

الباب الثالث عشر

الاقترانات ذات المتغيرات المتعددة

كانت دراستنا في الحسبان حتى الآن معنية باقترانات ذات متغير مستقل واحد . على ان كثيرا من الظواهر الطبيعية ، والقضايا المختلفة تعتمد على اكثر من متغير مستقل . ولذلك سنوسع مفهوم الاقترانات ليشمل اكثر من متغير مستقل . ولهذه الاقترانات سندرس مفاهيم تماثل تلك التي درسناها في حال المتغير الواحد ، مثل المجال والمدى ، والنهايات والاتصال ، والاشتقاق والتكامل ، والقيم القصوى . على ان هذا النوع من الاقترانات له خصائص لم تظهر في حال الاقترانات ذات المتغير الواحد . وستبقى معالجتنا عامة ، دون الخوض في اعماق الدقة والبرهان الرياضي .

(13.1) مقدمة ومفاهيم

نقدم في البداية مفهوما عاما ، ثم نخصص دراستنا للحالات التي نريدها .
تعريف (13.1) المجموعة التي عناصرها على النحو (x_1, x_2, \dots, x_n) حيث x_1 عدد حقيقي ، نسميها فضاء ذا بعد n . كل عنصر منها يسمى نقطة . ونرمز لهذا الفضاء بالرمز R^n . ونسمي (x_1, x_2, \dots, x_n) المعدود n المرتب .

تعريف (13.2) الاقتران ذو المتغيرات (المستقلة) عددها n هو مجموعة من الأزواج المرتبة (x, w) ، شريطة ان أي زوجين مرتبين ليس لهما العنصر الأول نفسه ، والعنصر x هو نقطة في الفضاء R^n ذي الابعاد n ، w عدد حقيقي . والمجموعة التي تحوي كل النقاط لاقتران ما تسمى مجال الاقتران . والمجموعة التي تحوي كل القيم الممكنة لـ w تسمى مدى الاقتران .

هذا التعريف يوضح ان مجال الاقتران هو مجموعة نقاط في R^n . اما المدى فهو مجموعة نقاط في R^1 (الاعداد الحقيقية) . سيكون اكثر اهتمامنا منصبا على الحالات عندما $n = 2$ أو 3 .

مثل (13.1) مساحة مستطيل تعتمد على الطول x والعرض y ، نعبّر عن ذلك

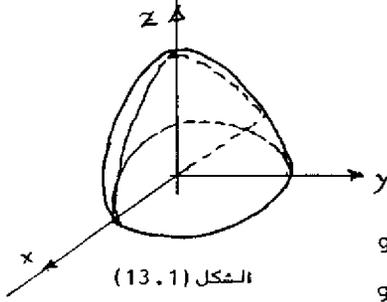
$$A = f(x, y) = xy$$

ومجال f هو مجموعة العناصر (x, y) من R^2 . من الواضح ان $0 \leq x$ ، $0 \leq y$. كذلك مداه هو $0 \leq A$.

مثل (13.2) افرض f اقترانا له متغيران x, y على النحو

$$z = f(x, y) = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$$

من الواضح أن $25 - (x^2 + y^2) \geq 0$ أي أن المجال هو نقاط الدائرة $x^2 + y^2 = 25$ ،
وداخل هذه الدائرة . بينما المدى هو النقاط (الاعداد الحقيقية) z التي تحقق
 $0 \leq z \leq 5$. وهذا الاقتران له رسم هو نصف كرة علوي . انظر الشكل (13.1) .



الشكل (13.1)

مثل (13.3) ندرس الاقتران

$$g(x, y, z) = x^2 - 6xz + 2yz^2$$

• مجال الاقتران المجموعة R^3 ومداه R

نجد بعض قيم هذا الاقتران

$$g(0, 0, 0) = 0, \quad g(1, 1, 1) = -3, \quad g(1, -1, 2) = -15$$

$$g(2a, b, -c) = 4a^2 + 12ac + 2bc^2$$

$$g(x^2, -y^2, z^2) = x^4 - 6x^2z^2 - 2y^2z^4$$

جبر الاقترانات :

نعرف المجموع والفرق وحامل الضرب والقسمة لاقترانات ذات متغيرات متعددة ،
مثلما عرفناها لاقترانات من متغير واحد . ونعربها كما يلي حيث $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$(f \pm g)(\underline{x}) = f(\underline{x}) \pm g(\underline{x})$$

$$(fg)(\underline{x}) = f(\underline{x}) g(\underline{x})$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(\underline{x}) = \frac{f(\underline{x})}{g(\underline{x})}, \quad g(\underline{x}) \neq 0$$

تركيب الاقترانات :

إذا $f = f(w)$ ، $w = g(\underline{x})$ حيث $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ فان الاقتران المركب

$$(f \circ g)(\underline{x}) = f(g(\underline{x}))$$

ومجال $f \circ g$ هو النقاط \underline{x} في مجال g حيث $g(\underline{x})$ في مجال f .

مثل (13.4) افرض $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$ ، $g(t) = \sqrt{t}$ فان

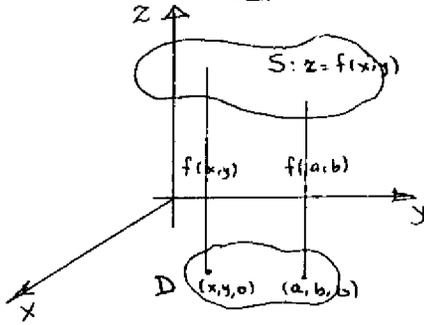
$$F(x, y) = (g \circ f)(x, y) = \sqrt{\ln(4 - x^2 - y^2)}$$

ومجال f هو النقاط (x, y) التي تحقق $4 - x^2 - y^2 > 0$ بينما مجال g هو
مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة . لذلك مجال $F = g \circ f$ هو مجموعة الأرواح

المرتبة (x, y) حيث $4 - x^2 - y^2 > 0$ و $\ln(4 - x^2 - y^2) \geq 0$. بما أن
 $\ln(4 - x^2 - y^2) \geq 0$ اذا فقط اذا $4 - x^2 - y^2 \geq 1$ فان مجال $F = g \circ f$ هو مجموعة
 الأزواج المرتبة (x, y) حيث $4 - x^2 - y^2 \geq 1$ أي $x^2 + y^2 \leq 3$.

التمثيل البياني :

نحن نعيش في عالم من ثلاثة ابعاد (مكانية) نصفها بالاحداثيات الكارتيزية
 (x, y, z) . سطح الورقة أو اللوح هو من بعدين . لذلك نستطيع أن نرسم اشكالا
 في بعدين أو ثلاثة (أو اربعة على الاكثر كما سنرى) . وقد كانت رسومنا في السابق
 منحنيات في بعدين ، تنتج من اقتران له متغير مستقل واحد ومتغير تابع . اما اذا
 كان للاقتران متغيران مستقلان ، فان الشكل الناتج هو سطح في ثلاثة ابعاد .



الشكل (13.2)

وعادة ما نرسمه من خلال رسم المجال D
 الذي يحوي النقاط $(x, y, 0)$ في مستوى
 xy ، وتكون $f(x, y)$ المسافات فوق D
 أو تحتها حسب اشارة f . انظر الشكل
 (13.2) . كما اننا نقدم في الشكل
 (13.3) رسوما حاسوبية لبعض
 السطوح .

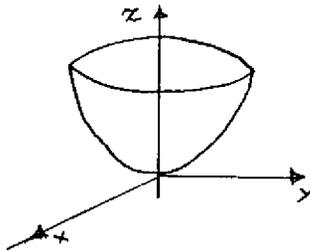
مثل (13.5) المستوى $ax + by + cz = d$

يمكن كتابته على النحو

$$z = \frac{1}{c}(d - ax - by)$$

لذلك فهو سطح . مجاله \mathbb{R}^2 ، ومداه الاعداد الحقيقية .

وعند رسم سطح ما ، قد يساعد أن نعرف تقاطع السطح مع مستويات ما ، نسمي
 هذا التقاطع أثر السطح في المستوى . وبخاصة للمستويات الاحداثية ، مستوى $xy (z=0)$ ،



الشكل (13.4)

ومستوى $yz (x=0)$ ، ومستوى $xz (y=0)$

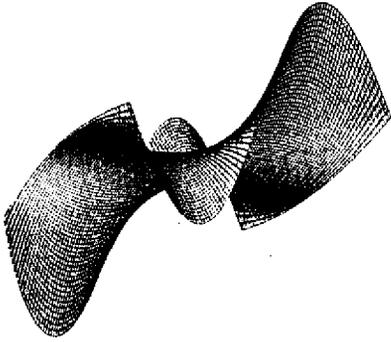
مثل (13.6) ارسم السطح $z = x^2 + y^2$.

أثر السطح : في مستوى $xy (z=0)$ ، نجد

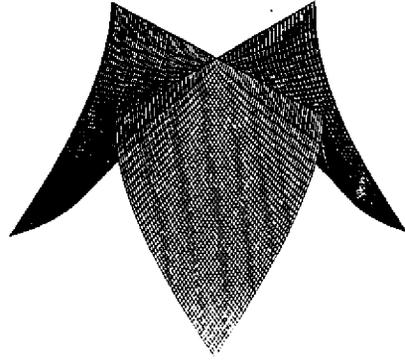
الاثر هو $x^2 + y^2 = 0$ وهذه هي نقطة الامل .

في مستوى $yz (x=0)$ فالأثر هو

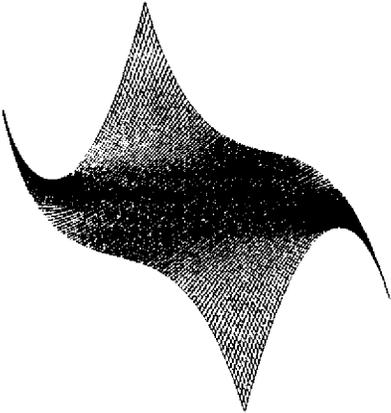
$z = y^2$ وهو قطع مكافئ ، كذلك $y = 0$



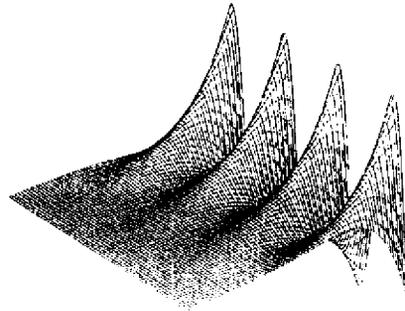
$$z = 2y^2 \sin(2x)$$



$$z = 10\sqrt{|xy|}$$



$$z = -10x^3y^2$$



$$z = \cos\left[\frac{1}{307}\left(x + \frac{3}{2}\right)\right] + 2y - 3|e^{2x}|$$

الشكل (13.3)

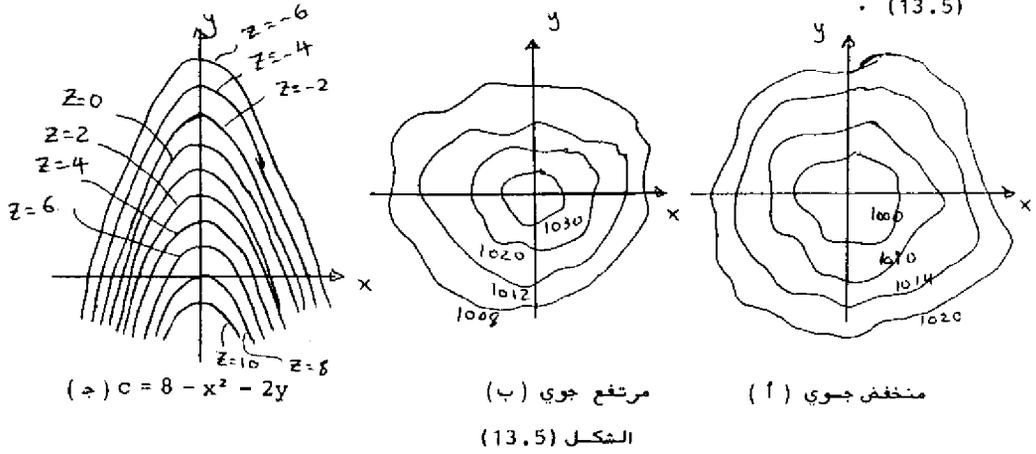
تؤدي الى $z = x^2$ وهو قطع مكافئ . والشكل الناتج هو الجسم المكافئ . انظر الشكل (13.4) .

منحنيات المناسيب :

وهناك طريقة اخرى لتمثيل السطوح (ثلاثة ابعاد) على الورق أو اللوح (بعدين) .

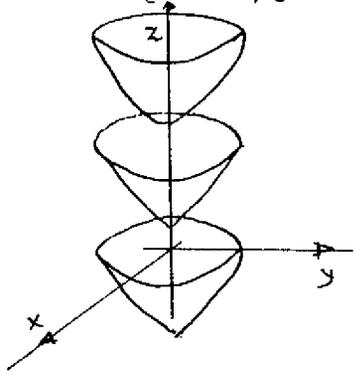
تعريف (13.3) للسطح $S : z = f(x, y)$ نسمي مجموعة النقاط $(x, y, 0)$ حيث $f(x, y) = c$ منحني المنسوب .

وعندما نرسم منحنيات مناسيب عدة لقيم c مختلفة نحصل على خارطة مناسيب . وهذا ما نراه في الخرائط الطبيعية للتضاريس (الطوبوغرافية) . اذ نرى منحنيات مرسومة عليها ارقام تمثل منسوبها (ارتفاعا أو انخفاضا) . وهذا ما نراه في خرائط الضغط الجوي للنشرة الجوية ، اذ كل من هذه المنحنيات يمثل نقاطا لها الضغط نفسه . وتدرج هذه المناسيب يؤدي الى منخفض (أو مرتفع جوي) . انظر الشكل (13.5)



مثال (13.7) يمثل الشكل (13.5) (ج) منحنيات المناسيب للسطح $z = 8 - x^2 - 2y$. اذا فرضنا الاقتران $w = f(x, y, z)$ فان مجاله في ابعاد ثلاثة . والسطح الناتج هو في اربعة ابعاد ، لذلك لا يمكن رسمه مباشرة . واذا اخذنا قيما ثابتة (مختلفة) للبعد w ، نحصل على ما نسميه سطوح المناسيب . لان $c = f(x, y, z)$ هو سطح . واذا $f(x, y, z)$ يمثل درجات الحرارة عند النقطة (x, y, z) ، فالسطح الناتج هو سطح تساوي الحرارة . واذا $f(x, y, z)$ يمثل الجهد الكهربائي ، فالسطح الناتج هو سطح تساوي الجهد .

مثال (13.8) افرض $f(x, y, z) = z - \sqrt{x^2 + y^2}$ ، ارسم بعض سطوح المناسب .



الشكل (13.6)

الحل : سطوح المناسب لها المعادلة

$$k = z - \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z = k + \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{أو} \quad z = k - \sqrt{x^2 + y^2}$$

والسطوح الناتجة هي مخروطات دائرية

تأتمتة محورها هو المحور z . انظر الشكل

(13.6) .

الرسوم الحاسوبية :

يستطيع الحاسوب من خلال برامج معينة

رسم منحنيات مناسبة أو سطوح مناسبة . ونقدم بعض هذه المنحنيات والسطوح في الشكلين

(13.7) ، (13.8) .

تمارين (13.1)

(1) افرض الاقتران $w = f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$. حدد

(أ) $f(x^2, y^2)$ (ب) $f(-3, 4)$ (ج) $f(-x, y)$

(د) $[f(a, b)]^2$ (هـ) $f(x, -y)$

(و) $f(-x, y) - f(x, -y)$ (ز) مجال f .

(ح) مدى f .

(2) افرض الاقتران $w = f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$. حدد

(أ) $g(-a, b, 2c)$ (ب) $g(1, -1, -1)$ (ج) $[g(x, y, z)]^2$

(د) $g(y, x, -y)$ (هـ) $[g(x+2, y-3, z+1)]^2$

(و) مجال g .

(ح) مدى g .

للتمارين (3) - (16) حدد مجال الاقترانات ومداهما

(3) $f(x, y) = \frac{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}{x}$ (4) $f(x, y) = y\sqrt{25 - x^2 - y^2}$

(5) $f(x, y) = \sqrt{\frac{x-y}{x+y}}$ (6) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2 - y^2}}$

$$f(x, y) = \sin^{-1}(x + y) \quad (8) \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y} \quad (7)$$

$$f(x, y) = \frac{x}{|y|} \quad (10) \quad f(x, y) = \ln(xy - 1) \quad (9)$$

$$f(x, y, z) = \sin^{-1} x + \cos^{-1} y + \tan^{-1} z \quad (11)$$

$$f(x, y, z) = (x + y)\sqrt{z - 4} \quad (12)$$

$$H(u, v, w) = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - 16} \quad (13)$$

$$f(r, s, v, p) = rs^2 \tan v + 4sv \ln p \quad (14)$$

$$g(x, y, z) = \frac{x}{y} - \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \quad (15)$$

$$f(x, y, u, v, w) = w \ln(x - v) - xue^{\frac{v}{w}} \quad (16)$$

للتمارين (17) - (19) إذا $h = f \circ g$ ، جد $h(x, y)$ ، وجد مجال h .

$$f(t) = \sin^{-1} t ; g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (17)$$

$$f(t) = \tan^{-1} t ; g(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2} \quad (18)$$

$$f(t) = \sin^{-1} t , g(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 4} \quad (19)$$

$$\text{إذا } h(x) = \sqrt{x} , g(x) = x^2 , f(x, y) = \frac{x}{y^2} \text{ ، جد } \quad (20)$$

$$f(g(2)) , h(4) \quad (ب) \quad (h \circ f)(2, 1) \quad (ا)$$

$$h(g \circ f)(x, y) \quad (د) \quad f(g(x), h(x^2)) \quad (ج)$$

$$(h \circ g)(f(x, y)) \quad (هـ)$$

إذا الجهد الكهربائي عند (x, y) هو $V = 4/\sqrt{9 - x^2 - y^2}$ بالفولط . ارسم

$$\text{منحنيات تساوي الجهد عندما } V = 16, 12, 8, 4, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} .$$

درجة حرارة صفيحة عند (x, y) هو $T = 4x^2 + 2y^2$ بالدرجات . ارسم

$$\text{منحنيات تساوي الحرارة عندما } T = 12, 8, 4, 1, 0 .$$

للتمارين (23) - (28) ارسم منحنيات المناسب لقيم تختارها

$$f(x, y) = 3x - 2y \quad (24) \quad f(x, y) = y^2 - x^2 \quad (23)$$

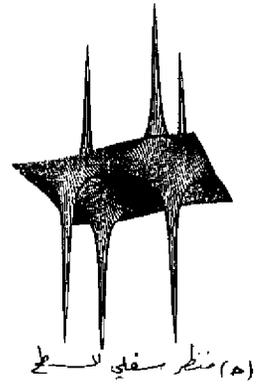
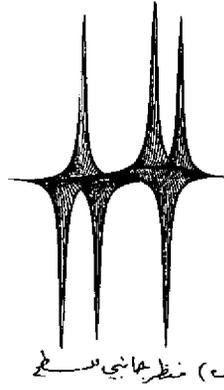
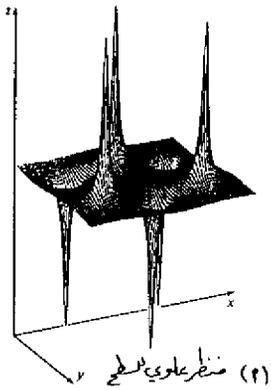
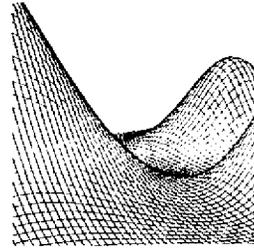
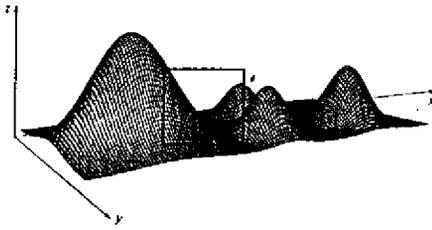
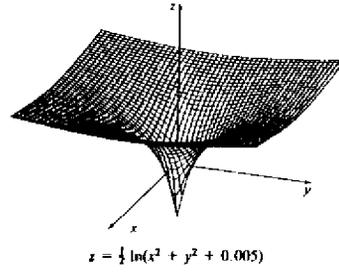
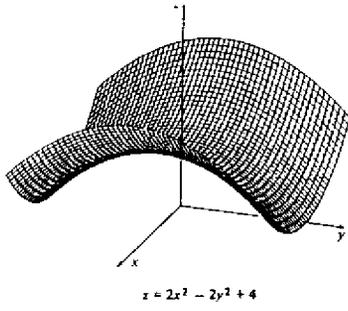
$$f(x, y) = y - \sin x \quad (26) \quad f(x, y) = x^2 - y \quad (25)$$

$$f(x, y) = \sqrt{36 - 4x^2 - 9y^2} \quad (28) \quad f(x, y) = e^x - y \quad (27)$$

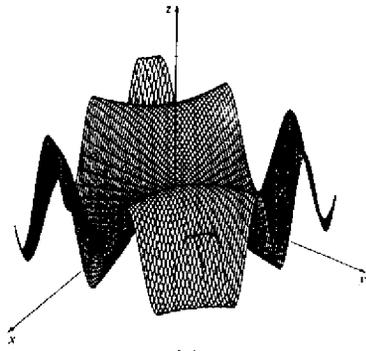
للتمارين (29) - (32) صف منحنيات المناسب ، نون أن ترسمها

$$f(x, y) = y^2 - x \quad (30) \quad f(x, y) = x + 2y \quad (29)$$

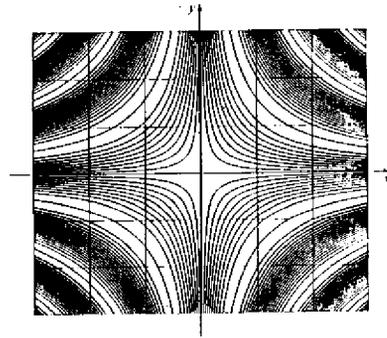
$$f(x, y) = e^{y-x^2} \quad (32) \quad f(x, y) = \tan^{-1}(x - y) \quad (31)$$



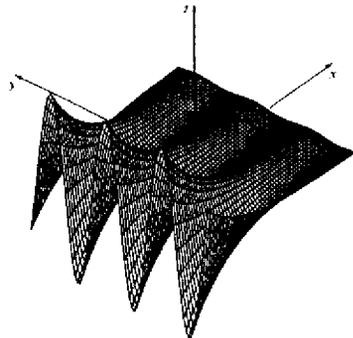
الشكل (13.7)



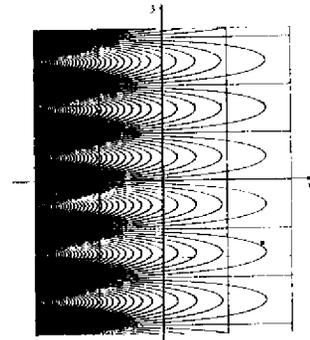
(a) $z = 2 \sin xy$



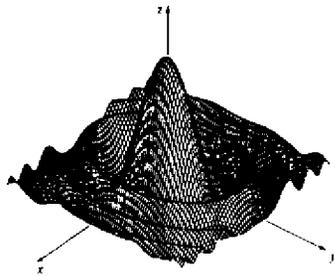
(b) level curves of $z = 2 \sin xy$



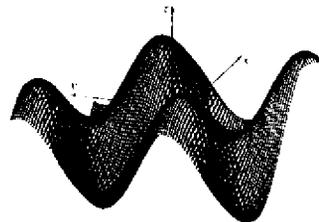
(a) $z = e^{-x} \sin y$



(b) level curves of $z = e^{-x} \sin y$



$$z = \frac{1}{2} \cos(2x^2 + y^2)$$



$$z = \sin \frac{1}{2} \sin y$$

الشكل (13.8)

للتمارين (33) - (36) صف سطوح المناسب لكون أن ترسمها

$$F(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 6z^2 \quad (34) \quad F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad (33)$$

$$F(x, y, z) = x + 2y + 3z \quad (36) \quad F(x, y, z) = 4y - 2z + 1 \quad (35)$$

(37) الجهد الكهربائي V عند $P(x, y, z)$ هو حسب

$$V = 6 / (x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{1/2}$$

(أ) ما هي سطوح تساوي الجهد ؟

(ب) ما هو سطح تساوي الجهد عندما $V = 120$ فولت ؟

(38) حسب قانون نيوتن للجاذبية الكونية لكتلتين M, m ، حيث M في نقطة الاصل

لنظام احداثي كارتيزي ، m عند (x, y, z) هو حسب

$$F = \frac{GMm}{x^2 + y^2 + z^2}$$

G هو ثابت الجاذبية . اذا M, m ثابتان ، ما هي سطوح المناسب ، وما هو

معناها الفيزيائي ؟

13.2) السطوح التربيعية

السطح التربيعي هو سطح مناسب لاقتران حدودية صيغتها

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Gx + Hy + Iz + J$$

ويمكن تصنيف هذه السطوح التربيعية الى تسعة اصناف نقدها فيما يلي مع ضرب مثل

لكل واحد منها . وعادة ما تجري تحليلا اوليا لبعض خصائص هذه السطوح قبل رسمها .

نذكر منها :

(1) المقاطع ونعني بها تقاطع السطح مع المحاور الاحداثية .

(2) الآثار ونعني بها تقاطع السطح مع المستويات الاحداثية .

(3) القطوع ونعني بها تقاطع السطح مع أي مستوى .

(4) المركز اذا أن بعض السطوح لها مركز ، وبعضها ليس له .

(5) التمائل

(6) المحدودية

وندرس الآن الاصناف التسعة من هذه السطوح .

(1) (المجسم) الناقصي ومعادلته

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

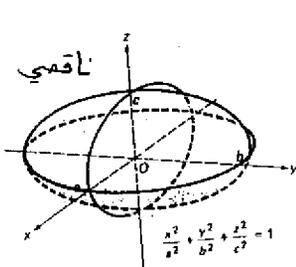
وله مركز هو نقطة الامل . متماثل بالنسبة الى المستويات الاحداثية الثلاث .
 (غير x الى -x أو y الى -y أو z الى -z فلا تتغير المعادلة) . ويقطع المحاور
 الاحداثية في ست نقاط (± a , 0 , 0) ، (0 , ± b , 0) ، (0 , 0 , ± c) . وهذا السطح
 محدود ، ضمن الجسم $x \leq a$ ، $y \leq b$ ، $z \leq c$.

وآثاره هي قطوع (منحنيات) ناقصة

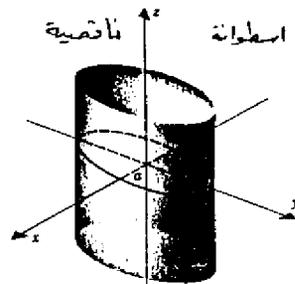
$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 & 0 = z & \text{تؤدي الى} \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 & 0 = y & \text{تؤدي الى} \\ \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} &= 1 & 0 = x & \text{تؤدي الى} \end{aligned}$$

بل أن قطوعه كلها هي ناقصة ، ونسمى الاعداد a ، b ، c اشباه المحاور .

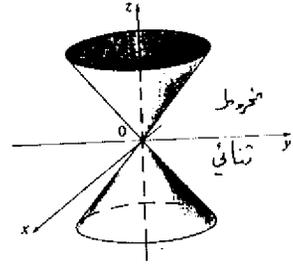
والشكل (13.9) يظهر هذا السطح . واذا $c = b = a$ فان السطح الناتج هو كرة .



الشكل (13.9)



الشكل (13.10)



الشكل (13.11)

(2) الاسطوانة الناقصة ومعادلتها

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

واثرها في المستوى $z = 0$ هو القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

وهذا السطح ينتج من كل المستقيمات المتوازية التي تمر في نقاط هذا القطع

الناقص عمودية على مستوى xy . انظر الشكل (13.10) .

(3) المخروط الناقص الثنائي ومعادلته

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

ويلاحظ أن نقطة الامل من نقاط هذا المخروط الذي له قمعان . انظر الشكل (13.11) .

وآثاره في مستوى $z = \pm a$ المستقيمان $\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$ ، وفي مستوى $z = \pm b$ المستقيمان

$\frac{x}{a} = \pm \frac{y}{b}$. واذا $b = a$ فالمخروط دائري .

(4) المجسم المكافئي الناقصي ومعادلته

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

هذا المجسم له رأس $(0, 0, 0)$ ، وهو غير محدود . وشره في yz أو في xz هو قطع مكافئي . وإذا $z = z_0$ ثابتا فالانتر هو قطع ناقص . وإذا $a = b$ ، فالمكافئي دائري . انظر الشكل (13.12) .

ملاحظة لقد حسب ارخميدس حجمه ، كما حسن تلك الطريقة ثابت بين قره ، وخير من اختصر حساب الحجم هو ابو سهل القوهي (القرن العاشر) .

(5) الاسطوانة المكافئية ومعادلته

$$z = ax^2$$

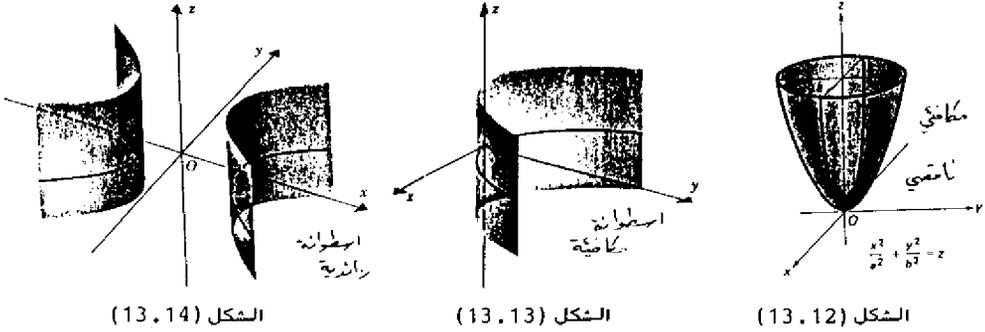
واشرها في المستوى $y = 0$ هو القطع المكافئي $z = ax^2$. انظر الشكل (13.13)

(6) الاسطوانة الزائدية ومعادلته

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

واشرها في أي مستوى يوازي مستوى xy هو قطع الزائد وهذا السطح مؤلف من

قطعتين . انظر الشكل (13.14) .



الشكل (13.14)

الشكل (13.13)

الشكل (13.12)

(7) المكافئي الزائدي ومعادلته

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$$

واشره في مستوى xz هو قطع مكافئي $\frac{x^2}{a^2} = \frac{z}{c}$. كما أن شره في مستوى xy

(أو ما يوازي ذلك) هو قطع زائد $x^2/a^2 - y^2/b^2 = c$. انظر الشكل (13.15) .

(8) الزائدي من قطعة واحدة ومعادلته

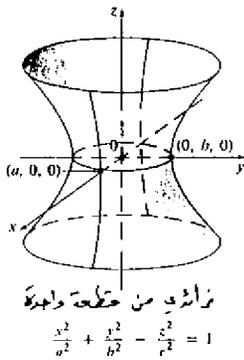
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

لاحظ ان أثره في $x=0$ ، $y=0$ هما قطعان زائدان ، أما في أي مستوى يوازي xy فلاثر هو قطع ناقص ، أو دائرة إذا $b=a$. وهذا السطح غير محدود ، مركزه نقطة الاصل . كذلك إذا $b=a$ فهو زائدي دوراني . انظر الشكل (13.16) .

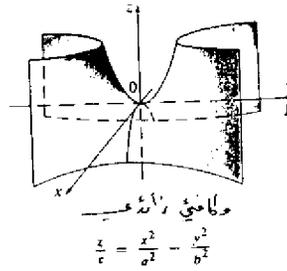
(9) الزائدي من قطعيتين ومعادلته

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

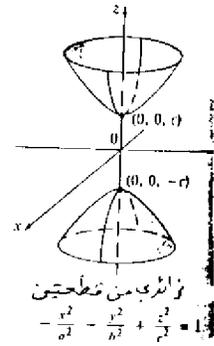
واثره في أي مستوى يوازي xz أو yz هو قطع زائد ، وفي أي مستوى يوازي xy هو قطع ناقص (أو دائرة عندما $a=b$) . انظر الشكل (13.17) . كما أن هذا الاثر قد يكون نقطة واحدة أو المجموعة الخالية (اعتمادا على قيمة z) .



الشكل (13.16)



الشكل (13.15)



الشكل (13.17)

تمارين (2.13)

للتمارين (1) - (12) حدد نوع السطح التربيعي

$$x^2 + 4y^2 + 16z^2 - 16 = 0 \quad (2) \quad x^2 + 4y^2 - 4z^2 = 0 \quad (1)$$

$$x^2 - 9y^2 - 3z = 0 \quad (4) \quad x - 9y^2 = 0 \quad (3)$$

$$4x^2 + 2y^2 - 1 = 0 \quad (6) \quad 2x^2 + 5y^2 - 6z^2 - 10 = 0 \quad (5)$$

$$2x^2 + 5y^2 - 6z^2 + 10 = 0 \quad (8) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0 \quad (7)$$

$$x - y^2 - 6z^2 = 0 \quad (10) \quad 2x^2 + y^2 - 4z = 0 \quad (9)$$

$$4y^2 + 9x^2 - 36z^2 - 36 = 0 \quad (12) \quad 2z^2 - y^2 + x = 0 \quad (11)$$

للتمارين (13) - (22) ارسم السطوح التربيعية

$$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 1 \quad (14) \quad z = y^2 + 3 \quad (13)$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \quad (16) \quad z = y^2 - 4x^2 \quad (15)$$

$$y^2 + z^2 = 9 \quad (18) \quad z^2 + 4y^2 - 2x^2 = 1 \quad (17)$$

$$z^2 = x^2 + 4y^2 \quad (20) \quad z^2 - 4y^2 - x^2 = 1 \quad (19)$$

$$x^2 = 9y^2 + 4z^2 \quad (22) \quad x^2 - 9y^2 - 4z^2 = 36 \quad (21)$$

(13.3) النهاية والاتصال

عرفنا فيما سبق مفهوم النهاية لاقتران من متغير واحد ، كما عرفناه لاقتران متجه $\underline{f}(t)$ ، والآن ، نعم هذا المفهوم لاقتران ذي متغيرات متعددة . وللاختصار نستخدم رمز المتجه للنقاط .

تعريف (13.4) افرض \underline{f} اقترانا معرفا على مجموعة تحوي كرة (أو قرصا في حال بعدين) مركزها \underline{x}_0 ، الا ربما عند \underline{x}_0 ، وان L عدد حقيقي . فان L هو نهاية \underline{f} عند \underline{x}_0 ، اذا لأي $\epsilon > 0$ ، يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث ان $\|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta$ يتضمن

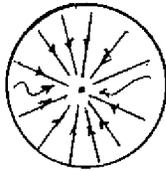
$$|\underline{f}(\underline{x}) - L| < \epsilon$$

في هذه الحال نكتب

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x}) = L$$

ونقول ان $\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{x}_0} \underline{f}(\underline{x})$ موجودة .

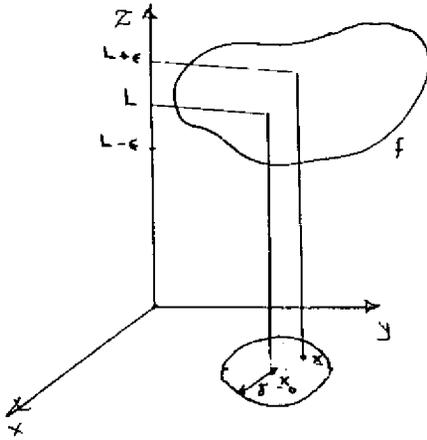
ويجدر بنا ان نفهم معنى اقتراب \underline{x} من \underline{x}_0 . لان معناه هو اقتراب \underline{x} من \underline{x}_0 بأي سبيل . على خلاف الحالة في الاقتران ذي المتغير الواحد . اذ في تلك الحالة ، يقترب x من x_0 باحد سبيلين : $x \leftarrow x_0^+$ (من اليمين) أي بقيم اكبر من x_0 ، أو $x \leftarrow x_0^-$ (من الشمال) أي بقيم اقل من x_0 . وفي حالة مجال في R^2 ، نسرى ان اقتراب \underline{x} من \underline{x}_0 له ما لا ينتهي من السبل كما في الشكل (13.18) . هذه السبل



الشكل (13.18)

المستقيمات الواصلة بين أي نقطة (\underline{x}) في القرص والمركز \underline{x}_0 . كما يمكن أن يكون الاقتراب حسب أي منح في R^2 (مثلا قطوع مكافئة) ، أو غير ذلك . والشكل (13.18) يظهر تمثيلا بيانيا

للاقتراب في حال اقتران ذي متغيرين .



الشكل (13, 18) ب

وسنقرب امثلة توضح الاقتراب من سبل
 عدة . ووجود النهاية ، يعني انها
 واحدة مهما اختلفت سبل التقارب .
 بل ان اختلاف النهاية لاختلاف سبل
 التقارب يعني أن النهاية غير
 موجودة .

مثل (13,9) اثبت أن

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ غير موجودة .}$$

الحل : اذا $x = 0$ فان

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0 = 0$$

اذا $x = y \neq 0$ فان

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

بشكل عام اذا $y = mx$ فان

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m^2}{1+m^2}$$

مما يوضح اعتماد النهاية على ميل مستقيم التقارب . لذلك فالنهاية غير

موجودة .

مثل (13,10) للاقترب $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2}$ اثبت أن النهاية غير موجودة عند

$(0,0)$.

الحل : افرض الاقتراب حسب $y = mx$ ، فان

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{mx^3}{x^4+m^2x^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{mx}{x^2+m^2} \\ &= \frac{0}{0+m^2} = 0 \end{aligned}$$

مهما كانت قيمة m ، ولكن علينا أن لا نتعجل . فالنهاية غير موجودة ، لانه

اذا كان الاقتراب حسب القطع المكافئ $y = x^2$ فان

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow (a,b,c)} x = a \quad \text{مثل (13.11) اثبت أن}$$

$$\lim_{y \rightarrow (a,b,c)} y = b$$

$$\lim_{z \rightarrow (a,b,c)} z = c$$

الحيل : افرض $0 < \epsilon$. بما أن

$$\sqrt{(x-a)^2} < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

نختار $\delta = \epsilon$ فانه

$$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} < \delta \quad \text{إذا}$$

$$|x-a| = \sqrt{(x-a)^2} < \delta = \epsilon \quad \text{فان}$$

وبرهان العبارتين الاخرين مشابه لذلك .

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} f(x,y,z) = L_1 \quad \text{مبرهنة (13.5) افرض}$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} g(x,y,z) = L_2$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} (f \pm g)(x,y,z) = \lim f \pm \lim g = L_1 \pm L_2 \quad \text{فان (i)}$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} (fg)(x,y,z) = (\lim f)(\lim g) = L_1 L_2 \quad \text{(ii)}$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y,z) = (\lim f) / (\lim g) = L_1 / L_2 \quad \text{(iii)}$$

شريطة أن $L_2 \neq 0$.

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (a,b,c)} \alpha f(x,y,z) = \alpha \lim f = \alpha L_1 \quad \text{(iv)}$$

و α أي عدد حقيقي .

هذه المبرهنة تيسر لنا حساب النهايات . كما أنه من الواضح يمكن تخصيصها لحالة اقتران ذي متغيرين . وسنضرب بعض الامثلة التي توضح استعمالنا لهذه المبرهنة .

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{مثل (13.12) احسب ما يلي}$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} y = 2 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1} x = -1 \quad \text{الحيل : لاحظ أن}$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} y^3 = 8 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -1} x^3 = -1 \quad \text{من قاعدة حاصل الضرب فسان}$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} y^2 = 4 \quad \lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1$$

نستخدم قاعدة القسمة لنحصل على

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} =$$

$$\frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} x^3 + \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} y^3}{\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} x^2 + \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} y^2} = \frac{-1+8}{1+4} = \frac{7}{5}$$

ويلاحظ القاري أننا كتبنا ذلك بالتفصيل. وهذا ما لاستعمله في الأمثلة

التالية، وان كان على كل واحد ان لا يشك ان هذا التفصيل هو الذي يؤدي الى

الجواب الصحيح.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{مثل (13.13) احسب}$$

الحيل: بما أن $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) = 0$ ، فاننا لا نستطيع استعمال قاعدة القسمة

(iii). ولكن عودة الى التعريف، لاي $0 < \epsilon < 1$ ، واذا $e = \delta$ فاذا $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$

فان $|x| = \sqrt{x^2} < \delta = \epsilon$ لذلك

$$\left| \frac{x^3}{x^2 + y^2} \right| = |x| \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| < \epsilon$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y^3}{x^2 + y^2} = 0 \quad \text{كذلك نحسب}$$

نستعمل قاعدة الجمع لنحصل على أن

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0 + 0 = 0$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} \ln \frac{x}{y} \quad \text{مثل (13.14) احسب}$$

الحيل: افرض $f(x,y) = \frac{x}{y}$ وان $g(t) = \ln t$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} f(x,y) = \frac{\lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} x}{\lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} y} = \frac{e}{1} = e$$

بما أن g متصل عند e وان $g(e) = 1$ لذلك

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} \ln \frac{x}{y} = \lim_{(x,y) \rightarrow (e,1)} g(f(x,y)) = g(e) = 1$$

الاتصال

• نقدم الآن تعريفا للاتصال لاقتزان $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

تعريف (13.6) الاقتزان $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ متصل عند (a_1, a_2, \dots, a_n) اذا

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (a_1, a_2, \dots, a_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

$$\lim_{\underline{x} \rightarrow \underline{a}} f(\underline{x}) = f(\underline{a}) \quad \text{أو بتعبير موجز}$$

$$\underline{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \quad \underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{حيث}$$

كما ان الاقتزان $f(\underline{x})$ متصل على المجموعة $A \subset \mathbb{R}^n$ اذا كان متصلا عند كل

• نقطة من نقاط A .

$$F(x, y) = \sin \frac{xy}{1+x^2+y^2} \quad \text{مثل (13.15) افرض}$$

• فان F متصل على \mathbb{R}^2

ويمكن تقديم المبرهنة التالية لتعميم مفهوم الاتصال .

مبرهنة (13.7) افرض $f(\underline{x}), g(\underline{x})$ متصلين عند $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ فان

$$(i) \quad g(\underline{x}) \pm f(\underline{x}) \quad \text{متصلان عند } \underline{a}$$

$$(ii) \quad \alpha f(\underline{x}) \quad \text{متصل عند } \underline{a} \text{ لاي } \alpha \text{ عدد حقيقي .}$$

$$(iii) \quad f(\underline{x}) \quad g(\underline{x}) \quad \text{متصل عند } \underline{a}$$

$$(iv) \quad f(\underline{x}) / g(\underline{x}) \quad \text{متصل عند } \underline{a} \text{ شريطة أن } 0 \neq g(\underline{a})$$

$$(v) \quad \text{اذا } g(w) \text{ متصل عند } f(\underline{a}) = w \text{ فان } g \circ f \text{ متصل عند } \underline{a}$$

والبند الاخير في هذه المبرهنة (v) هو عن اتصال الاقتزان المركب .

وعودة الى المثل السابق ، فانه اذا

$$g(w) = \sin w, \quad f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$$

وبما ان $f(x, y)$ متصل لجميع قيم $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ، وكذلك $\sin w$ متصل لجميع

قيم w ، فان

$$(g \circ f)(x, y) = F(x, y) = \sin \frac{xy}{1+x^2+y^2}$$

متصل لجميع $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

تعريف (13.8) إذا $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ، نعرف ما يلي

(أ) جوار النقطة \underline{x}_0 في R^n هو مجموعة من النقاط \underline{x} التي تحقق

$$\{ \underline{x} : \|\underline{x} - \underline{x}_0\| < \delta \}$$

حيث $\delta > 0$ عدد حقيقي ، انظر الشكل (13.19) .

(ب) النقطة $\underline{x}_0 \in S$ نقطة داخلية إذا S تحوي جوارا ما للنقطة \underline{x}_0 . ومجموع

كل النقاط الداخلية في S يسمى داخل S . انظر الشكل (13.20) .

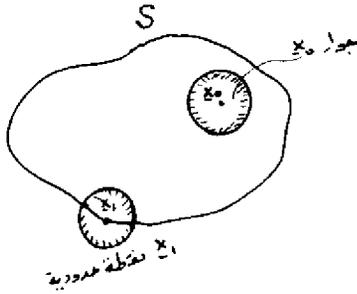
(ج) النقطة \underline{x}_0 هي نقطة حدودية للمجموعة S إذا كل جوار للنقطة \underline{x}_0 يحوي

نقاطا في S ونقاطا ليست في S . ومجموع النقاط الحدودية للمجموعة S

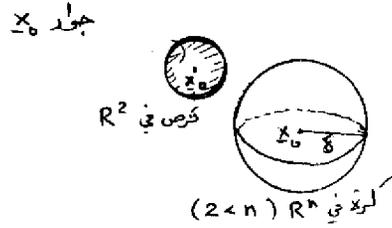
يسمى حدود S . انظر الشكل (13.20) .

(د) المجموعة S تسمى مفتوحة إذا كانت جميع نقاطها داخلية .

(هـ) المجموعة S تسمى مغلقة إذا كانت تحوي حدودها .



الشكل (13.20)



الشكل (13.19)

مثل (13.16) نضرب امثلة في R^2 ليسر تمثيلها ، افترض

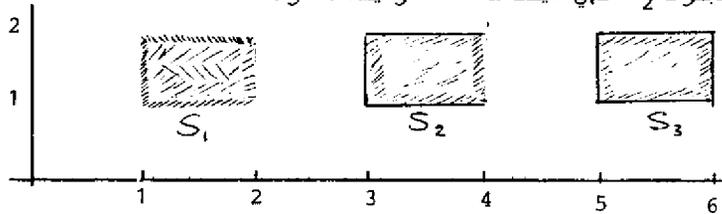
$$S_1 = \{ (x, y) : 1 < x < 2 , 1 < y < 2 \}$$

$$S_2 = \{ (x, y) : 3 \leq x < 4 , 1 \leq y \leq 2 \}$$

$$S_3 = \{ (x, y) : 5 \leq x \leq 6 , 1 \leq y \leq 2 \}$$

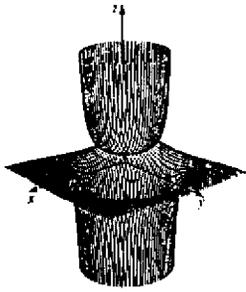
انظر الشكل (13.21) . فالمجموعة S_1 مفتوحة ، والمجموعة S_3 مغلقة .

اما المجموعة S_2 فهي ليست مغلقة ، وليست مفتوحة .



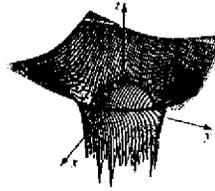
الشكل (13.21)

كما أن الشكل (13.22) هو رسوم حاسوبية لاقتراانات منغلقة .



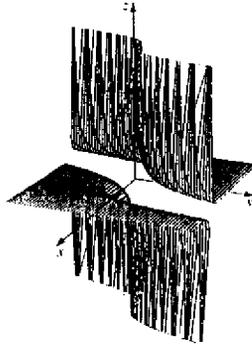
$$f(x, y) = \frac{4}{6 - x^2 - y^2}$$

discontinuous on $x^2 + y^2 = 6$



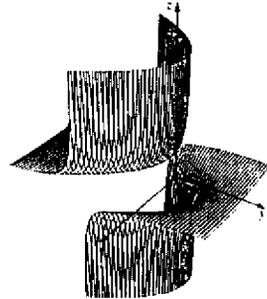
$$f(x, y) = \ln|x^2 + y^2 - 4|$$

discontinuous on $x^2 + y^2 = 4$



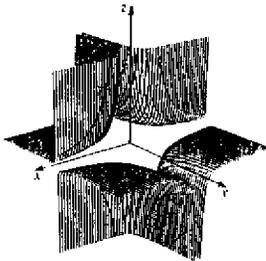
$$f(x, y) = \frac{1}{2y - x^2}$$

discontinuous on $y = \frac{1}{2}x^2$



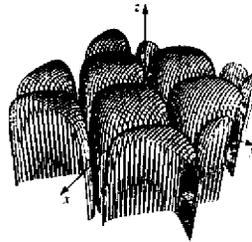
$$f(x, y) = \frac{-4}{4y + x^2 - 2}$$

discontinuous on $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}$



$$f(x, y) = \frac{-1}{x^2 y}$$

discontinuous on $x = 0$ and $y = 0$



$$f(x, y) = 3 - \frac{1}{2|\sin x + \cos y|}$$

discontinuous on $y = -x + (4n - 1)\frac{\pi}{2}$ and $y = x + (4n + 1)\frac{\pi}{2}$

(13.22) الشكل

تمارين (13.3)

للتمارين (1) - (10) احسب النهايات ان وجدت

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2} \quad (2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - 2}{2 + xy} \quad (1)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy}{5x^4 + 2y^4} \quad (4) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x^2 y}{x^3 + y^3} \quad (3)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3 - x^2 y + xy^2 - y^3}{x^2 + y^2} \quad (6) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^3 - 2x^2 y + 3y^2 x - 2y^3}{x^2 + y^2} \quad (5)$$

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy + yz + xz}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (8) \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,1,-1)} \frac{2x^2 y - xz^2}{y^2 - xz} \quad (7)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x e^{-1/|y|} \quad (10) \quad \lim_{(x,y,z) \rightarrow (\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 0)} \cos(x+y+z) \quad (9)$$

• غير موجودة . $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ اثبت ان (11)

• غير موجودة . $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{y}{x}$ اثبت ان (12)

• غير موجودة . $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + 3x^2 y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2}$ اثبت ان (13)

• غير موجودة . $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |y|^x$ اثبت ان (14)

افرض ان $f(x,y) = \arcsin(x-y)$ و ان $g(t) = t^2 - 1$ جد (15)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} (g \circ f)(x,y)$$

افرض ان $f(x,y) = e^{x^2 y}$ و ان $g(t) = \ln t$ جد (16)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,1)} (g \circ f)(x,y)$$

للتمارين (17) - (23) هل هذه الاقتراحات متطابقة ؟

$$f(x,y,z) = 3x^2 z - \pi \frac{xz}{y} \quad (18) \quad f(x,y) = x^2 y \quad (17)$$

$$f(x,y,z) = \cos(xy z + 1) \quad (20) \quad f(x,y) = \frac{x^2 + 2y}{x^2 + y^2 - 1} \quad (19)$$

$$f(x,y) = \ln(4x^2 + 9y^2 + 49) \quad (22) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (21)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6x^2 y^3}{(2x^2 + y^2)^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (23)$$

$$\text{اشتب أن } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{2x^2 + 2y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (24)$$

عند (0,0) ، أي أن $f(x,0)$ ، $f(0,y)$ متصلان ، لكن f غير متصل عند (0,0) .

$$\text{اشتب أن } f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3 + y^3}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (25)$$

• (0,0) ، ولكنه غير متصل عند (0,0) .

$$\text{اشتب أن } f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad (26)$$

$$\text{الاقتران } f(x,y) = \frac{100 ax}{ax + by}, \quad x > 0, y > 0 \quad (27)$$

في دراسة العلاقة بين جريان الدم في الرئة اليمنى الى مجموع كمية الدم

في النظام . هل لهذا الاقتران نهاية عند (0,0) .

13.4 المشتقات الجزئية

نبدأ باقتران ذي متغيرين $f(x,y)$ على المجموعة S . نشبب احد المتغيرين ولنقل $y = y_0$ ، فالاقتران $f(x, y_0)$ هو اقتران في متغير واحد . لذلك يمكن تعريف مشتقة $f(x, y_0)$ عند x_0 ، وهكذا نحصل على مشتقة اخرى نعرفها كما يلي

تعريف (13.9) افرض f اقترانا له متغيران وان (x_0, y_0) في مجاله . نعرّف

المشتقة الجزئية للاقتران f بالنسبة الى x عند (x_0, y_0) كما يلي

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

شريطة وجود هذه النهاية . كذلك نعرف المشتقة الجزئية للاقتران f بالنسبة الى y

عند (x_0, y_0) كما يلي

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

شريطة وجود هذه النهاية .

وينتج من هذا التعريف اقترانان f_x ، f_y نعرفهما كما يلي

$$f_x(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h}$$

وكل منهما هو مشتقة جزئية للاقتران f ، ونرمز لهما أيضا بالرمزين $\frac{\partial f}{\partial y}$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$

• نقرأها مشتقة f الجزئية بالنسبة الى x (أو y) .

مثل (3.17) افرض $f(x, y) = 12x^2y - 6\sin xy$. جد f_x ، f_y .

$$f_x = 24xy - 6y \cos xy \quad \text{: الحل}$$

$$f_y = 12x^2 - 6x \cos xy$$

• نجد قيمة المشتقتين عند $(1, \frac{\pi}{4})$

$$f_x(1, \frac{\pi}{4}) = 6\pi - \frac{6\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} = 6\pi - \frac{3\pi\sqrt{2}}{4}$$

$$f_y(1, \frac{\pi}{4}) = 12 - 6 \cos \frac{\pi}{4} = 12 - \frac{6\sqrt{2}}{2} = 12 - 3\sqrt{2}$$

• ونقدم جبر المشتقات الجزئية من خلال المبرهنة التالية

مبرهنة (13.10) افرض وجود f_x ، f_y ، g_x ، g_y للاقتران f ، g فان

$$(f \pm g)_x = f_x \pm g_x , (f \pm g)_y = f_y \pm g_y \quad (i)$$

$$(fg)_x = f_x g + f g_x , (fg)_y = f_y g + f g_y \quad (ii)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)_x = \frac{f_x g - f g_x}{g^2} , \left(\frac{f}{g}\right)_y = \frac{f_y g - f g_y}{g^2}$$

• شريطة أن $g \neq 0$

$$f(x, y) = \frac{x^2y - xy^2}{x^2 + y^2} \quad \text{مثلا (13.18) افرض}$$

• احسب f_x ، f_y

$$f_x = \frac{(x^2 + y^2)(2xy - y^2) - (x^2y - xy^2)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{: الحل}$$

$$= \frac{x^2y^2 + 2xy^3 - y^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{(x^2 + y^2)(x^2 - 2xy) - (x^2y - xy^2)(2y)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{x^4 - 2x^3y - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y - xy^4}{x^3 + y^3}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{مثل (13.19) افرض}$$

$$0 = f_y(0,0) = f_x(0,0) \quad \text{اثبت ان}$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h-0} = 0 \quad ; \quad \text{الحل}$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0-0}{h-0} = 0$$

المعنى الهندسي للمشتقة الجزئية

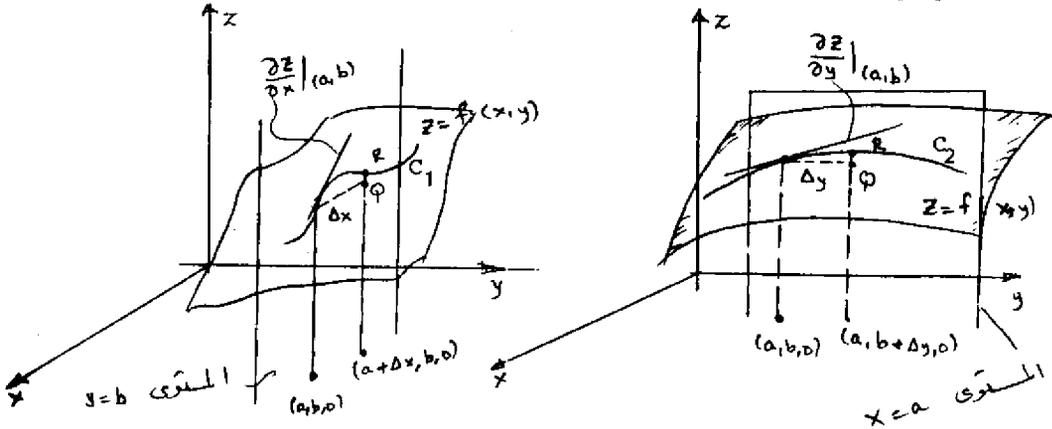
نظّم f_x على أنها تغير f بالنسبة إلى x مع اعتبار y ثابتاً . كذلك f_y هو تغير f بالنسبة إلى y مع اعتبار x ثابتاً . ولذلك يمكن تقديم تفسير هندسي لهذه المشتقات . افرض السطح $z = f(x,y)$. واعتبر $y = b$ ثابتاً ، فان اثر هذا السطح في المستوى $y = b$ هو المنحني C_1 . نعرف ميل القاطع خلال النقطتين R ، P (انظر

الشكل (13.23)) على انه

$$\frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}$$

وعندها $\frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{(a,b)} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x, b) - f(a, b)}{\Delta x}$

أي أن $\frac{\partial z}{\partial x}$ هو ميل المماس للمنحني C_1 في أي نقطة (حيث توجد النهاية) . وبالطريقة نفسها نعرف $\frac{\partial z}{\partial y}$ على انه ميل المماس للمنحني C_2 (اثر $x = a$ في السطح) في أي نقطة (توجد عندها النهاية) . انظر الشكل (13.23) .



الشكل (13.23)

اقتراحات ذات ثلاث متغيرات أو اكثر

نعم تعريفنا للمشتقات الجزئية لاقتراحات مهما كان عدد متغيراتها . فالمشتقة الجزئية ل احد المتغيرات يكون على حساب كون المتغيرات الأخرى تعامل وكأنها ثوابت .

مثلا (13.20) افرض $f(x,y,z,w) = \frac{x^2 - w^2}{y^2 + z^2}$ احسب f_x, f_y, f_z, f_w .

$$f_x = \frac{(y^2 + z^2)(2x)}{(y^2 + z^2)^2} = \frac{2x}{y^2 + z^2} \quad \text{الحل :}$$

$$f_y = \frac{-(x^2 - w^2)(2y)}{(y^2 + z^2)^2} = \frac{2y(x^2 - w^2)}{(y^2 + z^2)^2}$$

$$f_z = \frac{-(x^2 - w^2)(2z)}{(y^2 + z^2)^2} = \frac{-2z(x^2 - w^2)}{(y^2 + z^2)^2}$$

$$f_w = \frac{(y^2 + z^2) \cdot (-2w)}{(y^2 + z^2)^2} = \frac{-2w}{y^2 + z^2}$$

المشتقات الجزئية من رتب عليا

نستطيع أن نعرف مشتقة جزئية من الرتبة الثانية أو من رتب اعلى ، مع ملاحظة خصوصية الاقتراحات ذات المتغيرات المتعددة . افرض $z = f(x,y)$ ، فانه يمكن تعريف المشتقات الجزئية التالية من الرتبة الثانية

$$f_{yx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{xx}$$

ويلاحظ وجود مشتقتين مخلوطتين f_{yx}, f_{xy} .

مبرهنة (13.11) افرض $f(x,y)$ وان f_{yx}, f_{xy} متمثلتان عند (a,b) ، فان

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

اما المشتقة من الرتبة الثالثة فهي

$$f_{yxx}, f_{yxy}, f_{xyy}, f_{yxx}, f_{xyx}, f_{xxy}, f_{yyy}, f_{xxx}$$

و اذا كانت المشتقات متملة ، فان هذه المشتقات المخلوطة متساوية حسب

$$f_{yxx} = f_{xyx} = f_{xxy} \quad \text{رتبها الجزئية ، أي أن}$$

$$f_{xyy} = f_{yxy} = f_{yyx}$$

واما تعريف مشتقات من رتب اعلى فهو استطراد لما سبق .

مثلا (13.21) جد المشتقات الجزئية حتى الرتبة الثالثة للاقتراح

$$f(x,y) = x^2y^2 + y^3 - 2x^4 + 12$$

$$f_x = 2xy^2 - 8x^3, \quad f_y = 2x^2y + 3y^2 \quad \text{الحل :}$$

$$f_{xx} = 2y^2 - 24x^2, \quad f_{yy} = 2x^2 + 6y$$

$$\begin{aligned}
f_{xy} &= 4yx, \quad f_{yx} = 4xy \\
f_{xxx} &= -48x, \quad f_{yyy} = 6 \\
f_{xxy} &= 4y, \quad f_{xyx} = 4y, \quad f_{yxx} = 4y \\
f_{xyy} &= 4x, \quad f_{yxy} = 4x, \quad f_{yyx} = 4x
\end{aligned}$$

تمارين (13.4)

للتمارين (1) - (16) جد المشتقات الجزئية من الرتبة الاولى لهذه الافتراضات.

$$f(x, y) = \sqrt{\frac{1}{4}(x^2 - y)} \quad (2) \quad f(x, y) = 9 - x^2 - 3y^2 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^3 - 6x^2y + y^2 \quad (4) \quad f(x, y) = x^2 - xy^2 + 4y^5 \quad (3)$$

$$f(u, v) = \cos \frac{u}{v} \quad (6) \quad f(x, y) = x^3 e^{3y} \quad (5)$$

$$f(x, y) = \cos^2 3x - \sin^2 5y \quad (8) \quad g(u, v) = \frac{u^2 + v^3}{u^2 + v^2} \quad (7)$$

$$f(x, y) = \sqrt{(1 - x^{1/3})^3 - y^2} \quad (10) \quad f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 9y^2} \quad (9)$$

$$f(x, y, z) = x^2 y^4 - xz^3 \quad (12) \quad f(x, y) = (\sin x^2 y)^3 \quad (11)$$

$$f(x, y, z) = \frac{x + y - z}{xy + yz - xz} \quad (14) \quad f(x, y, z) = x(\cos y) e^z \quad (13)$$

$$f(u, v, w) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2 - w^2}} \quad (16) \quad f(x, y, z) = e^x(\cos y - \sin z) \quad (15)$$

للتمارين (17) - (22) جد المشتقة الجزئية الاولى عند النقطة المفروضة

$$(2, -3), \quad f(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2} \quad (17)$$

$$(-1, 2), \quad f(x, y) = x^4 - 6x^2 + 3xy^2 + 1 \quad (18)$$

$$(0, -1, 1), \quad f(x, y, z) = e^{2x-4y-z} \quad (19)$$

$$(-1, 2, 0), \quad f(x, y, z) = xy^2 \sin z \quad (20)$$

$$(0, 0), \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + 4y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (21)$$

$$(0, 0), \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (22)$$

$$\cdot f_y, f_x \text{ جد } \cdot f(x, y) = \int_{\pi}^{x^2 + y^2} \cos t^2 dt \quad (23)$$

$$\cdot f_y, f_x \text{ جد } \cdot f(x, y) = \int_1^x Q(s) ds + \int_1^x R(s) ds \quad (24)$$

للتمارين (25) - (30) جد f_{yx} ، f_{xy}

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + 2y^2} \quad (26) \quad f(x, y) = 3x^2 - \sqrt{2}xy^2 + y^5 + 10 \quad (25)$$

$$f(x, y) = x^4 - 2x^2y + 3 \quad (28) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (27)$$

$$f(x, y, z) = z \sin xy \quad (30) \quad f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y\sqrt{z} + 3yz^2 \quad (29)$$

للتمارين (31) - (34) جد f_{zz} ، f_{yy} ، f_{xx} (حيث يمكن)

$$f(x, y) = e^{x+2y} \quad (32) \quad f(x, y) = \sqrt{36-9x^2-4y^2} \quad (31)$$

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (33)$$

$$f(x, y, z) = e^{x^2} \sin yz + \ln(x^2 + y^2 + z^2) \quad (34)$$

للتمارين (35) - (38) احسب $\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}$

$$f(x, y) = 3 + y^2 \quad (36) \quad f(x, y) = 1 + x \quad (35)$$

$$f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad (38) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (37)$$

$$\text{إذا } z = e^{-ay} \cos ax \text{ اثبت أن} \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\text{إذا } z = x^c e^{-y/x} \text{ حيث } c \text{ ثابت ، جد قيمة هذا الثابت لتتحقق} \quad (40)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$\text{معادلات كوشي - ريمان للاقترانين } u(x, y) \text{ ، } v(x, y) \text{ هي } u_x = v_y \quad (41)$$

اثبت أن الاقترانات التالية تحقق هذه المعادلات

$$v = 2xy \quad , \quad u = x^2 - y^2 \quad (أ)$$

$$v = e^x \sin y \quad , \quad u = e^x \cos y \quad (ب)$$

$$v = x/(x^2 + y^2) \quad , \quad u = y/(x^2 + y^2) \quad (ج)$$

الاقتران z يحقق معادلة لابلاس إذا

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

اثبت أن ما يلي يحققها

$$z = \ln(x^2 + y^2) \quad (ب) \quad z = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \quad (أ)$$

$$z = e^{-x} \cos y + e^{-y} \cos x \quad (د) \quad z = \cos x \sin hy + \sin x \cos hy \quad (ج)$$

وقد يسمى هذا الاقتران توافقيا .

$$\text{إذا } w = 3x^2y^3z + 2xy^4z^2 - yz \text{ جد } w_{xy}z \quad (43)$$

(44) العلاقة بين الاحداثيات القطبية (r, θ) والاحداثيات الكارتيزية (x, y) هي

$$\theta = \tan^{-1} \frac{y}{x} \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad y = r \sin \theta \quad , \quad x = r \cos \theta$$

احسب المشتقات الجزئية التالية

$$\frac{\partial r}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial r}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial \theta}$$

(45) افرض $m(x, y)$ له مشتقات جزئية متممة على المستطيل $a \leq x \leq b$ ، $c \leq y \leq d$.

اثبت أن

$$\int_a^b \frac{\partial m}{\partial x}(x, y) dx = m(b, y) - m(a, y) \quad , \quad c \leq y \leq d$$

$$\int_c^d \frac{\partial m}{\partial y}(x, y) dy = m(x, d) - m(x, c) \quad , \quad a \leq x \leq b$$

(46) قانون الغاز المثالي يقول اذا n مولات من غاز له حجم V ودرجة حرارة T

تحت الضغط p فان $pV = nkT$ ، حيث k هو ثابت الغاز العالمي . اثبت أن

$$\frac{\partial V}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial V} = -1$$

(13.5) الزيادات والتفاضلات

في البداية سنقدم مفاهيم الزيادة والتفاضلة وما يتبعها لاقتران $f(x, y)$

ذي متغيرين مستقلين . وستكون هذه المفاهيم تعميما لما درسناه في حالة اقتصران

له متغير مستقل واحد .

تعريف (13.12) افرض $w = f(x, y)$ وان Δx ، Δy هما زيادتان في x ، y على الترتيب ،

فاننا نعرف الزيادة في w (رمزها Δw) كما يلي

$$\Delta w = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

مثل (13.22) افرض $w = f(x, y) = x^3 - 2xy$

(أ) جد Δw

(ب) اذا $\Delta x = 0.1$ ، $\Delta y = -0.2$ ، جد Δw عند النقطة $(1, 3)$.

$$\Delta w = (x + \Delta x)^3 - 2(x + \Delta x)(y + \Delta y) - (x^3 - 2x^2y) \quad \text{الحل:}$$

$$= 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - 2x\Delta y - 2y\Delta x - 2\Delta x\Delta y$$

لايجاد المطلوب في (ب) نعوض

$$\Delta w = 3(0.1) + 3(0.1)^2 + (0.1)^3 - 2(-0.2) - 6(0.1) - 2(0.1)(-0.2)$$

$$= 0.171 \quad .$$

على اننا سنقدم فيما يلي صيغة اخرى لحساب الزيادة Δw ، لها فائدتها في برهان عدة نتائج رياضية . وهذه الصيغة هي تعميم لصيغة لاقران ذي متغير واحد تعتمد على مبرهنة القيمة المتوسطة .

مبرهنة (13,13) افرض $w = f(x,y)$ معرفا على المستطيل

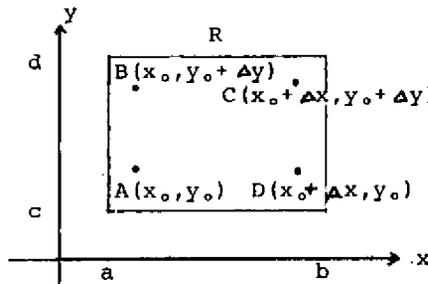
$$R = \{(x,y) : a < x < b , c < y < d\}$$

وان f_x ، f_y موجودتان في R ومتطقتان عند $A(x_0, y_0) \in R$. اذا
 $C(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in R$ ، فان $\Delta w = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + e_1 \Delta x + e_2 \Delta y$$

حيث e_1 ، e_2 اقرانان في Δx ، Δy لهما النهاية صفر عندما $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0,0)$.

البرهان :



اولا نكتب Δw كما يلي

$$\Delta w = [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)] + [f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]$$

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y) \quad \text{نسمي}$$

حسب مبرهنة القيمة المتوسطة

$$g(x_0 + \Delta x) - g(x_0) = g'(u) \Delta x$$

$$f_x(x, y_0 + \Delta y) = g'(x) \quad \text{حيث } u \text{ بين } x_0 + \Delta x \text{ ، } x_0 \text{ بينما}$$

لذلك

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) = f_x(u, y_0 + \Delta y) \Delta x$$

وكذلك نعريف

$$h(y) = f(x_0, y)$$

ومن مبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على

$$h(y_0 + \Delta y) - h(y_0) = h'(v) \Delta y$$

وتقع v بين $y_0 + \Delta y$ ، y_0 ، لذلك

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_y(x_0, v) \Delta y$$

نعوض في التعبير السابق للزيادة Δw

$$\Delta w = f_x(u, y_0 + \Delta y) \Delta x + f_y(x_0, v) \Delta y$$

عرف e_1, e_2 كما يلي

$$e_1 = f_x(u, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)$$

$$e_2 = f_y(x_0, v) - f_y(x_0, y_0)$$

بما أن f_x, f_y متصلان عند (x_0, y_0) فإن $x_0 \leftarrow u, v \leftarrow y_0$ عندما

$\Delta x \leftarrow 0, \Delta y \leftarrow 0$ أي أن $e_1 \leftarrow 0, e_2 \leftarrow 0$ عندما $(\Delta x, \Delta y) \leftarrow (0, 0)$.

لذلك نكتب

$$f_x(u, y_0 + \Delta y) = f_x(x_0, y_0) + e_1$$

$$f_y(x_0, v) = f_y(x_0, y_0) + e_2$$

عوض لنجد

$$\Delta w = [f_x(x_0, y_0) + e_1] \Delta x + [f_y(x_0, y_0) + e_2] \Delta y$$

$$w = f(x, y) = x^3 - 2xy \quad \text{مثال (13.23) نجد } e_2, e_1 \text{ للاقتراح}$$

الحل : وجدنا في حل المثل السابق

$$\Delta w = 3x^2 \Delta x + 3x \Delta x^2 + \Delta x^3 - 2x \Delta y - 2y \Delta x - 2 \Delta x \Delta y$$

$$= (3x^2 - 2y) \Delta x - 2x \Delta y + (3x \Delta x + \Delta x^2) \Delta x + (-2 \Delta x) \Delta y$$

$$e_2 = -2 \Delta x, \quad e_1 = 3x \Delta x + \Delta x^2 \quad \text{أي أن}$$

كذلك لاحظ أن $e_1 \leftarrow 0, e_2 \leftarrow 0$ عندما $(\Delta x, \Delta y) \leftarrow (0, 0)$.

بعد ما سبق ، نستطيع أن نعرف التفاضلة .

تعريف (13.14) افترض $w = f(x, y)$ ، وان $\Delta x, \Delta y$ زيادتان في x, y .

(أ) نعرف التفاضلة dx والتفاضلة dy (للمتغيرين المستقلين) كما يلي

$$dx = \Delta x, \quad dy = \Delta y$$

(ب) نعرف التفاضلة dw (للمتغير التابع) كما يلي

$$dw = f_x(x, y) dx + f_y(x, y) dy = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

ومن هذا التعريف والمبرهنة السابقة ، في حال تحقيق شروطها فإن

$$\Delta w - dw = e_1 \Delta x + e_2 \Delta y$$

وإذا Δx ، Δy صغيران فإن $\Delta w \approx dw$ ، مما يجعل dw مفيدة في حساب مقادير التغير على وجه التقريب بشيء من الدقة .

مثل (13.24) من المثل السابق $w = f(x, y) = x^3 - 2xy$

$$dw = (3x^2 - 2y) dx - 2x dy \quad \text{فإن}$$

فإذا فرضنا النقطة $(1, 3)$ تتغير بمقدار $\Delta x = 0.1$ ، $\Delta y = -0.2$ فإن

$$\Delta w \approx dw = (3 - 6)(0.1) - 2(-0.2) = 0.100$$

$$0.071 = dw - \Delta w \quad \text{والفرق}$$

مثل (13.25) نصف قطر مخروط دائري قائم هو 6 سم ، وارتفاعه 18 سم مع امكانية غلط في المقياس قدره ± 0.005 . استعمل التفاضل لتحسب حجم المخروط ، على وجه التقريب .

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad \text{الحل :}$$

$$dv = \frac{\pi}{3} (2r) h dr + \frac{\pi}{3} r^2 dh$$

$$\pm 0.005 = dh = dr , 18 = h , 6 = r \quad \text{عوض}$$

$$dv = \frac{\pi}{3} (252) (\pm 0.005) = \pm 1.319$$

$$V + dv = 678.584 \pm 1.319 \quad \text{والحجم}$$

$$= 679.903$$

$$= 677.265 \quad \text{أو}$$

الآن نعرف مفهوم قابلية الاشتقاق (الاشتقاقية) .

تعريف (13.15) إذا $w = f(x, y)$ ، فإن f قابل للاشتقاق عند (x_0, y_0) شريطة أن Δw يمكن كتابتها على النحو

$$\Delta w = f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + e_1 \Delta x + e_2 \Delta y$$

حيث e_1, e_2 لهما النهاية صفر عندما $(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)$.

ونقول f قابل للاشتقاق على المنطقة R ، إذا كان قابلا للاشتقاق عند

كل نقطة من نقاط R .

مبرهنة (13.16) إذا $w = f(x, y)$ ، و f_x ، f_y متصلان على منطقة مفتوحة R

فإن f قابل للاشتقاق على R .

ما هي العلاقة بين الاشتقاقية والاتصال ؟ للاقتراح ذي المتغير الواحد وجدنا

ان وجود المشتقة يتضمن الاتصال ، اما في حال اقتران متعدد المتغيرات فالامر مختلف .

مبرهنة (13.17) اذا $f(x,y)$ قابل للاشتقاق عند (x_0, y_0) ، فان f متصل عند (x_0, y_0) .

البرهان : نكتب $\Delta w = [f_x(x_0, y_0) + e_1] \Delta x + [f_y(x_0, y_0) + e_2] \Delta y$

افرض $x = x_0 + \Delta x$ ، $y = y_0 + \Delta y$ ، فان

$$\Delta w = f(x, y) - f(x_0, y_0)$$

$$= [f_x(x_0, y_0) + e_1] (x - x_0) + [f_y(x_0, y_0) + e_2] (y - y_0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} [f(x, y) - f(x_0, y_0)] = 0 \quad \text{بحسب النهاية}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad \text{اي ان}$$

اي ان f متصل عند (x_0, y_0) .

ونصل الى النتيجة التالية

نتيجة (13.18) اذا f_x, f_y متصلان على منطقة متصلة R فان

f متصل على R .

ونؤكد هنا (بغرب مثل) ان مجرد وجود f_x, f_y ليس كافيا لان يكون f متصلا .

$$\text{مثال (13.26) افرض } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

فان $f_x(0, 0) = f_y(0, 0)$ موجودتان ، لكن f ليس متصلا عند $(0, 0)$ فهو ليس قابلا للاشتقاق عند $(0, 0)$.

$$f_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0 \quad \text{الحل}$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(0, y) - f(0, 0)}{y - 0} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{y} = 0$$

لكن يمكن البرهنة على ان $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ غير موجودة .

لذلك فهو غير متصل ، وبالتالي ليس قابلا للاشتقاق عند $(0, 0)$.

والآن نكتب مبرهنة تماثل مبرهنة القيمة المتوسطة .

مبرهنة (13.19) افرض $f(x,y)$ معرفا على المنطقتين

$R = \{(x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ اذا $f_x(x, y_0)$ موجود لعدد ما $y_0 \in [c, d]$ لجميع $x \in [a, b]$ ، فانه

يوجد عدد $\xi_1 \in (a, b)$ بحيث أن

$$f(b, y_0) - f(a, y_0) = (b - a) f_x(\xi_1, y_0)$$

(ب) إذا $f_y(x_0, y)$ موجود لعدد ما $x_0 \in [a, b]$ لجميع $y \in [c, d]$ فإنه

يوجد عدد $\xi_2 \in (c, d)$ بحيث أن

$$f(x_0, d) - f(x_0, c) = (d - c) f_y(x_0, \xi_2)$$

البرهان: نبرهن (أ). عرف الاقتران g كما يلي

$$g(x) = f(x, y_0)$$

$$g'(x) = f_x(x, y_0) \quad \text{فان}$$

وتنطبق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الاقتران $g(x)$ على $[a, b]$.

لذلك يوجد عدد ξ_1 ، $a < \xi_1 < b$ و

$$g'(\xi_1) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

$$f(b, y_0) - f(a, y_0) = (b - a) f_x(\xi_1, y_0) \quad \text{بالتعويض}$$

وبرهان (ب) مماثل لذلك .

$$f(x, y) = \frac{2xy}{3+x} \quad \text{مثل (13.27) افرض}$$

وان $x \in [2, 5]$ ، جد ξ_1 عندما $y = 4$.

$$f(5, 4) - f(2, 4) = (5 - 2) f_x(\xi_1, 4) \quad \text{الحل:}$$

$$5 - \frac{16}{5} = 3 \cdot \frac{24}{(3 + \xi_1)^2}$$

$$(3 + \xi_1)^2 = 40 \quad \text{أو}$$

$$3 + \xi_1 = \pm 2\sqrt{10}$$

$$\xi_1 = 2\sqrt{10} - 3 \quad \text{نريد } 2 < \xi_1 < 5 \text{ ، لذلك } \xi_1 = 2\sqrt{10} - 3$$

تعميم هذه المفاهيم . قدمنا مفاهيم الاشتقاقية والزيادة والتفاضلة لاقتران له متغيران ، وبالاسلوب نفسه يمكن توسيع هذه المفاهيم لاقترانات لها ثلاث متغيرات أو أكثر .

مثل (13.28) شركة تعاقدت على شراء 10000 صندوق خشبي ابعادها 3 ، 4 ، 5 امتار .

إذا تكلفة الخشب هي 0.25 دينار لكل متر مربع من الخشب ، وإذا كان قص الخشب

دقيقا حتى 0.05 م ، جد على وجه التقريب التكلفة الاجمالية .

الحل : التكلفة C ، وابعاد الصندوق هي x ، y ، z ، لذلك

$$C = 0.25 (2xy + 2yz + 2xz)$$

$$= 0.5 (xy + yz + xz)$$

$$dC = C_x dx + C_y dy + C_z dz$$

$$= 0.5 [(y + z) + (x + z) + (y + x)] dx$$

$$= 1 (x + y + z) dx$$

$$= (3 + 4 + 5) (0.05) = 0.6$$

نحسب القيمة C

$$C = 0.5 (12 + 20 + 15) = 23.5$$

$$C + dC = 23.5 + 0.6 = 24.1 \quad \text{دينارا}$$

هذا للصندوق الواحد ، وللعدد المطلوب فإن التكلفة

• 241000 دينار

تمارين (13.5)

للتمارين (1) - (4) احسب e_1 ، e_2 حسب ما في مبرهنة (13.14)

$$f(x, y) = 2x^2 + xy^2 - 3y(2) \quad f(x, y) = 4y^2 - 3xy + 2x \quad (1)$$

$$f(x, y) = (x - 2y)^2 \quad (4) \quad F(x, y) = x^3 + y^3 \quad (3)$$

للتمارين (5) - (12) جد dw

$$w = x^2 + 4y - 2x^2y \quad (6) \quad w = x^3 - x^2y + 3y^2 \quad (5)$$

$$w = e^{-2x} y - x^4 y^2 \quad (8) \quad w = x^2 \sin y - y^{7/5} \quad (7)$$

$$w = x^2 e^{y^z} + y \ln z \quad (10) \quad w = x^2 \ln (y^2 + z^2) \quad (9)$$

$$w = x^2 y^3 z^{-1} v^4 \quad (12) \quad w = xy z / (x + y + z) \quad (11)$$

(13) استخدم التفاضلة لتقريب

$$f(x, y) = x^2 - 3x^3 y^2 + 4x - 2y^3 + 6$$

عندما (x, y) تتغير من $(-2, 3)$ الى $(-2.02, 3.01)$.

(14) استخدم التفاضلة لتقريب

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - 5y$$

عندما (x, y) تتغير من $(1, 2)$ الى $(1.03, 1.98)$.

(15) استخدم التفاضلة لتقريب

$$f(x, y, z) = x^2 z^3 - 3y z^2 + x^{-3} + 2y^{1/2} z$$

عندما (x, y, z) تتغير من $(1, 4, 2)$ الى $(1.02, 3.97, 1.96)$.

(16) استخدم التفاضلة لتقريب

$$w = r^2 - 3sv + 4p^3$$

عندما (r, s, v, p) تتغير من $(1, 2, 4, 3)$ الى $(1.02, 1.99, 4.01, 2.97)$.

(17) استخدم التفاضلة لتقريب

$$\sqrt[3]{26.98} \quad \sqrt{36.04}$$

(18) استخدم التفاضلة لتقريب

$$(32.03)^{2/5} / (3.95)^3$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{افرض (19)}$$

اثبت أن f قابل للاشتقاق عند $(0, 0)$.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz^2}{x^4 + y^4 + z^4} & , (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad \text{افرض (20)}$$

اثبت f_x, f_y, f_z موجودة عند $(0, 0, 0)$ بينما f ليس قابلا للاشتقاق عند

$(0, 0, 0)$.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{5x^2 y}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{افرض (21)}$$

اثبت أن هذا الاقتران متصل عند $(0, 0)$ وان f_x, f_y موجودتان عند $(0, 0)$.

لكنهما ليستا متصلتين عندها.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{2xy z^2}{x^2 + y^2 + z^2} & , (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & , (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases} \quad \text{افرض (22)}$$

اثبت أن f قابل للاشتقاق عند $(0, 0, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{افرض (23)}$$

(أ) جد $\Delta f(0,0)$

(ب) جد f_x, f_y عند $(0,0)$

(ج) اثبت أن f قابل للاشتقاق عند $(0,0)$

(د) اثبت أن f_x, f_y ليستا متصلتين عند $(0,0)$.

(24) ضلعا مثلث قائم الزاوية طولهما 3 سم ، 4 سم مع امكانية غلط قدره 0,02 سم .

استخدم التفاضلة لتحسب على وجه التقريب (أ) طول الوتر ، (ب) مساحة المثلث .

(25) علبة اسطوانية من المعدن قطرها 6 سم وارتفاعها 12 سم ، وسماكتها 0,012 سم .

استخدم التفاضلة لتحسب مقدار المعدن اللازم لصنعها .

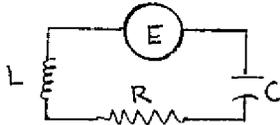
(26) دائرة كهربائية ، انظر الشكل (13,24) ، فيها محاطة L ، ومقاومة R ومواسعة C .

نعرف المعاوقة Z على انها $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ حيث X هي المفاعلة $X = 1000L - \frac{1}{1000C}$.

اذا غيرت L, R, C من 0.4 هنرى ، 400 اوم ، 10^{-5} فاراد الى 0.45 هنرى ،

و 425 اوم ، و 11.1×10^{-5} فاراد على الترتيب . ما هو مقدار التغير في المعاوقة ؟

ما هي القيمة التقريبية للمعاوقة ؟



الشكل (13,24)

(27) لصندوق مغلق نزيد طول وعرضه وارتفاعه بمقدار 2% ، 5% ، 8% على الترتيب ،

ما هو مقدار الزيادة في حجمه على وجه التقريب ؟ ما هو مقدار الزيادة في

مساحة سطوحه ؟ وما هي المساحة على وجه التقريب ؟

(28) سيارة تسير بسرعة 40 كم / الساعة تقترب من تقاطع مع سكة حديد معامد لطريق

السيارة ، بينما يقترب قطار من التقاطع بسرعة 160 كم / الساعة . ما هو معدل

التغير في المسافة بين السيارة والقطار عندما كانت السيارة تبعد 1 كم

عن التقاطع ، والقطار يبعد 2 كم عنه ؟

13.6) قاعدة السلسلة

نقدم الآن قاعدة السلسلة لاقتران مركب له أكثر من متغير ، ولأن لهذه القاعدة عدة صيغ ، حسب الحال ، نكتبها في المبرهنة التالية ، ونفرض في كل حالة أن المشتقات الجزئية المطلوبة موجودة .

مبرهنة (13.20)

(أ) افرض الاقترانات $x = g_1(t)$ ، $y = g_2(t)$ ، $z = f(x, y)$ فان

وكذلك $z = f(g_1(t), g_2(t))$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (1)$$

(ب) افرض $x = g_1(u, v)$ ، $y = g_2(u, v)$ ، $z = f(x, y)$ فان

وكذلك $z = f(g_1(u, v), g_2(u, v))$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad (2)$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \quad (3)$$

(ج) افرض $x = g_1(t)$ ، $y = g_2(t)$ ، $z = g_3(t)$ ، $w = f(x, y, z)$ فان

وكذلك $w = f(g_1(t), g_2(t), g_3(t))$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (4)$$

(د) افرض $x = g_1(u, v)$ ، $y = g_2(u, v)$ ، $z = g_3(u, v)$ ، $w = f(x, y, z)$ فان

وكذلك $w = f(g_1(u, v), g_2(u, v), g_3(u, v))$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \quad (5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \quad (6)$$

مثال (13.29) افرض $z = x^3 \ln y$ ، $x = \cos t$ ، $y = t^2 + 1$ فان

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= 3x^2 \ln y (-\sin t) + \frac{x^3}{y} (2t) \\ &= 3\cos^2 t \sin t \ln(t^2 + 1) + 2t \frac{\cos^3 t}{t^2 + 1} \end{aligned}$$

مثال (13.30) افرض $z = x^3 \ln y$ ، $x = u^2 - v^2$ ، $y = u^2 + v^2$ فان

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \\ &= (3x^2 \ln y) (2u) + \frac{x^3}{y} (2u) \\ &= 6u(u^2 - v^2)^2 \ln(u^2 + v^2) + \frac{2u(u^2 - v^2)^3}{u^2 + v^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= (3x^2 \ln y) (-2v) + \frac{x^3}{y} (2v) \\ &= -6v(u^2 - v^2)^2 \ln(u^2 + v^2) + \frac{2v(u^2 - v^2)^3}{u^2 + v^2}\end{aligned}$$

مثل (13.31) افرض $z = e^t$ ، $y = t^2$ ، $x = \cos t$ ، $w = x^2 \sin y z^2$

$$\begin{aligned}\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt} \\ &= 2x \sin y z^2 (-\sin t) + x^2 z^2 \cos y z^2 (2t) + 2y x^2 \cos y z^2 (e^t) \\ &= -2 \sin t \cos t \sin(t^2 e^t) + e^{2t} \cos^2 t (2t) \cos(t^2 e^t) \\ &\quad + 2 e^{2t} t^2 \cos^2 t \cos(t^2 e^t) \\ &= (-2 \sin \cos t + 4t e^{2t} \cos^2 t + 2t^2 e^{2t} \cos^2 t) \cos(t^2 e^t)\end{aligned}$$

مثل (13.32) افرض $z = u + v$ ، $y = uv$ ، $x = 1 - u^2 + v^2$ ، $w = x \sin y^2 z$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial u} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \\ &= \sin y^2 z (-2u) + 2y x z \cos y^2 z (v) + x y^2 \cos y^2 z (1) \\ &= -2u \sin[(u^2 + v^2)(u + v)] + [2uv(1 - u^2 + v^2)(u + v) + u^2 v^2 (1 - u^2 + v^2)] \times \\ &\quad \cos[(u^2 + v^2)(u + v)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial v} &= \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \\ &= \sin y^2 z (2v) + 2x y z \cos y^2 z (u) + x y^2 \cos y^2 z (1) \\ &= 2v \sin[(u^2 + v^2)(u + v)] + [2u^2 v(u + v)(1 - u^2 + v^2) + u^2 v^2 (1 - u^2 + v^2)] \times \\ &\quad \cos[(u^2 + v^2)(u + v)]\end{aligned}$$

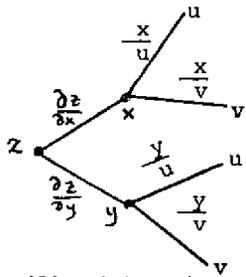
مثل (13.33) افرض $z = g(v - u, u - v)$. اثبت أن

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

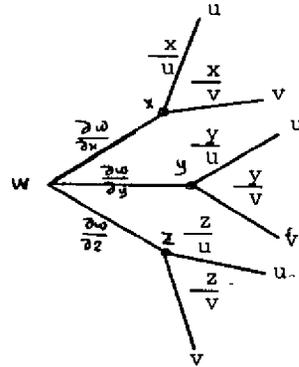
الحل : افرض $y = v - u$ ، $x = u - v$ عندها

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} \\ &= \frac{\partial z}{\partial x} (-1) + \frac{\partial z}{\partial y} (+1) + \frac{\partial z}{\partial x} (1) + \frac{\partial z}{\partial y} (-1) = 0\end{aligned}$$

مخططات شجرية يمكن الاستعانة بمخططات على هيئة اغصان وفروع شجرة الربط بين عوامل قاعدة السلسلة ، والمخطط التالي يوضح العلاقات المذكورة في المبرهنة السابقة .



المخطط (1)
المعادلتان (2) ، (3)



المخطط (2)
المعادلتان (5) ، (6)

الاشتقاق الضمني :

مبرهنة (13.21) افرض $w = w(x, y, z)$ متصلا له مشتقات جزئية ، وان المعادلة

$$w(x, y, z) = 0$$

تعرف الاقتران $z = z(x, y)$ ضمنا بدلالة x, y . اذا $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$ فان

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial w / \partial x}{\partial w / \partial z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial w / \partial y}{\partial w / \partial z}$$

البرهان : نكتب $w = w(x, y, z)$ مع $x = s, y = t, z = z(s, t)$ عندها

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s}$$

لكن $w = w(s, t, z(s, t)) = 0$ لذلك

$$\frac{\partial w}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 0$$

عوض لتحصل على

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial w}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot 0 + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \end{aligned}$$

بما أن $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$ ، لذلك

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial w / \partial x}{\partial w / \partial z}$$

والمعادلة الاخرى تبرهن بالطريقة نفسها .

مثل (13.34) افرض $x^2 z^2 - 2xyz + z^3 y^3 = 5$ جد $\frac{\partial z}{\partial x}$ ، $\frac{\partial z}{\partial y}$

الحل : افرض $w = w(x, y, z) = x^2 z^2 - 2xy z - z^3 y^2 - 5 = 0$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 2x z^2 - 2y z$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -2x z - 3z^3 y^2$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 2x^2 z - 2xy - 3z^2 y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial w / \partial x}{\partial w / \partial z} = -\frac{2x z^2 - 2y z}{2x^2 z - 2xy - 3z^2 y^2} \quad \text{لذلك}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial w / \partial y}{\partial w / \partial z} = -\frac{-2x z - 3z^3 y^2}{2x^2 z - 2xy - 3z^2 y^2}$$

تمارين (13.6)

للتمارين (1) - (6) جد $\frac{dz}{dt}$

$$z = \ln(3x^2 + y^2), x = e^{3t}, y = t^{1/3} \quad (2) \quad z = 2x^2 - 3y^3, x = \sqrt{t}, y = e^{2t} \quad (1)$$

$$z = \tan^{-1}(y^2 + x^2), x = t^2, y = 3 \quad (4) \quad z = \sin x + \cos xy, x = t^2, y = 1 \quad (3)$$

$$z = u^3 v - uv^4, u = e^{-5t}, v = \sec t \quad (6) \quad z = \sqrt{2x - 4y}, x = \ln t, y = 1 - 3t^2 \quad (5)$$

للتمارين (7) - (12) جد $\frac{dw}{dt}$

$$w = \frac{x}{y} - \frac{z}{x}, x = \sin t, y = \cos t, z = \tan t \quad (7)$$

$$w = \frac{z}{x^2 y} - 5; x = t^{-2}, y = -2t, z = \sqrt{t} \quad (8)$$

$$w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; x = e^t, y = e^{-t}, z = 2t \quad (9)$$

$$w = \ln(x^2 + y^2 + z^2); x = \cos t, y = \sin t, z = e^{-t^2} \quad (10)$$

$$w = \sin x y^2 z^3; x = 3t, y = \sqrt{t}, z = t^{1/3} \quad (11)$$

$$w = \sqrt{x^2 - y^2} + \sqrt{y^3 - z^3}; x = t^2, y = t^3, z = -t^3 \quad (12)$$

للتمارين (13) - (16) جد $\frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial u}$

$$z = \frac{4}{xy} - \frac{x}{y}; x = u^2, y = uv \quad (13)$$

$$z = \frac{x}{y^2} - \frac{y}{x^2}; x = u + v - 1, y = u - v - 1 \quad (14)$$

$$z = \ln(x^2 - y^2); x = u - v, y = u^2 + v^2 \quad (15)$$

$$z = 2e^{x^2 y}; x = \sqrt{uv}, y = \frac{1}{uv} \quad (16)$$

للتمارين (17) - (20) جد $\frac{\partial z}{\partial s}, \frac{\partial z}{\partial r}$

$$z = \sin 2u \cos 3v; u = (r + s)^2, v = (r - s)^2 \quad (17)$$

$$z = \ln u - \ln v; u = 2^{rs}, v = 2^{r/s} \quad (18)$$

$$z = ue^v + ve^{-u} ; u = \ln r , v = s \ln r \quad (19)$$

$$z = 2^{u-v} ; u = r \sin s , v = r \cos s \quad (20)$$

للتمارين (21) - (24) جد $\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial w}{\partial u}$

$$w = y \sec xz ; x = v/u , y = u - v , z = u/v \quad (21)$$

$$w = x^2 + 3y - 3z ; x = v \cos u , y = u \sin v , z = uv \quad (22)$$

$$w = \frac{x+y}{y+z} ; x = u - v , y = v - u , z = v \quad (23)$$

$$w = e^{y/x} + e^{x/z} ; x = \frac{\ln v}{u} , y = \ln v , z = \frac{\ln v}{uv} \quad (24)$$

للتمارين (25) - (28) جد $\frac{dy}{dx}$ باستخدام الاشتقاق الضمني

$$x^{4/3} + y^{4/3} = 2 \quad (26) \quad x^3 + 4x^2y - 3xy^2 + 2y^3 + 5 = 0 \quad (25)$$

$$e^{y/x} - \ln^{x/y} - 30 = 0 \quad (28) \quad x^2 + y^2 + \sin xy = 0 \quad (27)$$

للتمارين (29) - (32) استخدم الاشتقاق الضمني لحساب $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{y-z} + \frac{1}{x+y+z} \quad (30) \quad x - yz + \cos xy = 2 \quad (29)$$

$$\cos xy + \ln(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \quad (32) \quad z^4 + x^2z^3 + y^2 + xyz = 2 \quad (31)$$

افرض $w = f(x-y, y-z, z-x)$ اثبت أن

$$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

افرض $z = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$, $y = f(x, y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \quad (34) \quad \text{اثبت أن (أ)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{r} \quad \text{و}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 \quad \text{اثبت أن (ب)}$$

افرض $z = f(y+ax) + g(y-ax)$, $a \neq 0$, اثبت أن تحقق معادلة الامواج

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

الاقتران $f(x, y)$ متجانس المتغيرات من الدرجة n إذا

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

في هذه الحالة ، اثبت أن

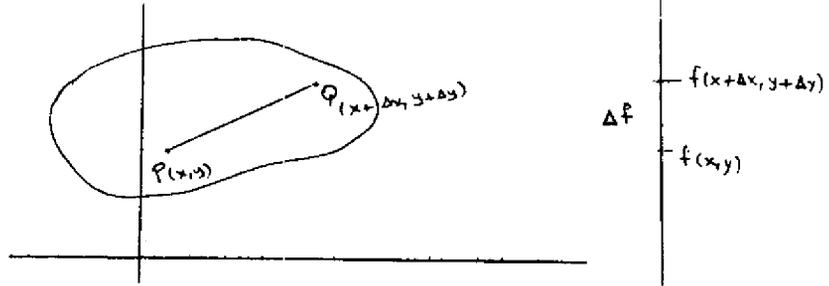
$$x f_x(x, y) + y f_y(x, y) = n f(x, y)$$

للاقتران (37) $f(x, y) = \tan \frac{x^2 - y^2}{xy}$ ، استخدم التمرين (36) لتبرهن على أن

$$x f_x + y f_y = 0$$

(13.7) المشتقة الاتجاهية والتدرج

وجدنا ان المشتقة f_x تقيس التغير في f باتجاه مواز لمحور x ، وكذلك f_y تقيس تغير f باتجاه مواز لمحور y . ولكن التغير في f قد يكون بالنسبة الى أي اتجاه ، فلو نظرنا الى الشكل (13.25) وفرضنا أن P, Q نقطتان في مجال $f(x, y)$ حيث $Q(x + \Delta x, y + \Delta y)$ ، $P(x, y)$.



الشكل (13.25)

عندها $\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$

والنسبة $\frac{\Delta f}{d(P, Q)} = \frac{\Delta f}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$

هي معدل التغير في f باتجاه قطعة المستقيم PQ . وإذا اقتربت Q من P فإن هذه النسبة تتغير ، والسؤال الذي يثور ، هو ماذا نسمي

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\Delta f}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

إذا وجدت؟ هذه هي معدل التغير في f بالنسبة الى المسافة في اتجاه \vec{PQ} ، أي انها مشتقة في اتجاه المتجه \vec{PQ} . وهذا يحفزنا لنقدم التعريف التالي

تعريف (13.22) افرض f اقترانا معرفا على مجموعة القرص D مركزه (x_0, y_0) . وافرض \vec{u} متجه وحدة ، فان المشتقة الاتجاهية للاقتران f عند (x_0, y_0)

في اتجاه \vec{u} ، رمزها $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$ هي حسب

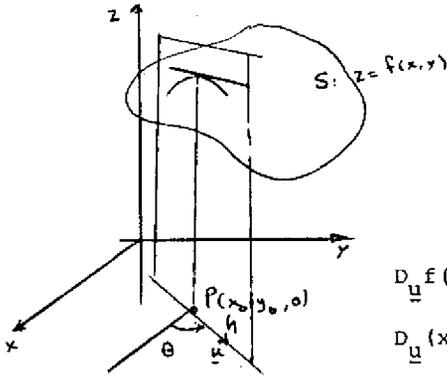
$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h u_1, y_0 + h u_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

شريطة وجود هذه النهاية .

من الواضح انه اذا θ الزاوية التي يمتعها \vec{u} مع محور x الموجب ، انظر الشكل

(13.26) ، فان $\vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j}$ ، لذلك فالمشتقة الاتجاهية هي ايضا

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h \cos \theta, y_0 + h \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{h}$$



شريطة وجود هذه النهاية .

وعندما $\underline{u} = \underline{i}$ فان التعريف في أي من

المعادلتين يؤدي الى

$$D_{\underline{u}} f(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = f_x(x_0, y_0)$$

$$D_{\underline{u}} f(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) \text{ فان } \underline{u} = \underline{j}$$

على ان استعمال التعريف لحساب $D_{\underline{u}}$

بشكل عام امر مزعج ، لذلك نقدم المبرهنة التالية

الشكل (13.25)

مبرهنة (13.23) افرض f قابلا للاشتقاق عند (x_0, y_0) ، فان f له مشتقة اتجاهية

عند (x_0, y_0) في أي اتجاه . كذلك اذا $\underline{u} = u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j}$ متجه وحدة ، فان

$$\begin{aligned} D_{\underline{u}} f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0) u_1 + f_y(x_0, y_0) u_2 \\ &= (f_x \underline{i} + f_y \underline{j}) \cdot (u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j}) \end{aligned}$$

البرهان : افرض $F(h) = f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2)$ ، فان

$$\frac{F(h) - F(0)}{h} = \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2) - f(x_0, y_0)}{h}$$

افرض $g_2(h) = y_0 + hu_2$ ، $g_1(h) = x_0 + hu_1$ فان

$$g_2(0) = y_0 \quad , \quad g_1(0) = x_0 \quad \text{كذلك} \quad F(h) = f(g_1(h), g_2(h))$$

نستخدم مبرهنة قاعدة السلسلة ($t = h$) لنجد ان $F'(0)$ موجودة ، وان

$$\begin{aligned} D_{\underline{u}} f(x_0, y_0) &= F'(0) = f_x(x_0, y_0) g_1'(0) + f_y(x_0, y_0) g_2'(0) \\ &= f_x(x_0, y_0) u_1 + f_y(x_0, y_0) u_2 \end{aligned}$$

مثل (13.35) اذا $f(x, y) = 6 + 3x^2 - y^2$ ، $\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j}$ جد $D_{\underline{u}} f(1, 2)$.

الحل : $f_x = 6x$ ، $f_y = -2y$

$$D_{\underline{u}} f(1, 2) = 6 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - 4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

مثل (13.36) اذا $f(x, y) = 6 + 3x^2 - y^2$ جد $D_{\underline{u}} f(1, 2)$ عندما

$$\underline{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j} \quad (أ)$$

$$\underline{u} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j} \quad (ب)$$

$$\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j} \quad (ج)$$

$$D_{\underline{u}} f(1,2) = 6\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{10}{\sqrt{2}} = -5\sqrt{2} \quad (أ)$$

$$D_{\underline{u}} f(1,2) = 6\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \quad (ب)$$

$$D_{\underline{u}} f(1,2) = 6\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - 4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2} \quad (ج)$$

مثل (13.37) إذا $f(x,y) = 6 + 3x^2 - 2y^2$ جد المشتقة الاتجاهية عند $(3, -1)$ في

$$\underline{a} = 2\hat{i} - \hat{j} \quad \text{اتجاه}$$

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5} \quad \text{الحل:}$$

$$\underline{u} = \frac{\underline{a}}{\|\underline{a}\|} = \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j}$$

$$f_x = -2, \quad f_y = 6x$$

$$D_{\underline{u}} f(3,-1) = 18\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - 2\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \\ = \frac{38}{\sqrt{5}}$$

ويمكن توسيع مفهوم المشتقة الاتجاهية في اتجاه متجه في ابعاد ثلاثة

تعريف (13.24) إذا f الاقتران معرف على مجموعة تحوي كرة B مركزها (x_0, y_0, z_0)

وإذا $\underline{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$ متجه وحدة ، فإن المشتقة الاتجاهية للاقتران f عند

(x_0, y_0, z_0) في اتجاه \underline{u} ، رمزها $D_{\underline{u}} f(x_0, y_0, z_0)$ تعرف حسب

$$D_{\underline{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + hu_1, y_0 + hu_2, z_0 + hu_3) - f(x_0, y_0, z_0)}{h}$$

شريطة وجود النهاية .

مثل (13.38) افرض $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ جد المشتقة الاتجاهية عند $(0,1,-1)$

$$\underline{a} = -\hat{i} + \hat{j} - \hat{k} \quad \text{باتجاه}$$

$$\|\underline{a}\| = \sqrt{3} \quad \text{الحل:}$$

$$\underline{u} = -\frac{\hat{i}}{\sqrt{3}} + \frac{\hat{j}}{\sqrt{3}} - \frac{\hat{k}}{\sqrt{3}} \quad \text{متجه الوحدة باتجاه } \underline{a} \text{ هو}$$

$$f_x = 2x e^{x^2+y^2+z^2}, \quad f_y = 2y e^{x^2+y^2+z^2}, \quad f_z = 2z e^{x^2+y^2+z^2} \quad \text{كذلك}$$

لذلك

$$D_{\underline{u}} f(0,1,-1) = 0\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2e^2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (-2e^2)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}e^2$$

مبرهنة (13.25) افرض f قابلا للاشتقاق عند (x_0, y_0, z_0) ، فإن f له مشتقة

اتجاهية عند (x_0, y_0, z_0) في أي اتجاه . كذلك إذا $\underline{u} = u_1\hat{i} + u_2\hat{j} + u_3\hat{k}$

متجه وحدة ، فإن

$$D_{\underline{u}} f(x_0, y_0, z_0) = (f_x \underline{i} + f_y \underline{j} + f_z \underline{k}) \cdot (u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j} + u_3 \underline{k})$$

التدرج

نقدم الآن مؤثرا مفاضليا له اهميته ، حتى في حساب المشتقة الاتجاهية .

تعريف (13.27)

(1) افرض f اقترانا ذا متغيرين له مشتقات جزئية عند (x_0, y_0) . نعرف تدرج f عند (x_0, y_0) رمزه $\nabla f(x_0, y_0)$ كما يلي

$$\nabla f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \underline{i} + f_y(x_0, y_0) \underline{j}$$

(ب) افرض f اقترانا ذا ثلاث متغيرات له مشتقات جزئية عند (x_0, y_0, z_0) .

نعرف تدرج f عند (x_0, y_0, z_0) رمزه $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ كما يلي

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0) \underline{i} + f_y(x_0, y_0, z_0) \underline{j} + f_z(x_0, y_0, z_0) \underline{k}$$

لاحظ ان ∇f هو متجه ، وهو المؤثر المفاضلي

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial}{\partial z} \underline{k} \right)$$

والرمز ∇ هو مقلوب Δ (دلتا) نلفظه "دل" او "نابلا" ، (وبالعربية تدرج) .

مثل (13.39) اذا $f(x, y) = \cos xy$ ، جد تدرج f ، ثم جد هذا التدرج عند

$$\left(\frac{\pi}{6}, 1 \right)$$

$$\underline{\text{الحل}} : \nabla f = f_x \underline{i} + f_y \underline{j} = -y \sin xy \underline{i} - x \sin xy \underline{j}$$

$$= -1 \left(\frac{1}{2} \right) \underline{i} - \frac{\pi}{6} (1) \underline{j}$$

$$= -\frac{1}{2} \underline{i} - \frac{\pi}{6} \underline{j}$$

مثل (13.40) افرض $f(x, y, z) = yz 2^x$ ، جد تدرج f ، ثم تدرج f عند $(1, -1, 1)$

$$\underline{\text{الحل}} : \nabla f = f_x \underline{i} + f_y \underline{j} + f_z \underline{k}$$

$$= yz 2^x \ln 2 \underline{i} + z 2^x \underline{j} + y 2^x \underline{k}$$

$$\nabla f(1, -1, 1) = -2 \ln 2 \underline{i} - 2 \underline{j} + 2 \underline{k}$$

$$= -2 (\ln 2 \underline{i} + \underline{j} - \underline{k})$$

نتيجة (13.26)

(أ) تعاد صياغة نتيجة مبرهنة (13.24) كما يلي

$$D_{\underline{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \underline{u}$$

(ب) تعاد صياغة نتيجة مبرهنة (13.26) كما يلي

$$D_{\underline{u}} f = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \underline{u}$$

هذه العلاقات تظهر العلاقة الوثيقة بين المشتقة الاتجاهية والتدرج .
 ويلاحظ انه اذا ∇f عند نقطة ما صفر ، فان $D_{\underline{u}} f$ صفر لجميع الاتجاهات ، اما اذا
 $\nabla f \neq 0$ عند نقطة ما p ، فانه يمكن تحديد الاتجاه الذي يؤدي الى اكبر قيمة
 للمشتقة الاتجاهية . افرض \underline{u} اي متجه وحدة في المستوى وان ϕ هي الزاوية بين
 \underline{u} و ∇f عند $P(x_0, y_0)$. فان

$$D_{\underline{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \underline{u} = \|\underline{u}\| \|\nabla f\| \cos \phi$$

$$= \|\nabla f\| \cos \phi$$

مما يعني ان اعظم قيمة للمشتقة $D_{\underline{u}} f$ هي $\|\nabla f\|$ عندما $\phi = 0$. لذلك

نكتب

مبرهنة (13.27) افرض $f(x, y)$ قابلا للاشتقاق عند (x_0, y_0) .

(أ) ان الاقتران f له مشتقة اتجاهية في اتجاه أي متجه وحدة \underline{u} وهي :

$$D_{\underline{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \underline{u}$$

(ب) اعظم قيمة للمشتقة الاتجاهية $D_{\underline{u}} f(x_0, y_0)$ هي $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$.

(ج) اذا $\|\nabla f(x_0, y_0)\| \neq 0$ ، فان $D_{\underline{u}} f(x_0, y_0, z_0)$ كاقتران في \underline{u}

تحقق اقصى قيمها عندما \underline{u} مواز للتدرج ∇f .

والجزء الاخير (ج) من هذه المبرهنة يمكن ان يفسر على انه عند $P(x_0, y_0)$

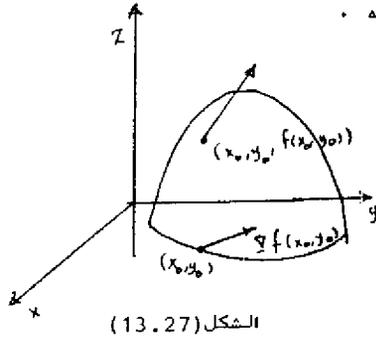
فان f تزداد اسرع ما يمكن في اتجاه التدرج $\nabla f(x_0, y_0)$. وبعبارة اخرى ، هذا

يعني انه عند $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ فان رسم f له اسرع صعود في اتجاه التدرج .

انظر الشكل (13.27) ، ولو ان رسم f يمثل سطح تل ، فانسسه عند النقطة

$(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ على جانب هذا التل يكون اتجاه اسرع صعود في اتجاه

التدرج واسرع انحدار في الاتجاه المعاكس له .



مثال (13.41) افرض $f(x, y) = 8 - 3x^2 - y^2$.

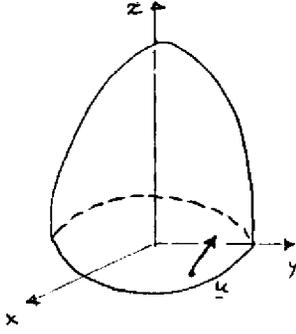
في اي اتجاه يزداد f باسرع ما يمكن عند

$(1, 2)$ ؟

الحل : $\nabla f(x, y) = -6x\underline{i} - 2y\underline{j}$

$$\nabla f(1, 2) = -6\underline{i} - 4\underline{j}$$

$$\underline{u} = \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|} = -\frac{3}{\sqrt{13}}\underline{i} - \frac{2}{\sqrt{13}}\underline{j}$$



الشكل (13.28)

• وهذا هو اتجاه اسرع زيادة في f عند $(1, 2)$.
• انظر الشكل (13.28) .

في حال اقتراح معرف على \mathbb{R}^3 ، فالنتيجة امتداد لما سبق . ونكتبها كما يلي

مبرهنة (13.28) افرض f اقتراحا له متغيرات ثلاث قابلا للاشتقاق عند (x_0, y_0, z_0) فان

f له مشتقة اتجاهيه في اتجاه أي متجه

$$\underline{u} = u_1 \underline{i} + u_2 \underline{j} + u_3 \underline{k} \quad \text{وحدة}$$

$$D_{\underline{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \underline{u}$$

(ب) اعظم قيمة للمشتقة الاتجاهية $D_{\underline{u}} f$ هي $\|\nabla f(x_0, y_0, z_0)\|$

(ج) اذا $\|\nabla f(x_0, y_0, z_0)\| \neq 0$ فان $D_{\underline{u}} f$ كاقتران في \underline{u} عند (x_0, y_0, z_0)

تحقق اعظم قيمة لها عندما \underline{u} مواز للتدرج ∇f .

مثل (13.42) افرض $f(x, y, z) = \cos xy z$. جد الاتجاه حيث f يزداد اسرع ما

يمكن عند $(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \pi)$ ، وما هو مقدار المشتقة الاتجاهية عندها ؟

$$\nabla f = f_x \underline{i} + f_y \underline{j} + f_z \underline{k} \quad \text{الحل:}$$

$$= -y z \sin xy z \underline{i} - x z \sin xy z \underline{j} - xy \sin xy z \underline{k}$$

$$\nabla f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \pi\right) = -\frac{\pi}{4} \underline{i} - \frac{\pi}{6} \underline{j} - \frac{1}{12} \underline{k}$$

$$\|\nabla f\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \pi\right)\| = \frac{1}{12} \sqrt{13\pi^2 + 1}$$

ومتجه الوحدة باتجاه التدرج هو $-\frac{1}{\sqrt{13\pi^2 + 1}} (3\pi \underline{i} + 2\pi \underline{j} + \underline{k})$

وهو الاتجاه الذي تكون فيه المشتقة الاتجاهية اكبر ما يمكن ، وقيمتها هي

$$\frac{1}{12} \sqrt{13\pi^2 + 1}$$

مثل (13.43) الحرارة في أي نقطة من صفيحة معدنية هي حسب

$$T(x, y) = e^x \cos y + e^y \cos x$$

(أ) في أي اتجاه تزداد الحرارة اسرع ما يمكن عند $(0, 0)$ ؟ ما هو معدل الزيادة ؟

(ب) في أي اتجاه تنقص الحرارة اسرع ما يمكن عند $(0, 0)$ ؟

$$\nabla T(x, y) = T_x \underline{i} + T_y \underline{j} \quad \text{الحل:}$$

$$= (e^x \cos y - e^y \sin x) \underline{i} + (-e^x \sin y + e^y \cos x) \underline{j}$$

$$\nabla T(0, 0) = \underline{i} + \underline{j} \quad \text{فان } (0, 0)$$

$$\|\nabla T(0,0)\| = \sqrt{2} \quad \text{معدل الزيادة}$$

$$\underline{u} = \frac{\nabla T}{\|\nabla T\|} = \frac{\underline{i}}{\sqrt{2}} + \frac{\underline{j}}{\sqrt{2}} \quad \text{واتجاه اسرع زيادة هو}$$

(ب) تنقص الحرارة اسرع ما يمكن في اتجاه

$$-\nabla T(0,0) = -\underline{i} - \underline{j}$$

أو

$$-\underline{u} = -\frac{\underline{i}}{\sqrt{2}} - \frac{\underline{j}}{\sqrt{2}}$$

مثل (13.44) حرارة جسم T في النقطة (x, y, z) منه هي حسب $T = 4x^2 - y^2 + 16z^2$
 ما هو معدل التغير في T في النقطة $P(4, -2, 1)$ باتجاه $\underline{u} = 2\underline{i} + 6\underline{j} - 3\underline{k}$
 في أي اتجاه T تزداد باسرع ما يمكن عند P ؟ ما هي اعظم قيمة لهذه الزيادة ؟

$$\nabla T(x, y, z) = 8x \underline{i} - 2y \underline{j} + 32z \underline{k} \quad \text{الحل :}$$

$$\nabla T(4, -2, 1) = 32\underline{i} + 4\underline{j} + 32\underline{k}$$

$$\underline{u} = \frac{\underline{U}}{\|\underline{U}\|} = \frac{2\underline{i} + 6\underline{j} - 3\underline{k}}{\sqrt{4 + 36 + 9}} = \frac{1}{7} (2\underline{i} + 6\underline{j} - 3\underline{k})$$

$$D_{\underline{u}} = \nabla T \cdot \underline{u} = \frac{1}{7} (64 + 24 - 96) = -\frac{8}{7}$$

تردد اسرع ما يمكن في اتجاه ∇T أي في اتجاه

$$\frac{1}{4\sqrt{129}} (32\underline{i} + 4\underline{j} + 32\underline{k})$$

$$4\sqrt{129} = \|\nabla T\| \quad \text{واعظم قيمة لهذه الزيادة هي}$$

تمارين (13.7)

جد المشتقة الاتجاهية للاقتران f في اتجاه \underline{a} للتمارين (1) - (12) .

$$f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 15 ; p(1, 1), \underline{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{j} \quad (1)$$

$$f(x, y) = x - y^2 ; p(2, -3), \underline{a} = \underline{i} + 2\underline{j} \quad (2)$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} ; p(3, 4), \underline{a} = \frac{1}{2} \underline{i} - \frac{\sqrt{3}}{2} \underline{j} \quad (3)$$

$$f(x, y) = x^2 \ln y ; p(5, 1), \underline{a} = -\underline{i} + 4\underline{j} \quad (4)$$

$$f(x, y) = \tan(x + 2y) ; p(0, \frac{\pi}{6}), \underline{a} = -4\underline{i} + 5\underline{j} \quad (5)$$

$$f(x, y) = x \cos^2 y ; p(2, \frac{\pi}{4}), \underline{a} = 5\underline{i} + \underline{j} \quad (6)$$

$$f(x, y, z) = x^3 y^2 z ; p(2, -1, 2), \underline{a} = 2\underline{i} - \underline{j} - 2\underline{k} \quad (7)$$

$$f(x, y, z) = xy - yz + 3xz ; p(1, -1, 3), \underline{a} = -\underline{i} + 3\underline{j} + 2\underline{k} \quad (8)$$

$$f(x, y, z) = \frac{x - y + z}{x + y + z} ; p(2, 1, -1), \underline{a} = -2\underline{i} - \underline{j} - \underline{k} \quad (9)$$

$$f(x, y, z) = y \arcsin x \mathbf{e} ; p\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} \quad (10)$$

$$f(x, y, z) = (x + y)(y + z) ; p(5, 7, 1), \mathbf{a} = -3\mathbf{i} + \mathbf{k} \quad (11)$$

$$f(x, y, z) = z^2 \arctan(x + y) ; p(0, 0, 4), \mathbf{a} = 6\mathbf{i} + \mathbf{k} \quad (12)$$

$$\cdot D_{\mathbf{b}}f(1, 2) = -2\sqrt{2}, D_{\mathbf{a}}f(1, 2) = 6\sqrt{2} \text{ إذا } \cdot \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}, \mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} \text{ افترض } (13)$$

. $f_{\mathbf{y}}(1, 2), f_{\mathbf{x}}(1, 2)$ جد

$$\cdot D_{\mathbf{a}}f(x_0, y_0, z_0) = 2\sqrt{3} \text{ إذا } \cdot \mathbf{c} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k} \text{ افترض } (14)$$

$$\cdot f_{\mathbf{z}}, f_{\mathbf{y}}, f_{\mathbf{x}} \text{ جد } \cdot D_{\mathbf{c}}f(x_0, y_0, z_0) = \sqrt{5}, D_{\mathbf{b}}f(x_0, y_0, z_0) = -\sqrt{10}$$

. (x_0, y_0, z_0) عند

للتمارين (15) - (26) جد تدرج الاقتران المفروض، واحسبه عند النقطة المفروضة .

$$f(x, y) = y^2 + x \sin x^2 y \quad (16) \quad g(x, y) = e^{-2x} \ln(y - 4) \quad (15)$$

$$f(x, y) = x \ln(x - y) \quad (18) \quad f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} ; p(-4, 3) \quad (17)$$

$$f(x, y, z) = (2x + y^2 + z^3)^{5/2} \quad (20) \quad f(x, y, z) = 2x^2 - y^2 - 4z^2 \quad (19)$$

$$f(x, y, z) = xy^2 e^z ; p(2, -1, 0) \quad (22) \quad f(x, y, z) = yz^3 - 2x^2 ; p(2, -3, 1) \quad (21)$$

$$f(x, y) = \frac{x + 3y}{5x + 2y} ; p(-1, 3/2) \quad (23)$$

$$f(x, y) = x \cos xy ; p(1, -\pi) \quad (24)$$

$$f(x, y, z) = ze^{-x} \tan y ; p(0, \pi, -2) \quad (25)$$

$$g(x, y, z) = e^x (\sin y + \sin z) ; p\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (26)$$

للتمارين (27) - (34) جد في أي اتجاه تزداد f بأسرع ما يمكن عند النقطة

المفروضة . ما هي أكبر قيمة لهذه الزيادة عند النقطة المفروضة ؟

$$f(x, y) = e^x (\cos y + \sin y) ; p(0, 0) \quad (27)$$

$$f(x, y) = y^2 + x \sin x^2 y, p\left(\frac{1}{2}, \pi\right) \quad (28)$$

$$f(x, y) = 3x^2 + 4y^2 ; p(-1, 1) \quad (29)$$

$$f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2) ; p(2, 0, 1) \quad (30)$$

$$f(x, y, z) = e^x + e^y + e^{2z} ; p(1, 1, -1) \quad (31)$$

$$f(x, y, z) = \cos xy z ; p\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -\pi\right) \quad (32)$$

$$f(x, y, z) = ze^{-x} \tan y ; p(0, \pi, -2) \quad (33)$$

$$g(x, y, z) = e^x (\sin y + \sin z), p\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (34)$$

للاقترانات (35) - (38) جد في أي اتجاه يزداد الاقتران اسرع ما يمكن في النقطة

المفروضة ، وما هي اعظم قيمة لهذه الزيادة ؟

$$f(x,y) = xy e^{x-y} ; p(5,5) \quad (36) \quad f(x,y) = e^{2x} \sin y ; p(0, \frac{\pi}{4}) \quad (35)$$

$$p(1,2,-1) , f(x,y,z) = x^2 + 4xz + 2yz^2 \quad (37)$$

$$p(3,1,-5) , f(x,y,z) = xyz \quad (38)$$

للاقترانات (39) - (44) جد في أي اتجاه ينقص الاقتران اسرع ما يمكن عند

النقطة المفروضة ، وما هي اصغر قيمة لهذا النقصان ؟

$$f(x,y) = xy - y^3 ; p(2,-2) \quad (40) \quad f(x,y) = e^{2x} \sin y ; p(0, \frac{\pi}{4}) \quad (39)$$

$$f(x,y) = \arctan(x-y) ; (2,-2) \quad (42) \quad f(x,y,z) = \sqrt{xz} e^y ; p(16,0,9) \quad (41)$$

$$f(x,y) = \tan(x^2 + y^2) ; p(\sqrt{\frac{\pi}{6}}, \sqrt{\frac{\pi}{6}}) \quad (43)$$

$$f(x,y,z) = \ln \frac{xy}{z} ; p(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}) \quad (44)$$

$$(45) \text{ افرض } \nabla f(a,b) = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} . \text{ جد متجه وحدة } \mathbf{u} \text{ يحقق ما يلي}$$

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) \text{ قيمة عظمى .} \quad (ب) \quad D_{\mathbf{u}} f(a,b) = 0 \quad (ا)$$

$$D_{\mathbf{u}} f(a,b) \text{ قيمة صغرى .} \quad (ج)$$

$$(46) \text{ اذا } D_{\mathbf{u}} f(a,b) = -12 \text{ ما هي قيمة } D_{-\mathbf{u}} f(a,b) \text{ ؟}$$

$$(47) \text{ اذا } f(x,y) = x^3 - 12x + y^2 - 10y \text{ جد جميع النقاط حيث } \|\nabla f\| = 0 .$$

$$(48) \text{ افرض } f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} \text{ جميعها متصلة . وان } \mathbf{u}, \mathbf{v} \text{ متجهما وحدة .}$$

$$\text{اثبت ان } D_{\mathbf{u}} D_{\mathbf{v}} f = D_{\mathbf{v}} D_{\mathbf{u}} f$$

$$(49) \text{ اذا } f, g \text{ لهما مشتقات جزئية على } R^2 . \text{ اثبت ما يلي}$$

$$\nabla (f+g) = \nabla f + \nabla g \quad (ب) \quad \nabla (cf) = c \nabla f \quad (ا) \quad c \text{ ثابت}$$

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2} \quad (د) \quad \nabla (fg) = \nabla f g + f \nabla g \quad (ج)$$

$$\nabla w = \frac{dw}{df} \nabla f \quad \text{فان } w = h(f) \quad (و) \quad \nabla f^n = n f^{n-1} \nabla f \quad (هـ)$$

(50) صفيحة مستطيلة ، وضع عليها نظام احداثي كارثيزي مركزها نقطة امله -الحرارة

في النقطة (x,y) هي $T(x,y) = 5 + 2x^2 + y^2$. حدد طريق نملة تسلكه

ابتداءً من $(4,2)$ لكي تبرد باسرع ما يمكن ؟

(51) حرارة صفيحة مستطيلة هي $T(x,y) = 100 - 2x^2 - y^2$. ما هو المنحني الذي

يسير عليه جسم ابتداءً من $(3,4)$ يتحرك في اتجاه تزداد فيه الحرارة اكبر

ما يمكن ؟

(52) حرارة جسم عند (x, y, z) هي T متناسبة عكسيا مع مربع بعد النقطة عن نقطة الاصل . اذا $T(0,0,1) = 500$. جد مقدار التغير في T عند $(2,3,3)$ في اتجاه $(3,1,1)$. في أي اتجاه من $(2,3,3)$ تكون الزيادة في T اسرع ما يمكن ؟ كم هي هذه القيمة العظمى ؟

(53) الجهد الكهربائي V عند $P(x, y, z)$ في صفيحة مستطيلة هو $V = x^2 + 4y^2 + 9z^2$. جد معدل تغير V عند $P(2, -1, 3)$ في اتجاه القطعة من P الى نقطة الاصل . ما هو الاتجاه الذي يزداد فيه الجهد اسرع ما يمكن ؟ ما هي هذه القيمة العظمى ؟

(13.8) مستويات التماس ، وناظم السطوح

كيف نفسر التدرج هندسيا ؟ افرض $f(x, y) = c$ منحنى منسوب لسطح ما معادلته $z = f(x, y)$ يمر بنقطة معينة $P(x_0, y_0)$ في المجال . لذلك $f(x_0, y_0) = c$. افرض ان المعادلات المعلمية لهذا المنحنى هي

$$x = g(t) , y = h(t) , x_0 = g(t_0) , y_0 = h(t_0)$$

وان هذا المنحنى ممهد . نشق بالنسبة الى t المعادلة التالية

$$f(g(t), h(t)) = c$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} = 0 \quad \text{ونحصل على}$$

اذا كتبنا

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \underline{j} , \quad \underline{r}'(t) = \frac{dx}{dt} \underline{i} + \frac{dy}{dt} \underline{j}$$

فان المعادلة اعلاه تصبح $\nabla f \cdot \underline{r}'(t) = 0$. وعند $t = t_0$

الشكل (13.29)

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \underline{r}'(t_0) = 0$$

فاذا $\underline{r}'(t_0) \neq \underline{0}$ ، فان المتجه $\nabla f(x_0, y_0)$ هو معامد لمتجه التماس $\underline{r}'(t_0)$ عند

$P(x_0, y_0)$. انظر الشكل (13.29) . ونفس ذلك على ان

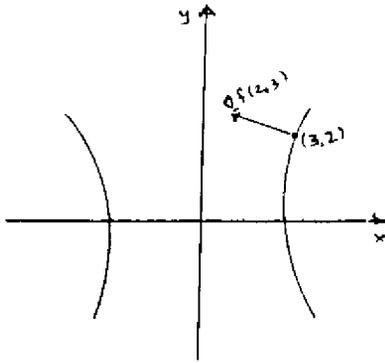
$\nabla f(x_0, y_0)$ هو معامد لمنحنى المنسوب في P .

مثل (13.45) جد منحنى المنسوب للاقتران $f(x, y) = x^2 - y^2$ الذي يمر في النقطة

$(3, 2)$. ارسم التدرج في هذه النقطة .

الحل : $f(3, 2) = 9 - 4 = 5$. ومنحنى المنسوب هو $x^2 - y^2 = 5$

$$\nabla f(x, y) = 2x \underline{i} - 2y \underline{j}$$



الشكل (13.30)

$$\nabla f(x,y) = 2x \underline{i} - 2y \underline{j}$$

$$\nabla f(3,2) = 6 \underline{i} - 4 \underline{j}$$

والشكل (13.30) يظهر منحنى المنسوب .

وهكذا نرى ان التدرج لاقتران ذي

متغيرين يمكن ان يفسر هندسيا على انه

ناظم منحنى المنسوب لهذا الاقتران في

نقطة من نقاطه .

اما لاقتران $F(x,y,z) = c$ رسمه سطح ، فننظر اليه على انه سطح مناسب للاقتران $w = F(x,y,z)$ يمر في النقطة $P(x_0, y_0, z_0)$ افترض ان الاقترانات

$$x = f(t) , y = g(t) , z = h(t)$$

قابلة للاشتقاق وتمثل منحنيا C على السطح حيث $x_0 = f(t_0)$ ، $y_0 = g(t_0)$ ، $z_0 = h(t_0)$ فان مشتقة $F(f(t), g(t), h(t)) = c$ تتضمن

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{dz}{dt} = 0$$

$$0 = \left(\frac{\partial F}{\partial x} \underline{i} + \frac{\partial F}{\partial y} \underline{j} + \frac{\partial F}{\partial z} \underline{k} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt} \underline{i} + \frac{dy}{dt} \underline{j} + \frac{dz}{dt} \underline{k} \right) \quad \text{او}$$

وعند $t_0 = t$ ، نكتب هذه المعادلة على النحو

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot \underline{\tau}'(t_0) = 0$$

وهكذا اذا $\underline{\tau}'(t_0) \neq 0$ ، فان المتجه $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ هو معامد للمتجه

$\underline{\tau}'(t_0)$. وفي النقطة P على هذا السطح يمر ما لا ينتهي من المنحنيات ، لذلك

$\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ هو معامد لها جميعا ، مما يجعلنا نقدم التعريف التالي

تعريف (13.31) المتجه الذي هو معامد لكل متجهات الوحدة المماسية لكل منحنى

يمر في النقطة P على السطح S يسمى متجه الناظم للسطح S عند P .

مبرهنة (13.29) اذا معادلة السطح S هي $F(x,y,z) = c$ واذا F_x, F_y, F_z متصلة

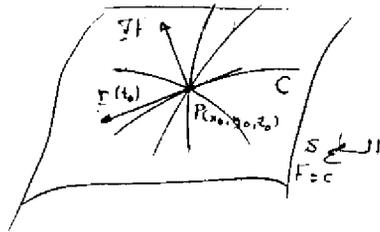
وليس جميعا صفرا عند $P(x_0, y_0, z_0)$ على S

فان متجه الناظم للسطح S عند P هو

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \quad \text{انظر الشكل (13.31) .}$$

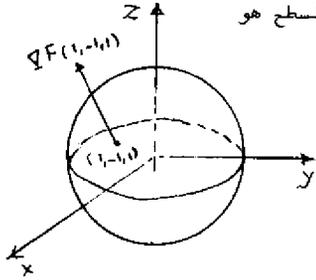
مثل (13.46) جد سطح المناسب للاقتران

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$$



الشكل (13.31)

الذي يمر في $(1, -1, 1)$. ارسم التدرج عند هذه النقطة .
الحل : $F(1, -1, 1) = 3$. لذلك سطح المناسيب هو $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ وهذا السطح هو كرة مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها $\sqrt{3}$. تدرج هذا السطح هو



$$\nabla F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

وعند النقطة المفروضة

$$\nabla F(1, -1, 1) = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

والشكل (13.32) يوضح السطح والتدرج .

مستويات التماس

افرض سطحاً معادلته $F(x, y, z) = c$

الشكل (13.32)

في أي نقطة من نقاطه $P(x_0, y_0, z_0)$ يمر

منحنى C ، وإذا كان C ممهداً ، فإن له مماساً عند P . وقد وجدنا آنفاً ان مماس C هو حسب $(\mathbf{r}(t))' \big|_{t=t_0}$ معادلة C ، وان ∇F عند P هو معامد لهذا المماس . وماذا عن كل المماسات للمنحنيات الممهدة التي تمر في P وتقع على S ؟ لقد ذكرنا أن ∇F عند P سيكون معامداً لها . هذه المماسات جميعاً تقع في مستوى واحد لان لها المعامد نفسه . وهذا المستوى يسمى مستوى التماس .

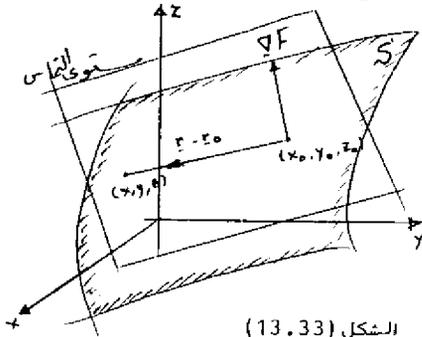
تعريف (13.30) افرض سطحاً S معادلته $F(x, y, z) = c$ ، والنقطة $P(x_0, y_0, z_0)$ تقع عليه وان $F(x, y, z)$ قابل للاشتقاق في النقطة P . نعرف مستوى التماس للسطح S عند P على انه المستوى المماس في P وله $\nabla F(x_0, y_0, z_0)$ متجه ناظم .

ولذلك فمعادلة هذا المستوى هي

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = 0$$

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

انظر الشكل (13.33) .



الشكل (13.33)

مثل (13.47) افرض $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 - 16z$

والنقطة $P(2, 4, 2)$. ما هو مستوى

التماس عند هذه النقطة ؟

الحل : $\nabla F = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$

$$\nabla F(2, 4, 2) = 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$$

ومستوى التماس هو

$$16(x - 2) + 8(y - 4) - 16(z - 2) = 0$$

$$2x + y - 2z - 4 = 0$$

في حال كون معادلة السطح S هي $z = f(x, y)$ ، فإننا نكتب

$$F(x, y, z) = z - f(x, y) = 0$$

ومنها $F_x = -f_x$ ، $F_y = -f_y$ ، $F_z = 1$ ، ومعادلة مستوى التماس هي

$$-f_x(x - x_0) - f_y(y - y_0) + 1(z - z_0) = 0$$

$$z - z_0 = f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) \quad \text{أو}$$

مثل (13.48) افرض $z = f(x, y) = 6 - 2x^2 - y^2$. جد معادلة مستوى التماس لهذا السطح

عند $(1, 1, 3)$.

$$\underline{\text{الحل}} : \quad F_x = -4x = -4 \quad , \quad F_y = -2y = -2$$

ومعادلة مستوى التماس

$$z - 3 = -4(x - 1) - 2(y - 1)$$

$$z + 6x + 2y = 11$$

تعريف (13.31) المتجه المعامد لمستوى التماس للسطح S عند $P_0(x_0, y_0, z_0)$ نسميه

المتجه الناظم للسطح S عند P_0 .

وإذا معادلة S هي $F(x, y, z) = c$ فإن ∇F هو عمود على S عند أي نقطة من

نقاطه P (شريطة وجوده) . لذلك فمعادلة الناظم هي بالصيغة المتماثلة .

$$\frac{x - x_0}{F_x} = \frac{y - y_0}{F_y} = \frac{z - z_0}{F_z}$$

والمشتقات عند $P(x_0, y_0, z_0)$.

مثل (13.49) جد معادلة الناظم للسطح المكافئ $4x^2 + y^2 - 16z = 0$ عند $(2, 4, 2)$.

$$\underline{\text{الحل}} : \quad \nabla F = 8x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$$

$$\nabla F(2, 4, 2) = 16\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 16\mathbf{k}$$

ومعادلة الناظم هي

$$\frac{x - 2}{16} = \frac{y - 4}{8} = \frac{z - 2}{-16}$$

أو

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y - 4}{1} = \frac{z - 2}{-2}$$

تمارين (13.8)

للتمارين (1) - (12) ارسم منحنى المنسوب أو سطح المناسب في النقطة المفروضة .

ارسم التدرج .

$$f(x,y) = \frac{y-2x}{x}; p(1,3) \quad (2) \quad f(x,y) = x-2y; p(6,1) \quad (1)$$

$$f(x,y) = x^2 - y^2; p(1,3) \quad (4) \quad f(x,y) = y - x^2; p(2,5) \quad (3)$$

$$f(x,y) = \frac{y-1}{\sin x}; p\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right) \quad (6) \quad f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}; p(-2,-3) \quad (5)$$

$$f(x,y) = x^2 - y; p(-3,5) \quad (8) \quad f(x,y) = (x-1)^2 - y^2; p(1,1) \quad (7)$$

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 - z; p(1,1,3) \quad (9)$$

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}; p(3,4,0) \quad (10)$$

$$F(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; p(3,4,0) \quad (11)$$

$$F(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2; p(0,-1,1) \quad (12)$$

للتمارين (13) و (14) جد النقاط على السطح حيث التدرج مواز للمتجه المفروض

$$x^3 + y^2 + z = 15; 27\mathbf{i} + 8\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (14) \quad z = x^2 + y^2; 4\mathbf{i} + \mathbf{j} + \frac{1}{2}\mathbf{k} \quad (13)$$

للتمارين (15) - (22) جد معادلة مستوى التماس للسطح عند النقطة المفروضة

$$5x^2 - y^2 + 4z^2 = 8; p(2,4,1) \quad (16) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9; p(-2,2,1) \quad (15)$$

$$9x^2 - 4y^2 - 25z^2 = 40; p(4,1,-2) \quad (18) \quad x^2 - y^2 - 3z^2 = 5; p(6,2,3) \quad (17)$$

$$z = 4x^2 + 9y^2; p(-2,-1,25) \quad (20) \quad z = 25 - x^2 - y^2; p(3,-4,0) \quad (19)$$

$$z = 2e^{-x} \cos y; p\left(0, \frac{\pi}{3}, 1\right) \quad (22) \quad z = \ln(x^2 + y^2); \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad (21)$$

للتمارين (23) - (24) جد النقاط على السطح حيث مستوى التماس مواز للمستوى

المفروض

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25; 2x + 4y + 6z = 1 \quad (23)$$

$$x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 33; 8x + 4y + 6z = 5 \quad (24)$$

(25) جد النقاط على السطح $x^2 + 4x + y^2 + z^2 = 2z + 1$ حيث مستوى التماس افقي

• مواز لـ (xy)

(26) جد النقاط على السطح $x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 2xy - 16 = 0$ حيث مستوى التماس مواز لـ

• مستوى xz . (أ)

• مستوى xy . (ب)

• مستوى yz . (ج)

للتمارين (27) - (30) اثبت ان مستوى التماس للسطح التربيعي المفروض عند

النقطة $P(x_0, y_0, z_0)$ يمكن كتابته على النحو المبين .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ; \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1 \quad (27)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 ; \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1 \quad (28)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 ; \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} - \frac{zz_0}{c^2} = 1 \quad (29)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = cz ; \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = c(z + z_0) \quad (30)$$

(31) اثبت ان مجموع مربعات مقاطع x, y, z لكل مستوى تماس للسطح

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \text{ هو ثابت .}$$

(32) سطحان متعامدان عند نقطة تقاطع $P(x, y, z)$ اذا ناظما هما متعامدان . اثبت

ان رسمي $G(x, y, z) = 0, F(x, y, z) = 0$ (لهما مشتقات جزئية) متعامدان

$$\text{اذا فقط اذا } F_x G_x + F_y G_y + F_z G_z = 0$$

13.9 القيم القصوى

من الامور المهمة التي درسناها في تحليل الاقتران ذي المتغير الواحد ، مسألة

القيم القصوى ، وايجادها ، واختيارها وتطبيقاتها . ويجب ان نتوقع امتداد هذا

المفهوم لاقتران ذي متغيرين أو اكثر . نبدأ بتعريف القيم القصوى محلية أو مطلقة،

وكيفية ايجادها واختيارها .

تعريف (13.32) افرض f اقتراناً بمتغيرين وأن نقطة في مجاله .

f له قيمة عظمى (قيمة صغرى) على D عند (x_0, y_0) ، اذا $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$

$(x, y) \in D$ لجميع $(f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$

اذا $D = \emptyset$ مجال f ، فالقيمة العظمى (الصغرى) مطلقة . واذا وجد قسراً D_1

مركزه (x_0, y_0) محتوي في مجال f ، والمتساينات اعلاه تتحقق على D_1 فالقيمة العظمى

(الصغرى) نسبية أو محلية . والقيمة العظمى أو الصغرى تسمى قصوى .

وهناك علاقة وثيقة بين المشتقات الجزئية والنقاط التي يكون فيها f ذا قيم

قصوى . لذلك ، نعرف اولاً النقاط الحرجة .

تعريف (13.33) افرض f اقتراناً في R^2 . النقطة (a, b) تسمى نقطة حرجة للاقتران f

اذا

$$0 = f_x(a, b) = f_y(a, b) \quad (f)$$

(ب) $f_x(a,b)$ أو $f_y(a,b)$ غير موجودة

وماذا عن وجود قيم قصوى ؟ البرهنة التالية تؤكد وجود قيم قصوى مطلقة

في ظروف معينة .

مبرهنة (13.34) افرض $B \leq R^2$ قرصا مغلقا ، وان f افتراضا متصلا على B .
فانه توجد نقطة واحدة على الاقل في B حيث يحقق f قيمة عظمى مطلقة ، كما توجد
نقطة واحدة على الاقل في B حيث يحقق f قيمة صغرى مطلقة .

مبرهنة (13.35) اذا $f(x,y)$ معرف على قرص مفتوح $B((x_0,y_0);r)$ ، واذا f له
قيمة قصوى محلية عند (x_0,y_0) واذا $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$ موجودتان فبان
.
 $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$

ملاحظة $B((x_0,y_0);r)$ تعنى قرصا مركزه (x_0,y_0) ونصف قطره r .

البرهان : افرض له قيمة عظمى محلية عند (x_0,y_0) وان $f_x(x_0,y_0)$ موجودة .
من التعريف

$$f_x(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$f(x_0,y_0)$ قيمة عظمى محلية لذلك

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \leq 0$$

شريطة ان Δx صغيرة بما فيه الكفاية حتى تكون $(x_0 + \Delta x, y_0)$ في B . نجعل

$\Delta x \leftarrow 0$ من اليمين أي $0 < \Delta x$ فان الكسر

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leq 0 \quad (1)$$

لذلك $f_x(x_0,y_0) \leq 0$ اذا كانت المشتقة موجودة .

كذلك اذا $\Delta x \leftarrow 0$ من اليسار أي ان $0 > \Delta x$ فان

$$\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geq 0 \quad (2)$$

مما يعني ان $f_x(x_0,y_0) \geq 0$ ان كانت موجودة . من الجمع بين (1) ، (2)

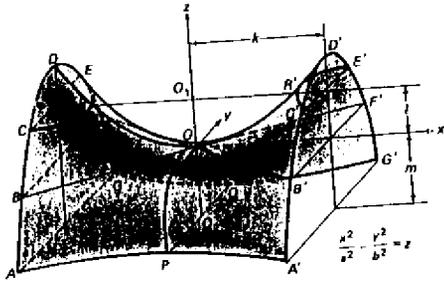
فان $0 = f_x(x_0,y_0)$.

وبطريقة مشابهة نبرهن على ان $f_y(x_0,y_0) = 0$. وبالتالي برهنة كل الحالات

المطلوبة .

وننبه القارىء على ان كون المشتقتين صفرا هو شرط لازم لوجود القيم القصوى المحلية ، فقد

تكون $0 = f_x = f_y$ عند نقطة ما وهي ليست قيمة قصوى محلية ، بل نسميها نقطة سرج .



الشكل (13.34)

انظر الشكل (13.34) .

مثل (13.50) للاقتران $f(x, y) = y^2 - x^2$

لاحظ ان $f_x = -2x$ ، $f_y = 2y$

والنقطة $(0, 0)$ تجعل $f_x = f_y = 0$.

لكن $f(0, 0) = 0$ تعطي $(0, 0)$

وهي ليست قيمة قصوى محلية ، لانها لا تحقق

التعريف (13.35) .

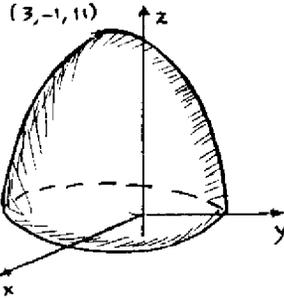
مثل (13.51) افرض $f(x, y) = 6x - 4y - x^2 - 2y^2$. هل لهذا الاقتران قيم قصوى ؟

الحل : $f_x = 6 - 2x = 0$, $x = 3$, $f_y = -4 - 4y = 0$, $y = -1$.

فالنقطة الحرجة هي $(3, -1)$.

$$f(3, -1) = 11$$

وهذا السطح هو مكافئي منكفي (مفتوح الى اسفل) ، والنقطة $(3, -1, 11)$ هي



الشكل (13.35)

نقطة قيمة عظمى . انظر الشكل (13.35) .

كيف نميز بين القيم العظمى والصغرى المحلية

ونقاط السرج ؟ الجواب هو باختبار المشتقة

الثانية ، الذي نقدمه تاليا

مبرهنة (13.36) افرض f له نقطة حرجة عند

(x_0, y_0) ، وان f له مشتقات جزئية متصلة

من الرتبة الثانية في قرص مركزه (x_0, y_0) . افرض

$$D(x, y) = f_{xx}(x, y)f_{yy}(x, y) - [f_{xy}(x, y)]^2$$

(ا) اذا $D(x_0, y_0) > 0$ ، $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ فان f له قيمة عظمى محلية عند (x_0, y_0) .

(ب) اذا $D(x_0, y_0) > 0$ ، $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ فان f له قيمة صغرى محلية عند (x_0, y_0) .

(ج) اذا $D(x_0, y_0) < 0$ فان f له نقطة سرج عند (x_0, y_0) .

(د) اذا $D(x_0, y_0) = 0$ فان الاختبار يفشل .

مثل (13.52) افرض $f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{1}{3}y^3 - 3y$

عين النقاط الحرجة وحدد نوعها .

الحل : $f_x = 2x - 2y = 0$ ، $f_y = -2x + y^2 - 3 = 0$

والنقاط الحرجة هي $(3,3)$ ، $(-1,-1)$

$$f_{yy} = 2y \quad , \quad f_{xy} = -2 \quad , \quad f_{xx} = 2$$

$$D(3,3) = (2)(6) - (-2)^2 = 8 > 0$$

$$D(-1,-1) = 2(-2) - (-2)^2 = -8 < 0$$

لذلك $f(3,3)$ قيمة صغرى محلية ، بينما $(-1,-1)$ هي نقطة سرج .

مثل (13.53) افرض $g(x,y) = x^2 + y^3$ ، $f(x,y) = x^2 + y^4$

$$\text{لاحظ ان } f_{yy} = 12y^2 \quad , \quad f_y = 4y^3 \quad , \quad f_{xy} = 0 \quad , \quad f_{xx} = 2 \quad , \quad f_x = 2x$$

$$\text{كذلك } g_{yy} = 6y \quad , \quad g_y = 3y^2 \quad , \quad g_{xy} = 0 \quad , \quad g_{xx} = 2 \quad , \quad g_x = 2x$$

والنقطة $(0,0)$ هي نقطة حرجة للاقترايين f ، g .

لكن $D(0,0) = 0$ في كلتا الحالتين ايضاً ، مع ان $g(0,0) = f(0,0) = 0$

الا ان $f(x,y) \geq 0$ لجميع (x,y) ، اي ان $f(0,0)$ قيمة صغرى مطلقة . وبالنسبة

الى $g(x,y)$ فان $(0,0)$ نقطة سرج لان $g(0,y) = x^3$ سالب لجميع قيم y السالبة ،

وموجب لجميع قيم y الموجبة .

هذا المثل يظهر كيف يغفل الاختبار السابق عندما $D(x,y) = 0$.

ماذا عن القيم القصوى المطلقة ؟

ذكرنا في المبرهنة (13.37) ان اقترايين متصلا على مجال مغلق له قيمة

صغرى مطلقة وقيمة عظمى مطلقة . ويمكن ان يأخذ الاقترايين قيمه القصوى

المطلقة عند نقاط حرجيه (اي داخل المجال) او عند نقاط حدودية .

لذلك لايجاد القيم القصوى المطلقة نفعل ما يلي :

(أ) جد كل النقاط الحرجة للاقترايين f في مجاله . واحسب قيم f عند هذه النقاط .

(ب) جد كل القيم القصوى للاقترايين f على حدود مجاله .

(ج) قارن بين القيم في (أ) ، (ب) ، فاعظمها هي قيمة عظمى مطلقة ، واصغرها هي

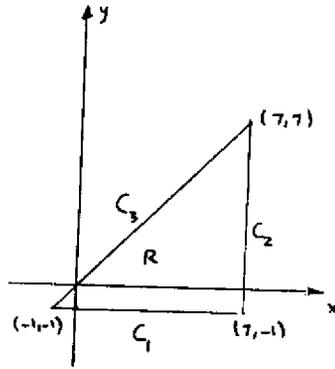
قيمة صغرى مطلقة .

مثل (13.54) افرض $f(x,y) = x^2 - 4xy + y^3 + 4y$. جد القيم القصوى المطلقة لهذا

الاقترايين على المنطقة المثلثة المغلقة التي رؤوسها $(-1,-1)$ ، $(7,-1)$ ، $(7,7)$.

الحل : تتألف حدود المنطقة R من ثلاث قطع مستقيمة C_1 ، C_2 ، C_3 . انظر الشكل

(13.36) .



الشكل (13.36)

اولا ، نجد النقاط الحرجة

$$f_x = 2x - 4y = 0$$

$$f_y = -4x + 3y^2 + 4 = 0$$

والحل هو $x = 4$ ، $y = 2$. كذلك

$$f(4, 2) = 0$$

كذلك من اختبار المشتقة الثانية

$$f_{xx} = 2 , f_{xy} = -4 , f_{yy} = 6y$$

$$D = (2)(24) - (-4)^2 > 0$$

اي ان $(4, 2)$ تعطي قيمة صغرى محلية .

الآن نهتم بقيم f على الحدود .

$$f(x, -1) = x^2 + 4x - 1 - 4 \quad \text{لذلك} \quad y = -1 : C_1 \text{ على}$$

$$= x^2 + 4x - 5$$

هذا الاقتران في x له نقطة حرجة عندما $f_x = 2x + 4 = 0$ اي $x = -2$ وهي خارج مجاله وهو $[-1, 7]$ ، اي لا توجد قيم قصوى محلية على C_1 . بل ان $f(x, -1)$ متزايد على

$$\text{الفترة} . \text{ وعند طرفيها } f(-1, -1) = -8 , f(7, -1) = 72 .$$

$$\text{على } C_2 : x = 7 \text{ ، لذلك} \quad f(7, y) = 49 - 28y + y^3 + 4y$$

$$= y^3 - 24y + 49$$

$$. f_y = 3y^2 - 24 = 0 \quad \text{ولهذا الاقتران نقطة حرجة عندما}$$

اي $y^2 = 8$ او $y = 2\sqrt{2}$ وهي في مجاله وهو $[-1, 7]$ وقيمة f هي

$$f(7, 2\sqrt{2}) \approx 3.7$$

لكن $f_{yy} = 6y$ وهي مقدار موجب ، لذلك $2\sqrt{2}$ تعطي قيمة صغرى . لكن

$f(-1, -1) = -8$ مما يعني ان $2\sqrt{2}$ ليست قيمة عظمى مطلقة للاقتران f على R .

لذلك نجد قيم f على طرفي الفترة

$$f(7, -1) = 72 , f(7, 7) = 224$$

$$f(x, x) = x^2 - 4x^2 + x^3 + 4x \quad \text{على } C_3 : y = x \text{ عوض}$$

$$= x^3 - 3x^2 + 4x$$

بينما $f_x = 3x^2 - 6x + 4 = 0$ ليس لها حل حقيقي ، مما يعني انه بمقارنة القيم

اعلاه نجد ان $f(-1, -1) = -8$ قيمة صغرى مطلقة ، $f(7, 7) = 224$ قيمة عظمى مطلقة .

مثل (13.55) مؤسسة البريد تفرض قيودا على ابعاد الصناديق التي تشحنها ، وتتطلب أن لا يزيد مجموع الضلع الاكبر وضعف الضلعين الآخرين عن 84 انشا . جد اكبر حجم للصندوق .

الحل : اذا x, y, z هي الابعاد ، نجعل z الضلع الاكبر عندها

$$V = xyz, \quad 2x + 2y + z \leq 84, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0$$

بما ان المطلوب هو اكبر حجم ، يمكن ان نفرض

$$2x + 2y + z = 84$$

$$z = 84 - 2x - 2y$$

$$V = xy(84 - 2x - 2y) \quad \text{والحجم}$$

$$V_x = 84y - 4xy - 2y^2 = 0$$

$$V_y = 84x - 2x^2 - 4xy = 0$$

$$14 = y = x \quad \text{والحل غير الصفري هو}$$

$$V(14, 14) = 5488$$

وهذا هو اكبر حجم بالانشات المكعبة .

تمارين (13.9)

للتمارين (1) - (14) جد النقاط الحرجة ، ثم حدد نوعها

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 6x + 8y - 1 \quad (1)$$

$$f(x, y) = x^2 - xy - 2y^2 + 7x - 8y + 3 \quad (2)$$

$$f(x, y) = x^2 + 6xy + 2y^2 - 6x + 10y - 2 \quad (3)$$

$$f(x, y) = -x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 9 \quad (4)$$

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x + 10y - 5 \quad (5)$$

$$g(x, y) = x^2 - 2y^2 - 6x + 8y + 3 \quad (6)$$

$$f(x, y) = x^2y - 2xy + 2y^2 - 15y \quad (7)$$

$$g(x, y) = x^3 - 6x^2 - 3y^2 \quad (8)$$

$$g(u, v) = u^3 + v^3 - 6uv \quad (10) \quad f(x, y) = 3x^2 - 3xy^2 + y^3 + 3y^2 \quad (9)$$

$$g(u, v) = e^u (\sin v - 1) \quad (12) \quad k(x, y) = e^x \sin y \quad (11)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy \quad (14) \quad f(x, y) = 1 - x^4 - 3y^2 \quad (13)$$

للتمارين (15) - (18) جد القيم العظمى والصغرى المطلقة في المجال المفروض

$$f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^2 ; -2 \leq x \leq 4 , -1 \leq y \leq 3 \quad (15)$$

$$f(x, y) = x^2 - 3xy - y^2 + 2y - 6x ; |x| \leq 3 , |y| \leq 2 \quad (16)$$

$$f(x, y) = x^3 + 3xy - y^3 ; (1, 2), (1, -2), (-1, -2) \text{ رؤوسها} \quad (17)$$

$$f(x, y) = 4x^3 - 2x^2y + y^2 ; x^2 + 4y^2 = 1 \text{ المنطقة التي يحدها} \quad (18)$$

$$4x - 3y + z = 5 \quad \text{جد اقصر مسافة بين } P(2, 1, -1) \text{ والمستوى} \quad (19)$$

$$2x + 3y - z = 4 , 2x + 3y - z = 2 \quad \text{جد اقصر مسافة بين المستويين} ; \quad (20)$$

(21) جد ابعاد صندوق مفتوح له حجم ثابت تجعل ابعاده مساحته السطحية اقل ما يمكن .

(22) جد المتجه في R^3 الذي طوله 16 وحدة ، ومجموع مركباته اكبر ما يمكن .

(23) شركة تعزم انتاج صناديق مغلقة حجمها 8 امتار مكعبة . اذا تكلفت المادة

للغطاء والقاعدة تكلف ضعف المادة للجوانب ، جد الابعاد التي تؤدي الى اقل

تكلفة .

(13.10) طريقة لاجرانج

كما سبق في البند السابق ، وجدنا أن مسائل القيم القصوى نوعان : احدهما

دون أي شروط على متغيراته ، والآخر نجد شروطا على متغيراته (المثل (13.55)).

ووجدنا من المثل المشار اليه اننا نجد احد المتغيرات بدلالة غيره ، ونعوض في

المعادلة التي نريد ان نجد لها قيما قصوى . على انه قد يحصل انه ليس من السهل

ان نجد تعبيراً لأحد المتغيرات بدلالة غيرها ، أو أن المعادلة الناتجة من التعويض

قد تصبح معقدة ، الى درجة يصعب التعامل معها .

من هنا ، قدم الرياضي الفرنسي جوزيف لاجرانج (1736 - 1813) طريقة اخرى

لحل هذه المسائل ، تسمى اليوم مضروب لاجرانج . نقدمها اولاً لاقتران ذي متغيرين

ثم لاقتران ذي ثلاث متغيرات (أو أكثر اذا أنّ تعميمها واضح آنشد) .

مبرهنة (13.37) افرض f ، g اقترايين قابلين للاشتقاق عند (x_0, y_0) ، وان

$g(x, y) = c$ هو منحنى منسوب ممهد بحوي $P(x_0, y_0)$ على أن لا تكون P نقطة على

طرف هذا المنحنى . اذا $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ ، واذا f له قيمة قصوى على منحنى

المنسوب عند P فانه يوجد عدد λ يحقق

$$\lambda \nabla g(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)$$

البرهان : افرض C منحنى منسوب $g(x,y) = c$ ، وان I فترة ، وان هذا المنحني له المعادلات المعلمية الممهدة

$$x = x(t) , y = y(t) , t \in I$$

$$\underline{r}(t) = x(t)\underline{i} + y(t)\underline{j} \quad \text{أو}$$

اذا $F(t) = f(x(t), g(t))$ ، فانه حسب المفروض $f(x_0, y_0)$ قيمة قصوى للاقتران f على C ، لذلك $F(t_0) = f(x_0, y_0)$ ، مما يعني أن $F'(t_0) = 0$. باستعمال قاعدة السلسلة

$$\begin{aligned} 0 = F'(t_0) &= f_x(x_0, y_0)x'(t_0) + f_y(x_0, y_0)y'(t_0) \\ &= \nabla f(x_0, y_0) \cdot \underline{r}'(t_0) \end{aligned}$$

وإذا $\nabla f(x_0, y_0) \neq \underline{0}$ ، فانه معامد للمماس $\underline{r}'(t_0)$. لكن $\nabla g(x_0, y_0)$ هو معامد لمنحني المنسوب C عند (x_0, y_0) . انظر البند (13.8) . لذلك اما ان $\nabla f(x_0, y_0) = \underline{0}$ أو ان $\nabla f, \nabla g$ متوازيان عند (x_0, y_0)

نسمي λ مضروب لاجرائج ، ويمكن كتابة خطوات هذه الطريقة كما يلي

$$(1) \text{ افرض ان } f \text{ له قيمة قصوى على منحني المنسوب } g(x,y) = c$$

$$(2) \text{ جد حل المعادلات } g(x,y) = c , \nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$$

(3) احسب $f(x,y)$ لكل نقطة (x,y) وجدتها في الخطوة (2) . فاذا f له قيمة عظمى على C فهي احدى هذه القيم وهي القيمة الكبرى من بينها ، واذا له قيمة صغرى ، فهي احدى هذه القيم ايضا ، وهي القيمة الصغرى من بينها .

مثل (13.56) افرض $f(x,y) = x^2 + 4y^3$. جد القيم القصوى للاقتران f على المنحني $x^2 + 2y^2 = 1$

الحل : افرض $g(x,y) = x^2 + 2y^2$ ، عندها يكون الشرط هو $g(x,y) = 1$. لذلك $\nabla f = 2x\underline{i} + 12y^2\underline{j}$ ، $\nabla g = 2x\underline{i} + 4y\underline{j}$ ،

$$\nabla f = \lambda \nabla g \text{ تؤدي الى}$$

$$2x = \lambda(2x) , 12y^2 = \lambda(4y)$$

من المعادلة الاولى من الشمال $0 = x$ أو $1 = \lambda$

ومن الشرط $x = 0$ تؤدي الى $2y^2 = 1$ أو $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

وإذا $\lambda = 1$ فان $12y^2 = 4y$ وحلها $0 = y$ ، $\frac{1}{3} = y$.

من الشرط $y = 0$ تؤدي الى $x = \pm 1$ ،

$$\pm \frac{\sqrt{7}}{3} = x \text{ تؤدي الى } y = \frac{1}{3}$$

والنقاط التي جملنا عليها هي : $(-1, 0)$ ، $(1, 0)$ ، $(0, -1/\sqrt{2})$ ، $(0, 1/\sqrt{2})$ ، $(-\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3})$ ، $(\frac{\sqrt{7}}{3}, \frac{1}{3})$

نجد قيم f عند هذه النقاط فأكبرها $\sqrt{2}$ تحصل عند $(0, 1/\sqrt{2})$ وهذه قيمة عظمى ، وأصغرها $-\sqrt{2}$ وتصل عند $(0, -1/\sqrt{2})$ ، وهذه قيمة صغرى .

مثل (13.57) جد القيم القصوى للاقتران $f(x, y) = xy$ شريطة ان تحقق $4x^2 + y^2 = 4$

الحل : افرض $g(x, y) = 4x^2 + y^2$ ومنحني المنسوب هو $g(x, y) = 4$
 $\nabla f = \lambda \nabla g$ تؤدي الى

$$y\hat{i} + x\hat{j} = \lambda(8x\hat{i} + 2y\hat{j})$$

او $y = 8\lambda x$ ، $x = 2\lambda y$ عوض احدى هاتين المعادلتين في الاخرى

$$x = 2\lambda y = 2\lambda(8\lambda x)$$

$$\text{او } x(1 - 16\lambda^2) = 0 \text{ والحل } x = 0 \text{ او } \lambda = \pm \frac{1}{4}$$

اذا $x = 0$ فالتعويض في المعادلة الثانية يعطي $y = 0$ والنقطة $(0, 0)$ لا تحقق

الشرط . واذا $\lambda = \pm \frac{1}{4}$ فان $y = 8x = \pm 2x$ عوض في الشرط لتجد

كذلك $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. الآن نجد $f(x, y)$ عند هذه النقاط

(x, y)	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$	$(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$	$(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$
$f(x, y)$	1	-1	-1	1

اي ان $f(x, y)$ له قيم عظمى عند $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$ ، $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$ ، وله قيم صغرى عند $(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2})$ ، $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$.

الآن ننقل الى اقتران $f(x, y, z)$ له ثلاثة متغيرات . ويمكن كتابة مبرهنة

تماثل مبرهنة (13.37) لسطح مناسب . الخ . ونستنتج ان قيم قصوى للاقتران f الذي

يخضع للشرط $g(x, y, z) = c$ تتضمن وجود عدد λ يحقق

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

وان λ نسميها مضروب لاجرائج ، وخطوات التطبيق مشابهة لما سبق .

مثل (13.58) اذا $v = xy + z$ ، x, y, z غير سالبة ، جد القيمة العظمى للاقتران v

شريطة ان $2x + 2y + z = 84$ انظر المثل (13.45) .

الحل : افرض $g(x, y, z) = 2x + 2y + z$

فان $\nabla f = \lambda \nabla g$ تؤدي الى

$$y \mathbf{i} + x \mathbf{j} + x y \mathbf{k} = \lambda (2 \mathbf{i} + 2 \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$y \mathbf{i} = 2 \lambda \mathbf{i}, \quad x \mathbf{j} = 2 \lambda \mathbf{j}, \quad x y \mathbf{k} = \lambda \mathbf{k} \quad \text{أو}$$

منها نجد

$$\lambda = x y = \frac{y \mathbf{i}}{2} = \frac{x \mathbf{j}}{2}$$

وبما ان أي قيمة صغرية للمتغيرات x, y, z تعطي $V = 0$ ، لذلك نهمل

القيم الصغرية ونحصل على

$$x = y = \frac{z}{2}$$

$$84 = 2y + 2y + 2y \quad \text{عوض في الشرط}$$

$$28 = z, \quad 14 = x \quad \text{ومن هنا } 14 = y$$

والنقطة $(14, 14, 28)$ هي النقطة الوحيدة . لافتراضا وجود قيمة عظمى ، لذلك

$$V(14, 14, 28) = 5488 \quad \text{هي القيمة العظمى .}$$

مثل (13.59) جد اكبر حجم لصندوق من متوازي سطوح ، وجوهه موازية للمستويات

الاحداثية ، ويمكن وضعه داخل المجسم الناقص $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$.

الحل : افرض $\nabla f = \lambda \nabla g$ ، $V = 8xyz$ ، $g(x, y, z) = 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$ تؤدي الى

$$8y \mathbf{i} + 8xz \mathbf{j} + 8xy \mathbf{k} = \lambda (32x \mathbf{i} + 8y \mathbf{j} + 18z \mathbf{k})$$

$$8yz = 32\lambda x, \quad xz = 8\lambda y, \quad xy = 18\lambda z \quad \text{أو}$$

اضرب الاولى ب x والثانية ب y والثالثة ب z واجمع تحصل على

$$24xyz = (32x^2 + 8y^2 + 18z^2)\lambda$$

$$= 2\lambda (16x^2 + 4y^2 + 9z^2) = 2\lambda (144)$$

$$xyz = 12 \quad \text{أو}$$

من هذه المعادلة ومن المعادلات السابقة

$$8xyz = 32\lambda x^2$$

$$8(12\lambda) = 32\lambda x^2$$

$$96\lambda - 32x^2\lambda = 32\lambda(3 - x^2) = 0$$

وعلها اما $\lambda = 0$ أو $\sqrt{3} = x$ (القيمة السالبة مرفوضة ؛) كذلك نرفض $\lambda = 0$

(المادة ؟) ، والحل الوحيد $\sqrt{3} = x$

كذلك نجد $y = 2\sqrt{3}$ ، $z = 4\sqrt{3}$ ، والقيمة العظمى هي

$$V(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 4\sqrt{3}) = 64\sqrt{3}$$

وجود اكثر من شرط

في بعض المسائل ، قد نجد اكثر من شرط مفروض . مثلا جد القيم القموى للاقتران

$$f(x, y, z) = 0 \quad , \quad g(x, y, z) = 0 \quad , \quad h(x, y, z) = 0$$

وبطريقة لاجرائج ، نفرض وجود عددين λ ، μ ، لتتحقق

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0, z_0) + \mu \nabla h(x_0, y_0, z_0)$$

وخطوات الحل كما سبق .

مثل (13.60) جد النقاط على المنحني C الذي هو تقاطع الكسرة $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

والمستوى $x - y + 3z = 6$ التي هي :

(أ) ابعد ما يكون عن مستوى xy . (ب) ادنى ما يمكن لمستوى xy .

الحل : افرض $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9$ ، $h(x, y, z) = x - y + 3z - 6$ ،

كذلك $f(x, y, z) = z$. لذلك $\nabla f = \lambda \nabla g + \mu \nabla h$ تؤدي الى

$$0 = 2x\lambda + \mu$$

$$0 = 2y\lambda - \mu$$

$$1 = 2z\lambda + 3\mu$$

من الاولى والثانية $2\lambda(y+x) = 0$. اذ $\lambda = 0$ فان $\mu = 0$ من الاولى بينما

الثالثة تؤدي الى تناقض ، لذلك $y = -x$. عوض في الشروط

$$x^2 + x^2 + z^2 = 9$$

$$x + x + 3z = 6$$

$$z = \frac{18}{11} - \frac{3}{11} \sqrt{14} \quad , \quad x = \frac{6}{11} + \frac{9}{22} \sqrt{14}$$

$$z = \frac{18}{11} + \frac{3}{11} \sqrt{14} \quad , \quad x = \frac{6}{11} - \frac{9}{22} \sqrt{14}$$

وهكذا نحصل على النقطة P_1 التي هي ابعد ما يمكن من xy ، والنقطة P_2 التي هي

ادنى ما يمكن واحداثياتهما $P_1(-0.99, 2.66)$ ، $P_2(2.08, -2.08, 0.62)$.

تمارين (13.10)

للتمارين (1) - (6) افرض وجود قيم قموى للاقتران f ، جدها شريطة تحقيق الشرط المكتوب .

$$f(x, y) = xy \quad ; \quad (x+1)^2 + y^2 = 1 \quad (2) \quad f(x, y) = x + y^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 4 \quad (1)$$

$$f(x, y, z) = xy + yz \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 8 \quad (4) \quad f(x, y) = x^2 + 2y^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad (3)$$

$$f(x, y, z) = y^3 + xz^2 \quad ; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad (6) \quad f(x, y, z) = xyz \quad ; \quad x^2 + y^2 + 4z^2 = 6 \quad (5)$$

للتمارين (7)-(10) افرض وجود قيم صغرى جدها شريطة تحقيق الشرط المكتوب

$$f(x,y) = 4x^2 + y^3 + 3y + 2 ; 2x^2 - \frac{3}{2}y^2 = 1 \quad (7)$$

$$f(x,y) = 3x^2 + 3y^2 + 5 ; x - y = 1 \quad (8)$$

$$f(x,y,z) = x^4 + 8y^4 + 27z^4 ; x + y + z = \frac{11}{12} \quad (9)$$

$$f(x,y,z) = x + 2y - 3z ; z = x^2 + 4y^2 \quad (10)$$

للتمارين (11) - (26) افرض وجود قيم قصوى ، جدها شريطة تحقيق الشروط المكتوبة

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 2y - 3 ; x^2 + y^2 \leq 4 \quad (11)$$

$$f(x,y) = x^3 + x^2 + \frac{y}{3} ; x^2 + y^2 \leq 36 \quad (12)$$

$$f(x,y) = xy ; 2x^2 + y^2 \leq 4 \quad (13)$$

$$f(x,y) = 16 - x^2 - 4y^2 ; -1 \leq x \leq 1 , -1 \leq y \leq 1 \quad (14)$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (15)$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 ; 2x + y = 5 \quad (16)$$

$$f(x,y) = x^2 + y^2 ; x^4 + y^4 = 1 \quad (17)$$

$$f(x,y) = 8x^2 - 8xy + 2y^2 ; x^2 + y^2 = 1 \quad (18)$$

$$f(x,y,z) = xyz ; x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1 , x > 0 , y > 0 , z > 0 \quad (19)$$

$$f(x,y,z) = xyz + 5 ; x^3 + y^3 + z^3 = 24 \quad (20)$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 ; 2x + y + z = 1 , -x + 2y - 3z = 4 \quad (21)$$

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 ; 4x + z = 7 , z^2 = x^2 + y^2 \quad (22)$$

$$f(x,y,z) = z^2 + y^2 + z^2 ; x - y = 1 , y^2 - z^2 = 1 \quad (23)$$

$$f(x,y,z) = z - x^2 - y^2 ; x + y + z = 1 , x^2 + y^2 = 4 \quad (24)$$

$$f(x,y,z,t) = xyz + t ; x - z = 2 , y^2 + t = 4 \quad (25)$$

$$f(x,y,z,t) = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 ; x + y + 2z = 1 , \quad (26)$$

$$2x - z + t = 2 , y + 3z + 2t = -1$$

(27) جد النقطة على الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ التي هي ادنى ما يمكن من (2,3,4) .

(28) اذا C هو خط التقاطع للمستويين $3x + 2y + z = 6$, $x - 4y + 2z = 8$. جد

النقطة على C التي هي اقرب ما يمكن الى نقطة الاصل .

(29) صندوق مغلق حجمه متران مكعبان ، اذا تكلفة المتر المربع من مادته هي

دينار واحد ، وديناران و 1.5 دينار للجوانب ، وللقاعدة والغطاء على التوالي.

جد الابعاد التي تجعل التكلفة اقل ما يمكن .

(30) افرض انك تريد ان تقضي اجازتك في ثلاثة اماكن ، وتقضي x يوما في الاول و y

يوما في الثاني و z يوما في الثالث ، وان مجموع متعتك

$$f(x, y, z) = 2x + y + 2z$$

على ان احوالك المادية تحدد عليك الشرط $x^2 + y^2 + z^2 = 225$

جد x ، y ، z لكي تكون المتعة اعظم ما يمكن .

مسرد مصطلحات

Hyperboloid	الزائدي	Open	مفتوحة
One - sheet hyperboloid	زائدي من قطعة واحدة	Closed	مغلقة
Double - sheet hyperboloid	زائدي من قطعتين	Increment	زيادة
Interior point	نقطة داخلية	Impedence	معاوقة
Neighbourhood	جوار	Reactance	مفاعلة
Boundary	نقطة حدودية	Gradient	تدرج
Partial derivative	مشتقة جزئية	n - tuple	معدود n المرتب
Differential	تفاضلة	Surface	سطح
Elliptic cylinder	اسطوانة ناقصة	Trace	أثر
Double Elliptic cone	مخروط ناقصين	Level curve	منحني منسوب
Chain rule	قاعدة السلسلة	Level chart	خارطة مناسيب
Implicit differentiation	اشتقاق ضمنسي	Section	مقطع
Directional derivative	مشتقة اتجاهية	Ellipsoid	الناقصي
Tangent plane	مستوى التماس	Semi axes	اشباه المحاور
n - Dimension space	فضاء ذو بعد n	Paraboloid	مكافئي
Computer graphic	رسم حاسوبي	Normal	ناظم
Level surface	سطح مناسيب	Orthogonal	متعامد
Isothermal surface	سطح تساوي الحرارة	Saddle point	نقطة سرج
Equipotential surface	سطح تساوي الجهد	Multiplier	مضروب
Quadratic surface	سطح تربيعي	Constraint	شرط
Boundedness	محدودية		