2}\ m\,v^2 = \frac{1}{2} \times \frac{160}{32} \times (4)^2 = 40 \text{ ft.lb}$$

★ ★ ★

مسالة رقم (٨ ـ ٥) :

يحرق صاروخ 50 g من الوقود في الثانية ، وتنطلق الغازات منه بسرعة (500 000 cm/s) والمطلوب (أ) ماهي القوة التي يؤثر بها الغاز في الصاروخ ؟ أعط النتيجة بالدينة وبالنيوتن . (ب) هل يعمل الصاروخ في الفضاء الخالي ؟ (حـ) إذا عمل الصاروخ في الفضاء الخالي فكيف توجهه ؟ هل بامكانك أن تطبق مكابح عليه ؟

الحـل :

(أ) إن القوة الرافعة F التي يؤثر بها الغاز المنطلق على الصاروخ هي $v_r \frac{dm}{dt}$ أي :

$$F = 5 \times 10^5 \times 50 = 25 \times 10^6 \text{ dynes}$$

$$F = 250 \text{ newton}$$

(ب) إن الصاروخ يعمل في الفضاء لأن عمله يعتمد على رد فعل الغازات المحترقة ، بل إنه يعمل في الفضاء بشكل أفضل لانعدام مقاومة الهواء لحركته .

(حـ) يوجه الصاروخ بتوجيه الغازات المحترقة ، فيوجه الغاز المنطلق في الاتجاه المعاكس للجهة التي نريد توجيه الصاروخ نحوها .

(د) لانستطيع تطبيق مكابح بالمعنى المعتاد وإنما نستطيع التحكم في جهة وكمية الغاز المنطلق وسرعته أيضاً فهذه بمجموعها يمكن أن تعمل عمل المكابح، وخاصة إذا انطلقت الغازات من فتحات امامية في الصاروخ .