

الباب الثاني عشر

حسبان بالمتجهات

درسنا فيما سبق حساب اقترانات مجالها ومداه اعداد حقيقية . وبعد ان درسنا في الباب السابق المتجهات من وجهة نظر هندسية وجبرية ، نريد ان نتقدم خطوات اكثر فندرس اقترانات مجالها اعداد حقيقية ، ومداه متجهات . نسمي هذه اقترانات ذات قيم متجهة ، او اختصارا اقترانات متجهة . ندرس تعريفها وتحليلها بالنهايات والاتصال والاشتقاق والتكامل . وستكون الغاية من ذلك دراسة الحركة في الفضاء . وبالتالي سندرس من خصائص المنحني الغضائي ما يسمى الانحناء ، وطول المنحني .

(12.1) تعريفات وامثلة

تعريف (12.1) نسمي الاقتران $\underline{F}(t)$ الذي مجاله X مجموعة من الاعداد الحقيقية ، ومداه Y مجموعة من المتجهات ، اقترانا ذا قيم متجهة او اقترانسا متجهيا .
واذا لم نحدد المجال سلفا ، فان مجال $\underline{F}(t)$ هو كل الاعداد حيث $\underline{F}$ يمكن ان يكون معرفا . والامثلة التالية هي لاقترانات متجهة :-

$$\text{مثل (12.1)} \quad \underline{F}(t) = (2-3t)\underline{i} + (1-2t^2)\underline{j} + e^t\underline{k} \quad (1)$$

$$(ب) \quad \underline{G}(t) = \underline{i} - \sqrt{2+3t}\underline{k}$$

$$(ج) \quad \underline{H}(t) = a(t - \sin t)\underline{i} + a(1 + \cos t)\underline{j} + t\underline{k}, \quad 0 \leq t \leq 2$$

لاحظ ان مجال $\underline{F}$ هو $(-\infty, \infty)$ ، بينما مجال $\underline{G}$ هو $(-\frac{2}{3}, \infty)$.

وسنميز الاقتران الذي مجاله ومداه اعداد حقيقية على انه اقتران حقيقي .
وسنكتب الاقتران المتجه بمنط مميز (طباعة) ، او بخط نحته $\underline{F}$.

بشكل عام ، لكل اقتران متجه $\underline{F}$ يوجد ثلاثة اقترانات حقيقية f, g, h ،

هي مركبات $\underline{i}, \underline{j}, \underline{k}$ للاقتران $\underline{F}$. أي ان

$$\underline{F}(t) = f(t)\underline{i} + g(t)\underline{j} + h(t)\underline{k}$$

حيث t في مجال $\underline{F}(t)$.

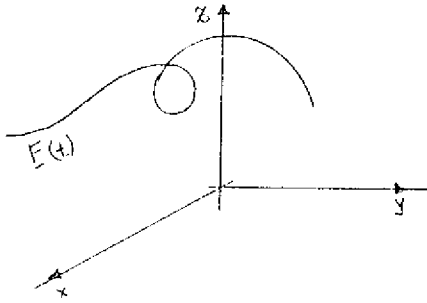
$$\text{مثل (12.2)} \quad \underline{F}(t) = \ln t \underline{i} + \sqrt{1-t}\underline{j} + t^2\underline{k} \quad \text{افرض}$$

ما هو مجال $\underline{F}$ وما هي مركباته ؟

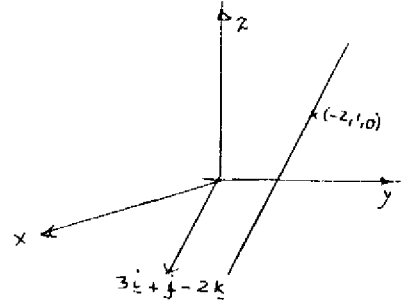
الحل : مجال $\ln t$ هو $t > 0$ ، ومجال $\sqrt{1-t}$ هو $1 \geq t$ ، ومجال t^2 هو R ،
لذلك المشترك بينها هو $(0, 1]$. كذلك

$$f(t) = \ln t , g(t) = \sqrt{1-t} , h(t) = t^2$$

وليس بالامكان رسم منحنٍ اقتران متجه ، لاننا نحتاج الى ابعاد اربعة .
ولكن نتغلب على هذه المعضلة برسم المدى فقط . ويمكن ان نعتبر $\underline{E}(t)$ نقطة
في الفضاء ، وعندما تزيد t (في المجال) فان $\underline{E}(t)$ يرسم منحنيا فضائيا .
وعند الرسم ، فاننا نستعمل راس السهم ليبدل على اتجاه حركة $\underline{E}$ عندما تزيد t .
انظر الشكل (12.1) .



الشكل (12.1)



الشكل (12.2)

$$\underline{E}(t) = (-2 + 3t)\underline{i} + (1 + t)\underline{j} - 2t\underline{k} \quad \text{مثل (12.3) افرض}$$

ارسم المنحنى الخاص به .

الحل : افرض (x, y, z) نقطة على المنحنى الخاص بالاقتصران ، عندها

$$x = -2 + 3t , y = 1 + t , z = -2t$$

وهذه كما نعلم معادلات معلمية للمستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, 1, 0)$

وبوازي المتجه $3\underline{i} + \underline{j} - 2\underline{k}$ ، انظر الشكل (12.2) .

$$\underline{E}(t) = \cos t \underline{i} + \sin t \underline{j} \quad \text{مثل (12.4) افرض}$$

اثبت ان المنحنى هو دائرة وَحدة في المستوى xy ، ويتحرك $\underline{E}$ ضد عقارب

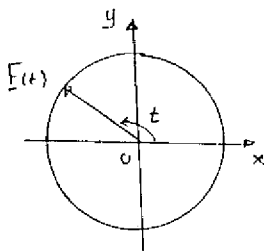
الساعة .

$$\underline{E}(t) = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1 \quad \text{الحل : لاحظ أن}$$

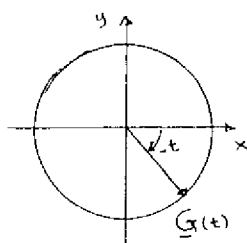
لذلك فالمنحنى هو دائرة وحدة . كذلك $\underline{E}(t)$ يصنع زاوية t مع محور x

الموجب ، وقيم t حقيقية . وعندما تزداد t فإن حركة $\underline{F}$ هي ضد عقارب الساعة .

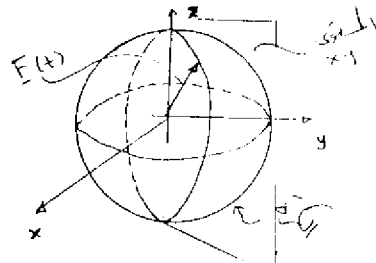
انظر الشكل (12.3) .



الشكل (12.3)



الشكل (12.4)



الشكل (12.5)

مثل (12.5) افرض $\underline{G}(t) = \cos t \underline{i} - \sin t \underline{j}$

الحل : هذه دائرة وحدة في المستوى xy ، وحركة $\underline{G}$ هي مع عقارب الساعة . انظر

الشكل (12.4) .

مثل (12.6) افرض $\underline{F}(t) = \cos t \underline{i} + \cos t \underline{j} + \sqrt{2} \sin t \underline{k}$

ارسم هذا المنحني .

الحل : هذا منحنى دائرة ايضا

$$\|\underline{F}\| = \sqrt{\cos^2 t + \cos^2 t + 2 \sin^2 t} = \sqrt{2}$$

كذلك لأي نقطة (x, y, z) على المنحني $\underline{F}$ فان :

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 2 \sin t$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad \text{ونحمل على}$$

وهذه كرة نصف قطرها $\sqrt{2}$ ، كذلك $x = y$ ، أي أن (x, y, z) تقع على

سطح كرة نصف قطرها $\sqrt{2}$ وعلى المستوى $x = y$. انظر الشكل (12.5) .

جبر الاقتترانات المتجهة :

للاقتترانات المتجهة خصائص جبرية كالاقتترانات الحقيقية ، واخرى خاصة بها ،

نذكرها في التعريف التالي :

تعريف (12.2) افرض $\underline{F}, \underline{G}$ اقتترانين متجهين ، وان f, g اقتترانان حقيقيان ،

فاننا نعرف الاقتترانات $\underline{F} + \underline{G}, \underline{F} - \underline{G}, \underline{F} \cdot \underline{G}, \underline{F} \times \underline{G}, \underline{F} \circ \underline{G}$ كما يلي:

$$(\underline{F} + \underline{G})(t) = \underline{F}(t) + \underline{G}(t) \quad , \quad (\underline{F} \cdot \underline{G})(t) = \underline{F}(t) \cdot \underline{G}(t)$$

$$(\underline{F} - \underline{G})(t) = \underline{F}(t) - \underline{G}(t) \quad , \quad (\underline{F} \times \underline{G})(t) = \underline{F}(t) \times \underline{G}(t)$$

$$(f \circ F)(t) = f(t) \cdot F(t), \quad (F \circ g)(t) = F(g(t))$$

مثال (12.7) إذا $G(t) = -\sin t \underline{i} + \cos t \underline{j} + t \underline{k}$, $F(t) = \cos t \underline{i} + \sin t \underline{j} + t \underline{k}$ و إذا

$F \circ g$, $F \times G$, $F \cdot G$, $g \cdot F$, $F + G$ جد , $g(t) = \sqrt{t}$

الحل : $(F + G)(t) = (\cos t - \sin t) \underline{i} + (\cos t + \sin t) \underline{j} + 2t \underline{k}$

$$(F - G)(t) = (\cos t + \sin t) \underline{i} + (\sin t - \cos t) \underline{j}$$

$$(g \cdot F)(t) = \sqrt{t} \cos t \underline{i} + \sqrt{t} \sin t \underline{j} + t \sqrt{t} \underline{k}$$

$$(F \cdot G)(t) = -\cos t \sin t + \cos t \sin t + t^2 = t^2$$

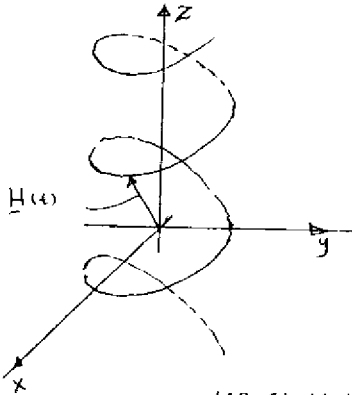
$$(F \times G)(t) = t(\sin t - \cos t) \underline{i} - t(\sin t + \cos t) \underline{j} + \underline{k}$$

$$(F \circ g)(t) = F(g(t)) = \cos \sqrt{t} \underline{i} + \sin \sqrt{t} \underline{j} + \sqrt{t} \underline{k}$$

مثال (12.8) ارسم المنحنى $H(t) = 2 \cos t \underline{i} + 2 \sin t \underline{j} + t \underline{k}$

الحل : نفرض $F(t) = 2 \cos t \underline{i} + 2 \sin t \underline{j}$, $G(t) = t \underline{k}$

$$H(t) = F(t) + G(t) \quad \text{لذلك}$$



الشكل (12.6)

أي أن كل نقطة من نقاط $H(t)$ تقع فوق
النقطة المناظرة من $F(t)$ أو تحتها وتبعد
 $|t|$ من الوحدات ، لكن F هو دائرة وحدة ،
ومنحنى H هو لولب دائري . انظر الشكل
(12.6)

تمارين (12.1)

للتمارين (1) - (8) حدد المجال والمدى ، وما هي مركبات كل اقتران منها

$$F(t) = -t \underline{i} + t^2 \underline{j} - t^3 \underline{k} \quad (1)$$

$$F(t) = \sqrt{t-1} \underline{i} + \sqrt{t+1} \underline{j} - \underline{k} \quad (2)$$

$$F(t) = \cosh t \underline{i} - \frac{1}{t^2-2} \underline{k} \quad (3)$$

$$F(t) = (t \underline{i} + \underline{j}) \times (2 \underline{i} - t^2 \underline{j} + t \underline{k}) \quad (4)$$

$$\underline{G} = \cos t \underline{i} + \sin t \underline{j} + \underline{k} , \underline{F} = t \underline{i} + t^2 \underline{j} + t^3 \underline{k} \text{ حيث } \underline{F} - \underline{G} \quad (5)$$

$$\underline{F} \times \underline{G} \text{ حيث } \underline{F} , \underline{G} \text{ كما في التمرين (5)} . \quad (6)$$

$$\underline{g} = t^{1/3} , \underline{F} = \cos t \underline{i} + \sin t \underline{j} + t + 2 \underline{k} \text{ حيث } \underline{F} \circ \underline{g} \quad (7)$$

$$\underline{g} \underline{F} \text{ حيث } \underline{F} , \underline{g} \text{ كما في التمرين (7)} \quad (8)$$

للتمارين (9) - (16) ارسم منحنى الاقتارات ، وما هو اتجاه المنحنى ؟

$$\underline{F}(t) = t \underline{i} + t \underline{j} + \underline{k} \quad (9)$$

$$\underline{F}(t) = \cos \pi t \underline{k} , -1 \leq t \leq 1/3 \quad (10)$$

$$\underline{F}(t) = (2t + 1) \underline{i} + (t - 1) \underline{j} + 3t \underline{k} \quad (11)$$

$$\underline{F}(t) = t \underline{j} + t^2 \underline{k} \quad (12)$$

$$\underline{F}(t) = \cos t \underline{i} + \sin t \underline{j} , 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \quad (13)$$

$$\underline{F}(t) = \cos t \underline{i} + \sin t \underline{j} + t^2 \underline{k} \quad (14)$$

$$\underline{F}(t) = e^t \cos t \underline{i} + e^t \sin t \underline{j} , 0 \leq t \leq \pi \quad (15)$$

$$\underline{F}(t) = \tan t \underline{i} + \sec t \underline{j} + 2 \underline{k} , -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \quad (16)$$

$$\underline{G}(t) = (t + 1) \underline{i} + (3t - 2) \underline{j} + t \underline{k} , \underline{F}(t) = 2t \underline{i} + (t + 1) \underline{j} - 3t \underline{k} \text{ افرض } \quad (17)$$

$$\text{وان } \underline{g}(t) = \cos t$$

اثبت ان المنحنيات للاقتارات التالية هي مستقيمات أو قطع مستقيمة بعد

ان تجد المعادلات المُقلمية لها

$$(a) \underline{F} - \underline{G} , \quad (b) \underline{F} + 3 \underline{G} , \quad (c) \underline{F} \circ \underline{g}$$

$$\underline{F}(t) = t \cos \pi t \underline{i} + t \sin \pi t \underline{j} + \underline{k} \text{ جد نقاط التقاطع للمنحنى} \quad (18)$$

$$\text{والاسطوانة } x^2 + y^2 = 4$$

$$\text{درج لولبي حول برج ماء اسطواني ارتفاعه 100 متر ، وقطره 50 مترا .} \quad (19)$$

جد اقتارانا متجاها يمثل منحنى الدرج .

(12.2) النهايات والاتصال :

نعرف النهاية والاتصال لاقتراحان متجه بشكل مغاير لما عرفناه لاقتراحان حقيقي.

تعريف (12.4) افرض $\underline{F}$ اقترانا متجها معرفا لكل نقطة من نقاط فترة مفتوحة تحوي

t_0 الا ربما عند t_0 . نقول المتجه $\underline{L}$ هو نهاية $\underline{F}(t)$ عندما t تقترب من t_0 (او

$\underline{L}$ نهاية $\underline{F}$ عند t_0) اذا لأي $0 < \epsilon$ يوجد عدد $0 < \delta$ بحيث أن

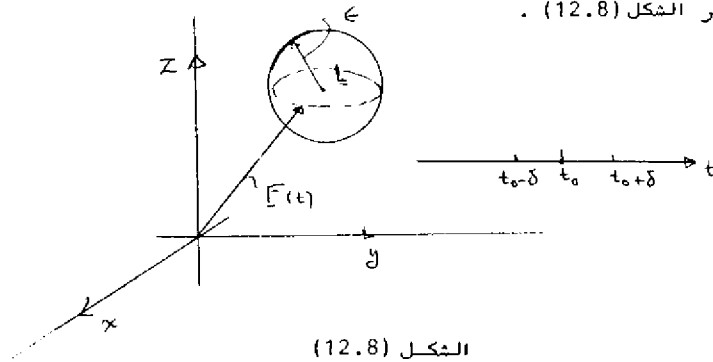
$$0 < |t - t_0| < \delta \rightarrow \|\underline{F}(t) - \underline{L}\| < \epsilon .$$

ونكتبها اختصارا $\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{F}(t) = \underline{L}$

ونقول أن $\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{F}(t_0)$ موجودة .

لاحظ أن $\|\underline{F}(t) - \underline{L}\| < \epsilon$ هو كرة مماسة مركزها $\underline{L}$ ونصف قطرها ϵ

انظر الشكل (12.8) .



الشكل (12.8)

والمبرهنة التالية تقدم اسلوبا سريعا لحساب النهاية .

مبرهنة (12.3) افرض $\underline{F}(t) = f(t)\underline{i} + g(t)\underline{j} + h(t)\underline{k}$. فان $\underline{F}$ له نهاية عند t_0

اذا وفقط اذا كل من f, g, h له نهاية عند t_0 . في هذه الحالة

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{F}(t) = [\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)]\underline{i} + [\lim_{t \rightarrow t_0} g(t)]\underline{j} + [\lim_{t \rightarrow t_0} h(t)]\underline{k}$$

البرهان : أولا افرض أن $\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{F}(t) = \underline{L}$, $\underline{L} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$ فان لكل $0 < \epsilon$ يوجد $0 < \delta$ بحيث أن

$$0 < |t - t_0| < \delta \rightarrow \|\underline{F}(t) - \underline{L}\| < \epsilon$$

ولقيم t التي تحقق ذلك

$$\|\underline{F}(t) - \underline{L}\| = \sqrt{(f(t) - a)^2 + (g(t) - b)^2 + (h(t) - c)^2}$$

$$= \|F(t) - L\| < \epsilon$$

$$0 < |t - t_0| < \delta \text{ عندما } |f(t) - a| < \epsilon \quad \text{أي أن}$$

$$\cdot \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = b \text{ وبالطريقة نفسها نبرهن } \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = a \quad \text{أي أن}$$

$$\cdot \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = c$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} h(t) = c, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = b, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) = a \text{ افترض } \underline{\text{ثانياً}}$$

$$\text{وان } \underline{L} = a \underline{i} + b \underline{j} + c \underline{k} \cdot \text{أي أنه لأي } 0 < \epsilon \text{ يوجد } 0 < \delta \text{ وان}$$

$$0 < |t - t_0| < \delta \text{ عندما } |f(t) - a| < \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}, |g(t) - b| < \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}, |h(t) - c| < \frac{\epsilon}{\sqrt{3}}$$

$$\text{لذلك إذا } 0 < |t - t_0| < \delta \text{ فإن}$$

$$\|F(t) - L\| = \sqrt{[f(t) - a]^2 + [g(t) - b]^2 + [h(t) - c]^2} \\ < \sqrt{\left(\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{3}}\right)^2} = \epsilon$$

لذلك

$$\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = L = a \underline{i} + b \underline{j} + c \underline{k} = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \underline{i} + \lim_{t \rightarrow t_0} g(t) \underline{j} + \lim_{t \rightarrow t_0} h(t) \underline{k}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (3 \cos t \underline{i} - \frac{\sin t}{t} \underline{j} + \sqrt{t+1} \underline{k}) \quad \text{مثال (12.9) جد}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (3 \cos t \underline{i} - \frac{\sin t}{t} \underline{j} + \sqrt{t+1} \underline{k}) = \quad \text{الحل:}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} 3 \cos t \underline{i} - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \underline{j} + \lim_{t \rightarrow 0} \sqrt{t+1} \underline{k} =$$

$$3 \underline{i} - \underline{j} + \underline{k}$$

مبرهنة (12.4) افرض F, G, f, g اقترانين متجهين، و f, g اقترانين حقيقيين،

وان $\lim_{t \rightarrow t_0} F(t) = F$ ، $\lim_{t \rightarrow t_0} G(t) = G$ موجودتان وان $\lim_{t \rightarrow t_0} f(t)$ موجودة وان

$$\text{فان } \lim_{s \rightarrow s_0} g(s) = t_0.$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (F + G)(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) + \lim_{t \rightarrow t_0} G(t) \quad (أ)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} f(t) F(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(t) \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \quad (ب)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (F \cdot G)(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \cdot \lim_{t \rightarrow t_0} G(t) \quad (ج)$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0} (F \times G)(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} F(t) \times \lim_{t \rightarrow t_0} G(t) \quad (د)$$

$$\lim_{s \rightarrow s_0} (\underline{F} \circ g)(s) = \lim_{t \rightarrow t_0} \underline{F}(t) \quad (هـ)$$

ونترك البرهان للطالب لسهولته .

مثال (12.10) افرضي $\underline{F}(t) = \cos t \underline{i} - \sin t \underline{j} + 4t^2 \underline{k}$ و $\underline{G}(t) = t \underline{i} + t^3 \underline{k}$

$$\lim_{t \rightarrow 1} (\underline{F} \cdot \underline{G})(t) = \lim_{t \rightarrow 1} (\cos \pi t \underline{i} - \sin \pi t \underline{j} + 4t^2 \underline{k}) \cdot \lim_{t \rightarrow 1} (t \underline{i} + t \underline{k})$$

$$= (-1 \underline{i} + 4 \underline{k}) \cdot (\underline{i} + \underline{k})$$

$$= -1 + 4 = 3$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} (\underline{F} \times \underline{G})(t) = (-\underline{i} + 4 \underline{k}) \times (\underline{i} + \underline{k})$$

$$= -5 \underline{j}$$

تعريف (12.5) نقول الاقتران $\underline{F}$ متصل عند t_0 من نقاط مجاله اذا

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \underline{F}(t) = \underline{F}(t_0)$$

مبرهنة (12.6) الاقتران المتجه $\underline{F}$ متصل عند t_0 اذا وفقط اذا كل من مركباته متصل

عند t_0 .

مثال (12.11) الاقتران $\underline{F}(t) = \sin t \underline{i} + t^2 \underline{j} - e^t \underline{k}$ متصل على $(-\infty, \infty)$ لان كل

مركبة من مركباته متصلة على $(-\infty, \infty)$.

تمارين (12.2)

للتمارين (1) - (9) احسب النهايات ان وجدت ، وعلّل في حال عدم وجودها

$$\lim_{t \rightarrow -2} (3i + \sqrt{3} \underline{j} - 5\underline{k}) \quad (2) \quad \lim_{t \rightarrow 2} (2 \underline{i} - 3 \underline{j} + \underline{k}) \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \pi} (\tan t \underline{i} - \frac{\sin t}{t} \underline{j} + \underline{k}) \quad (4) \quad \lim_{t \rightarrow 0} (\sec t \underline{i} - 3 t \underline{j}) \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (\frac{\sin t}{t} \underline{i} - e^t \underline{j} + (t-2) \underline{k}) \quad (5)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \underline{F}(t), \underline{F}(t) = \begin{cases} t \underline{i} + e^{-1/t^2} \underline{j} + t^2 \underline{k}, & t \neq 0 \\ \underline{j}, & t = 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$\underline{G}(t) = -\pi \underline{i} + \frac{1 + \cos t}{t} \underline{j}, \underline{F}(t) = e^{-1/t^2} \underline{i} + \cos t \underline{j} + t^3 \underline{k} \quad \lim_{t \rightarrow 0} (\underline{F} - \underline{G})(t) \quad (7)$$

$$\underline{F}(t) = \frac{\sin(t-1)}{t-1} \underline{i} + \frac{t+3}{t-2} \underline{j} + \cos \pi t \underline{k} \quad \text{حيث} \quad \lim_{t \rightarrow 1} (\underline{F} \cdot \underline{G})(t) \quad (8)$$

$$\underline{G}(t) = (t^2 + 1) \underline{i} - \frac{t-2}{t+3} \underline{j} - \sqrt{t^2 + 1} \underline{k}$$

$$\lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^2 + 1}{t+1} \underline{i} + \frac{t^2 - 1}{t+1} \underline{j} + \frac{t^2 + 7t - 8}{t-1} \underline{k} \right) \quad (9)$$

للتمارين (10) - (13) حدد فترات الاتصال للاقتربات المفروضة

$$\underline{F}(t) = 4 \underline{j} - 3 \underline{k} \quad (11) \quad \underline{F}(t) = 3 \underline{i} + (t-5) \underline{j} + \cos t \underline{k} \quad (10)$$

$$\underline{F}(t) = e^t \underline{i} + e^{-t} \underline{j} + \sqrt{2} t \underline{k} \quad (12)$$

$$\underline{F}(t) = \begin{cases} (2t+1) \underline{i} + (2t-1) \underline{j} + 4t \underline{k}, & t < -3 \\ (t-2) \underline{i} - (t+10) \underline{j} + (2t-9) \underline{k}, & t \geq -3 \end{cases} \quad (13)$$

$$\cdot \lim_{t \rightarrow t_0} \underline{F}(t) \text{ الشمال} \quad \text{ومن الشمال} \quad \lim_{t \rightarrow t_0} \underline{F}(t) \text{ من اليمين} \quad \text{اكتب تعريفا للنهاية} \quad (14)$$

$$\text{استعمل التمرين السابق لتحسب ما يلي :} \quad (15)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} (t \underline{i} + 2 t^{1/4} \underline{j} - \frac{\ln t}{t} \underline{k}) \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 1^-} [\sqrt{1-t} \underline{i} - (1-t) \ln(1-t) \underline{j}] \quad (ب)$$

$$\cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{F}(t) \text{ اكتب تعريفا للنهاية} \quad \text{وانه يمكن حسابها بمركبات} \underline{F}. \quad (16)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{t} \underline{i} + \frac{t-1}{t+1} \underline{j} - \frac{\sin t^3}{t^3} \underline{k} \right) \quad (ب) \text{ احسب}$$

$$(17) \quad \text{اذا } \underline{F}, \underline{G} \text{ متطابقان عند } t_0, \text{ واذا } c \text{ عدد حقيقي, اثبت ان ما يلي متصل عند } t_0$$

$$\underline{F} + \underline{G} \quad (1)$$

$$c \underline{F} \quad (ب)$$

$$\|\underline{F}(t)\| = \|\underline{F}\| \quad (ت) \text{ حيث } \|\underline{F}\| \text{ لـ } \underline{F} \text{ في مجال } \underline{F}$$

$$\underline{F} \cdot \underline{G} \quad (د)$$

$$\underline{F} \times \underline{G} \quad (هـ)$$

(12.3) المشتقة والتكامل

نقدم فيما يلي تعريف المشتقة وهو مقارب أيضا لتعريف المشتقة لاقتصران

حقيقي .

تعريف (12.7) افرض t_0 في مجال $\underline{F}$ اقتران متجه ، اذا

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{F}(t) - \underline{F}(t_0)}{t - t_0}$$

موجودة ، فاننا نسمي هذه النهاية مشتقة $\underline{F}$ عند t_0 ونكتب

$$\underline{F}'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\underline{F}(t) - \underline{F}(t_0)}{t - t_0}$$

ونقول ان $\underline{F}$ له مشتقة عند t_0 وان $\underline{F}$ قابل للاشتقاق عند t_0 او ان $\underline{F}'(t_0)$

موجودة .

وقد نستخدم مصطلح لايبنتز للمشتقة $\frac{d \underline{F}}{dt}$.

وهكذا نرى ان المشتقة $\underline{F}'$ هي ايضا اقتران متجه ، مجالها كل الاعداد t حيث $\underline{F}$

قابل للاشتقاق .

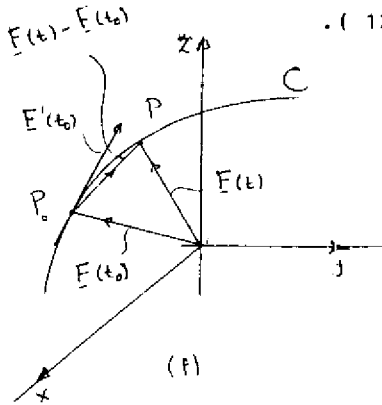
ويمكن تعليل $\underline{F}'(t_0)$ هندسيا . افرض المنحنى C يمثل $\underline{F}$ وان P_0 ، P نقطتان

على C تمثلان $\underline{F}(t_0)$ ، $\underline{F}(t)$. اذا $t_0 < t$ فان $\underline{F}(t) - \underline{F}(t_0)$ له الاتجاه

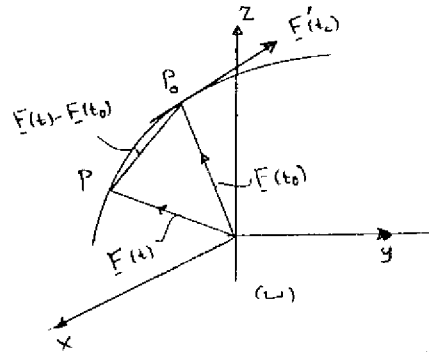
نفسه مثل متجه القاطع $\overline{P_0 P}$ ، كذلك

$$\frac{\underline{F}(t) - \underline{F}(t_0)}{t - t_0}$$

له الاتجاه نفسه . انظر الشكل (12.9) .



الشكل (12.9) (أ)



الشكل (12.9) (ب)

أما إذا $t < t_0$ فإن $\underline{F}(t) - \underline{F}(t_0)$ له الاتجاه نفسه مثل $\underline{P}_0 \cdot \underline{F}$ لكن

$$\frac{\underline{F}(t) - \underline{F}(t_0)}{t - t_0}$$

لها اتجاه معاكس. انظر الشكل (12.9) . أي أنه إذا $\underline{F}'(t_0)$ موجودة فإنها نهاية المتجهات الموازية لمتجه القاطع المارة في $\underline{P}_0$ ، ولها الاتجاه نفسه بشكل عام . أي أن $\underline{F}'(t_0)$ هو مماس للمنحني C عند $\underline{P}_0$.

وعلاقة المشتقة بمركبات $\underline{F}$ ، فإنه يمكن برهنة ما يلي مباشرة .

مبرهنة (12.8) افرض $\underline{F}(t) = f(t)\underline{i} + g(t)\underline{j} + h(t)\underline{k}$ فإن $\underline{F}$ قابل للاشتقاق عند t_0 ، إذا وفقط إذا f ، g ، h قابلة للاشتقاق عند t_0 . وفي هذه الحال

$$\underline{F}'(t_0) = f'(t_0)\underline{i} + g'(t_0)\underline{j} + h'(t_0)\underline{k}$$

مما يسهل عملية حساب المشتقة لاقتران متجه .

مثل (12.12) إذا $\underline{F} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$ فإن $\underline{F}' = \underline{0}$

وهذا واضح لأن مشتقات a ، b ، c كلها اصفار . لاحظ أن قيمة مشتقة كل

من المركبات هي صفر (عدد حقيقي) ، بينما مشتقة $\underline{F}$ هي صفر متجه .

مثل (12.13) إذا $\underline{F}(t) = (x_0 + at)\underline{i} + (y_0 + bt)\underline{j} + (z_0 + ct)\underline{k}$ فإن

$$\underline{F}'(t) = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k}$$

وهذه مشتقة مستقيم ، وهي متجه ثابت .

مثل (12.14) إذا $\underline{F}(t) = \sqrt[3]{t}\underline{i} + \frac{1}{t}\underline{j} + e^{-t}\underline{k}$ فإن

$$\underline{F}'(t) = \frac{1}{3}t^{-2/3}\underline{i} - \frac{1}{t^2}\underline{j} - e^{-t}\underline{k}$$

وإذا $\underline{F}$ قابل للاشتقاق على فترة ما I ، فإنه يكون قابلا للاشتقاق عند كل نقطة

من نقاط I . وإذا الفترة I مغلقة هي $[a, b]$ فمعنى ذلك أن مركبات $\underline{F}$ لهما

مشتقات من جانب واحد عند طرفي الفترة a ، b . كذلك يمكن كتابة قواعد لجبر

المشتقات كما يلي

مبرهنة (12.9) إذا $\underline{F}$ ، $\underline{G}$ ، f قابلة للاشتقاق عند t_0 ، وافرض g قابلا للاشتقاق

عند $s_0 = t_0$ حيث $g(s_0) = t_0$ فإن

$$(\underline{F} \pm \underline{G})'(t_0) = \underline{F}'(t_0) \pm \underline{G}'(t_0) \quad (أ)$$

$$(f \underline{F})'(t_0) = f'(t_0) \underline{F}(t_0) + f(t_0) \underline{F}'(t_0) \quad (ب)$$

$$(\underline{F} \cdot \underline{G})(t_0) = \underline{F}'(t_0) \cdot \underline{G}(t_0) + \underline{F}(t_0) \cdot \underline{G}'(t_0) \quad (\div)$$

$$(\underline{F} \times \underline{G})'(t_0) = \underline{F}'(t_0) \times \underline{G}(t_0) + \underline{F}(t_0) \times \underline{G}'(t_0) \quad (\times)$$

$$(\underline{F} \circ \underline{g})'(s_0) = \underline{F}'(\underline{g}(s_0)) \underline{g}'(s_0) = \underline{F}'(t_0) \underline{g}'(s_0) \quad (\circ)$$

مثال (12.15) افرض $\underline{G}(t) = t \underline{i} - 2t \underline{j} + t^3 \underline{k}$, $\underline{F}(t) = 3 \underline{i} + (t^2 + t) \underline{j} - t \underline{k}$

جدد $(\underline{F} \cdot \underline{G})'(t)$, $(\underline{F} \times \underline{G})'(t)$.

$$\underline{G}'(t) = \underline{i} + 3t^2 \underline{k} \quad , \quad \underline{F}'(t) = (2t + 1) \underline{j} - \underline{k}$$

الحل :

$$(\underline{F} \cdot \underline{G})(t) = 3t - 2(t^2 + t) - t^4$$

كذلك

$$(\underline{F} \times \underline{G})'(t) = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & 2t+1 & -1 \\ 1 & 0 & 3t^2 \end{vmatrix}$$

$$= 3t^2(2t+1) \underline{i} - \underline{j} - (2t+1) \underline{k}$$

نتيجة (12.10) اذا $\underline{F}$ قابل للاشتقاق على الفترة I واذا كان هناك عدد c بحيث ان

$$\|\underline{F}(t)\| = c \quad , \quad t \in I$$

$$t \in I \quad , \quad \underline{F}(t) \cdot \underline{F}'(t) = 0 \quad \text{فان}$$

البرهان : من الفرض $\underline{F}(t) \cdot \underline{F}(t) = \|\underline{F}(t)\|^2 = c^2$ لعدد ما $t \in I$. اي ان

$\underline{F} \cdot \underline{F}$ هو اقتران حقيقي ثابت مشتقته صفر . من المبرهنة السابقة

$$(\underline{F} \cdot \underline{F})' = \underline{F}' \cdot \underline{F} + \underline{F} \cdot \underline{F}' = 2 \underline{F} \cdot \underline{F}' = 0$$

هذه المبرهنة تؤكد على انه اذا $\|\underline{F}\|$ هو اقتران حقيقي ثابت لكل عدد t في

مجال $\underline{F}$, فان $\underline{F}'$, $\underline{F}$ متعامدان . فالكرة S ذات نصف قطر r حيث $\|\underline{F}\| = r$ تمثل

حركة جسم على S . عندها $\underline{F}'(t)$ عمود على $\underline{F}(t)$ اذا $\underline{F} \neq 0$.

ونعرف المشتقات العليا , في حال وجودها , بالاسلوب السابق , ولها العلاقة

نفسها مع مركبات $\underline{F}$.

نأتي الآن الى تطبيقات الحركة لهذه المفاهيم . ندرس حركة جسم في الفضاء

له الاحداثيات x, y, z , وهي اقترانات في الزمن t . نفرض هذه الاقترانات لها

حتى المشتقة الثانية , على الأقل , فاننا نعرف مفاهيم الموضع والسرعة المتجهة

والسرعة والتسارع كما يلي

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k} \quad (\text{متجه}) \quad \text{الموضع}$$

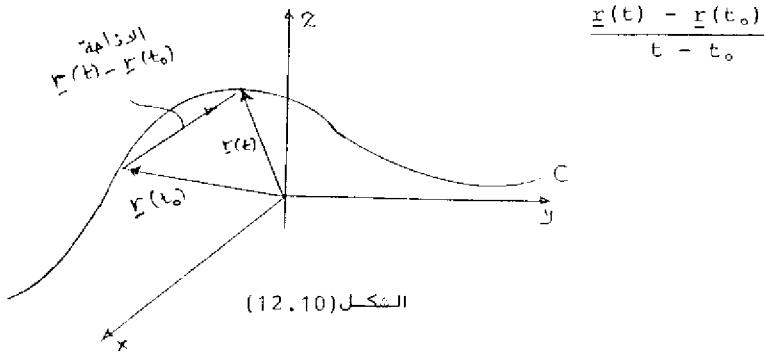
$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\underline{i} + \frac{dy}{dt}\underline{j} + \frac{dz}{dt}\underline{k} \quad (\text{متجه}) \quad \text{السرعة}$$

$$\|\underline{v}(t)\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (\text{مقدار}) \quad \text{السرعة}$$

$$\underline{a}(t) = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\underline{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\underline{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\underline{k} \quad (\text{متجه}) \quad \text{التسارع}$$

وقد نستخدم النقطة فوق الحرف لكل مشتقة مثل $\dot{\underline{r}} = \underline{v}$, $\dot{\underline{v}} = \underline{a}$.

وقد نسمي متجه الموضع المتجه الشعاعي ، وعادة ما يكون $\underline{r}(t)$ هو قطعة مستقيم من نقطة الاصل الى موضع الجسم في اللحظة t . اذا $t \neq t_0$ لحظة أخرى فان المتجه $\underline{r}(t) - \underline{r}(t_0)$ يسمى متجه الازاحة من موضع الجسم في اللحظة t_0 الى موضعه في اللحظة t انظر الشكل (12.10) . ونعرف متوسط السرعة كما يلي



مثال (12.16) جسم يتحرك في خط مستقيم

$$\underline{r}(t) = (x_0 + at)\underline{i} + (y_0 + bt)\underline{j} + (z_0 + ct)\underline{k}$$

$$\underline{v}(t) = \frac{d\underline{r}}{dt} = a\underline{i} + b\underline{j} + c\underline{k} \quad \text{فان متجه السرعة}$$

$$\underline{a}(t) = \frac{d\underline{v}}{dt} = \underline{0} \quad \text{بينما التسارع}$$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \quad \text{ومقدار السرعة}$$

$$\underline{r}(t) = r(t - \sin t)\underline{i} + r(1 - \cos t)\underline{j} \quad \text{مثال (12.17) افرض}$$

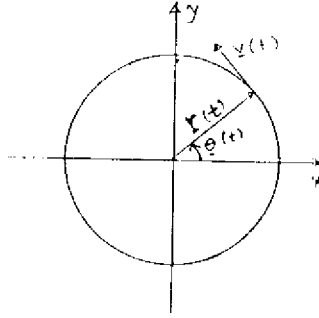
$$\underline{v}(t) = \underline{0} \quad \text{حيث } t \text{ قديم}$$

$$\underline{v}(t) = r(1 - \cos t)\underline{i} + r \sin t \underline{j} = 0\underline{i} + 0\underline{j}$$

$$1 - \cos t = 0, \quad \sin t = 0 \quad \text{لذلك}$$

أي أن $\underline{v}(t) = 0$ عندما t تحقق هاتين المعادلتين ، وذلك عند $2n\pi$ (n عدد صحيح) .

مثال (12.18) جسم يتحرك ضد عقارب الساعة في دائرة نصف قطرها $r > 0$ بسرعة ثابتة



الشكل (12.11)

v_0 . اشت أن متجه الموضع لهذا الجسم هو

$$\underline{r}(t) = r \left(\cos \frac{v_0 t}{r} \underline{i} + \sin \frac{v_0 t}{r} \underline{j} \right)$$

الحل : نرسم دائرة في مركزها نقطة امل

محورين متعامدين x, y . انظر الشكل

(12.11) . الجسم على محور x في اللحظة

$t = 0$ ، ويتحرك ضد عقارب الساعة ، في أي

لحظة t افرض الزاوية بين $\underline{r}(t)$ ومحور x

هي $\theta(t)$ فان

$$\underline{r}(t) = r [\cos \theta(t) \underline{i} + \sin \theta(t) \underline{j}]$$

$$\underline{v}(t) = r \theta'(t) [-\sin \theta(t) \underline{i} + \cos \theta(t) \underline{j}] \quad \text{لذلك}$$

والزاوية θ تردد لأن الحركة ضد عقارب الساعة ، أي أن $\theta'(t) > 0$. لذلك

$$\|\underline{v}(t)\| = |r \theta'(t)| = r \theta'(t) = v_0 , \quad r > 0$$

أي أن $\theta(t) = \frac{v_0 t}{r}$ ومن ذلك نجد

$$\underline{r}(t) = r \left(\cos \frac{v_0 t}{r} \underline{i} + \sin \frac{v_0 t}{r} \underline{j} \right)$$

$$\underline{a}(t) = -\frac{v_0^2}{r} \left(\cos \frac{v_0 t}{r} \underline{i} + \sin \frac{v_0 t}{r} \underline{j} \right) = -\frac{v_0^2}{r^2} \underline{r}(t) \quad \text{لاحظ أن}$$

لاحظ في هذا المثل ، أن السرعة v_0 ثابتة لكن متجه السرعة $\underline{v}$ غير ثابت .

كذلك فان التسارع يتجه نحو مركز الدائرة ، نسمي هذا تسارعا مركزيا ، والقوة

$$\|\underline{a}(t)\| = \frac{v_0^2}{r^2} \|\underline{r}\| = \frac{v_0^2}{r} \quad \text{ومقداره}$$

ولو أن سائلا (قمرا صناعيا) يتحرك حول الأرض بسرعة ثابتة بتأثير الجاذبية

الأرضية فقط فان مقدار التسارع هو 9.8 متر/ث² . ولو أن هذا السائل على ارتفاع

6593 كيلومترا فان سرعته هي :

$$\begin{aligned} \frac{v_0^2}{r} &\approx 9.8 \\ v_0 &= \sqrt{6593 \times 9.8 \times 10^{-3}} = 8.038 \text{ كم/ث} \quad \text{لذلك} \\ &= 28937 \text{ كم/الساعة} \end{aligned}$$

تكاملات اقترانات متجهة

يمكن الوصول الى تكامل اقتران متجه حسب مجاميع ريمان ، ولكن اختصارا للجدد والوقت نعرف تكامل اقتران متجه بدلالة تكاملات مركباته .

تعريف (12.11) افرض $\underline{F}(t) = f(t)\underline{i} + g(t)\underline{j} + h(t)\underline{k}$

حيث f, g, h متصلة على $[a, b]$. فان التكامل المحدد $\int_a^b \underline{F}(t) dt$ وكذلك التكامل غير المحدد $\int \underline{F}(t) dt$ يعرفان كما يلي

$$\begin{aligned}\int_a^b \underline{F}(t) dt &= \left[\int_a^b f(t) dt \right] \underline{i} + \left[\int_a^b g(t) dt \right] \underline{j} + \left[\int_a^b h(t) dt \right] \underline{k} \\ \int \underline{F}(t) dt &= \left[\int f(t) dt \right] \underline{i} + \left[\int g(t) dt \right] \underline{j} + \left[\int h(t) dt \right] \underline{k}\end{aligned}$$

مثال (12.19) افرض $\underline{F}(t) = 2t\underline{i} - t^2\underline{j} + \cos t\underline{k}$

$$\int_0^{\pi/2} \underline{F}(t) dt , \quad \int \underline{F}(t) dt \quad \text{جد}$$

$$\begin{aligned}\text{الحل :} \quad \int \underline{F}(t) dt &= \left(\int 2t dt \right) \underline{i} + \left(\int -t^2 dt \right) \underline{j} + \left(\int \cos t dt \right) \underline{k} \\ &= (t^2 + c_1) \underline{i} - \left(\frac{t^3}{3} + c_2 \right) \underline{j} + (\sin t + c_3) \underline{k} \\ &= t^2 \underline{i} - \frac{t^3}{3} \underline{j} + \sin t \underline{k} + \underline{c} \\ \int_0^{\pi/2} \underline{F}(t) dt &= t^2 \Big|_0^{\pi/2} \underline{i} - \frac{t^3}{3} \Big|_0^{\pi/2} \underline{j} + \sin t \Big|_0^{\pi/2} \underline{k} \\ &= \frac{\pi^2}{4} \underline{i} - \frac{\pi^3}{24} \underline{j} + \underline{k}\end{aligned}$$

كذلك اذا $\underline{F}(t) = f(t)\underline{i} + g(t)\underline{j} + h(t)\underline{k}$

$$\begin{aligned}\int \underline{F}'(t) dt &= \int [f'(t)\underline{i} + g'(t)\underline{j} + h'(t)\underline{k}] dt \quad \text{فان} \\ &= \left[\int f'(t) dt \right] \underline{i} + \left[\int g'(t) dt \right] \underline{j} + \left[\int h'(t) dt \right] \underline{k} \\ &= [f(t) + c_1] \underline{i} + [g(t) + c_2] \underline{j} + [h(t) + c_3] \underline{k} \\ &= \underline{F}(t) + [c_1 \underline{i} + c_2 \underline{j} + c_3 \underline{k}] \\ &= \underline{F}(t) + \underline{c}\end{aligned}$$

حيث $\underline{c}$ متجه ثابت ، ولهذه العلاقة اهمية في دراسة الحركة ، ونرى منها ما يلي بالنسبة الى السرعة والتسارع

$$\int \underline{v}(t) dt = \int \underline{r}'(t) dt = \underline{r}(t) + \underline{C}$$

$$\int \underline{a}(t) dt = \int \underline{v}'(t) dt = \underline{v}(t) + \underline{C}$$

الصيغة المتجهة لقانون نيوتن الثاني

يمكن صياغة قانون نيوتن الثاني كما يلي

$$\underline{F} = m \underline{a}(t)$$

ولذلك في دراسة حركة جسم قريب من الأرض يتأثر بالجاذبية الأرضية فقط ،
فانه باختصار مناسب للاحداثيات يمكن صياغة الحركة : افرض محورها يخرج من مركز
الأرض ، فان التسارع يكون $\underline{k} -g$ ، حيث g ثابت الجاذبية (حوالي 32 قدما أو
9.8 مترا في الثانية في الثانية) .

فاذا كان جسم ما في موقع ابتدائي $\underline{r}_0$ وله سرعة ابتدائية $\underline{v}_0$ وينتحر

بتسارع ثابت هو $\underline{k} -g$ فانه بالتكامل نحصل على

$$\underline{v}(t) = \int \underline{a}(t) dt = \int -g \underline{k} dt = -g t \underline{k} + \underline{C}$$

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= \int \underline{v}(t) dt = \int (-g t \underline{k} + \underline{C}) dt \\ &= -\frac{g t^2}{2} \underline{k} + \underline{C} t + \underline{C}_1 \end{aligned}$$

حيث $\underline{C}$ ، $\underline{C}_1$ متجهان ثابتان . الآن $\underline{v}_0 = \underline{v}(0)$ ، $\underline{r}_0 = \underline{r}(0)$ لذلك

$$\underline{r}(t) = -\frac{g t^2}{2} \underline{k} + \underline{v}_0 t + \underline{r}_0 \quad (*)$$

مثل (12.20) كرة ضربت من ارتفاع 4 امتار فوق سطح الأرض بسرعة ابتدائية قدرها

56 مترا/ث ، وبزاوية $\pi/6$ مع الأرض . متى تضرب هذه الكرة سطح الأرض ؟

الحل : نختار نظاما احداثيا ، حتى يتصل سطح الأرض بالمستوى xy ، وان حركة
الكرة هي في المستوى xy ، وان مركبة $\underline{v}$ من متجه الموضع لها يبرداد . لذلك

$$\underline{r}_0 = 4 \underline{k} \quad \text{كذلك}$$

$$\begin{aligned} \underline{v}_0 &= 56 \left(\cos \frac{\pi}{6} \underline{j} + \sin \frac{\pi}{6} \underline{k} \right) = 56 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \underline{j} + \frac{1}{2} \underline{k} \right) \\ &= 28 \sqrt{3} \underline{j} + 28 \underline{k} \end{aligned}$$

نعوض في (*) نحصل على

$$\begin{aligned} \underline{r}(t) &= -\frac{g t^2}{2} \underline{k} + (28 \sqrt{3} \underline{j} + 28 \underline{k}) t + 4 \underline{k} \\ &= 28 \sqrt{3} t \underline{j} + \left(-\frac{g t^2}{2} + 28 t + 4 \right) \underline{k} \end{aligned}$$

عندما تصطدم الكرة بالأرض فإن مركبة $\underline{k}$ من متجه موضعها هو صفر . لذلك

$$-\frac{g t^2}{2} + 28 t + 4 = 0$$

$$g t^2 - 56 t - 8 = 0$$

$$9.8 t^2 - 56 t - 8 = 0$$

$$t = \frac{56 \pm \sqrt{3449.6}}{19.6} = \frac{56 \pm 58.73}{19.6}$$

$$= 5.79$$

أي أن الكرة تصطدم بالأرض بعد 5.79 ثانية .

تمارين (12.3)

للتمارين (1) - (8) جد مشتقات الاقترانات المفروضة

$$\underline{F}(t) = 2t \underline{i} - \underline{j} + \sin t \underline{k} \quad (1)$$

$$\underline{F}(t) = 2\underline{i} - 3t \underline{j} + e^t \underline{k} \quad (2)$$

$$\underline{F}(t) = (1+t)^{1/2} \underline{i} - (1-t^2)^{1/2} \underline{j} + t \underline{k} \quad (3)$$

$$\underline{F}(t) = \tan t \underline{i} - \sec^2 t \underline{j} \quad (4)$$

$$\underline{F}(t) = e^t \sin t \underline{i} + e^t \cos t \underline{k} \quad (5)$$

$$\underline{F}(t) = \cosh t \underline{i} + \sinh t \underline{j} - \sqrt{t} \underline{k} \quad (6)$$

$$\underline{F}(t) = \sin^{-1} t \underline{i} - 3 \tan^{-1}(t^2 - 1) \underline{k} \quad (7)$$

$$\underline{F}(t) = \ln(t^2 + 1) \underline{i} - 2e^t \underline{j} + \log_5 \sqrt{t} \underline{k} \quad (8)$$

$$\underline{G} = 3t \underline{i} - t^2 \underline{j} - 4 \csc t \underline{k}, \quad \underline{F} = 2 \sec t \underline{i} - 3 \underline{j} + \csc t \underline{k} \quad \text{إذا}$$

جد المشتقة في التمارين (9) - (12)

$$\underline{F} \cdot \underline{G} \quad (10) \quad 4 \underline{F} - 2 \underline{G} \quad (9)$$

$$\underline{F} \times (4 \underline{F} - 2 \underline{G}) \quad (12) \quad \underline{F} \times \underline{G}, \quad \underline{G} = \ln t \quad (11)$$

$$\underline{G}(t) = \frac{-2-4t^2}{(1+t^2)^2} \underline{i} - \frac{4t}{(1+t^2)^2} \underline{j}, \quad \underline{F}(t) = \frac{-2t}{1+t^2} \underline{i} + \frac{1+2t^2}{1+t^2} \underline{j} \quad \text{إذا}$$

جد مشتقة التمارين (13) - (14)

$$\underline{F} \times \underline{G} \quad (14) \quad \underline{F} \cdot \underline{G} \quad (13)$$

جد مشتقة التمارين (15) - (17)

$$\underline{F} \circ \underline{g}, \quad \underline{F}(t) = \ln t \underline{i} - 4e^{2t} \underline{j} + \frac{t-1}{t} \underline{k}, \quad \underline{g}(t) = \sqrt{t} \quad (15)$$

$$\underline{F} \circ g, \underline{F}(t) = t^3 \underline{i} - \sqrt{3} t \underline{j} + t^{-2} \underline{k}, g(t) = \cos t \quad (16)$$

$$\underline{F}(t) \cdot \underline{F}(t), \underline{F}(t) = \frac{4}{1+4t^2} \underline{i} + \frac{1-4t^2}{1+4t^2} \underline{j} \quad (17)$$

للتمارين (18) - (22) احسب التكاملات

$$\int [(t \cos t \underline{i} - t \sin t \underline{j} + 5t^4 \underline{k})] dt \quad (18)$$

$$\int (t^2 \underline{i} - (2t - 1) \underline{j} + t^{-2} \underline{k}) dt \quad (19)$$

$$\int_0^1 (\cosh t \underline{i} - \sinh t \underline{j} + 2 \underline{k}) dt \quad (20)$$

$$\int_0^1 (e^t \underline{i} + e^{-t} \underline{j} + 2t \underline{k}) dt \quad (21)$$

$$\int_{-1}^1 [(1+t)^{3/2} \underline{i} - (1-t)^{3/2} \underline{j}] dt \quad (22)$$

للتمارين (23) - (26) جد متجه السرعة والسرعة (مقدارا) والتسارع لجسم

يتحرك حسب اقتران الموضع المفروض .

$$\underline{r}(t) = \cos t \underline{i} + \sin t \underline{j} - 2t^2 \underline{k} \quad (23)$$

$$\underline{r}(t) = 3t \underline{i} - 2t \underline{j} - 16t^2 \underline{k} \quad (24)$$

$$\underline{r}(t) = e^t \sin t \underline{i} + e^t \cos t \underline{j} + e^t \underline{k} \quad (25)$$

$$\underline{r}(t) = \cosh t \underline{i} - \sinh t \underline{j} - t \underline{k} \quad (26)$$

للتمارين (27) - (30) احسب الموضع ومتجه السرعة وسرعة جسم يتحرك مفروض

تسارعه $\underline{a}(t)$ وسرعته الابتدائية $\underline{v}_0$ وموضعه الابتدائي $\underline{r}_0$

$$\underline{a}(t) = -32 \underline{k}, \underline{v}_0 = \underline{i} + \underline{j}, \underline{r}_0 = \underline{0} \quad (27)$$

$$\underline{a}(t) = -9.8 \underline{k}, \underline{v}_0 = \underline{0}, \underline{r}_0 = 2 \underline{i} - \underline{j} \quad (28)$$

$$\underline{a}(t) = -\cos t \underline{i} - \sin t \underline{j}, \underline{v}_0 = \underline{k}, \underline{r}_0 = \underline{i} \quad (29)$$

$$\underline{a}(t) = e^t \underline{i} - e^{-t} \underline{j}, \underline{v}_0 = \underline{i} + \underline{j} + \sqrt{2} \underline{k}, \underline{r}_0 = \underline{i} - \underline{j} \quad (30)$$

$$\underline{F}(t) = \int_{0t^2}^t (u \tan u^3 \underline{i} + \cos e^u \underline{j} + e^{u^2} \underline{k}) du \quad \text{جد } \underline{F}'(t) \quad (31)$$

$$\underline{H}(t) = \int_0^t (\cos u \underline{i} + e^{-(u^3)} \underline{j} + \tan u \underline{k}) du \quad \text{جد } \underline{H}'(t) \quad (32)$$

$$\underline{F}(t) = \cos t \underline{i} + \sin t \underline{j} \quad \text{اذا } t \in (0, \pi) \quad (33)$$

$$\frac{\underline{F}(\pi) - \underline{F}(0)}{\pi - 0}$$

بوازي $\underline{F}'(t)$. بينما لا توجد قيمة t بحيث أن

$$F'(t) = \frac{F(\pi) - F(0)}{\pi - 0}$$

$$(34) \quad \text{إذا } \underline{F}(t) = e^{-2t} \underline{i} + e^{2t} \underline{k} \text{ ، اثبت انه لجميع قيم } t \text{ ، المتجهان } \underline{F}'' \text{ ، } \underline{F}$$

متوازيان . هل هناك قيمة t بحيث أن $\underline{F}(t)$ ، $\underline{F}''(t)$ في الاتجاه نفسه ؟

$$(35) \quad \text{اثبت أن } \frac{d}{dt}(\underline{F} \times \underline{F}') = \underline{F}(t) \times \underline{F}''(t)$$

$$(36) \quad \text{إذا } \underline{F}(t) \text{ ، } \underline{F}''(t) \text{ متوازيان ، اثبت أن } \underline{F} \times \underline{F}' \text{ ثابت . (ارشاد استعمل}$$

التمرين 35) .

$$(37) \quad \text{إذا } \underline{F} \text{ ، } \underline{G} \text{ ، } \underline{H} \text{ قابلة الاشتقاق ، اثبت أن}$$

$$\frac{d}{dt}[\underline{F} \cdot (\underline{G} \times \underline{H})] = \frac{d\underline{F}}{dt} \cdot (\underline{G} \times \underline{H}) + \underline{F} \cdot \left(\frac{d\underline{G}}{dt} \times \underline{H} \right) + \underline{F} \cdot \left(\underline{G} \times \frac{d\underline{H}}{dt} \right)$$

$$(38) \quad \text{افرض أن موضع كرة (انظر المثل 20 ، 12) هو}$$

$$\underline{r}(t) = 90\sqrt{2} t \underline{i} + 90\sqrt{2} t \underline{j} + (64t - 16t^2) \underline{k} \text{ ، } t \geq 0$$

(أ) جد $\underline{r}_0$ (الموضع الابتدائي) ، $\underline{v}_0$ (السرعة الابتدائية) .

(ب) اثبت أن الكرة تصطدم بالارض بعد 4 ثوان .

$$(39) \quad \text{ساتل يدور حول الارض في مداره بسرعة 28502 كم/ الساعة . ما هو نصف قطر}$$

مداره ؟

$$(40) \quad \text{المسارع النووي في مختبر فيرمي للمسارع النووي (في ايلينوي - الولايات}$$

المتحدة) هو دائرة نصف قطرها كيلو متر واحد . جد مقدار التسارع المركزي

لبروتون يتحرك في المسارع بسرعة ثابتة :

$$(أ) \quad 2.5 \times 10^5 \text{ كم / ث } \quad (ب) \quad 2.9 \times 10^5 \text{ كم / ث}$$

$$(41) \quad \text{يمكن برهنة الخصائص التالية لتكاملات الاقترانات المتجهة}$$

$$\int_a^b [\underline{F}(t) + \underline{G}(t)] dt = \int_a^b \underline{F}(t) dt + \int_a^b \underline{G}(t) dt \quad (أ)$$

$$(ب) \quad \int_a^b [\alpha \underline{F}(t)] dt = \alpha \int_a^b \underline{F}(t) dt \quad \alpha \text{ عدد قياسي}$$

$$(ج) \quad \int_a^b [\underline{C} \cdot \underline{F}(t)] dt = \underline{C} \cdot \int_a^b \underline{F}(t) dt \quad \underline{C} \text{ متجه}$$

$$(د) \quad \left\| \int_a^b \underline{F}(t) dt \right\| \leq \int_a^b \left\| \underline{F}(t) \right\| dt$$

(12.4) المنحنيات واطوالها

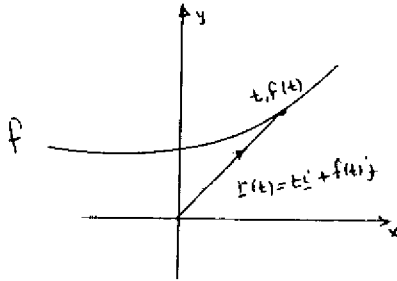
تعريف (12.12) المنحني الفضائي (أو المنحني) هو مدى اقتران متجه متصل على فترة من الاعداد الحقيقية .

ليست ، بالطبع ، هذه أول مرة نصادف المنحنيات ، فلقد درسنا فيما سبق النقطة (منحنيا ممسوخا) والمستقيم وقطوع المخروط ، ومنحنيا لولبيا وغير ذلك. سنستعمل ، على الغالب ، الحرف C ليدل على المنحني ، كما أن $\underline{x}$ ستدل على الاقتران المتجه الذي مداه C . ونقول أن C قد مَعْلَمَ $\underline{x}$ ، أو أن $\underline{x}$ هو معلمة للمنحني C . على أننا لن نفرق بين C ومعادلته المَعْلَمية ، فنقول المعادلة

$$\underline{x}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}$$

هي المنحني C ، وسنرى أن تعريفنا اعلاه واسع ليشمل كل المنحنيات التي عرفناها .

مثل (12.21) افرض f اقترانا حقيقيا متصلا على فترة ما I ، اثبت أن رسم f هو منحن ، واكتب مَعْلَمَةً له .



الحل : نعرف الاقتران المتجه

$$\underline{x}(t) = t\underline{i} + f(t)\underline{j} , t \in I$$

فان $\underline{x}$ متصل ، ويرسم منحنى f . انظر الشكل (12.12) وهكذا حسب تعريفنا اعلاه فان

رسم f هو منحن .

خصائص المنحنيات

الشكل (12.12)

يهمنا ثلاث خصائص للمنحنيات : المنحني المغلق والممهد ، والممهد اجزاءً .

تعريف (12.13) المنحني C مغلق اذا مَعْلَمَتُه مجالها فترة مغلقة $[a, b]$ وان $\underline{x}(a) = \underline{x}(b)$. انظر الشكل (12.13) للمنحني المغلق وغير المغلق (المفتوح) .

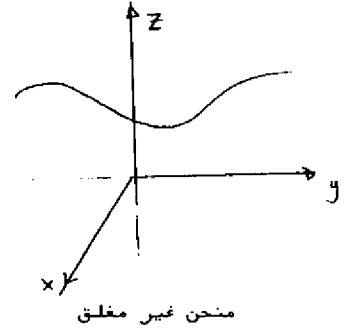
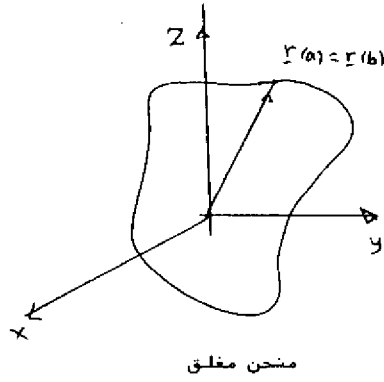
مثل (12.22) افرض المنحني C

$$\underline{x}(t) = 2\cos t \underline{i} + 2\sin t \underline{j} , 0 < t \leq 2\pi$$

فهذا المنحني هو دائرة نصف قطرها 2 ، ولاحظ أن $\underline{x}(0) = \underline{x}(2\pi)$.

تعريف (12.14)

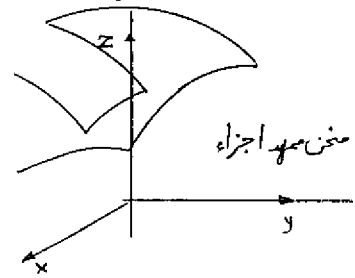
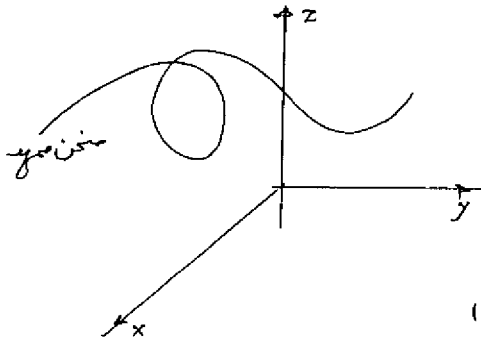
(I) الاقتران المتجه $\underline{x}$ على الفترة I ممهد اذا $\underline{x}$ له مشتقة متصلة على I ، وان



الشكل (12.13)

- $\underline{r}'(t) \neq 0$ لأي $t \in I$ ، إلا ربما عند أحد طرفي I .
- (ب) الاقتراح المتجه الممثل $\underline{r}$ على الفترة I هو ممسد أجزاء إذا I مؤلفة من عدد محدود من الفترات الجزئية على كل منها $\underline{r}$ ممسدة .

ومن ناحية الشكل فإن المنحني الممسد مؤلف من قطعة واحدة دون أن يكون فيه أجزاء تلتقي في زوايا حادة ، والمنحني الممسد أجزاء مؤلف من عدة قطع كل منها ممسدة . انظر الشكل (12.14) .



الشكل (12.14)

مثال (12.22) نشأت أن منحنى الدائرة ممسدة .

البرهان : معادلة الدائرة المعلمية هي

$$\underline{r}(t) = \cos t \underline{i} + \sin t \underline{j} , 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\underline{r}'(t) = -\sin t \underline{i} + \cos t \underline{j} \quad \text{لذلك}$$

والمشتقة متصلة على $[0, 2\pi]$. كذلك

$$\|\underline{r}'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$$

وحسب التعريف أعلاه ، فإن منحنى الدائرة ممسدة .

مثال (12.23) اثبت أن منحنى الدويري الذي معادلته

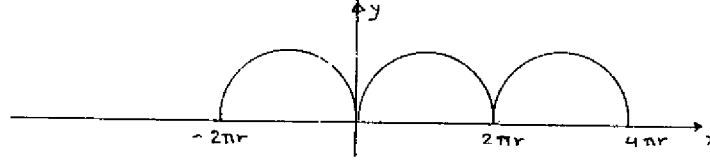
$$\underline{r}(t) = r(t - \sin t)\underline{i} + r(1 - \cos t)\underline{j} , [-2\pi, 2\pi]$$

هو ممهد اجزأ .

$$\underline{r}'(t) = r(1 - \cos t)\underline{i} + r \sin t \underline{j} \quad ; \quad \text{البرهان :}$$

منها نجد ان $\underline{r}'$ متصل ، لكن $\underline{r}'(t) = \underline{0}$ عندما $t = 0$ أو $\pm 2\pi$.

لذلك فان هذا المنحني ممهد اجزأ . انظر الشكل (12.15) .



الشكل (12.15)

طول المنحني : في اشتقاقنا للقاعدة التي تعطي طول منحن ممهد على فترة مغلقة ،

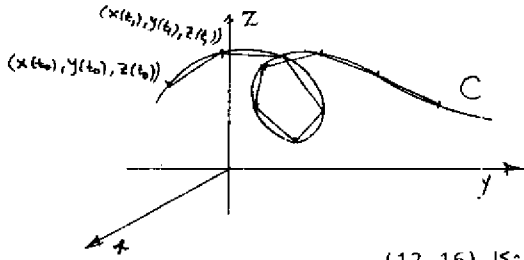
فاننا نعلم ما درسناه سابقا لطول منحن حقيقي . انظر البند (5:11) .

افرض C منحنيًا ممهدًا معلومًا حسب

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k} , a \leq t \leq b$$

افرض $P = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n$ تجزئة للفترة $[a, b]$. وافرض

ان L هو كثير الاضلاع الذي يصل بين نقاط C حسب هذه التجزئة . انظر الشكل (12.16) .



وحسب قاعدة المسافة بين نقطتين

فان

الشكل (12.16)

$$L_k = \sqrt{[x(t_k) - x(t_{k-1})]^2 + [y(t_k) - y(t_{k-1})]^2 + [z(t_k) - z(t_{k-1})]^2}$$

وحسب مبرهنة القيمة المتوسطة ، توجد اعداد u_k, v_k, w_k في $[t_{k-1}, t_k]$ بحيث

ان

$$x(t_k) - x(t_{k-1}) = x'(u_k) \Delta t_k , y(t_k) - y(t_{k-1}) = y'(v_k) \Delta t_k$$

$$z(t_k) - z(t_{k-1}) = z'(w_k) \Delta t_k$$

اي ان

$$L_k = \sqrt{[x'(t_k)]^2 + [y'(t_k)]^2 + [z'(t_k)]^2} \Delta t_k$$

فإذا $\|P\| > 1$ (*) فإن طول C يمكن تقريبه بالمجموع $\sum_{k=1}^n L_k$ أي أن

$$\sum_{k=1}^n L_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{[x'(t_k)]^2 + [y'(t_k)]^2 + [z'(t_k)]^2} \Delta t_k \quad (*)$$

ومماثل لما كنا نضع في هذه المجاميع سابقا فإنه مع $\|P\| \leftarrow 0$ نجد أن (*) تتحول إلى

$$\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

وبما أن $\|x'(t)\| = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}$ فإن طول المنحني يتحول إلى

$$\int_a^b \|x'(t)\| dt$$

وهذا يقودنا إلى التعريف التالي

تعريف (12.15) افرض C منحنيا معبدا احزا على $[a, b]$ له تمثيل مَعْلَمي x . فإن طول C معرف حسب

$$L = \int_a^b \|x'(t)\| dt$$

$$x(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k}, \quad a \leq t \leq b \quad \text{واذا}$$

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \quad \text{فإن}$$

مثل (12.23) نجد طول اللولب الدائري

$$x(t) = 2 \cos t \underline{i} + 2 \sin t \underline{j} + 2t \underline{k}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

الحل: حسب القاعدة اعلاه

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2 + (2)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} dt = 4\pi\sqrt{2} \end{aligned}$$

مثل (12.25) جد طول المنحني الذي معادلاته: $y = e^t, z = e^t \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$

$$x = e^t \cos t$$

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{[e^t(\cos t - \sin t)]^2 + (e^t)^2 + [e^t(\sin t + \cos t)]^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{3} e^t dt = \sqrt{3} e^t \Big|_0^{2\pi} = \sqrt{3} (e^{2\pi} - 1) \end{aligned}$$

(*) العلاقة $\|P\| > 1$ تعني صغير جدا ، لذلك $\|P\| > 1$ تعني أن مقياس التجزئة الذي

هو طول اكبر فترة جزئية ، هو صغير جدا .

والتمثيل المَعْلَمي لمنحن ما ليس وحيدا ، فقد تكون له اكثر من صيغة ، ومع ذلك يبقى طول هذا المنحني لا يتغير . أي أن الدلول مستقل عن التمثيل المَعْلَمي .
 مثل (12.26) افرض قطعة مستقيم من $(-\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \frac{1}{9})$ الى $(2, 2, 2)$. فان أيها من

المعادلات المعلمية التالية تمثل هذه القطعة

$$\begin{aligned}\underline{r}_1(t) &= t \underline{i} + t \underline{j} + t \underline{k} , \quad \frac{1}{9} \leq t \leq 2 \\ \underline{r}_2(t) &= (t-1) \underline{i} + (t-1) \underline{j} + (t-1) \underline{k} , \quad \frac{10}{9} \leq t \leq 3 \\ \underline{r}_3(t) &= t^2 \underline{i} + t^2 \underline{j} + t^2 \underline{k} , \quad \frac{1}{3} \leq t \leq \sqrt{2}\end{aligned}$$

ونحسب الطول حسب كل من هذه المعادلات

$$\begin{aligned}L_1 &= \int_{1/9}^2 \sqrt{1+1+1} dt = \sqrt{3} t \Big|_{1/9}^2 = \sqrt{3} \frac{(17)}{9} \\ L_2 &= \int_{10/9}^3 \sqrt{1+1+1} dt = \sqrt{3} t \Big|_{10/9}^3 = \sqrt{3} \frac{(17)}{9} \\ L_3 &= \int_{1/3}^2 \sqrt{(2t)^2 + (2t)^2 + (2t)^2} dt = \int_{1/3}^2 2\sqrt{3} t dt \\ &= \sqrt{3} t^2 \Big|_{1/3}^2 = \frac{17\sqrt{3}}{9}\end{aligned}$$

طول منحن بالاحداثيات القطبية

ذكرنا فيما سبق (البند 10:6) طول منحن موصوف بالاحداثيات القطبية فإذا

$r = f(\theta)$ ، فان المنحني C يعطى على $[\alpha, \beta]$ كما يلي

$$\underline{r}(\theta) = r \cos \theta \underline{i} + r \sin \theta \underline{j} = f(\theta) \cos \theta \underline{i} + f(\theta) \sin \theta \underline{j}$$

لذلك

$$\begin{aligned}\underline{r}'(\theta) &= [f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta] \underline{i} + [f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta] \underline{j} \\ \|\underline{r}'(\theta)\|^2 &= [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2\end{aligned}$$

أي أن طول المنحني هو حسب القاعدة

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta$$

مثل (12.27) احسب طول المنحني القطبي $r = 1 + \cos \theta$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$

الحل : $f(\theta) = 1 + \cos \theta$ لذلك $f'(\theta) = -\sin \theta$

$$L = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta = 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos \theta} d\theta$$

$$= 2\sqrt{2} \int_0^{\pi} \sqrt{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^{\pi} = 8$$

اقتران طول المنحني : اعتمادا على ما سبق ، فانه اذا المنحني C هو

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} + z(t)\underline{k} , \quad t \in I$$

واذا فرضنا a عددا ثابتا من الفترة I ، فاننا نعرف اقتران طول المنحني كما يلي

$$s(t) = \int_a^t \|\underline{r}'(u)\| du = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2 + [z'(u)]^2} du \quad t \in I.$$

فاذا $t \geq a$ فان $s(t)$ هو ذلك الجزء من المنحني بين $\underline{r}(a)$ و $\underline{r}(t)$. انظر الشكل (12.17) . واذا $t < a$ هو متجه الموضع في اللحظة $a \leq t$ فان $s(t)$ هو المسافة التي يقطعها الجسم بين اللحظتين a , t . لاحظ ان

$$\frac{ds}{dt} = \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

فاذا $\underline{r}$ هو موضع الجسم ، فان $\underline{v}$ متجه سرعته . كذلك

$$\|\underline{r}'(t)\| = \|\underline{v}(t)\| = \frac{ds}{dt} \geq 0$$

وبما ان $\frac{ds}{dt} > 0$ (الا ربما عند طرفي الفترة) ، فانه يمكن اعتبار t اقترانا في s ، وهكذا نحصل على $\underline{r}(t(s))$ على $s \in [0, L]$ ونستفيد من هذه الملاحظة لحساب

$$\frac{ds}{dt}$$

$$\underline{r}(t) = 2t\underline{i} - t^2\underline{j} - t^3\underline{k} \quad \text{مثلا (12.28) افرض}$$

فبان

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{4 + 4t^2 + 9t^4} \end{aligned}$$

تمارين (12.4)

للتمارين (1) - (8) حدد ايا من هذه المنحنيات ممهدا او ممهدا اجزاء

$$\underline{r}(t) = 2t\underline{i} - t^2\underline{j} + t^3\underline{k} \quad (1)$$

$$\underline{r}(t) = (t+1)\underline{i} - (t+1)\underline{j} + (t+1)\underline{k} \quad (2)$$

$$\underline{r}(t) = t\underline{i} - |t|\underline{j} + t\underline{k} \quad (3)$$

$$\underline{r}(t) = t^2\underline{i} + t\underline{j} - t^{3/2}\underline{k} \quad (4)$$

$$\underline{r}(t) = \sin t\underline{i} - \cos t\underline{j} - t^2\underline{k} \quad (5)$$

$$\underline{r}(t) = t^2 \underline{i} + e^t \underline{j} + e^t \underline{k} \quad (6)$$

$$\underline{r}(t) = t^2 \underline{i} - t^3 \underline{j} + (e^t - t) \underline{k} \quad (7)$$

$$\underline{r}(t) = t \underline{i} + 2t^2 \underline{j} - \ln t \underline{k} \quad (8)$$

للتمارين (9) - (16) جد تمثيلا معلميا ممهدا

$$(9) \quad \text{قطعة المستقيم من } (2, 2, 1) \text{ الى } (4, 4, 2)$$

$$(10) \quad \text{قطعة المستقيم من } (1, 2, -1) \text{ الى } (3, 2, 2)$$

$$(11) \quad \text{دائرة في مستوى } xy, \text{ مركزها نقطة الاصل, ونصف قطرها } 5.$$

$$(12) \quad \text{دائرة في مستوى } z = 1 \text{ مركزها } (1, -1, -1) \text{ ونصف قطرها } \frac{4}{5}.$$

$$(13) \quad \text{نصف دائرة في مستوى } xy \text{ تمر بالنقاط } (1, 0), (0, 1), (0, -1).$$

$$(14) \quad \text{ربع دائرة في مستوى } xy \text{ طرفاه } (0, -1), (-1, 0), \text{ ومركزها نقطة الاصل}.$$

$$(15) \quad \text{قطع ناقص في مستوى } xy, \text{ محوره يمران في } (0, \pm b), (\pm a, 0).$$

$$(16) \quad \text{منحني } f \text{ حيث } f(x) = x^2 - 1.$$

للتمارين (17) - (20) جد تمثيلا معلميا ممهدا اجرا

$$(17) \quad \text{مربع في مستوى } xy \text{ رؤوسه } (2, 0), (2, 2), (0, 2), (0, 0).$$

$$(18) \quad \text{مثلث في مستوى } xy \text{ رؤوسه } (0, 2), (1, 0), (-1, 0).$$

$$(19) \quad \text{المفلق الواصل بين } (3, 0, 4), (0, 2, 3), (0, 2, 3), (0, 0, 1).$$

$$(20) \quad \text{المفلق الواصل بين } (1, 2, 1), (1, 2, 0), (0, 0, 0), (1, 2, 0).$$

$$(21) \quad (2, 3, -1), (1, 2, 1).$$

للتمارين (21) - (28) احسب طول المنحني

$$(21) \quad \underline{r}(t) = 5t \underline{i} + 4t^2 \underline{j} + 3t^2 \underline{k}, [0, 2]$$

$$(22) \quad \underline{r}(t) = t^2 \underline{i} + t \sin t \underline{j} + t \cos t \underline{k}, [0, 1]$$

$$(23) \quad \underline{r}(t) = e^t \cos t \underline{i} + e^t \underline{j} + e^t \sin t \underline{k}, [0, 2\pi]$$

$$(24) \quad \underline{r}(t) = 2t \underline{i} + 4 \sin 3t \underline{j} + 4 \cos 3t \underline{k}, [0, 2\pi]$$

$$(25) \quad \underline{r}(t) = 3t^2 \underline{i} + t^3 \underline{j} + 6t \underline{k}, [0, 1]$$

$$(26) \quad \underline{r}(t) = (1 - 2t^2) \underline{i} + 4t \underline{j} + (3 + 2t^2) \underline{k}, [0, 2]$$

$$(27) \quad \underline{r}(t) = e^t \underline{i} + e^{-t} \underline{j} + \sqrt{2} t \underline{k}, [0, 1]$$

$$(28) \quad \underline{r}(t) = \cosh t \underline{i} + \sinh t \underline{j} + t \underline{k}, [0, 1]$$

للتمارين (29) - (33) جد ds/dt

$$\underline{r}(t) = t \cos t \underline{i} + t \sin t \underline{j} + t \underline{k} \quad (29)$$

$$\underline{r}(t) = t \sin t \underline{i} - t \cos t \underline{j} + t \underline{k} \quad (30)$$

$$\underline{r}(t) = \sin 2t \underline{i} + \cos 2t \underline{j} + \frac{2}{3} t^{3/2} \underline{k} \quad (31)$$

$$\underline{r}(t) = 2t \underline{i} - t^2 \underline{j} + \frac{1}{3} t^3 \underline{k} \quad (32)$$

$$\underline{r}(t) = (t - \sin t) \underline{i} + (1 - \cos t) \underline{j} + t \underline{k} \quad (33)$$

للمنحنيات القطبية التالية (34) - (36) احسب اطوالها

$$r = a \cos \theta, \quad [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad (34)$$

$$r = a \sin \theta, \quad [0, \pi] \quad (35)$$

$$r = \theta, \quad [0, 1] \quad (36)$$

للتمارين (37) - (40) استعمل قاعدة سميثون مع $n = 4$ لتحسب طول المنحني

$$[-1, 1], \quad \underline{r}(t) = \sin t \underline{i} + \cos t \underline{j} + \frac{1}{3} t^3 \underline{k} \quad (37)$$

$$[0, 2], \quad \underline{r}(t) = \cos 2t \underline{i} + \sin 2t \underline{j} + \frac{4}{5} t^{5/2} \underline{k} \quad (38)$$

$$[-1, 1], \quad \underline{r}(t) = t \underline{i} + t^2 \underline{j} + t^3 \underline{k} \quad (39)$$

$$(40) \quad \underline{r}(t) = (t - \sin t) \underline{i} + (1 - \cos t) \underline{j} + t \underline{k} \quad \text{احسب طول فرع واحد من هذا الدويري.}$$

{ اول من حسبه هو المهندس المعماري البريطاني كرسطوفر رن Wren سنة 1658 •

والجواب هو 8 •

(12.5) المماس والناظم والانحناء

بعد أن قدمنا مشتقة اقتران متجه ، نستطيع أن نعرف المماس لمنحني هذا

الاقتران .

تعريف (12.16) افرض C منحنيًا ممهدًا ، وان $\underline{r}$ مَقْلَمَةٌ له معرفة على فترة I .
فانه لأي $t_0 \in I$ ليست إحدى طرفي I ، نعرف المماس (أو متجه مماس الوحدة) عند النقطة

$\underline{r}(t_0)$ على انه

$$\underline{T}(t_0) = \frac{\underline{r}'(t_0)}{\|\underline{r}'(t_0)\|} \dots\dots (1)$$

من الواضح ان $\underline{T}$ متجه وحدة ، لذلك فهو معرف باتجاهه فقط .

مثال (12.29) ندرس الدائرة $\underline{r}(t) = a \cos t \underline{i} + a \sin t \underline{j}$ ، على $[0, 2\pi]$

فان $\underline{r}'(t) = -a \sin t \underline{i} + a \cos t \underline{j}$

كذلك لجميع t في الفترة : $\|\underline{r}'(t)\| = a$

لهذا $\underline{T} = -\sin t \underline{i} + \cos t \underline{j}$

لاحظ ان $\|\underline{T}\| = 1$ كما هو متوقع .

وبما انه لجميع t في الفترة $\underline{T}(t) \cdot \underline{r}(t) = 0$

فان متجه المماس معامد على متجه الموضع لجميع t . انظر الشكل (12.17) .

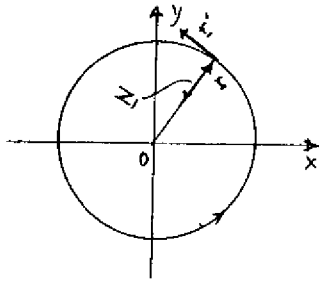
مثال (12.30) في اللولب الدائري ، $\underline{r}(t) = 3 \cos t \underline{i} + 3 \sin t \underline{j} + 3t \underline{k}$ ،

نجد ان $\underline{r}'(t) = -3 \sin t \underline{i} + 3 \cos t \underline{j} + 3 \underline{k}$

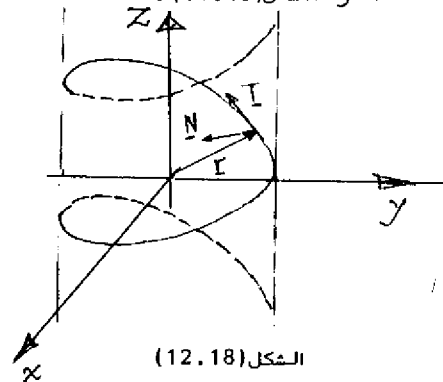
كذلك $\|\underline{r}'(t)\| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

لهذا $\underline{T}(t) = -\frac{1}{2} \sin t \underline{i} + \frac{1}{2} \cos t \underline{j} + \frac{1}{2} \underline{k}$

انظر الشكل (12.18) .

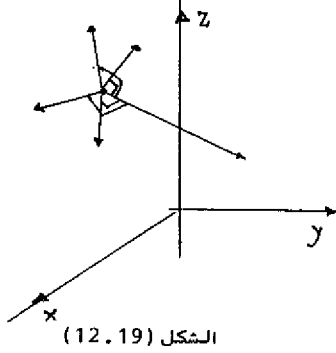


الشكل (12.17)



الشكل (12.18)

والآن ندرس المستقيمات المعامدة للمماسات ، وهي أيضا متجهات نسمي الواحد منها ناظما . على أي حال لو عزلنا متجها ما في الفضاء $\underline{a}$ ، فإن المتجهات المعامدة لهذا المتجه $\underline{a}$ عديدة ، كما نرى في الشكل (12.19) . ونختار احدها لتعريفنا الناظم .



تعريف (12.17) افرض C منحنيا ممهدا وان $\underline{r}$ معلمة له على فترة I ، وان $\underline{r}'$ ممهد ايضا على I .

لاي t_0 في الفترة I ، ليست احد طرفيها ، نعرف متجه الناظم $\underline{N}(t_0)$ على انسيه

$$\underline{N}(t_0) = \frac{\underline{r}'(t_0)}{\|\underline{r}'(t_0)\|} \dots\dots (2)$$

وهكذا نرى ان متجه الناظم هو متجه وحدة ، كذلك $\underline{N}$ معامد للمماس $\underline{T}$ لان

$$\underline{T} \cdot \underline{T} = 1$$

لذلك باشتقاقها نصل الى $\underline{T} \cdot \underline{T}' = 0$.

مثل (12.31) بالنسبة الى الدائرة $\underline{r}(t) = a \cos t \underline{i} + a \sin t \underline{j}$ وجدنا ان

$$\underline{T}(t) = -\sin t \underline{i} + \cos t \underline{j}$$

$$\underline{T}'(t) = -\cos t \underline{i} - \sin t \underline{j} \quad \text{لذلك}$$

في هذه الحال $\|\underline{T}'(t)\| = 1$ لجميع t ، لذلك

$$\underline{N}(t) = -\cos t \underline{i} - \sin t \underline{j} = -\frac{1}{\|\underline{T}\|} \underline{r}(t)$$

أي ان اتجاه $\underline{N}$ هو عكس اتجاه $\underline{r}(t)$ ، انظر الشكل (12.17) .

مثل (12.32) بالنسبة الى اللولب الدائري $\underline{r}(t) = 3 \cos t \underline{i} + 3 \sin t \underline{j} + 3t \underline{k}$

$$\underline{T}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \underline{j} + \underline{k} \quad \text{فان}$$

$$\underline{T}'(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \underline{j} \quad \text{لهذا}$$

$$\|\underline{T}'(t)\| = 1 \quad \text{لكن}$$

$$\underline{N}(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cos t \underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \underline{j} \quad \text{لذلك}$$

انظر الشكل (12.18) .

نجد الآن المركبتين المماسية والناظمية للتسارع .

بما أن $\underline{T}$ ، $\underline{N}$ متعامدان في أي نقطة $\underline{r}(t)$ ، لذلك يمكن تحليل أي متجه $\underline{b}$

عند $\underline{r}(t)$ إلى مركبتين أحدهما في اتجاه $\underline{T}$ ،

والأخرى في اتجاه $\underline{N}$. انظر الشكل (12.20) .

أي أن

$$\underline{b} = b_T \underline{T} + b_N \underline{N}$$

ونسمي b_N ، b_T المركبتين المماسية والناظمية

على الترتيب للمتجه $\underline{b}$.

الآن إذا $\underline{r}(t)$ هو متجه موضع لجسم

يتحرك حيث $\underline{r}$ ممهد ، فإن

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\| \underline{T} = \|\underline{v}\| \underline{T}$$

لذلك $\underline{v}$ متجه السرعة ، له مركبة واحدة مماسية ، أما بالنسبة إلى التسارع فإن

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (\|\underline{v}\| \underline{T}) = \|\underline{v}\| \frac{d\underline{T}}{dt} + \left(\frac{d}{dt} \|\underline{v}\| \right) \underline{T}$$

لكن ، $\left\| \frac{d\underline{T}}{dt} \right\| \underline{N} = \frac{d\underline{T}}{dt}$

$$\underline{a} = \left(\frac{d}{dt} \|\underline{v}\| \right) \underline{T} + \|\underline{v}\| \left\| \frac{d\underline{T}}{dt} \right\| \underline{N} = a_T \underline{T} + a_N \underline{N}$$

حيث $a_T = \frac{d}{dt} \|\underline{v}\|$ ، $a_N = \|\underline{v}\| \left\| \frac{d\underline{T}}{dt} \right\|$

$$\|\underline{a}\|^2 = \underline{a} \cdot \underline{a} = (a_T \underline{T} + a_N \underline{N}) \cdot (a_T \underline{T} + a_N \underline{N})$$

لاحظ أن

$$= a_T^2 \|\underline{T}\|^2 + a_N^2 \|\underline{N}\|^2$$

$$= a_T^2 + a_N^2$$

$$\underline{r}(t) = t \underline{i} + t^2 \underline{j} + t^2 \underline{k} \quad \text{مثال (12.33) افرض}$$

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \underline{i} + 2t \underline{j} + 2t \underline{k} \quad \text{فإن}$$

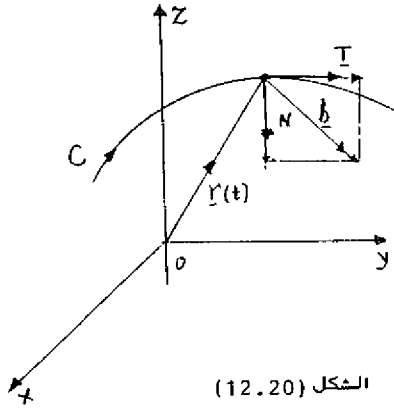
$$\|\underline{v}\| = \sqrt{1 + 8t^2}$$

$$\frac{d}{dt} \|\underline{v}\| = \frac{8t}{\sqrt{1 + 8t^2}} = a_T$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = 2 \underline{j} + 2 \underline{k} , \quad \|\underline{a}\| = 2\sqrt{2}$$

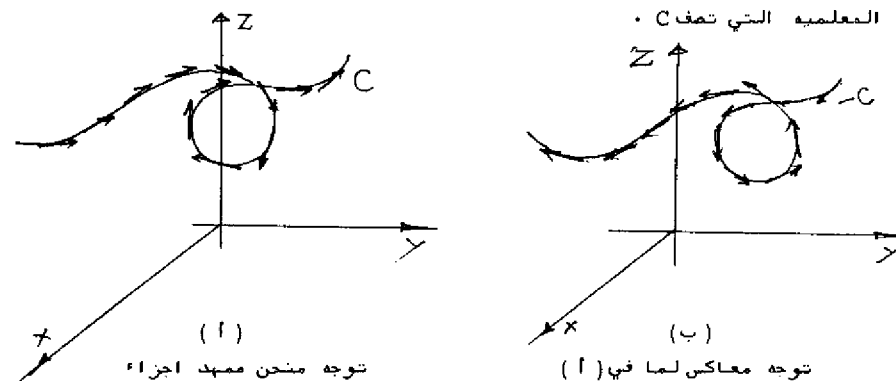
$$a_N = \sqrt{\|\underline{a}\|^2 - a_T^2} \quad \text{من العلاقة}$$

$$= \sqrt{8 - \frac{64t^2}{1 + 8t^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1 + 8t^2}}$$



الشكل (12.20)

توجيه المنحنيات : لاي منحن ممهد اجزاء C متجهات مماسة عند كل نقطة الا عند اعداد محدودة منها . وبما ان المماس يدل على الاتجاه الذي يرسم فيه المنحني من قبل $\underline{r}$ ، فاننا نقول ان $\underline{r}$ تحدد توجه (أو اتجاه) C . انظر الشكل (12.21) . وعادة ما يكون هناك توجهان لمنحن معين ممهد اجزاء ، وعلى هذا يكون اتجاه المماسات لتوجه ما معاكسا لاتجاهها في توجه معاكس . كما انه اذا ما حدد لمنحن ما C توجه معين ، فان المتجهات المماسية لهذا المنحني ستكون معرفة تفردا مهما كانت المعادلات المعلمية التي تصف C .



الشكل (12.21)

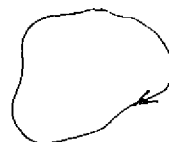
فإذا $\underline{r}(t)$ مَعْلَمَةٌ ممهدة اجزاء لمنحن C على $[a, b]$ ، فان

$$\underline{R}(u) = \underline{r}(a+b-u) , \quad u \in [a, b]$$

هو مَعْلَمَةٌ ممهدة اجزاء للمنحني C لها توجه معاكس للتوجه السابق . انظر الشكل (12.21) . وقد ندل على عكس توجه C بالرمز $-C$. وفي حال منحن في مستوى واحد (مثلا xy) ، يمكن ان نسمي التوجيهين : مع عقارب الساعة أو ضدها . انظر الشكل (12.22)



ضد عقارب الساعة



مع عقارب الساعة

الشكل (12.22) (أ)

(ب)

الانحناء : كيف نعبّر عن التغير في اتجاه مماس الوحدة $\underline{T}$ ؟ وبخاصة أن التغير الوحيد الممكن فيه هو اتجاهه (لماذا ؟) . بما أن $\underline{T}$ يسير مع طول المنحني s ، لذلك نقيس التغير في اتجاه $\underline{T}$ بدراسة المقدار $\frac{d\underline{T}}{ds}$. وهذا هو ما نسميه الانحناء .

تعريف (12.18) افرض C منحنيا ممهدا له معلمة $\underline{r}$ ، وان $\underline{r}'$ ممهدة أيضا فالتنا عرف انحناء C على انه

$$K = \frac{d\underline{T}}{ds} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ولحساب K {الحرف اليوناني كاي} نلاحظ أن

$$\frac{d\underline{T}}{ds} = \frac{d\underline{T}/dt}{ds/dt} = \frac{d\underline{T}/dt}{\|d\underline{r}/dt\|} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ويلاحظ من التعريف أن $K \geq 0$.

مثال (12.34) لدائرة مركزها (x_0, y_0) ونصف قطرها a فإن

$$\underline{r}(t) = (x_0 + a \cos t) \underline{i} + (y_0 + a \sin t) \underline{j}$$

$$\underline{r}'(t) = -a \sin t \underline{i} + a \cos t \underline{j}$$

$$\|\underline{r}'(t)\| = a, \quad \underline{T}(t) = -\sin t \underline{i} + \cos t \underline{j}, \quad \underline{T}'(t) = -\cos t \underline{i} - \sin t \underline{j}$$

$$K(t) = \frac{\|\underline{T}'(t)\|}{\|\underline{r}'(t)\|} = \frac{1}{a}$$

أي أن الانحناء (في هذه الحالة) هو معكوس نصف القطر . وهكذا نرى أن الدائرة ذات نصف قطر كبير جدا ، يظهر انحناءها صغيرا جدا ، كما نلاحظ من أي مقطع للكرة الأرضية .

مثال (12.35) احسب انحناء اللولب الدائري

$$\underline{r}(t) = a \sin t \underline{i} + a \cos t \underline{j} + b t \underline{k}$$

$$\underline{r}'(t) = a \cos t \underline{i} - a \sin t \underline{j} + b \underline{k} \quad \text{الحصل :}$$

$$\|\underline{r}'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\underline{T} = \frac{a \cos t \underline{i} - a \sin t \underline{j} + b \underline{k}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\frac{d\underline{T}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} (-a \sin t \underline{i} - a \cos t \underline{j})$$

$$\left\| \frac{d\underline{T}}{dt} \right\| = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

لذلك

$$K = \frac{\| d\mathbf{T}/dt \|}{\| d\mathbf{r}/dt \|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

في حال منحن C في بعدين (مستوي xy مثلا) يمكن أن نجد معادلة أخرى

للانحناء . افرض معادلة C هي $y = f(x)$. نكتبها

$$\mathbf{r}(t) = t \mathbf{i} + f(t) \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}' = \mathbf{i} + f' \mathbf{j}$$

$$\|\mathbf{r}'\| = \sqrt{1 + f'^2}$$

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{i} + f' \mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

$$\mathbf{T}' = \frac{\frac{f'' \mathbf{j}}{\sqrt{1 + f'^2}} - (\mathbf{i} + f' \mathbf{j}) f' f'' (1 + f'^2)^{-3/2}}{(1 + f'^2)}$$

$$\|\mathbf{T}'\| = \frac{|f''|}{\sqrt{1 + f'^2}}$$

$$K = \frac{|f''|}{(1 + f'^2)^{3/2}} \dots\dots\dots (5)$$

لذلك

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} \quad \text{أما إذا معادلة C على النحو}$$

فانه يمكن الوصول الى العلاقة

$$K = \frac{|x' y'' - x'' y'|}{[(x')^2 + (y')^2]^{3/2}} \dots\dots\dots (6)$$

والاشتقاق هو بالنسبة الى t .

مثل (12.36) جد انحناء القطع المكافئ $y = ax^2$

$$\text{الحل: } y = 2ax, \quad y'' = 2a$$

$$K = \frac{|2a|}{(1 + 4a^2 x^2)^{3/2}} \quad \text{لذلك}$$

$$= \frac{2|a|}{(1 + 4ay)^{3/2}}$$

طريقة أخرى لحساب الانحناء : يمكن الوصول الى معادلة الانحناء باستعمال الضرب

المتجهي كما نرى ادناه .

$$\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \mathbf{T}, \quad \mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$$

لذلك

$$\mathbf{v} \times \mathbf{a} = (\|\mathbf{v}\| \mathbf{T}) \times (a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N})$$

$$= (\|\underline{v}\| \underline{T} \times \underline{a}_{T\underline{T}}) + (\|\underline{v}\| \underline{T} \times \underline{a}_{N\underline{N}})$$

$$= (\|\underline{v}\| \underline{a}_N) (\underline{T} \times \underline{N})$$

بما أن $\underline{T}$, $\underline{N}$ متعامدان ، وكذلك $\underline{a}_N = \|\underline{v}\| \frac{d\underline{T}}{dt}$ فان

$$\|\underline{v} \times \underline{a}\| = \|\underline{v}\| \underline{a}_N = \|\underline{v}\|^2 \left\| \frac{d\underline{T}}{dt} \right\|$$

لكن

$$K = \frac{\left\| \frac{d\underline{T}}{dt} \right\|}{\left\| \frac{d\underline{r}}{dt} \right\|} = \frac{\left\| \frac{d\underline{T}}{dt} \right\|}{\|\underline{v}\|}$$

أي أن

$$K = \frac{\|\underline{v} \times \underline{a}\|}{\|\underline{v}\|^3} \dots\dots\dots (7)$$

مثل (12.37) افرض معادلة المنحني C هي

$$\underline{r}(t) = \frac{1}{3} t^3 \underline{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} t^2 \underline{j} - t \underline{k}$$

استعمل المعادلة اعلاه لحساب K .

$$\underline{v} = \frac{d\underline{r}}{dt} = t^2 \underline{i} - \sqrt{2} t \underline{j} - \underline{k} \quad \underline{\text{الحل :}}$$

$$\|\underline{v}\| = \sqrt{t^4 + 2t^2 + 1} = t^2 + 1$$

$$\underline{a} = \frac{d\underline{v}}{dt} = 2t \underline{i} - \sqrt{2} \underline{j}$$

$$\underline{v} \times \underline{a} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ t^2 & -\sqrt{2}t & -1 \\ 2t & -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 2 \underline{i} + 2t \underline{j} + 2t^2 \underline{k}$$

$$\|\underline{v} \times \underline{a}\| = \sqrt{2 + 4t^2 + 2t^4} = \sqrt{2} (1 + t^2)$$

لذلك

$$K = \frac{\|\underline{v} \times \underline{a}\|}{\|\underline{v}\|^3} = \frac{\sqrt{2}(1+t^2)}{(1+t^2)^3} = \frac{\sqrt{2}}{1+t^2}$$

نسمي المقدار $\rho = \frac{1}{K}$ نصف قطر الانحناء . والنقطة التي تقع على المستقيم الخارج من تلك النقطة في اتجاه الناطم وتبعد عن المنحني مسافة ρ تسمى مركز الانحناء .

ويمكن البرهنة على أن التسارع بمركبتين يمكن كتابته على النحو

$$\underline{a} = \frac{dv}{dt} \underline{T} + \frac{v^2}{\rho} \underline{N} = \frac{d^2 s}{dt^2} \underline{T} + K \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \underline{N}, \quad v = \|\underline{v}\| \dots\dots\dots (8)$$

مثل (12.37) في المثل السابق ، جد مركبتي التسارع $\underline{a}$.

$$\underline{v} = \frac{ds}{dt} = t^2 + 1 , \quad \frac{dv}{dt} = 2t \quad \underline{\text{الحل :}}$$

لذلك

$$\begin{aligned} \underline{a} &= 2t \underline{T} + \frac{\sqrt{2}}{1+t^2} (t^2 + 1)^2 \underline{N} \\ &= 2t \underline{T} + \sqrt{2} (1+t^2) \underline{N} \end{aligned}$$

$$a_N = \sqrt{2} (1+t^2) , \quad a_T = 2t \quad \text{أي أن}$$

معادلات فرينيه - سيريه : لمنحن فضائي C ، انظر الشكل (12.23) ، شريطة ان يكون ممبدا وان تكون مشتقته ممبدة ، ففي كل نقطة من نقاطه عدا الطرفين ، يوجد متجه مماس وحدة $\underline{T}$. كما وجدنا نظاما $\underline{N}$ باتجاه مركز الانحناء . وهناك متجه آخر معامد

لهذين المتجهين نسميه ثنائي الناطم $\underline{B}$ ، ونحدده من

$$\underline{B} = \underline{T} \times \underline{N} \dots\dots (9)$$

ولذلك نميز $\underline{N}$ على انه الناظم الرئيسي

(في ثلاثة ابعاد) نسمي الثلاثي $\underline{B}$, $\underline{N}$, $\underline{T}$

ثلاثي فرينيه - سيريه . وبمما أنها

متعامدة فيما بينها فانها تطلح لان

تكون نظاما احداثيا يتحرك مع نقاط

المنحني C .

يسمونه في الهندسة التفاضلية نظاما

اصيلا . ونسمي المستوى الذي يحوي $\underline{T}$, $\underline{B}$ مستوى اللتام . كما نسمي المستوى الذي

يحوي $\underline{T}$, $\underline{N}$ المستوى الناطم . ونسمي المستوى الذي يحوي $\underline{N}$, $\underline{B}$ المستوى المقوم .

لاحظ ان $\underline{B}$ متجه وحدة ايضا .

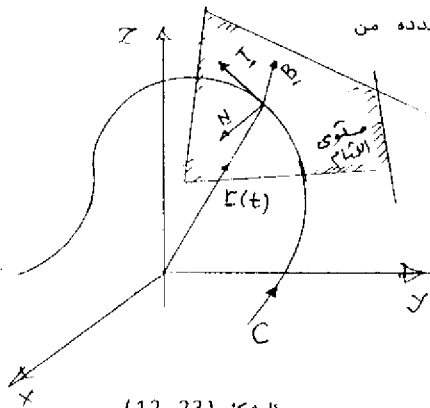
مثل (12.27) افرض اللولب الدائري $\underline{r}(t) = 2 \cos t \underline{i} + 2 \sin t \underline{j} + 3t \underline{k}$

جد $\underline{T}$, $\underline{N}$, $\underline{B}$ ، والانحناء ، والمستويات : اللتام والناظم والمقوم عند

النقطة $(2, 2, \frac{3}{4})$ ، أي عند $t = \frac{\pi}{4}$.

$$\underline{r}'(t) = -2 \sin t \underline{i} + 2 \cos t \underline{j} + 3 \underline{k} \quad \underline{\text{الحل :}}$$

$$\underline{r}' = \sqrt{17} , \quad \underline{T} = \frac{1}{\sqrt{17}} (-2 \sin t \underline{i} + 2 \cos t \underline{j} + 3 \underline{k})$$



الشكل (12.23)

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\sqrt{17}} (-2 \cos t \underline{i} - 2 \sin t \underline{j})$$

$$\left| \frac{dT}{dt} \right| = \frac{2}{\sqrt{17}}, \quad \underline{N} = -\cos t \underline{i} - \sin t \underline{j}$$

$$\underline{B} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{17}} \sin t & \frac{2}{\sqrt{17}} \cos t & \frac{3}{\sqrt{17}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} = \frac{3}{\sqrt{17}} \sin t \underline{i} - \frac{3}{\sqrt{17}} \cos t \underline{j} + \frac{2}{\sqrt{17}} \underline{k}$$

$$K = \frac{2/\sqrt{13}}{\sqrt{17}} = \frac{2}{17} \quad \text{أما الانحناء فهو}$$

$$\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}(x - \sqrt{2}) - \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{17}}(y - \sqrt{2}) + \frac{2}{\sqrt{17}}(z - \frac{3\pi}{4}) = 0 \quad \text{مستوى اللثام}$$

$$3\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}y + 2z = 3\pi/2$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}}(x - \sqrt{2}) + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{17}}(y - \sqrt{2}) + \frac{3}{\sqrt{17}}(z - \frac{3\pi}{4}) = 0 \quad \text{المستوى النطاغم}$$

$$-\sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 3z = 9\pi/4$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}(x - \sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}(y - \sqrt{2}) = 0 \quad \text{المستوى المقوم}$$

$$x + y = 2\sqrt{2}$$

تمارين (12.5)

للتمارين (1) - (10) جد $\underline{r}'(t)$ ثم جد $\underline{T}$ ، $\underline{N}$ ، $\underline{K}$.

$$\underline{r}(t) = \cos t \underline{i} + \cos t \underline{j} + 2 \sin t \underline{k} \quad (1)$$

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}, \quad \underline{r}(t) = \cos^2 t \underline{i} + \sin^2 t \underline{j} - \underline{k} \quad (2)$$

$$\underline{r}(t) = (t^2 + 4) \underline{i} + 2t \underline{j} \quad (3)$$

$$\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}, \quad \underline{r}(t) = \cos^3 t \underline{i} + \sin^3 t \underline{j} \quad (4)$$

$$\underline{r}(t) = 2t \underline{i} + t^2 \underline{j} + \frac{1}{3} t^3 \underline{k} \quad (5)$$

$$\underline{r}(t) = -\frac{4}{5} \cos t \underline{i} + (1 - \sin t) \underline{j} - \frac{3}{5} \cos t \underline{k} \quad (6)$$

$$\underline{r}(t) = e^t \underline{i} + e^{-t} \underline{j} + \sqrt{2} t \underline{k} \quad (7)$$

$$\underline{r}(t) = \cosh t \underline{i} - \sinh t \underline{j} + t \underline{k} \quad (8)$$

$$\underline{r}(t) = 2t \underline{i} + t^2 \underline{j} + \ln t \underline{k} \quad (9)$$

$$\underline{r}(t) = 2t^{9/2} \underline{i} - \frac{3}{2} \sqrt{2} t^3 \underline{j} - \frac{3}{2} \sqrt{2} t^3 \underline{k} \quad (10)$$

استعمل المعادلة (7) لتحسب الانحناء في التمارين (11) - (17) .

$$\underline{r}(t) = (2t + 1) \underline{i} + (t^2 - 1) \underline{j} \quad (11)$$

$$\underline{r}(t) = t \cos t \underline{i} - t \sin t \underline{j} \quad (12)$$

$$\underline{r}(t) = e^t \sin t \underline{i} + e^t \sin t \underline{j} - t \underline{k} \quad (13)$$

$$\underline{r}(t) = \frac{1}{3}(t^2 - 1)^{3/2} \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{4} t^2 \underline{j} - \frac{\sqrt{2}}{4} t^2 \underline{k} \quad (14)$$

$$\underline{r}(t) = \sin t \underline{i} + \cos t \underline{j} + \frac{2}{3} t^{3/2} \underline{k} \quad (15)$$

$$\underline{r}(t) = t^2 \underline{i} - t^3 \underline{j} + t^4 \underline{k} \quad (16)$$

$$\text{نسمي المنحني المكعب الملتوي.} \quad \underline{r}(t) = t \underline{i} + \frac{1}{2} t^2 \underline{j} + \frac{1}{3} t^3 \underline{k} \quad (17)$$

للتمارين (18) - (27) استعمل المعادلة (5) أو (6) لتحسب الانحناء للمنحنيات

التالية

$$y = \ln \sec x \quad (19) \quad y = e^x \quad (18)$$

$$y = e^{-x} \quad (21) \quad y = x^3 \quad (20)$$

$$y = \sin x \quad (23) \quad y = x - x^2 \quad (22)$$

$$\underline{r}(t) = t \underline{i} + \frac{t^2}{2} \underline{j} \quad (25) \quad \underline{r}(t) = e^t \underline{i} - e^{-t} \underline{j} \quad (24)$$

$$\underline{r}(t) = e^t \cos t \underline{i} + e^t \sin t \underline{j} \quad (27) \quad \underline{r}(t) = \cosh t \underline{i} + \sinh t \underline{j} \quad (26)$$

للتمارين (28) - (31) جد الانحناء ثم احس نصف قطر الانحناء عند النقطة

المفروضة

$$(-\frac{1}{4}\pi, 2) , y = 2 \sin 2x \quad (28)$$

$$(2, 2) , y^2 = 2x \quad (29)$$

$$t_0 = 0 , \underline{r}(t) = 2 \cos t \underline{i} + 3 \sin t \underline{j} \quad (30)$$

$$t_0 = \pi/2 , \underline{r}(t) = 2 \cos t \underline{i} + 3 \sin t \underline{j} \quad (31)$$

للتمارين (32) - (39) جد مركبتي التسارع المماسية والناظمية :

$$\underline{r}(t) = r(t - \sin t) \underline{i} + r(1 - \cos t) \underline{j} \quad (32)$$

$$\underline{r}(t) = 2 \cos t \underline{i} + 3 \sin t \underline{j} \quad (33)$$

$$\underline{r}(t) = 2 t \underline{i} + t^2 \underline{j} + \frac{1}{3} t^3 \underline{k} \quad (34)$$

$$\underline{r}(t) = \frac{4}{5} \cos t \underline{i} + (1 - \sin t) \underline{j} - \frac{3}{5} \cos t \underline{k} \quad (35)$$

$$\underline{r}(t) = (1 - 2t) \underline{i} + (3 + 4t) \underline{j} + (2 - 3t) \underline{k} \quad (36)$$

$$\underline{r}(t) = e^t \cos t \underline{i} + e^t \sin t \underline{j} + e^t \underline{k} \quad (37)$$

$$\underline{r}(t) = t \underline{i} + t^2 \underline{j} + \frac{2}{3} t^3 \underline{k} \quad (38)$$

$$\underline{r}(t) = t \underline{i} + \frac{1}{2} t^2 \underline{j} + \frac{1}{3} t^3 \underline{k} \quad (39)$$

(40) أثبت أن الانحناء لمنحن ذي معادلة قطبية $r = f(\theta)$ هو

$$K = \frac{|[f(\theta)]^2 + 2[f'(\theta)]^2 - f(\theta)f''(\theta)|}{([f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2)^{3/2}}$$

(41) احسب الانحناء للطنزون اللوغرتمي $r = e^{a\theta}$

(42) احسب الانحناء لطنزون ارخميدس $r = a\theta$

(43) احسب الانحناء للمنحني القلبي $r = a(1 - \cos \theta)$ بدلالة r

التمارين (44) - (49) اكتب المعادلات المعلمية لهذه المنحنيات حسب

التوجيهات المفروضة

(44) دائرة في المستوى $x = 2$ ، مركزها $(2, -2, 1)$ ، نصف قطرها 3 ذات توجه

مع عقارب الساعة .

(45) دائرة في المستوى $x = -2$ ، مركزها $(-2, -2, -1)$ ، نصف قطرها 3 ،

ذات توجه مع عقارب الساعة .

(46) نصف دائرة في مستوى $y = 5$ ، تبدأ في $(0, 0, 5)$ ، وتنتهي في $(0, -5, 0)$ ،

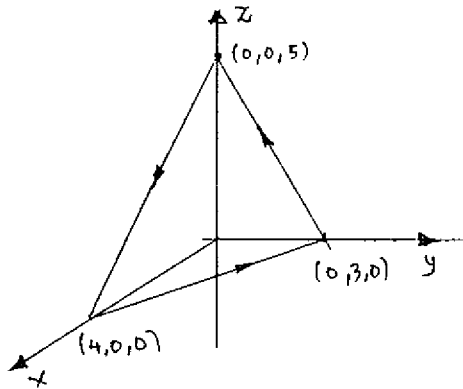
وتنتهي في $(0, 0, -5)$.

(47) ربع الدائرة في الربع الاول في مستوى xy ، ومن $(1, 0, 0)$ الى $(0, 1, 0)$

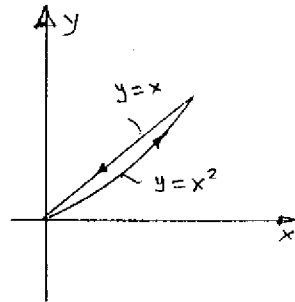
وقطع المستقيمين من محور y ومحور x اللذين يغلطان هذا المنحني .

(48) المنحني في الشكل (12.24) .

(49) المنحني في الشكل (12.25) .



الشكل (12.25)



الشكل (12.24)

(50) اثبت أن المنحنيين $\underline{x}_1(t) = t \underline{i} + 2t \underline{j} + t^2 \underline{k}$

$\underline{x}_2(t) = t^2 \underline{i} + (1-t) \underline{j} + (2-t^2) \underline{k}$

يتقاطعان في (1, 2, 1) ، وأن متجهي المماسين لهما في النقطة (1, 2, 1) متعامدان .

(51) اثبت أن المنحنيين $\underline{x}_1(t) = (\frac{1}{2}t^2 + t) \underline{i} + (t+1) \underline{j} - t \underline{k}$

$\underline{x}_2(t) = \sin t \underline{i} + e^t \underline{j} - \tan t \underline{k}$

يتقاطعان في (0, 1, 0) ، وأن متجهي المماسين لهما في النقطة (0, 1, 0) متوازيان .

(52) جد أين يكون منحنى $y = e^x$ له أكبر انحناء ؟

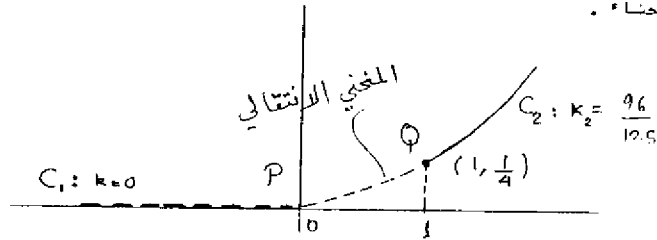
(53) جد جميع النقاط على القطع الناقص $4x^2 + 9y^2 = 36$ حيث الانحناء ذو قيمة عظمى ، وذو قيمة صغرى .

(54) (المنحنيات الانتقالية) يتجنب المهندسون تغييرات مفاجئة في الخط الحديدي

الذي يسير عليه القطار ، وللربط بين جزء مستقيم من الخط وجزء منحن ، يملون بينهما بمنحن انتقالي يكون انحناءه صفرا عند التقائيه بالمستقيم (النقطة P في الشكل (12.26)) ، وله الانحناء مثل انحناء الجزء الآخر

(النقطة Q) . جد منحنيا معادلته $y = ax^n$ ، $x \in [0, 1]$

يمثل الغوسين C_1 ، C_2 في الشكل (12.26) دون أن يكون هناك انفصال في الانحناء .



الشكل (12.26)

(56) سيارة تسير في طريق دائري نصف قطره 729 قدما . في لحظة ما كانت سرعة

السيارة 81 قدما / ثانية . ثم يضغط السائق الكوابح لتصير السرعة صفرا في

خلال 9 ثوان بتسارع ثابت . احسب المركبتين المماسية والناظمية للتسارع .

(56) (f) اثبت ان $\frac{dB}{ds}$ يوازي $\underline{N}$ ، لذلك يوجد عدد قياسي τ يحقق

$$\frac{dB}{ds} = \tau \underline{N}$$

(ارشاد : $\underline{B}$ متجه وحدة ، لذلك $\underline{B} \perp \frac{dB}{ds}$. اثبت ان $\underline{T} \perp \frac{dB}{ds}$)

$$\left(\frac{dB}{ds} = \frac{d}{ds} (\underline{T} \times \underline{N}) \right) \quad \text{بالاشتقاق}$$

$$(ب) \text{ اثبت ان } \frac{dN}{ds} = -\kappa \underline{T} - \tau \underline{B} . \text{ لاحظ ان } \underline{B} \times \underline{T} = \underline{N} , \underline{N} \times \underline{B} = \underline{T}$$

(ج) نسمي العدد τ التواء المنحني . ما هو المعنى الهندسي للعدد τ .

$$\text{والمعادلات} \quad \frac{dT}{ds} = \kappa \underline{N} , \quad \frac{dN}{ds} = -\kappa \underline{T} - \tau \underline{B} , \quad \frac{dB}{ds} = \tau \underline{N}$$

قدمهما الفرنسي فردريك فرينيه (1816 - 1900) ، واكتشفها مستقلا عنه

مواطنه الفرد سيريه (1819 - 1885) .

مسرد المصطلحات :

Cycloid	كويكيري	Vector - valued functions	اقترانات متجهة
Tangent	مماس	Centripital acceleration	تسارع مركزي
Normal	ناظم	Artificial Satellite	ساتل
Orientation	توجه	Normal Component	مركبة ناظمية
Curvature	انحناء	Piecewise Smooth	ممهّد اجزاء
Frenit - Serret	فرينيه - سيريه	Radius of Curvature	نصف قطر الانحناء
Normal Plane	المستوى الناظم	Center of Curvature	مركز الانحناء
Intrinsic System	نظام اصيل	Rectifying Plane	المستوى المقوّم
Osculating Plane	مستوى اللّام	Circular helix	لولب دائري
Component	مركبة	Radial vector	متجه شعاعي
Displacement	ازاحة	Space Curve	منحني فضائي
Closed	مغلق	Parametrization	معلمة
Parameter	معلم	Twisted Cubic	مكعب ملتوي
Smooth	ممهّد	Transitional	منحني انتقالي
Torsion	التواء		