

الباب الرابع عشر

التكاملات المضاعفة

ندرس في هذا الباب حساب التكامل لاقترانين بمتغيرين أو بثلاث متغيرات ،
 إذ أنه يولف امتدادا للتكامل المحدد لاقتران بمتغير واحد الذي سبق ودرسنناه في
 الباب الخامس .

(14.1) التكاملات الثنائية

يذكر القاري أننا عرفنا التكامل المحدد لاقتران $y = f(x)$ على الفترة
 المغلقة $[a, b]$ بأنه نهاية مجاميع ريمان $R(f, p)$ عندما نجعل $\|p\| \rightarrow 0$. نستخدم
 هنا أسلوبا مشابها لنعرف التكامل الثنائي لاقتران $z = f(x, y)$ المعروف على
 المستطيل :

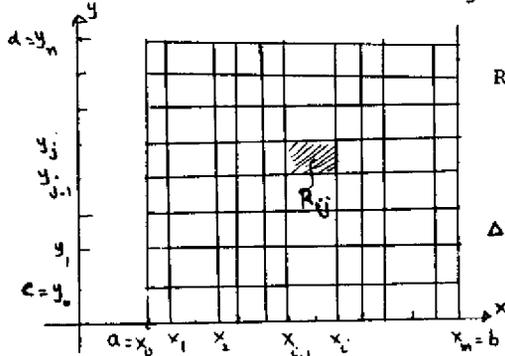
$$R : a \leq x \leq b , c \leq y \leq d$$

لكي نجزي المستطيل R الى مستطيلات جزئية ، نعلم الى فرض تجزئة
 $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ للفترة $[a, b]$ وتجزئة $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ للفترة
 $[c, d]$ حيث :

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = d$$

وعندما نرسم المستقيمات العمودية $x = x_i$ لكل $i = 0, 1, \dots, m$ وكذلك
 المستقيمات الأفقية $y = y_j$ لكل $j = 0, 1, \dots, n$ نحصل على التجزئة
 $P = P_1 \times P_2 = \{(x_i, y_j) : i = 0, 1, \dots, m ; j = 0, 1, \dots, n\}$
 للمستطيل R وينتج عنها المستطيلات الجزئية R_{ij} وعددها mn كما في الشكل (14.1)



$$R_{ij} = \{(x, y) : x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$$

$$\text{لكل } i = 1, 2, 3, \dots, m$$

$$j = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\Delta y_j = y_j - y_{j-1}, \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \text{نفع}$$

فتكون مساحة المستطيل R_{ij} هي :

$$\Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$$

الشكل (14.1) (s_i, t_j) نقطة R_{ij} جزئي مستطيل جزئي

ونحسب المجموع الثنائي :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(s_i, t_j) \Delta A_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(s_i, t_j) \Delta x_i \Delta y_j = f(s_1, t_1) \Delta x_1 \Delta y_1 + \dots + f(s_1, t_n) \Delta x_1 \Delta y_n$$

$$+ f(s_2, t_1) \Delta x_2 \Delta y_1 + \dots + f(s_2, t_n) \Delta x_2 \Delta y_n$$

$$+ \dots \dots \dots$$

$$+ f(s_m, t_1) \Delta x_m \Delta y_1 + \dots + f(s_m, t_n) \Delta x_m \Delta y_n$$

الذي نطلق عليه اسم مجموع ريمان الثنائي للاقتران $z=f(x,y)$ حسب التجزئة P .
نعرف مقياس التجزئة P ، نكتبه $\|P\|$ ، بأنه طول القطر الأكبر بين اقطار المستطيلات R_{ij} .
والآن نضع التعريف التالي :

تعريف (14.1) افرض الاقتران $f(x,y)$ معرفا على المستطيل $R = (x,y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d$ f نهاية مجاميع ريمان $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(s_i, t_j) \Delta A_{ij}$ نقول ان العدد الحقيقي L نهاية مجاميع ريمان $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(s_i, t_j) \Delta A_{ij}$ اذا لأي $\epsilon > 0$ يوجد $\delta < 0$ بحيث ان

$$\left| \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(s_i, t_j) \Delta A_{ij} - L \right| < \epsilon$$

لجميع التجزئات P على R التي تحقق $\|P\| < \delta$ ولأي اختيارات (s_i, t_j) في R_{ij} .
في هذه الحالة نكتب

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(s_i, t_j) \Delta A_{ij} = L$$

(ب) اذا نهاية $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(s_i, t_j) \Delta A_{ij}$ موجودة نسميه التكامل الثنائي للاقتران $z=f(x,y)$ على المستطيل R وتكتب

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(s_i, t_j) \Delta A_{ij} = \iint_R f(x,y) dA = \iint_R f(x,y) dx dy$$

ونقول ان $f(x,y)$ قابل للتكامل على R .

مثل (14.1) احسب $\iint_R k dx dy$ عندما k عدد ثابت و R المستطيل :

$$. c \leq y \leq d , a \leq x \leq b$$

الحل : نفرض تجزئة منتظمة $P_1 = \{x_0, \dots, x_m\}$ للفترة المغلقة $[a,b]$ وتجزئة منتظمة $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ للفترة المغلقة $[c,d]$. يكون $\Delta x_i = \frac{b-a}{m}$ ، $\Delta y_j = \frac{d-c}{n}$. فاذا (s_i, t_j) نقطة في المستطيل الجزئي R_{ij} فان $f(s_i, t_j) = k$.
لذلك نجد ان :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(s_i, t_j) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m k \frac{b-a}{m} \frac{d-c}{n}$$

$$= k \frac{b-a}{m} \frac{d-c}{n} (mn)$$

$$= k (b-a) (d-c)$$

أي أن مجموع ريمان الثنائي عدد ثابت مهما تكن التجزئة المنتظمة P وأي طريقة نختار بها النقاط (s_i, t_j) . لذلك نجد أن :

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(s_i, t_j) \Delta x_i \Delta y_j = k(b-a)(d-c)$$

وهذا يعني أن :

$$\iint_R k \, dx \, dy = k(b-a)(d-c)$$

عندما $f(x, y) \geq 0$ لكل $(x, y) \in R$ فإن $f(s_i, t_j) \Delta x_i \Delta y_j$ هو حجم متوازي السطوح الذي قاعدته المستطيل R_{ij} وارتفاعه $f(s_i, t_j)$. ونستطيع أن نعلمه تقريبا حجم الجسم الذي قاعدته المستطيل R_{ij} ويحده من الأعلى السطح $z = f(x, y)$. لذلك يمكننا أن نعتبر مجموع ريمان الثنائي $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(s_i, t_j) \Delta x_i \Delta y_j$ يقرب حجم الجسم الذي قاعدته المستطيل R ويحده من الأعلى السطح $z = f(x, y)$.

مبرهنة (14.2) افرض أن الاقتران $z = f(x, y)$ قابل للتكامل على المستطيل R وأن $f(x, y) \geq 0$ لكل $(x, y) \in R$. ان حجم الجسم الذي قاعدته المستطيل R ويحده من الأعلى السطح $z = f(x, y)$ هو :

$$V = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy \quad \dots \dots \dots (1)$$

مثال (14.2) اكتب تكاملا ثنائيا يمثل حجم الجسم الذي يقع تحت السطح $z = x + 2y + 1$

$$R: 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2$$

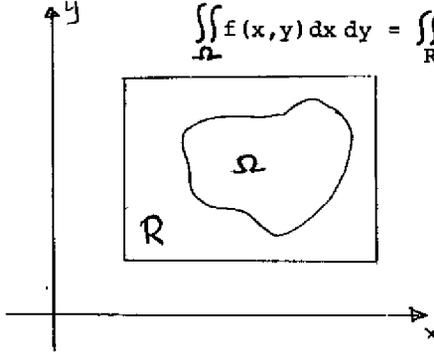
الحل : يحد الجسم من الأعلى السطح $z = f(x, y) = x + 2y + 1$ بينما قاعدته المستطيل R . لذلك الحجم المطلوب هو :

$$V = \iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_R (x + 2y + 1) \, dx \, dy$$

التكامل الثنائي على منطقة محددة

نستطيع الآن أن نعرف التكامل الثنائي لاقتران $z = f(x, y)$ متصل على منطقة محددة Ω في المستوى xy . ما نحتاجه هنا هو أن نجعل المنطقة Ω داخل مستطيل R كما في الشكل (14.2) . وتأخذ اقترانا $z = F(x, y)$ بحيث $F(x, y) = f(x, y)$ عندما $(x, y) \in \Omega$ بينما $F(x, y) = 0$ عندما $(x, y) \in R$ وليست في Ω . فإذا كان التكامل الثنائي للاقتران $F(x, y)$ على المستطيل R موجودا فإن التكامل الثنائي للاقتران

$z=f(x,y)$ على المنطقة Ω نعرفه بأنه :



الشكل (14.2)

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \iint_R F(x,y) dx dy \dots\dots\dots (2)$$

والآن أي الاقترانات قابلة للتكامل ؟ الجواب ليس سهلا قياسا على ما عرفنا في حال اقتران ذي متغير واحد . ولكن الاقتران المتصل قابل للتكامل، كما في المبرهنة التالية ، التي نقدمها دون برهان .

مبرهنة (14.3) إذا كان الاقتران $z=f(x,y)$ متصلا على منطقة محددة تتألف حدودها من عدد منته من الاجزاء التي تشمل عند اطرافها وكل جزء منحني ممهد ، فان $z=f(x,y)$ قابل للتكامل على هذه المنطقة .

مرة اخرى ، إذا كان $z=f(x,y)$ متصلا على المنطقة Ω ويحقق $f(x,y) \geq 0$ لكل $(x,y) \in \Omega$ فان حجم المعجم الذي قاعدته المنطقة Ω ويحده من الأعلى السطح $z=f(x,y)$ هو :

$$V = \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy \dots\dots\dots (3)$$

خصائص التكامل الثنائي

نعدد هنا خصائص للتكامل الثنائي تشبه خصائص وجدناها في التكامل المحدد لاقتران ذي متغير واحد . نفرض أن الاقتران والمناطق التي تظهر في هذه الخصائص لها الأوصاف التي تضمن وجود التكامل الثنائي المعني :

(أ) إذا c عدد ثابت فان : $\iint_{\Omega} c f(x,y) dx dy = c \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy$

(ب) $\iint_{\Omega} [f(x,y) + g(x,y)] dx dy = \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy + \iint_{\Omega} g(x,y) dx dy$

(ج) إذا المنطقة Ω اتحاد لمنطقتين " غير متداخلتين " Ω_1 و Ω_2 فان :

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \iint_{\Omega_1} f(x,y) dx dy + \iint_{\Omega_2} f(x,y) dx dy$$

(د) إذا $f(x,y) \leq g(x,y)$ لكل $(x,y) \in \Omega$ فان :

$$\iint_{\Omega} f(x,y) dx dy \leq \iint_{\Omega} g(x,y) dx dy$$

تمارين (14.1)

(1) افرض المستطيل : $R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ احسب

$\iint_R xy \, dx \, dy$ باستخدام تعريف (14.1) ومستخدماً تجزئات منتظمة لكل من الفترتين $[a, b]$ و $[c, d]$ مع أخذ النقطة (s_i, t_j) لتكون المركز للمستطيل R_{ij} .

(2) أي التكاملين $\iint_R (4x^3y + 4xy^3) \, dx \, dy$ و $\iint_R (x^4 + 6x^2y^2 + y^4) \, dx \, dy$ الأكبر ؟

(3) احسب مجموع ريمان الثنائي للاقتران $f(x, y) = x^2 + 4y$ على المستطيل

$0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3$ حسب التجزئة $P_1 = \{0, 1, 2\}$ للفترتين $[0, 2]$ و $[0, 3]$ $P_2 = \{0, 1, 2, 3\}$ وافرض (s_i, t_j) رأس المستطيل R_{ij} من الأعلى إلى اليمين .

(4) احسب مجموع ريمان الثنائي للاقتران $f(x, y) = 2x + x^2y$ على المستطيل

$-2 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1$ حسب التجزئة $P_1 = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ للفترتين $[-2, 2]$ و $[-1, 1]$ $P_2 = \{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$ وافرض (s_i, t_j) رأس المستطيل R_{ij} من الأسفل إلى اليسار .

(14.2) حساب التكامل الثنائي

ان حساب التكامل الثنائي للاقتران $z=f(x, y)$ يمثل على المنطقسة Ω باستخدام التعريف (14.1) يكاد يكون مستحيلاً بسبب التعقيدات التي تصادفنا عند حساب مجاميع ريمان الثنائية . لذا نحتاج الى اسلوب سهل يمكننا من حساب التكامل الثنائي على غرار الاسلوب الذي مكنتنا من تفسير حساب التكامل للاقتران ذي متغير واحد . هنا نلجأ الى التكامل التتابعي الذي نستخدمه عندما تأخذ المنطقسة Ω

أحد الشكلين المميزين التاليين :

(أ) الشكل الأول : تكون فيه المنطقة

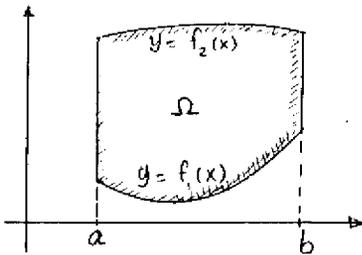
كما في الشكل (14.3) تقسح الى

الأعلى من رسم الاقتران $y = f_1(x)$

والى الأسفل من رسم الاقتران

$y = f_2(x)$ من $x = a$ الى $x = b$.

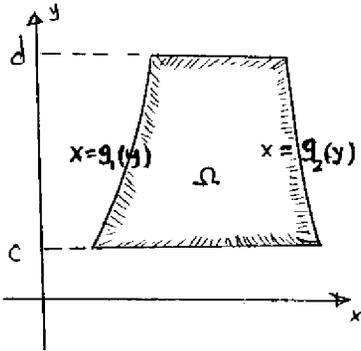
أي أن :



الشكل (14.3)

$$\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

والاقترانان $f_1(x)$ و $f_2(x)$ متملان على الفترة $[a, b]$. في هذه الحالة يكون التكامل التتابعي هو $\int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dx dy$ حيث نحسب التكامل المحدد $\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) dy$ مع ابقاء x ثابتا، ثم نحسب التكامل للناتج بدلالة x على الفترة المغلقة $[a, b]$.



الشكل (14.4)

(ب) الشكل الثاني: تكون فيه المنطقة

كما في الشكل (14.4) اذ أنها :

$$\Omega = \{(x, y) : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

والاقترانان $g_1(y)$ و $g_2(y)$ متصلان

على الفترة المغلقة $[c, d]$. في هذه

الحالة يكون التكامل التتابعي هو

$$\int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx dy$$

التكامل المحدد $\int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) dx$ في اثناء ذلك يبقى y ثابتا ثم نحسب التكامل المحدد للناتج بدلالة y على الفترة المغلقة $[c, d]$.

$$\text{مثل (14.3) احسب التكامل التتابعي } \int_0^2 \int_x^3 (x^2 + y) dy dx$$

الحل : بما أن :

$$\int_0^2 \int_x^3 (x^2 + y) dy dx = \int_0^2 \left(\int_x^3 (x^2 + y) dy \right) dx$$

نبدأ بحساب التكامل المحدد $\int_x^3 (x^2 + y) dy$ وفي هذه الأثناء نحافظ على x ثابتا :

$$\begin{aligned} \int_x^3 (x^2 + y) dy &= x^2 y + \frac{1}{2} y^2 \Big|_x^3 \\ &= 3x^2 - x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{9}{2} \end{aligned}$$

ثم نحسب التكامل المحدد التالي :

$$\begin{aligned} &\int_0^2 \left(3x^2 - x^3 - \frac{1}{2} x^2 + \frac{9}{2} \right) dx \\ &= x^3 - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{9}{2} x \Big|_0^2 \\ &= 8 - 4 - \frac{4}{3} + 9 \\ &= \frac{35}{3} \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \int_x^3 (x^2 + y) dy dx = \frac{35}{3} \quad \text{أي أن}$$

مثل (14.4) احسب التكامل التتابعي $\int_0^1 \int_0^y y \, dx \, dy$.

الحل : هذا التكامل نجريه بالتتابع التالي :

$$\int_0^1 \int_0^y y \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^y y \, dx \right) dx$$

لذا نحسب أولا :

$$\int_0^y y \, dx = y \times \left| x \right|_0^y = y^2$$

ثم نجد :

$$\int_0^1 y^2 \, dy = \frac{1}{3} y^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 \int_0^y y \, dx \, dy = \frac{1}{3} \quad \text{اي ان}$$

مبرهنة (14.4) (مبرهنة فيوبيني)

افرض ان الافتراض $z = f(x, y)$ مشتمل على المنطقة Ω .

(أ) اذا المنطقة Ω لها الشكل الاول فان :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x, y) \, dy \, dx \quad \dots \dots \dots (4)$$

(ب) اذا المنطقة Ω لها الشكل الثاني فان :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} f(x, y) \, dx \, dy \quad \dots \dots \dots (5)$$

مثل (14.5) احسب $\iint_{\Omega} x^3 y \, dx \, dy$ عندما $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.

الحل : المنطقة Ω هي من الشكل الاول لذلك نستخدم (4) لنجد :

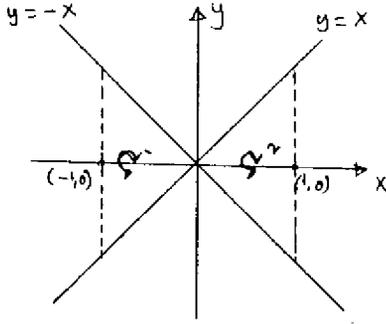
$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} x^3 y \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_0^x x^3 y \, dy \, dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x^3 y^2 \Big|_0^x \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} x^5 \, dx = \frac{1}{12} x^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

مثل (14.6) احسب $\iint_{\Omega} \sqrt{xy} \, dx \, dy$ عندما $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\}$.

الحل : المنطقة Ω هي من الشكل الثاني لذلك نستخدم (5) لنجد :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} \sqrt{xy} \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{y^2}^y \sqrt{xy} \, dx \, dy = \int_0^1 \frac{2}{3} x^{3/2} y^{1/2} \Big|_{y^2}^y dy \\ &= \frac{2}{3} \int_0^1 (y^2 - y^{7/2}) \, dy = \frac{2}{3} \left(\frac{y^3}{3} - \frac{2}{9} y^{9/2} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2}{27} \end{aligned}$$

أحيانا لا تكون المنطقة Ω من أي الشكلين الأول أو الثاني ولكن يمكن كتابتها كاتحاد منطقتين أو أكثر كل واحدة من أحد هذين الشكلين . عندئذ نكتب التكامل الثنائي على Ω كمجموع عدد من التكاملات الثنائية كل منها يمكن حسابه بتكامل تتابعي .



الشكل (14.5)

مثل (14.7) احسب $\iint_{\Omega} 3x^2 y^2 dx dy$ عندما Ω

المنطقة بين المنحنيين $y = -x$ ، $y = x$ من $x = -1$ إلى $x = 1$. انظر الشكل (14.5) .

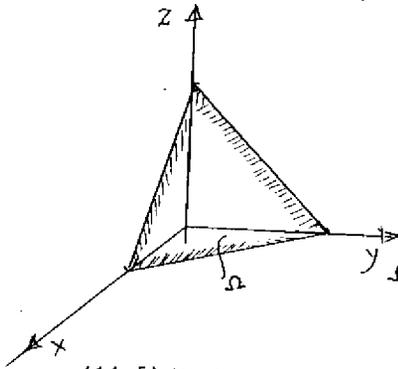
الحل : نستطيع أن نكتب $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ حيث

$$\Omega_1 = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 0 , x \leq y \leq -x\}$$

$$\Omega_2 = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1 , -x \leq y \leq x\}$$

وبناءً على ذلك نجد أن :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} 3x^2 y^2 dx dy &= \iint_{\Omega_1} 3x^2 y^2 dx dy + \iint_{\Omega_2} 3x^2 y^2 dx dy \\ &= \int_{-1}^0 \int_x^{-x} 3x^2 y^2 dy dx + \int_0^1 \int_{-x}^x 3x^2 y^2 dy dx \\ &= -2 \int_{-1}^0 x^5 dx + \int_0^1 2x^5 dx = \frac{2}{3} \end{aligned}$$



الشكل (14.5)

مثل (14.8) احسب حجم الجسم في الثمن الأول

وتحدده السطوح $y=0$ ، $x=0$ ، $2x + y + z=4$ ، $z=0$.

الحل : كما يظهر في الشكل (14.5) فإن

هذا الجسم قاعدته المنطقة

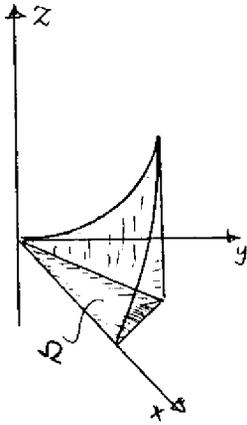
$$\Omega = (x, y) : 0 \leq x \leq 2 , 0 \leq y \leq 4 - 2x$$

التي لها الشكل الأول ويحد الجسم من الأعلى

المستوى $2x + y + z = 4$. عندما نضع

$z = f(x, y) = 4 - 2x - y$ ونستخدم (3) فإننا نجد أن :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} f(x, y) dx dy = \int_0^2 \int_0^{4-2x} (4 - 2x - y) dy dx \\ &= \int_0^2 \left(4y - 2xy - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^{4-2x} dx \\ &= \int_0^2 \left(8 - 8x + \frac{3}{2} x^2 \right) dx = 4 \end{aligned}$$



الشكل (14.6)

مثال (14.9) احسب حجم الجسم في الثمن الأول وتحده

السطوح $x = 4$ ، $y = x$ ، $z = y^2$.

الحل : هذا الجسم قاعدته المثلث

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leq x \leq y , 0 \leq y \leq x\}$$

ويحده من الأعلى السطح $z = f(x,y) = y^2$. انظر

الشكل (14.6) . من هنا نجد أن الحجم هو :

$$\begin{aligned} v &= \iint_{\Omega} f(x,y) dx dy = \int_0^4 \int_0^x y^2 dy dx \\ &= \int_0^4 \left. \frac{1}{3} y^3 \right|_0^x dx = \int_0^4 \frac{x^3}{3} dx \\ &= \left. \frac{1}{12} x^4 \right|_0^4 = \frac{64}{3} \end{aligned}$$

حساب المساحة بالتكامل الثنائي

نستطيع أن نستخدم تكاملاً ثنائياً لحساب مساحة منطقة Ω في المستوى وذلك

بفرض $f(x,y) = 1$ مما يمكننا أن نفسر $\iint_{\Omega} dx dy$ بأنه حجم مجسم قاعدته Ω وله

سمك منتظم يساوي وحدة واحدة . أي أن :

$$\iint_{\Omega} dx dy = v = (1) \times (\text{مساحة } \Omega)$$

وهذا يعني أن :

$$\iint_{\Omega} dx dy = (\text{مساحة المنطقة } \Omega) \dots (6)$$

مثال (14.10) احسب مساحة المنطقة التي تحدها

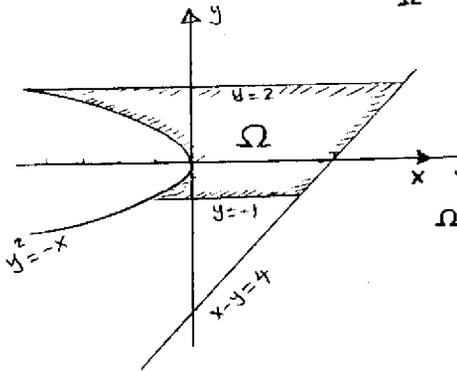
المنحنيات $y = -1$ ، $x - y = 4$ ، $y^2 = -x$ ، $y = 2$.

الحل : المنطقة Ω هي من الشكل الثاني حيث

$$\Omega = (x,y) : -1 \leq y \leq 2 , -y^2 \leq x \leq 4 + y$$

انظر الشكل (14.7) . مساحتها A هي :

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\Omega} dx dy = \int_{-1}^2 \int_{-y^2}^{4+y} dx dy \\ &= \int_{-1}^2 (x \Big|_{-y^2}^{4+y}) dy = \int_{-1}^2 (4 + y + y^2) dy \\ &= 4y + \frac{1}{2} y^2 + \frac{1}{3} y^3 \Big|_{-1}^2 = \frac{33}{2} \end{aligned}$$



الشكل (14.7)

تمارين (2.14)

في التمارين (1) - (8) احسب التكامل التتابعي وارسم المنطقة Ω التي

يجري عليها التكامل :

$$\int_2^8 \int_0^{\ln x} e^y dy dx \quad (2) \quad \int_1^2 \int_{1-x}^x x^2 y dy dx \quad (1)$$

$$\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x - y) dx dy \quad (4) \quad \int_{-1}^1 \int_{x^3}^{x+1} (3x + 2y) dy dx \quad (3)$$

$$\int_0^1 \int_x^{x^2} (3x - y) dy dx \quad (6) \quad \int_3^5 \int_y^{2y} \frac{x}{y} dx dy \quad (5)$$

$$\int_0^1 \int_{-y-1}^{y-1} (x^2 + y^2) dx dy \quad (8) \quad \int_0^\pi \int_0^{1+\cos y} x^2 \sin y dx dy \quad (7)$$

في التمارين (9) - (20) احسب التكامل الثنائي :

$$\cdot \Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \quad \text{عندما} \iint_{\Omega} \frac{x}{x^2 + 1} dx dy \quad (9)$$

$$\cdot \Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\} \quad \text{عندما} \iint_{\Omega} x y^2 e^{xy} dx dy \quad (10)$$

$$\cdot y = 0, x = 1 \quad \text{عندما} \iint_{\Omega} \sqrt{4x^2 - y^2} dx dy \quad (11)$$

. $y = x$

$$\cdot x = 2, xy = 1 \quad \text{عندما} \iint_{\Omega} x \ln y dx dy \quad (12)$$

. $y = 1$

$$\cdot y = \cos x, y = \sin x \quad \text{عندما} \iint_{\Omega} (y + 1) dx dy \quad (13)$$

. $x = 0$ الى $x = \frac{\pi}{4}$

$$\cdot y = 0, y = x^2 \quad \text{عندما} \iint_{\Omega} x^3 \cos xy dx dy \quad (14)$$

. $y = 2$

$$\cdot y = x^{1/4}, y = x^2 \quad \text{عندما} \iint_{\Omega} (x^{1/2} - y^2) dx dy \quad (15)$$

$$\cdot \Omega = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 1\} \quad \text{عندما} \iint_{\Omega} (x^2 + 3y^2) dx dy \quad (16)$$

$$\cdot \Omega = \{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, y^2 \leq x \leq y\} \quad \text{عندما} \iint_{\Omega} \sqrt{xy} dx dy \quad (17)$$

$$\cdot y = x^2, y = x^3 \quad \text{عندما} \iint_{\Omega} (x^4 + y^2) dx dy \quad (18)$$

$$\cdot y = -x, y = x \quad \text{عندما} \iint_{\Omega} 3x^2 y^2 dx dy \quad (19)$$

. $x = 1$ الى $x = -1$

$$\cdot y^2 = 8 - 2x , y^2 = 2x \text{ عندما } \iint_{\Omega} (4 - y^2) dx dy \quad (20)$$

في التمارين (21) - (26) استعمل تكاملا شنائيا لتحسب مساحة المنطقة Ω التي تحدها المنحنيات المنصوص عليها :

$$x = 4y - y^2 , y = x \quad (22) \quad 2y - x - 4 = 0 , x^2 = 4y \quad (21)$$

$$x = e , y = x , xy = 1 \quad (24) \quad xy = 6 , x + y = 5 \quad (23)$$

$$x = 4 - 3y^2 , x = y^2 \quad (26) \quad y = -2 , y = x - 1 , y = \ln x \quad (25)$$

في التمارين (27) - (32) ارسم المنطقة Ω التي يجري عليها التكامل التتابعي. بّدل ترتيب اجراء التكامل واحسب التكامل التتابعي الناتج :

$$\int_0^9 \int_y^3 \sin x^3 dx dy \quad (28) \quad - \int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2} dy dx \quad (27)$$

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 y \cos x^2 dx dy \quad (30) \quad \int_0^2 \int_1^{e^x} dy dx \quad (29)$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \frac{x e^{2y}}{4-y} dy dx \quad (32) \quad \int_0^1 \int_{x^2}^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^4 + y^2}} dy dx \quad (31)$$

في التمارين (33) - (40) استخدم تكاملا شنائيا لتحسب حجم ما يلي :

$$\cdot x + y + z = 3 \text{ المستوى والثلث والمستوى } T \text{ المجسم الذي تحده المستويات الاحداثية الثلاثة والمستوى } (33)$$

$$\cdot x + 2y = 2 \text{ المستويان } T \text{ في الثمن الأول وتحده المستويات الاحداثية والمستويان } (34)$$

$$\cdot x + 4y + 2z = 8$$

$$\cdot z = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 \text{ السطح الاحداثية } T \text{ الذي تحده المستويات الاحداثية ، السطح } (35)$$

$$\cdot y = 3 , x = -2$$

$$\cdot z = 0 , y = 0 , z = 2x , x^2 + y^2 = 9 \text{ السطح } T \text{ في الثمن الأول وتحده السطح } (36)$$

$$\cdot y = 0 , x = 0 , x + y = 2 , z = 4 - x^2 \text{ السطح } T \text{ في الثمن الأول وتحده السطح } (37)$$

$$\cdot z = 0$$

$$\cdot z = 0 , x + y = 0 , y = 4 - x^2 , z = x^2 + 4 \text{ السطح } T \text{ الذي تحده السطح } (38)$$

$$\cdot 2x + 2y + 3z = 6 , z = 0 , x^2 + y^2 = 1 \text{ السطح } T \text{ الذي تحده السطح } (39)$$

$$\cdot z = 0 , y = 0 , y = x , 4x^2 + z^2 = 1 \text{ السطح } T \text{ في الثمن الأول وتحده السطح } (40)$$

(41) محسم T قاعدته المنطقة Ω في المستوى xy ويحده من الاعلى السطح

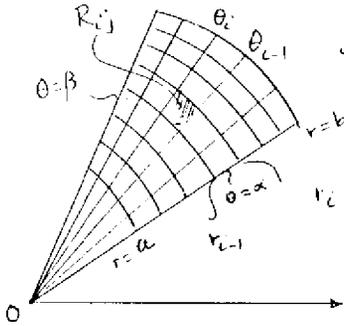
$$\cdot V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2) dx dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2) dx dy \text{ : وحجمه هو } z = x^2 + y^2$$

ارسم المنطقة Ω ثم اكتب الحجم V بتكامل تتابعي جديد بعد تبديل التتابع الذي يجري فيه التكامل .

(14.3) التكاملات الثنائية بالاحداثيات القطبية

ندرس في هذا البند حساب تكامل ثنائي لاقتران $f(r, \theta)$ على منطقة Ω معطاة

بالاحداثيات القطبية .



نبدأ بمنطقة بسيطة R كما في الشكل (14.8) حيث

$$R = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$

نفرض تجزئة $\{r_0, r_1, \dots, r_m\}$ للفترة

المغلقة $[a, b]$ وتجزئة $\{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n\}$ للفترة

المغلقة $[\alpha, \beta]$. ينتج عنهما تجزئة P

للمنطقة R الى مناطق R_{ij} عددها $m \times n$ وكل

منها " شبه مستطيل " يقع بين دائرتين لهما

القطب مركز مشترك ونمقا قطريهما r_{i-1}, r_i

وبين شعاعين θ_{j-1}, θ_j ينطلقان من القطب .

نختار النقطة $(\bar{r}_i, \bar{\theta}_j)$ مركز المنطقة R_{ij} اي $\bar{r}_i = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}$ ، $\bar{\theta}_j = \frac{\theta_{j-1} + \theta_j}{2}$.
 نجعل $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ ، $\Delta \theta_j = \theta_j - \theta_{j-1}$. مساحة المنطقة R_{ij} هي :

$$\begin{aligned} \Delta A_{ij} &= \frac{1}{2} \Delta \theta_j r_i^2 - \frac{1}{2} \Delta \theta_j r_{i-1}^2 \\ &= \frac{1}{2} \Delta \theta_j (r_i^2 - r_{i-1}^2) \\ &= \frac{1}{2} \Delta \theta_j (r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1}) \\ &= \bar{r}_i \Delta r_i \Delta \theta_j \end{aligned}$$

والآن نحسب مجموع ريمان :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_j) \Delta A_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_j) \bar{r}_i \Delta r_i \Delta \theta_j \dots (7)$$

وإذا الاقتران $f(r, \theta)$ متصل على المنطقة R فان النهاية :

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_j) \bar{r}_i \Delta r_i \Delta \theta_j$$

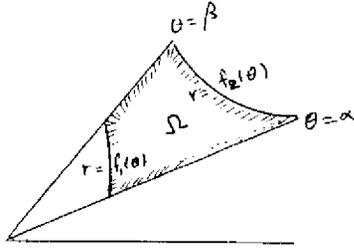
موجودة ونسميها التكامل الثنائي لاقتران $f(r, \theta)$ على المنطقة R ونكتب :

$$\iint_R f(r, \theta) dA = \iint_R f(r, \theta) r dr d\theta = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m f(\bar{r}_i, \bar{\theta}_j) \bar{r}_i \Delta r_i \Delta \theta_j \dots (8)$$

افرض ان الاقتران $z = f(r, \theta)$ متصل على المنطقة Ω التي تظهر في الشكل

(14.9) حيث :

$$\Omega = \{(r, \theta) : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2, f_1(\theta) \leq r \leq f_2(\theta)\}$$



الشكل (14.9)

والاقترانان $f_2(\theta)$ ، $f_1(\theta)$ متصلان
ويحققان $0 \leq a \leq f_1(\theta) \leq f_2(\theta) \leq b$
، a ، b ثابتان . نضع داخل "شبه مستطيل"
• $R = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b , \alpha \leq \theta \leq \beta\}$
نأخذ اقترانا $F(r, \theta)$ معرفا على R و
 $(r, \theta) \in \Omega$ عندما $F(r, \theta) = f(r, \theta)$
 $(r, \theta) \in R$ عندما $F(r, \theta) = 0$
ولكن $(r, \theta) \notin \Omega$. اذا التكامل الثنائي
موجود فاننا نعرف :

$$\iint_{\Omega} f(r, \theta) r dr d\theta = \iint_R F(r, \theta) r dr d\theta \quad \dots \dots \dots (9)$$

اذا $f(r, \theta) \geq 0$ لكل $(r, \theta) \in \Omega$ فان حجم الجسم الذي قاعدته Ω ويحده من

الاعلى السطح $z = f(r, \theta)$ هو :

$$V = \iint_{\Omega} f(r, \theta) r dr d\theta \quad \dots \dots \dots (10)$$

واذا $f(r, \theta) = 1$ لكل $(r, \theta) \in \Omega$ فان التكامل الثنائي في (10) يعطي

مساحة المنطقة Ω . أي أن :

$$A = \iint_{\Omega} r dr d\theta = (\text{مساحة المنطقة } \Omega) \quad \dots \dots \dots (11)$$

نحسب التكامل الثنائي بالاحداثيات القطبية على النحو التالي :

(أ) اذا المنطقة $\Omega = \{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta , f_1(\theta) \leq r \leq f_2(\theta)\}$ والاقترانان $f_1(\theta)$ ،

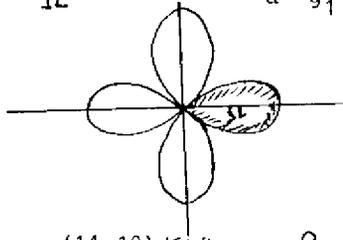
متصلان ويحققان $0 \leq f_1(\theta) \leq f_2(\theta)$ فان :

$$\iint_{\Omega} f(r, \theta) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{f_1(\theta)}^{f_2(\theta)} f(r, \theta) r dr d\theta \quad \dots \dots \dots (12)$$

(ب) اذا المنطقة $\Omega = \{(r, \theta) : a \leq r \leq b , g_1(r) \leq \theta \leq g_2(r)\}$ والاقترانان $g_1(r)$ ،

$g_2(r)$ متصلان ويحققان $0 \leq g_1(r) \leq g_2(r)$ فان :

$$\iint_{\Omega} f(r, \theta) r dr d\theta = \int_a^b \int_{g_1(r)}^{g_2(r)} f(r, \theta) r d\theta dr \quad \dots \dots \dots (13)$$



الشكل (14.10)

مثل (14.11) احسب مساحة المنطقة Ω التي تقع

داخل احدى بتلات الوردة $r = 2 \cos 2\theta$

الحل : نأخذ البتلة $-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ التي

ينقسمها المحور القطبي الى نصفين ، يكفي أن

نحسب مساحة المنطقة $\Omega_1 = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq r \leq 2 \cos 2\theta\}$

انظر الشكل (14.10) . نجد أن :

$$\begin{aligned}
 A &= \iint_{\Omega} r \, dr \, d\theta = 2 \iint_{\Omega_1} r \, dr \, d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^1 2 \cos 2\theta \, r \, dr \, d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 2\theta \, d\theta \\
 &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 4\theta) \, d\theta \\
 &= 2 \left(\theta + \frac{1}{4} \sin 4\theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

قاعدة تحويل الاحداثيات

افرض أن الاقتران $z = f(x, y)$ معرف على المنطقة Ω في مستوى xy . في بعض الحالات يكون من الأنسب لنا أن نحسب التكامل لثنائي $\iint_R f(x, y) \, dA$ بعد تحويله بالاحداثيات القطبية . والمبرهنة التالية ، نذكرها دون برهان ، توفر القاعدة التي نستخدمها في تلك الحالات .

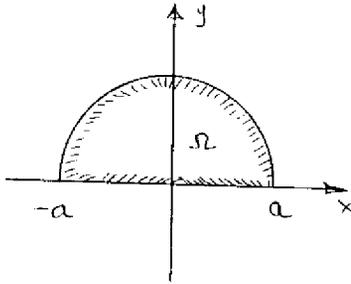
مبرهنة (14.5)

افرض أن الاقتران $z = f(x, y)$ متعلم على المنطقة Ω . يكون :

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_G f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta \quad \dots \dots \dots (14)$$

و المنطقة G في مستوى $r\theta$ يرسلها التحويل $x = r \cos \theta$. $y = r \sin \theta$ الى

المنطقة Ω في مستوى xy .



الشكل (14.11)

مثل (14.12) استخدم الاحداثيات القطبية لتسب

$$\int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} \, dy \, dx$$

الحل : المنطقة Ω التي يجري عليها التكامل

التتابعي تظهر في الشكل (14.11) . فهي :

$$\Omega = \{ (r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq a \}$$

بينما $(x^2 + y^2)^{3/2} = (r^2)^{3/2} = r^3$. باستعمال

(15) نحصل على :

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2} \, dy \, dx &= \int_0^{\pi} \int_0^a (r^3) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_0^{\pi} \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^a \, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{a^5}{5} \, d\theta = \frac{\pi a^5}{5}
 \end{aligned}$$

مثل (14.13) جد حجم الجسم T الذي يقع داخل الكرة $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ وخارج الاسطوانة $x^2 + y^2 = 9$. انظر الشكل (14.12)

الحل : ان مستوى xy يقسم الجسم T الى نصفين النصف العلوي T_1 قاعدته المنطقة المستوية $\Omega = \{(r, \theta) : 3 \leq r \leq 5, 0 < \theta < 2\pi\}$ ويحد T_1 من الاعلى سطح نصف

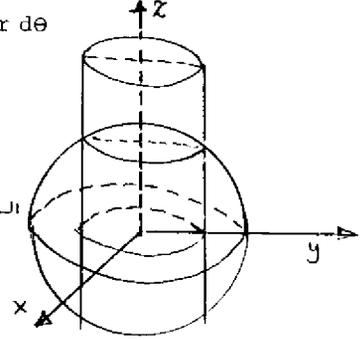
الكرة $z = f(x, y) = \sqrt{25 - (x^2 + y^2)}$ اي ان :

$$f(x, y) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \sqrt{25 - r^2}$$

نحسب الان حجم الجسم T لنجد :

$$\begin{aligned} v &= 2 \iint_{\Omega} \sqrt{25 - (x^2 + y^2)} \, dx \, dy = 2 \iint_{\Omega} \sqrt{25 - r^2} \, r \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_3^5 r \sqrt{25 - r^2} \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(\frac{2}{3}\right) (25 - r^2)^{5/2} \Big|_3^5 \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \frac{64}{3} \, d\theta = \frac{256\pi}{3} \end{aligned}$$

الشكل (14.12)



تمارين (14.3)

في التمارين (1) - (6) احسب التكامل التتابعي باستخدام الاحداثيات القطبية :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy \, dx & \quad (2) \quad \int_{-a}^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} e^{-(x^2 + y^2)} \, dy \, dx \quad (1) \\ \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax - x^2}} x^2 \, dy \, dx & \quad (4) \quad \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4 - y^2}} \cos(x^2 + y^2) \, dx \, dy \quad (3) \\ \int_0^2 \int_0^x y \, dy \, dx & \quad (6) \quad \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4 - x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy \, dx \quad (5) \end{aligned}$$

في التمارين (7) - (9) استعمل الاحداثيات القطبية لتحسب التكامل الثنائي :

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} (x^2 + y^2)^{3/2} \, dx \, dy & \quad (7) \quad \text{عندما } \Omega = \{(x, y) : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 4\} \\ \iint_{\Omega} x^2 (x^2 + y^2)^3 \, dx \, dy & \quad (8) \quad \text{عندما } \Omega \text{ هي المنطقة بين المنحنيين } y = 0, y = \sqrt{1 - x^2} \\ \iint_{\Omega} \frac{x^2}{x^2 + y^2} \, dx \, dy & \quad (9) \quad \text{عندما } \Omega \text{ هي المنطقة بين الدائرتين } x^2 + y^2 = a^2, \\ & \quad \cdot 0 < a < b, \quad x^2 + y^2 = b^2 \end{aligned}$$

في التمارين (10) - (18) احسب مساحة المنطقة Ω التي تقع :

$$(10) \quad \text{داخل المنحني } r = 2 - 2 \cos \theta \text{ وخارج الدائرة } r = 3$$

$$(11) \text{ داخل المنحني } r = 3 + 2 \sin \theta$$

$$(12) \text{ في الربع الأول داخل المنحني } r = \sqrt{2 - \sin 2\theta}$$

$$(13) \text{ في الربع الأول داخل المنحني } r = 1 + \sin \theta$$

$$(14) \text{ داخل الدائرة } r = \frac{3}{2} \text{ والى يمين المستقيم } 4r \cos \theta = 3$$

$$(15) \text{ داخل الدائرة } r = 3 \cos \theta \text{ وخارج الدائرة } r = \cos \theta$$

$$(16) \text{ داخل المنحني } r = 1 + \cos \theta \text{ وخارج الدائرة } r = 1$$

$$(17) \text{ داخل الدائرة } r = 1 \text{ وخارج المنحني } r = 1 + \cos \theta$$

$$(18) \text{ داخل الدائرة } r = 1 \text{ والى يمين المنحني } r(1 + \cos \theta) = 1$$

في التمارين (19) - (24) احسب حجم المجسم T الذي يحده :

$$(19) \text{ من الأسفل المستوى } xy \text{ ومن الأعلى السطح } z = 1 - (x^2 + y^2)$$

$$(20) \text{ من الأسفل المستوى } xy \text{ ومن الأعلى السطح } x^2 + y^2 + z^6 = 5$$

$$(21) \text{ من الأسفل المستوى } xy \text{ ومن الأعلى المستوى } z = y + b \text{ ومن الجوانب الاسطوانة}$$

$$\text{الدائرية } x^2 + y^2 = b^2$$

$$(22) \text{ من الأسفل المستوى } xy \text{ ومن الأعلى السطح } z = 1 - (x^2 + y^2) \text{ ومن الجوانب الاسطوانة}$$

$$\text{الدائرية } x^2 + y^2 - x = 0$$

$$(23) \text{ من الأسفل المستوى } xy \text{ ومن الأعلى السطح الكروي } x^2 + y^2 + z^2 = 4 \text{ ومن الجوانب}$$

$$\text{الاسطوانة الدائرية } x^2 + y^2 = 1$$

$$(24) \text{ من الأسفل المستوى } xy \text{ ومن الأعلى السطح } z = 4r^2 \text{ ومن الجوانب الاسطوانة}$$

$$\text{الدائرية } r = 3 \sin \theta$$

(25) نعرف التكامل المعتل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \lim_{a \rightarrow 0} \iint_{\Omega_a} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

حيث Ω_a المنطقة داخل الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$. اثبت أن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \pi$$

(14.4) التكاملات الثلاثية

ان الاسلوب الذي استخدمناه لتعريف وحساب التكامل الثنائي نعيده هنا لنقدم التكامل الثلاثي .

افرض ان الاقتران $f(x,y,z)$ متصل على متوازي السطوح القائم :

$$T = \{(x,y,z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, g \leq z \leq h\}$$

نفرض التجزئة $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ للفترة $[a, b]$ والتجزئة $P_2 = \{y_0, y_1, \dots, y_m\}$ للفترة $[c, d]$ والتجزئة $P_3 = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ للفترة $[g, h]$. باستخدام مستويات تمر بنقاط هذه التجزئات الثلاث وكل منها يوازي أحد المستويات الاحداثية نحصل على تجزئة $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ لمتوازي السطوح T تتكون من متوازيات سطوح جزئية T_{ijk}

عدها lmn . حجم T_{ijk} هو $\Delta V_{ijk} = \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$

نختار نقطة (u_i, v_j, w_k) في T_{ijk} ونحسب المجموع :

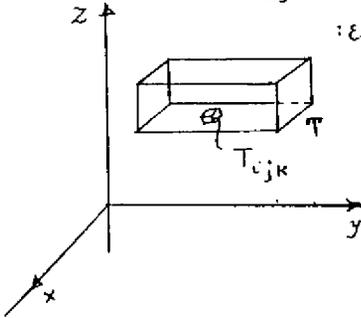
$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l f(u_i, v_j, w_k) \Delta V_{ijk}$$

ونسميه مجموع ريمان للاقتران $f(x,y,z)$

حسب التجزئة P

تعريف (14.5)

اذا النهاية



الشكل (14.13) $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l f(u_i, v_j, w_k) \Delta V_{ijk}$

موجودة نسميها التكامل الثلاثي للاقتران $f(x,y,z)$ على الجسم T ونكتب :

$$\iiint_T f(x,y,z) dv = \iiint_T f(x,y,z) dx dy dz = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l f(u_i, v_j, w_k) \Delta V_{ijk} \dots (15)$$

هنا $\|P\|$ (مقياس P) هو طول اكبر قطر لمتوازيات السطوح T_{ijk} . كما اننا نعرف نهاية مجموع ريمان الثلاثي بالاسلوب نفسه الذي استخدمناه لتعريف مجموع ريمان الثنائي .

والآن لتعريف التكامل الثلاثي للاقتران $f(x,y,z)$ على مجسم محدود T فاننا نجعل الجسم T داخل متوازي سطوح قائم T' ونعرف اقترانا $F(x,y,z)$ على T' بان نأخذ $F(x,y,z) = f(x,y,z)$ عندما $(x,y,z) \in T$ بينما $F(x,y,z) = 0$ عندما

$\iiint_{T'} F(x,y,z) dv$ موجود $(x,y,z) \in T'$. اذا التكامل الثلاثي $(x,y,z) \notin T$.

نعرف التكامل الثلاثي للاقتران $f(x,y,z)$ على T بأنه :

$$\iiint_T f(x,y,z) dv = \iiint_{T'} f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{T'} F(x,y,z) dv \dots\dots (16)$$

كتطبيق فيزيائي للتكامل الثلاثي . افرض أن جسماً طيباً له شكل الجسم T في الفضاء الثلاثي وان كثافة هذا الجسم متغيرة ويمثلها اقتران $\rho(x,y,z)$ متصل على T . ان كتلة هذا الجسم هي :

$$M = \iiint_T \rho(x,y,z) dv \dots\dots\dots (17)$$

وعندما $\rho(x,y,z) = 1$ لكل $(x,y,z) \in T$ واذ v حجم الجسم فان :

$$v = 1 \times v = (\text{الحجم} \times \text{الكثافة}) = (\text{الكتلة})$$

أي أن :

$$v = \iiint_T dv = \iiint_T dx dy dz \dots\dots\dots (18)$$

ان عملية حساب التكامل الثلاثي لاقتران $f(x,y,z)$ ممثل على مجسم T من التعريف مباشرة معقدة ان لم تكن احيانا مستحيلة . لذا نلجأ الى حساب تكامل تتابعي مناسب ليعطينا قيمة التكامل الثلاثي . يعتمد التكامل التتابعي السدي نختاره على شكل الجسم T ونوضح ذلك بالحالتين التاليتين حيث اعتمدنا على موقع الجسم T بالنسبة الى مستوى xy . وعلى غرارهما نتعامل مع الحالات الأخرى عندما نعتد على موقع T بالنسبة الى مستوى yz أو مستوى xz .

(ا) افرض أن :

$$T = \{ (x,y,z) : a \leq x \leq b , g_1(x) \leq y \leq g_2(x) , h_1(x,y) \leq z \leq h_2(x,y) \}$$

حيث جميع الاقترانات التي تظهر في هذا الوصف متملة . ان الجسم T هو مجموعة كل النقاط (x,y,z) في R^3 التي تقع الى الأعلى من السطح $z=h_1(x,y)$ والى الأسفل من السطح $z=h_2(x,y)$. أما مسقطه في مستوى xy فهو المنطقه

$$\Omega = \{ (x,y) = a \leq x \leq b , g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \}$$

اذا الاقتران $f(x,y,z)$ ممثل على الجسم T فان :

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x,y,z) dv &= \iiint_{\Omega} \left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z) dz \right) dA \\ &= \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z) dz dy dx \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

نحسب التكامل التتابعي في (19) باجراء التكامل المحدد للاقتران $f(x, y, z)$ بدلالة z (في اثناء ذلك نعتبر x, y ثابتين) من $h_1(x, y)$ الى $h_2(x, y)$ ثم نكامل الناتج بدلالة y (في اثناء ذلك نعتبر x ثابتا) من $g_1(x)$ الى $g_2(x)$ اخيرا نكامل الناتج بدلالة x من a الى b .

(ب) افرض ان :

$$T = \{(x, y, z) : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y), h_1(x, y) \leq z \leq h_2(x, y)\}$$

وجميع الاقترانات التي تظهر في هذا الوصف متصلة . ان الجسم T هو مجموعة كل النقاط (x, y, z) في R^3 التي تقع الى الاعلى من السطح $z = h_1(x, y)$ والى الاسفل من السطح $z = h_2(x, y)$. بينما مسقط T في مستوى xy هو المنطقـة $\Omega = \{(x, y) : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$.

اذا الاقتران $f(x, y, z)$ متصل على الجسم T فان :

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x, y, z) dv &= \iint_{\Omega} \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy \\ &= \int_c^d \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \int_{h_1(x, y)}^{h_2(x, y)} f(x, y, z) dz dx dy \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

مثال (14.14) احسب التكامل التتابعي $\int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^z (x + y + z) dy dz dx$

الحل : نحسب التكاملات المحددة بالتتابع التالي :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_0^z (x + y + z) dy dz dx &= \int_0^1 \int_0^{x^2} (xy + \frac{1}{2}y^2 + zy) \Big|_0^z dz dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{x^2} (xz + \frac{3}{2}z^2) dz dx = \int_0^1 (\frac{1}{2}xz^2 + \frac{1}{2}z^3) \Big|_0^{x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 (x^5 + x^6) dx = \frac{1}{2} (\frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7}) \Big|_0^1 = \frac{13}{84} \end{aligned}$$

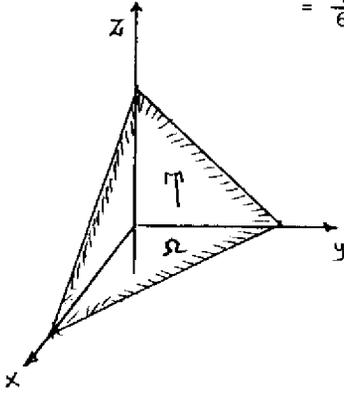
مثال (14.15) احسب $\iiint_T y dv$ اذا الجسم T يقع في الثمن الاول وتحده المستويات الاحداثية الثلاث والمستوى $x + y + z = 1$.

الحل : ان الجسم T يحوي النقاط التي تحقق $0 \leq z \leq 1 - x - y$ ومسقطه في مستوى xy هو المنطقة $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$ التي تاخذ الشكل

الاول . انظر الشكل (14.14) . لذلك نجد ان :

$$\iiint_T y dv = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} y dz dy dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1-x-y)y \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{2} xy^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^{1-x} dx \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{1}{24} (1-x)^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{24}
\end{aligned}$$



مثل (14.16) احسب حجم الجسم T الذي يقع بين

$$2z = 1 - x^2 - y^2, \quad z = x^2 + y^2$$

الحل : يتقاطع السطحان في منحنى C هو :

$$2x^2 + 2y^2 = 1 - x^2 - y^2$$

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{3} \quad \text{أي أن :}$$

وعلى ذلك فالجسم T يحوي النقاط (x, y, z)

التي تحقق :

الشكل (14.14)

$$x^2 + y^2 \leq z \leq \frac{1}{2} (1 - x^2 - y^2)$$

ومسقطه في مستوى xy قرص دائري مركزه نقطة الاصل ونصف قطره $\frac{1}{\sqrt{3}}$ أي أن :

$$\Omega = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

نحسب الآن حجم الجسم T لنجد :

$$\begin{aligned}
v &= \iiint_T dv = \iint_{\Omega} \int_{x^2+y^2}^{\frac{1}{2}(1-x^2-y^2)} dz \, dA \\
&= \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (1 - 3x^2 - 3y^2) \, dA \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (1 - 3r^2) r \, dr \, d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} r^2 - \frac{3}{4} r^4 \right) \Big|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} d\theta \\
&= \frac{1}{24} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

مثل (14.17) احسب حجم الجسم T في الثمن الاول وتحده السطوح $z = x^3$, $z = x^2$

$$y = 0, \quad y = z^2$$

الحل : ان النقاط (x, y, z) في الجسم T تحقق $0 \leq y \leq z^2$ ومسقطه في مستوى xz

هو المنطقة : $\Omega = \left\{ (x, z) : 0 \leq x \leq 1, \quad x^3 \leq z \leq x^2 \right\}$. نحسب حجم الجسم T ونجد أن :

$$v = \iiint_T dv = \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} \int_0^{z^2} dy \, dz \, dx$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} z^2 dz dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (x^6 - x^9) dx \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^{10}}{10} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{70} \end{aligned}$$

مثال (14.18) احسب كتلة الجسم T الذي تحده المستويات $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$.

وكشافته هي $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

الحل: ان كتلة الجسم T هي:

$$\begin{aligned} M &= \iiint_T \rho(x, y, z) dv = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(x^2 z + y^2 z + \frac{1}{3} z^3 \right) \Big|_{-1}^1 dy dx \\ &= 2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(x^2 + y^2 + \frac{1}{3} \right) dy dx = 2 \int_{-1}^1 \left(x^2 y + \frac{1}{3} y^3 + \frac{1}{3} y \right) \Big|_{-1}^1 dx \\ &= 4 \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = 4 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right) \Big|_{-1}^1 = \frac{16}{3} \end{aligned}$$

تمارين (14.4)

في التمارين (1) - (6) ارسم الجسم T الذي يجري عليه التكامل التتابعي

ثم احسب التكامل :-

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_{-1}^2 \int_1^{x^2} \int_0^{x+y} 2x^2 y dz dy dx \\ (2) \quad & \int_0^1 \int_{1+x}^{2x} \int_z^{x+z} x dy dz dx \\ (3) \quad & \int_0^1 \int_x^1 \int_0^y xy z dz dy dx \\ (4) \quad & \int_2^3 \int_0^3 \int_0^1 (2x + y + z) dx dz dy \\ (5) \quad & \int_{-1}^1 \int_0^z \int_0^{x+z} x^2 y z^2 dy dx dz \\ (6) \quad & \int_1^2 \int_0^{\ln z} \int_0^{\ln y} e^{x+y} dx dy dz \end{aligned}$$

في التمارين (7) - (9) ارسم الجسم T ثم استخدم ست طرق مختلفة لتكامل

تكاملات تتابعيا يمثل التكامل الثلاثي $\iiint_T f(x, y, z) dv$ عندما:

$$(7) \quad \text{المجسم T تحده السطوح } z=0, y=0, x=0, x+2y+3z=6$$

$$(8) \quad \text{المجسم T يحده السطحان } z=0, z=9-4x^2-y^2$$

$$(9) \quad \text{المجسم T تحده السطوح } z=2, z=0, x^2+y^2=9$$

(10) افرض أن حجم الجسم T هو:

$$V = \iiint_T dv = \int_0^2 \int_0^{9-x^2} \int_0^{2-x} dz dy dx$$

ارسم الجسم T ثم ضع حدود التكامل المطلوبة في ما يلي لتحتمل في كل حالة

على التكامل التتابعي الذي يحسب الحجم :

$$V = \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} dy dx dz \quad (1)$$

$$V = \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} dy dz dx \quad (ب)$$

$$V = \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} dz dx dy + \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} \int_{\frac{z}{2}}^{\frac{z}{2}} dz dx dy \quad (ج)$$

في التمارين (11) - (17) احسب التكامل الثلاثي :

$$\iiint_T (x^2 + y^2 + z^2) dv \quad \text{والمجسم T تحده السطوح } x=1, x=2, y=0, y=3, z=1, z=-1 \quad (11)$$

$$\iiint_T xyz dv \quad \text{والمجسم T تحده السطوح } x=0, x=2, y=-1, y=3, z=1, z=5 \quad (12)$$

$$\iiint_T x dv \quad \text{والمجسم T يقع في الثمن الأول وتحده المستويات الاحداثية والمستويات } y=5, x+z=2 \quad (13)$$

$$\iiint_T z^2 dv \quad \text{والمجسم T يقع بين الكرتين } x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 + z^2 = 4z \quad (14)$$

$$\iiint_T \frac{xy}{\sqrt{z}} dv \quad \text{والمجسم T يقع في الثمن الأول وتحده السطوح } z^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2, z=1, y=0, x=0 \quad (15)$$

$$\iiint_T \cos y dv \quad \text{والمجسم T في الثمن الأول وتحده السطوح } x+y=\pi, z=0, z=xy \quad (16)$$

$$\iiint_T x e^{x+y+z} dv \quad \text{والمجسم T تحده المستويات الاحداثية وكذلك المستويات } z = \ln 3, y = \ln 2, x = 1 \quad (17)$$

في التمارين (18) - (25) احسب حجم الجسم T :

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{في الثمن الأول وتحده المستويات الاحداثية والمستوى } z=0, y=0, y+z=4, z+x^2=4 \quad (19)$$

$$y^2 + z^2 = 4, x^2 + z^2 = 4 \quad \text{يحده السطحان } (20)$$

$$x=0, x+z=4, y=z^2, y=2-z^2 \quad \text{تحده السطوح } (21)$$

$$y=2, y=-1, z=0, z=9-x^2 \quad \text{تحده السطوح } (22)$$

(23) تحده المستويات $z = 10 - 2x - 5y$ ، $z = 0$ ، $x = 0$ ، $x = y$ ، $y = 1$.

(24) يحده السطحان $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ ، $2z = x^2 + y^2$.

(25) تحده السطح $z = x^2 + y^2$ ، $z = 2x^2 + y^2$ ، $x = y$ ، $x = 3y$ ، $y = 1$.

(26) جد كتلة الجسم T الذي يحده السطحان $z = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ ، $z = 3x^2 + \frac{1}{4}y^2$ ، $z = 0$ ، $x = 0$ ، $x = y$ ، $y = 1$.

الذي كثافته $\rho(x, y, z)$ تتناسب مع بعد النقطة (x, y, z) عن السطح السفلي .

(27) جد كتلة الجسم T الذي تحده المستويات $x + y + z = 1$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ ، وكثافته $\rho(x, y, z) = \frac{1}{2}(x + y + z)$.

(28) جد كتلة الجسم T الذي تحده المستويات $x = 0$ ، $x = 1$ ، $y = 0$ ، $y = 1$ ، $z = 0$ ، وكثافته $\rho(x, y, z)$ تتناسب مع بعد النقطة (x, y, z) عن احد سطوحه .

$z = 1$.

(29) جد كتلة الجسم T الذي يحده السطحان $x = z^2 + 2y^2$ ، $x = 4 - z^2$ ، وكثافته $\rho(x, y, z)$ تتناسب مع بعد النقطة (x, y, z) عن محور z .

(30) افرض أن V حجم الجسم T الذي يقع بين السطحين $y = |x|$ ، $y = 4 - z^2$. افرض

أن Ω_{xy} ، Ω_{yz} ، Ω_{xz} مساطق T في مستوى xy ، مستوى yz ، مستوى xz على التوالي . فيما يلي اكتب المعلومات المطلوبة لتحصل على المعادلات

الصحيحة :

$$v = \iiint_{\Omega_{xy}} \left(\int_{\frac{z}{2}}^2 dz \right) dx dy \quad (\text{ب}) \quad v = \iiint_{\Omega_{xy}} z^2 dx dy \quad (\text{ا})$$

$$v = \int_{\frac{z}{2}}^2 \int_{\frac{z}{2}}^2 \int_{\frac{z}{2}}^2 dx dy dz \quad (\text{د}) \quad v = \iiint_{\Omega_{yz}} z^2 dy dz \quad (\text{ج})$$

(14.5) التكاملات الثلاثية بالاجداد اشباه الاسطوانية والكروية

افرض أن الاقتران $f(r, \theta, z)$ متعلم على الجسم :

$Q = \{(r, \theta, z) : a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta, c \leq z \leq d\}$ (21)

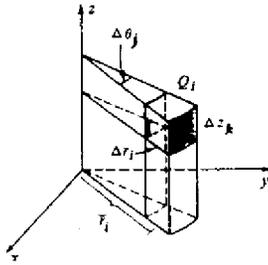
نعرض التجزئة $P_1 = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ للفترة $[a, b]$ والتجزئة $P_2 = \{\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_m\}$ للفترة $[\alpha, \beta]$ والتجزئة $P_3 = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ للفترة $[c, d]$. نحصل على تجزئة

للجسم $P = P_1 \times P_2 \times P_3$ الى مجسمات Q_{ijk} عددها $l \times m \times n$. ان حجم الجسم

Q_{ijk} هو (انظر الشكل (14.16)) :

$$\Delta V_{ijk} = \bar{r}_i \Delta r_i \Delta \theta_j \Delta z_k$$

$$\bar{r}_i = \frac{r_{i-1} + r_i}{2} , \Delta z_k = z_k - z_{k-1} = \Delta \theta_j = \theta_j - \theta_{j-1} = \Delta r_i = r_i - r_{i-1}$$



الشكل (14.16)

نختار نقطة (u_i, v_j, w_k) في الجسم

Q_{ijk} ونعرف التكامل الثلاثي للاقتتران

$f(r, \theta, z)$ على الجسم Q كنهاية مجموع

ريمان على النحو التالي :

$$\iiint_Q f(r, \theta, z) dv = \iiint_Q f(r, \theta, z) r dr d\theta dz$$

$$= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^l f(u_i, v_j, w_k) V_{ijk} \dots (22)$$

حيث مقياس التجزئة $\|P\|$ هو طول أكبر قطر

للمجمعات Q_{ijk} . وكما في السابق ، يمكننا

النتيجة التالية من حساب التكامل الثلاثي

تكامل تتابعي :

$$\iiint_Q f(r, \theta, z) r dr d\theta dz = \int_a^b \int_{\alpha}^{\beta} \int_c^d f(r, \theta, z) r dr d\theta dz \dots (23)$$

والتكامل التتابعي في (23) هو أحد ست تكاملات تتابعية كل واحد منها يعطينا

قيمة التكامل الثلاثي للاقتتران $f(r, \theta, z)$ على الجسم Q .

افرض الآن أن الاقتتران $f(r, \theta, z)$ يمثل على مجسم محدود T يمكن احاطته

بمجم Q كما في (19) . نعرف اقتترانا $F(r, \theta, z)$ على Q كامتداد للاقتتران $f(r, \theta, z)$

بالاسلوب نفسه الذي استخدمناه في الحالات المشابهة السابقة . وإذا كان

$\iiint_Q F(r, \theta, z) dv$ موجودا نعرف :

$$\iiint_T f(r, \theta, z) dv = \iiint_Q F(r, \theta, z) dv \dots (24)$$

وإذا المجرم T يقع بين السطحين $z = h_1(r, \theta)$ ، $z = h_2(r, \theta)$ فان :

$$\iiint_T f(r, \theta, z) dv = \iint_{\Omega} \left(\int_{h_1(r, \theta)}^{h_2(r, \theta)} f(r, \theta, z) r dz \right) dr d\theta \dots (25)$$

وهنا المنطقة Ω هي مسقط المجرم T في المستوى xy .

مثل (14.19) احسب التكامل الثلاثي للاقتتران $f(r, \theta, z) = krz$ (k عدد ثابت) على

المجرم T الذي تحده السطح $r = 1$ ، $r^2 + z^2 = 4$ ، $r = 0$.

الحل : هنا المجرم T هو :

$$T = \{(r, \theta, z) : 0 \leq r \leq 1 , 0 \leq \theta \leq 2\pi , 0 \leq z \leq \sqrt{4 - r^2}\}$$

نستطيع الآن أن نحسب التكامل الثلاثي لنجد :

$$\begin{aligned} \iiint_T f(r, \theta, z) dv &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{4-r^2}} k r z dz dr d\theta \\ &= \frac{k}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(4-r^2) dr d\theta \\ &= \frac{7k}{8} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{7k\pi}{8} \end{aligned}$$

ننتقل الآن الى قاعدة تكامل ثلاثي بالاحداثيات الكروية . افرض ان الاقتران

$f(\rho, \phi, \theta)$ متصل على الجسم :

$$Q = \{(\rho, \phi, \theta) : a \leq \rho \leq b, c \leq \phi \leq d, \alpha \leq \theta \leq \beta\} \dots \dots \dots (26)$$

نعرف التكامل الثلاثي $\iiint_Q f(\rho, \phi, \theta) dv$ على أنه نهاية مجموع ريمان ثلاثي

نكتبه بالاسلوب نفسه الذي اتبعناه من الحالات السابقة . وهنا :

$$dv = \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

لكي نرى ذلك ، ارجع الى الشكل

(14.17) حيث يظهر احد الاجزاء Q_i التي

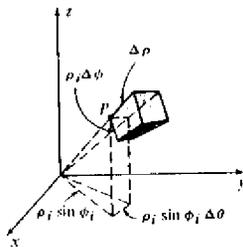
تنتج عن تجزئة P للجسم Q . نعامل Q_i

على انه متوازي سطوح قائم واحد رؤوسه

النقطة $(\rho_i, \phi_i, \theta_i)$. ابعاد Q_i هي

$$\rho_i \sin \phi_i \Delta \theta, \rho_i \Delta \phi, \Delta \rho$$

لذلك فان :



الشكل (14.17)

$$\Delta V_i \approx \rho_i^2 \sin \phi_i \Delta \rho \Delta \phi \Delta \theta$$

كما في الحالات السابقة ، نمل الى القاعدة التالية :

$$\iiint_Q f(\rho, \phi, \theta) dv = \int_{\alpha}^{\beta} \int_c^d \int_a^b f(\rho, \phi, \theta) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \dots \dots \dots (27)$$

والتكامل التتابعي في (27) هو احد ست تكاملات تتابعية يمكننا أن نستعمل أيامنها

لحساب التكامل الثلاثي $\iiint_Q f(\rho, \phi, \theta) dv$.

اخيرا ، نعريف التكامل الثلاثي $\iiint_T f(r, \phi, \theta) dv$ على مجسم محدود T بان نجعل

T داخل مجسم Q من النوع (23) وناخذ اقترانا $F(\rho, \phi, \theta)$ كامتداد للاقتران

$f(r, \phi, \theta)$ الى Q بالاسلوب نفسه الذي اتبعناه في الحالات المشابهة السابقة .

إذا $\iiint_Q F(\rho, \phi, \theta) dv$ موجود فاننا نعرف :

$$\iiint_T f(\rho, \phi, \theta) dv = \iiint_Q F(\rho, \phi, \theta) dv \quad \dots\dots\dots (28)$$

ونحسب $\iiint_T f(\rho, \phi, \theta) dv$ بتكامل تتابعي مناسب تبعاً لشكل الجسم T .

مثل (14.20) احسب كتلة الجسم $T = \{(x, y, z) : 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ وكشافته

$$f(\rho, \phi, \theta) = \frac{1}{1 + \rho^2}$$

الحل : ان كتلة هذا الجسم الكروي هي :

$$M = \iiint_T f(\rho, \phi, \theta) dv = \iiint_T \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

وهنا $T = \{(\rho, \phi, \theta) : 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ لذلك نحصل على :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \sin \phi d\theta d\phi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} \sin \phi d\phi d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 \frac{\rho^2}{1 + \rho^2} d\rho = 4 \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + \rho^2}\right) d\rho \\ &= 4\pi \left(\rho - \tan^{-1} \frac{1}{\rho}\right) \Big|_0^1 = 4\pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 4\pi - \pi^2 \end{aligned}$$

افرض ان الاقتران $f(x, y, z)$ متصل على الجسم T . يكون ايسر لنا أحياناً ان نحسب التكامل الثلاثي $\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz$ باستخدام الاحداثيات الاسطوانية أو الكروية . فيما يلي نضع بدون برهان القاعدتين اللتين تسمحان لنا باجراء هذا التحويل :

$$\iiint_T f(x, y, z) dv = \iiint_{T_1} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz \quad \dots\dots\dots (29)$$

هنا T_1 الجسم في فضاء $r \theta z$ الذي ينتقل الى الجسم T في فضاء $x y z$

$$\text{بوساطة التحويل : } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$$

أما القانون الثاني :

$$\iiint_T f(x, y, z) dv = \iiint_{T_2} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta \quad \dots\dots\dots (30)$$

هنا T_2 مجسم في فضاء $\rho \phi \theta$ ينتقل الى الجسم T في فضاء $x y z$ بوساطة

$$\text{التحويل : } x = \rho \sin \phi \cos \theta, y = \rho \sin \phi \sin \theta, z = \rho \cos \phi$$

مثل (14.21) استخدم الاحداثيات الاسطوانية لتحسب $\iiint_T (x^2 + y^2) dv$ اذا الجسم T تحده السطوح $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$, $z = 2$.

الحل : ان المعادلة $x^2 + y^2 = 2x$ تصح بالاحداثيات الاسطوانية $r = 2\cos\theta$.
من هنا نجد أن $T = \{(r, \theta, z) : -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq 2\cos\theta, 0 \leq z \leq 2\}$ والآن
نستخدم (29) لنجد :

$$\begin{aligned} \iiint_T (x^2 + y^2) dv &= \iiint_{T_1} r^3 dr d\theta dz \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} \int_0^2 r^3 dz dr d\theta \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^3 dr d\theta \\ &= 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta d\theta = 8 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\ &= 2\pi + 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 2\theta d\theta = 3\pi \end{aligned}$$

مثل (14.22) استخدم الاحداثيات الكروية لتحسب $\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv$ اذا T هو الجسم الكروي $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

الحل : ان الجسم الكروي T هو :

$$T = \{(\rho, \phi, \theta) : 0 \leq \rho \leq 2, 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

وعندما نستخدم (30) نحصل على :

$$\begin{aligned} \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dv &= \iiint_{T_2} \rho^3 \sin\phi d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^2 \rho^3 \sin\phi d\rho d\phi d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin\phi d\phi d\theta \\ &= 8 \int_0^{2\pi} d\theta = 16\pi \end{aligned}$$

تمارين (14.5)

في التمارين (1) - (12) استخدم الاحداثيات الاسطوانية لتحسب :

- (1) حجم الجسم T الذي تحده السطوح $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$.
- (2) حجم الجسم T الذي يحده السطحان $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 4$.
- (3) كتلة الجسم T الذي يحده السطحان $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 4$ وكثافته $\rho(x, y, z)$

تناسب طرديا مع بعد النقطة (x, y, z) عن محور z .

$$(4) \text{ كتلة الجسم } T = \{(x, y, z) : 1 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2, x^2 + y^2 \geq 1\} \text{ عندما}$$

كثافته $\rho(x, y, z)$ تناسب طرديا مع بعد النقطة (x, y, z) عن مستوى xy .

$$(5) \iiint_T xz \, dv \text{ إذا الجسم } T \text{ يقع في الثمن الأول وتحده السطوح } z = x^2 + y^2, z = 4, y = 0, x = 0$$

$$(6) \iiint_T (x^2 + y^2 + z^2)^2 \, dv \text{ إذا الجسم } T \text{ تحده السطوح } z = 1, x^2 + y^2 = 3, z = -1$$

$$(7) \iiint_T x^2 y^2 \, dv \text{ وحدود الجسم } T \text{ هي السطوحان } z = 2, z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$(8) \iiint_T y^2 z \, dv \text{ إذا الجسم } T \text{ يقع الى الاعلى من السطح } z = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ والى الاسفل من السطح } x^2 + y^2 + z^2 = 4$$

$$(9) \text{ حجم الجسم } T \text{ الذي تحده السطوح } z = 0, x^2 + y^2 = 2ax, x^2 + y^2 = az$$

$$(10) \text{ حجم الجسم } T \text{ الذي يحده من الاعلى السطح } x^2 + y^2 + z^2 = 25 \text{ ومن الاسفل السطح } z = \sqrt{x^2 + y^2} + 1$$

$$(11) \text{ حجم الجسم } T \text{ الذي يحده من الاعلى } x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ ومن الاسفل } z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$$

$$(12) \text{ حجم الجسم } T \text{ الذي يقع بين الاسطوانتين } x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4 \text{ الى الاعلى من مستوى } xy \text{ واسفل السطح } x^2 + y^2 + 4z^2 = 36$$

في التمارين (13) - (24) استخدم الاحداثيات الكروية لتحسب :

$$(13) \text{ حجم الجسم } T \text{ الذي نقتطعه من كرة مصمته نصف قطرها } a \text{ بواسطة مستويين يلتقيان على امتداد قطر للكرة والزاوية بينهما } \alpha$$

$$(14) \text{ حجم الجسم } T \text{ الذي يكون الجزء المشترك بين الكرتين } \phi, \phi = 2\sqrt{2} \cos \phi, \phi = 2$$

$$(15) \text{ حجم الجسم } T \text{ الذي يحيط به السطح } \phi = 1 - \cos \phi$$

$$(16) \text{ حجم الجسم } T \text{ الذي نقتطعه من الكسرة } x^2 + y^2 + z^2 = 4z - 3 \text{ بالمخروط } z^2 = 4(x^2 + y^2)$$

$$(17) \text{ حجم الجسم } T \text{ الذي يحيط به السطح } (x^2 + y^2 + z^2)^2 = 8z$$

$$(18) \text{ كتلة الجسم } T \text{ الذي يقع بين السطحين } x^2 + y^2 + z^2 = 100, x^2 + y^2 + z^2 = 144 \text{ اذا كثافته } \rho(x, y, z) \text{ تناسب طرديا مع بعد النقطة } (x, y, z) \text{ عن نقطة الامل.}$$

(19) كتلة الجسم T الذي له شكل نصف كرة قطرها $2a$ إذا كثافته $\rho(x, y, z)$ متناسب مع بعد النقطة (x, y, z) عن مركز الكرة .

(20) كتلة الجسم الكروي T الذي نصف قطره a إذا كثافته $\rho(x, y, z)$ متناسب طرديا مع بعد النقطة (x, y, z) عن سطح T .

(21) كتلة مجسم مخروطي دائري قائم T نصف قطر قاعدته r وارتفاعه h إذا كثافته $\rho(x, y, z)$ متناسب طرديا مع بعد النقطة (x, y, z) عن رأس T .

(22)
$$\iiint_T (x^2 + y^2) \, dv$$
 إذا الجسم T يحده من الأسفل $z = -\sqrt{\frac{1}{3}(x^2 + y^2)}$ ومن الأعلى $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

(23)
$$\iiint_T \frac{dv}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
 إذا الجسم T هو الكرة المممتدة $0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

(24)
$$\iiint_T yz \, dv$$
 إذا الجسم T هو الغشيرة الكروية $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ التي تقع في الثمن الأول .

في التمارين (25) - (28) استخدم الاحداثيات الاسطوانية لتحسب :

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz \, dx \, dy \quad (25)$$

$$\int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2} \, dz \, dy \, dx \quad (26)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^1 z^3 \, dz \, dy \, dx \quad (27)$$

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx \quad (28)$$

في التمرينين (29) - (30) استخدم الاحداثيات الكروية لتحسب :

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}} (x^2 + y^2 + z^2) \, dz \, dy \, dx \quad (29)$$

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dz \, dx \, dy \quad (30)$$

(14.6) تطبيقات للتكاملات المضاعفة

صادفنا في البنود السابقة أكثر من تطبيق للتكاملات المضاعفة . فلقد استخدمناها في حساب : المساحات ، والكتلة ، والحجوم . نضيف في هذا البند تطبيقات فيزيائية للتكاملات المضاعفة . ولكن نبدأ بالتعريف التالي .

تعريف (14.6)

(أ) إذا $y = f(x)$ متصل على الفترة $[a, b]$ فإن :

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = (\text{معدل الاقتران } f(x) \text{ على الفترة } [a, b])$$

(ب) إذا $z = f(x, y)$ متصل على منطقة مستوية A مساحتها A فإن :

$$\frac{1}{A} \iint_{\Omega} f(x, y) dA = (\text{معدل الاقتران } f(x, y) \text{ على المنطقة } \Omega)$$

(ج) إذا $w = f(x, y, z)$ متصل على منطقة T في R^3 وحجمها V فإن :

$$\frac{1}{V} \iiint_T f(x, y, z) dV = (\text{معدل الاقتران } f(x, y, z) \text{ على المنطقة } T)$$

مثل (14.22) جسم على شكل اسطوانة مضمنة T حيث :

$$T = \{(x, y, z) : -a \leq x \leq a , -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2} , 0 \leq z \leq h\}$$

إذا كثافة الجسم هي $\rho(x, y, z) = y^2 \sqrt{a^2 - x^2}$ ، احسب معدل كثافة الجسم .

الحل : معدل كثافة الجسم هو معدل الاقتران $\rho(x, y, z) = y^2 \sqrt{a^2 - x^2}$ على المنطقة

T وهي اسطوانة دائرية قائمة نصف قطر قاعدتها a وارتفاعها h . لذا فإن حجم الجسم

V هو $V = \pi a^2 h$. نحسب الآن معدل الاقتران ρ لنجد :

$$\begin{aligned} \frac{1}{V} \iiint_T \rho(x, y, z) dV &= \frac{1}{\pi a^2 h} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} \int_0^h y^2 \sqrt{a^2 - x^2} dz dy dx \\ &= \frac{1}{\pi a^2} \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2 - x^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2}} y^2 \sqrt{a^2 - x^2} dy dx \\ &= \frac{2}{3\pi a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2)^2 dx \\ &= \frac{32 a^3}{45 \pi} \end{aligned}$$

العزم

افرض صفحة معدنية G لها شكل منطقة مستطيلة R في مستوى XY وان كثافتها

الصفحة تساوي $\rho(x, y)$. وهنا $\rho(x, y)$ متصل على R . افرض تجزئة P للمستطيل R

ينتج عنها اجزاء مستطيلة $\{F_i : i = 1, \dots, n\}$ عددها n . نجعل ΔA_i مساحة R_i

ونختار النقطة (u_i, v_i) في R_i لكل $i = 1, \dots, n$. عندما تكون ابعاد R_i صغيرة فيمكننا أن نأخذ العدد $\rho(u_i, v_i) \Delta A_i$ تقريبا لكتلة R_i . وإذا اعتبرنا هذه الكتلة تتركز في النقطة (u_i, v_i) عندئذ نستطيع أن نعتبر العدد $\rho(u_i, v_i) \Delta A_i$ تقريبا لعزم R_i حسب محور x (أو حول محور x). لذلك يكون المجموع تقريبا لعزم الصفيحة G حول محور x بصورة مشابهة يكون المجموع $\sum_{i=1}^n u_i \rho(u_i, v_i) \Delta A_i$ تقريبا لعزم الصفيحة G حسب محور y . نعلم أن نهاية هذه المجاميع، عندما المقياس $\|P\|$ يتؤول للصفر، تكون تكاملا شائشا مما يوصلنا الى القواعد التالية.

ان عزم الصفيحة M_x حسب محور x وكذلك عزمها M_y حسب محور y هما :

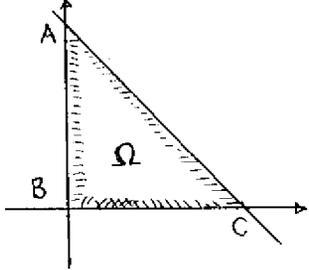
$$M_y = \iint_{\Omega} x \rho(x, y) dA \quad , \quad M_x = \iint_{\Omega} y \rho(x, y) dA \quad \dots \dots \dots (31)$$

ونعرف مركز ثقل الصفيحة بأنه النقطة (\bar{x}, \bar{y}) حيث :

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} \quad , \quad \bar{x} = \frac{M_y}{M} \quad \dots \dots \dots (32)$$

وهنا $M = \iint_{\Omega} \rho(x, y) dA$ هي كتلة الصفيحة G الذي لها شكل المنطقة .

مثل (14.23) صفيحة معدنية لها شكل مثلث ABC متساوي الساقين فيه $AB = BC = a$ والزاوية ABC قائمة . كثافته في أي نقطة (x, y) تتناسب مع مربع بعدها عن الرأس



الشكل (14.18)

B - جد مركز ثقل الصفيحة .
الحل : نستخدم نظاما احداثيا متعامدا نقطة الاصل فيه تنطبق على النقطة B كما في الشكل (14.18) ، فتكون الكثافة هي $\rho(x, y) = k(x^2 + y^2)$ ، كما أن معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطتين A, C هي $y = a - x$. بدأً بأن نحسب الكتلة M لنجد :

$$\begin{aligned} M &= \iint_{\Omega} \rho(x, y) dA = k \int_0^a \int_0^{a-x} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= k \int_0^a [x^2(a-x) + \frac{1}{3}(a-x)^3] dx \\ &= k \left[\frac{1}{3} ax^3 - \frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{12} (a-x)^4 \right] \Big|_0^a = \frac{ka^4}{6} \end{aligned}$$

ثم نحسب M_x و M_y على التوالي لنجد :

$$M_x = \iint_{\Omega} y \rho(x, y) dA = k \int_0^a \int_0^{a-x} y (x^2 + y^2) dy dx$$

$$= k \int_0^a \left[\frac{1}{2} x^2 (a-x)^2 + \frac{1}{4} (a-x)^4 \right] dx$$

$$= k \left[\frac{1}{6} a^2 x^3 - \frac{1}{4} a x^4 + \frac{1}{10} x^5 - \frac{1}{20} (a-x)^5 \right]_0^a$$

$$= \frac{k a^5}{15}$$

$$M_y = \iint_{\Omega} x \rho(x, y) dA = k \int_0^a \int_0^{a-x} x (x^2 + y^2) dy dx$$

$$= \frac{k a^5}{15}$$

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{k a^5}{15}}{\frac{k a^5}{6}} = \frac{2a}{5}$$

بذلك يكون

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{k a^5}{15}}{\frac{k a^5}{6}} = \frac{2a}{5}$$

ومركز الثقل النقطة $(\frac{2a}{5}, \frac{2a}{5})$.

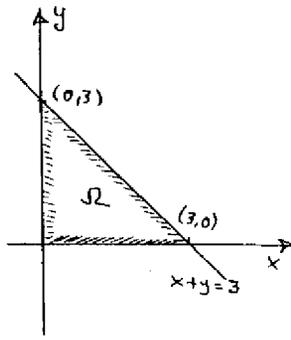
إذا كانت الصفيحة G متجانسة الكثافة فإن $\rho(x, y) = c$ ، ثابت . هذا يعني أن (الكتلة) $\iint_{\Omega} \rho(x, y) dA = c \iint_{\Omega} dA = cA$ وهنا A مساحة الصفيحة G عندئذ نحصل على :

$$M_x = \iint_{\Omega} y \rho(x, y) dA = c \iint_{\Omega} y dA \quad \dots \dots \dots (33)$$

$$M_y = \iint_{\Omega} x \rho(x, y) dA = c \iint_{\Omega} x dA \quad \dots \dots \dots (34)$$

أي أن $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} x dA$ ، $\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} y dA$. هذا يعني أن \bar{x} هو معدل الاحداثي x على المنطقة Ω ، كما أن \bar{y} هو معدل الاحداثي y على المنطقة Ω . نلاحظ في هذه الحالة أن مركز الثقل يعتمد على الشكل الهندسي للمنطقة Ω ، ولذلك فإن مركز الثقل ينطبق عندئذ على المركز الهندسي للمنطقة Ω في حال وجوده . كما أنه من الواضح أن مركز الثقل يقع على أي مستقيم تماثل للمنطقة Ω .

مثال (14.24) صفيحة معدنية على شكل المنطقة Ω التي تحدّها المنحنيات $x + y = 3$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ وكثافتها ثابتة $\rho(x, y) = c$. جد مركز ثقل الصفيحة .
الحل : ان المنطقة Ω ، كما تظهر في الشكل (14.19) ، متماثلة حول المستقيم



الشكل (14.19)

$y = x$. بما أن مركز ثقل المصفيحة يقع على هذا المستقيم ، لذا $\bar{x} = \bar{y}$ ويكفي أن نحسب أحدهما . كما أن الكثافة ثابتة c لذلك :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{A} \iint_{\Omega} x \, dA = \frac{2}{9} \int_0^3 \int_0^{3-x} x \, dy \, dx \\ &= \frac{2}{9} \int_0^3 x(3-x) \, dx \\ &= \frac{2}{9} \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^3 = 1\end{aligned}$$

ومركز الثقل هو النقطة $(1, 1)$.

نعم هذه القواعد الى الرضع في ثلاثة ابعاد . افرض ان جسم له الشكل نفسه كما للمنطقة T في الفضاء R^3 وأن كثافته تساوي $\rho(x, y, z)$ حيث ρ اقتران متصل على المنطقة T . فان عزم الجسم :

$$M_{xy} = \iiint_T z \rho(x, y, z) \, dV \quad \dots\dots\dots (35) \quad \text{حسب مستوى } xy \text{ هو}$$

$$M_{xz} = \iiint_T y \rho(x, y, z) \, dV \quad \dots\dots\dots (36) \quad \text{حسب مستوى } xz \text{ هو}$$

$$M_{yz} = \iiint_T x \rho(x, y, z) \, dV \quad \dots\dots\dots (37) \quad \text{حسب مستوى } yz \text{ هو}$$

كذلك نعرف مركز ثقل الجسم بأنه النقطة $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ حيث :

$$\bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{xz}}{M}, \quad \bar{x} = \frac{M_{yz}}{M} \quad \dots\dots\dots (38)$$

و M كتلة الجسم .

اما اذا كانت كثافة الجسم ثابتة ، ولنقل $\rho(x, y, z) = c$. فان $M = cV$. وهنا V حجم الجسم . نجد عندئذ أن :

$$\bar{z} = \frac{1}{V} \iiint_T z \, dV, \quad \bar{y} = \frac{1}{V} \iiint_T y \, dV, \quad \bar{x} = \frac{1}{V} \iiint_T x \, dV \quad \dots\dots (39)$$

هذا يعني أن $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ هي معدلات الاحداثيات x, y, z (على التوالي) على المنطقة T . هنا أيضا ينطبق مركز ثقل الجسم على المركز الهندسي للمنطقة T في حال وجوده . كما أن مركز الثقل يقع في أي مستوى تماثل للمنطقة T وكذلك في كل مستقيم تماثل لها .

مثل (14.25) جسم على شكل المنطقة T في الشمن الأول وتحدها المستويات الاحداثية

الثلاث والمستوى $x + y + z = 1$. اذا كثافة الجسم هي $\rho(x, y, z) = yz$ ، جد مركز ثقل الجسم .

الحل : نبدأ بان نكتب : $T = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, 0 \leq z \leq 1-x-y\}$:
ثم نحسب الكتلة M لنجد :

$$\begin{aligned} M &= \iiint_T \rho(x, y, z) \, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} yz \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} y (1-x-y)^2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{24} (1-x)^4 \, dx = \frac{1}{120} \end{aligned}$$

ثم نحسب M_{xy} ، M_{xz} ، M_{yz} بالتتابع لنجد :

$$\begin{aligned} M_{yz} &= \iiint_T x \rho(x, y, z) \, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x y z \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} x y (1-x-y)^2 \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{24} \int_0^1 x (1-x)^4 \, dx = \frac{1}{720} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xz} &= \iiint_T y \rho(x, y, z) \, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} y^2 z \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{2} y^2 (1-x-y)^2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{60} (1-x)^5 \, dx = \frac{1}{360} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_T z \rho(x, y, z) \, dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} y z^2 \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{1}{3} y (1-x-y)^3 \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{60} (1-x)^5 \, dx = \frac{1}{360} \end{aligned}$$

$$\bar{z} = \frac{\frac{1}{360}}{\frac{1}{120}} = \frac{1}{3} , \bar{y} = \frac{\frac{1}{360}}{\frac{1}{120}} = \frac{1}{3} , \bar{x} = \frac{\frac{1}{720}}{\frac{1}{120}} = \frac{1}{6}$$

لذلك فان

ومركز الثقل النقطة $(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

عزم القصور الذاتي

عندما نضع كتلة m في نقطة P تبعد مسافة a عن مستقيم l فان عزم القصور الذاتي

لها حسب المحور l هو $I_1 = a^2 m$.

افرض كتلا m_1, m_2, \dots, m_k موضوعة في نقاط المستوى $P_1(x_1, y_1), \dots, P_k(x_k, y_k)$ على التوالي . نعرف عزم القصور الذاتي I_x حسب محور x وكذلك عزم القصور الذاتي I_y حسب محور y لهذا النظام ، الذي يتكون من كتل عددها k ، على النحو التالي :

$$I_y = \sum_{i=1}^k m_i x_i^2 , \quad I_x = \sum_{i=1}^k m_i y_i^2 \quad \dots \dots \dots (40)$$

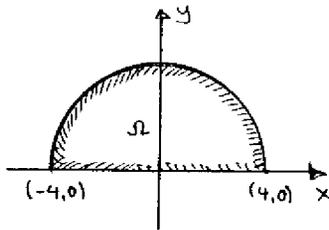
حتى نعم هذا التعريف ، افرض صفيحة معدنية G على شكل المنطقة Ω في مستوى xy وكثافة الصفيحة هي $\rho(x, y)$ حيث الاقتران ρ متمم على المنطقة Ω . نأخذ تجزئة P للمنطقة Ω لنحصل على اجزاء R_1, \dots, R_n . افرض مساحة R_i هي ΔA_i ، $i=1, \dots, n$. نختار نقطة (u_i, v_i) في R_i . اذا كان مقياس التجزئة $\|P\|$ صغيرا فيمكننا ان نقرب كتلة الجزء R_i بالعسدد $\rho(u_i, v_i) \Delta A_i$. واذا اعتبرنا هذه الكتلة تتركز في النقطة (u_i, v_i) فنستطيع ان نأخذ العسدد $\rho(u_i, v_i) \Delta A_i$ كتقريب لعزم القصور الذاتي للجزء R_i حسب محور x . عندما نأخذ النهاية للمجموع $\sum_{i=1}^n \rho(u_i, v_i) \Delta A_i$ عندما المقياس $\|P\|$ يذهب الى الصفر فاننا نحصل على تكامل ثنائي يحسب لنا عزم القصور الذاتي للصفيحة G حسب محور x . من هنا نحصل على القواعد التالية .

ان عزم القصور الذاتي للصفيحة G :

$$I_x = \iint_{\Omega} y^2 \rho(x, y) dA \quad \dots \dots (41)$$

$$I_y = \iint_{\Omega} x^2 \rho(x, y) dA \quad \dots \dots (42)$$

$$I_o = \iint_{\Omega} (x^2 + y^2) \rho(x, y) dA \quad \dots \dots (43)$$



الشكل (14.20)

مثل (14.26) صفيحة معدنية على شكل المنطقة التي رسمناها في شكل (14.20) وكثافتها

$$\rho(x, y) = ky \quad \text{احسب } I_x \text{ للصفيحة .}$$

الحل : نلاحظ ان :

$$\Omega = \{(r, \theta) : 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_{\Omega} y^2 \rho(x, y) dA = \iint_{\Omega} k y^3 dA \\ &= \int_0^{\pi} \int_0^2 k r^4 \sin^3 \theta dr d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{32k}{5} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta \, d\theta = \frac{32k}{5} \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta \, d\theta$$

$$= \frac{128k}{15}$$

نضع الآن تعميما لتعريف عزم القصور الذاتي في ثلاثة أبعاد . افترض جسما H له الشكل نفسه كما للمنطقة T في الفضاء R^3 . كثافة الجسم H هي $\rho(x, y, z)$ ، حيث الافتراض ρ متصل على المنطقة T . ان عزم القصور الذاتي I_x, I_y, I_z حسب المحاور الاحداثية x, y, z على التوالي للجسم H هي :

$$I_x = \iiint_T (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dV \quad \dots \dots \dots (44)$$

$$I_y = \iiint_T (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dV \quad \dots \dots \dots (45)$$

$$I_z = \iiint_T (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dV \quad \dots \dots \dots (46)$$

مثل (14.27) جسم متجانس على شكل اسطوانة دائرية قائمة مصمته نصف قطرها R وارتفاعها h . جد عزم القصور الذاتي لهذا الجسم حول محور الاسطوانة .
الحل : نستخدم نظاما احداثيا متعامدا بحيث ينطبق محور z فيه على محور الاسطوانة وتنطبق نقطة الاصل فيه على مركز قاعدة الجسم الدائرية . عندئذ يكون للجسم الشكل نفسه كما للمنطقة T ، حيث

$$T = \{(r, \theta, z) : 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq h\}$$

نضع $\rho(x, y, z) = k$ ، ثابت ، ونحسب I_z لنجد :

$$I_z = \iiint_T k(x^2 + y^2) \, dV = k \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_0^h r^3 \, dz \, dr \, d\theta$$

$$= hk \int_0^{2\pi} \int_0^R r^3 \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{hkR^4}{4} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} \pi hk R^4$$

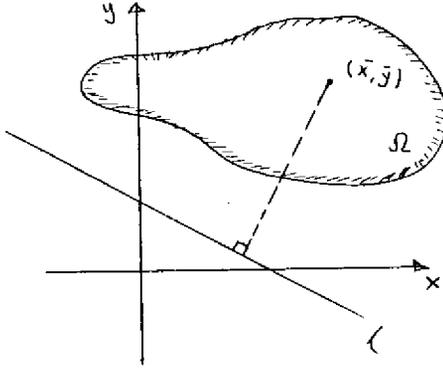
افرض ان كتلة جسم (أو صفيحة معدنية) تساوي M وان عزم القصور الذاتي له حول مستقيم l يساوي I_l . نسمي العدد k_l الذي يحقق المعادلة $k_l^2 = MI_l$ نصف قطر التدويم للجسم حسب محور l . والعدد k_l نفسره بأنه بعد نقطة وضعنا فيها كتلة M عن محور l لنحصل على عزم القصور الذاتي نفسه الذي للجسم . نكتب k_x, k_y, k_z لتدل على نصف قطر التدويم حسب المحاور الاحداثية x, y, z على التوالي .
نختتم هذا البند بتطبيق لمركز الثقل كما توفره المبرهنة التالية .

مبرهنة (14.7) (مبرهنة ببايس لحساب حجم الجسم الدوران)

افرض منطقة Ω في مستوى xy ومستقيم l يقع في هذا المستوى ولا يقطع المنطقة Ω . افرض أن T مجسم الدوران الذي ينتج عندما تدور المنطقة Ω حول محور l . ان حجم مجسم الدوران T يساوي حاصل ضرب مساحة المنطقة Ω في محيط الدائرة التي يرسمها مركز ثقل Ω . أي أن :

$$(47) \dots (حجم مجسم الدوران T) = (مساحة \Omega) \times (\text{المسافة التي قطعها مركز ثقل } \Omega)$$

انظر الشكل (14.21).



الشكل (14.21)

مثال (14.28) احسب حجم مجسم الدوران الذي ينتج عندما تدور حول محور x المنطقة Ω التي تقع بين المنحيين $x = y^2$ ، $y = x^2$

الحل : نستخدم مبرهنة ببايس لنحسب حجم مجسم الدوران . اذا النقطة (\bar{x}, \bar{y}) مركز ثقل المنطقة Ω فان بعدها عن محور الدوران (محور x) يساوي \bar{y} . نبدأ بأن نحسب :

$$A = \iint_{\Omega} dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{1}{3}$$

والآن نحسب \bar{y} لنحصل على :

$$\bar{y} = \frac{1}{A} \iint_{\Omega} y dA = 3 \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y dy dx = \frac{3}{2} \int_0^1 (x - x^4) dx = \frac{9}{20}$$

لذلك فان الحجم V لمجسم الدوران هو :

$$V = (\text{مساحة المنطقة } \Omega) \times (\text{محيط الدائرة التي يرسمها مركز الثقل}) = (2\pi) \left(\frac{9}{20}\right) \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3\pi}{10}$$

تمارين (14.6)

للتمارين (1) - (7) جد مركز ثقل المنطقة المذكورة :

(1) المنطقة Ω بين المنحنيين $y = 2x - 3$ ، $y = 4x - x^3$

(2) المنطقة Ω بين المنحنيين $2y = x$ ، $y^3 = x^2$

(3) المنطقة Ω بين المنحنيين $y = x - x^2$ ، $y^2 = 2x$

(4) المنطقة Ω بين المنحنيين $x + y^2 = 0$ ، $x + 1 = 0$

(5) المنطقة T التي تقع بين المستويات $z = -2$ ، $y = 2$ ، $y = 1$ ، $x = 2$ ، $x = 1$

• $z = 1 + x + y$

(6) المنطقة T رباعية السطوح ورؤوسها $(0,0,0)$ ، $(a,0,0)$ ، $(0,b,0)$ ، $(0,0,c)$

(7) المنطقة T التي يحدها من الأعلى السطح $x^2 + z = 4$ ومن الأسفل المستوى

• $x + z = 2$ ومن الجوانب المستويان $y = 0$ ، $y = 3$

في التمارين (8) - (13) افرض أن المفيحة (أو الجسم) متجانسه ولها الشكل

نخسه كما للمنطقة Ω (أو T) ، احس كلا من :

(أ) الكتلة • (ب) العزوم • (ج) مركز الثقل :

(8) المنطقة Ω تقع بين المنحنيين $x = y^2$ ، $y = x^2$

(9) المنطقة Ω تقع بين المحورين الاحداثيين والمنحني $y = 1 - x^3$

(10) المنطقة Ω التي اعلى محور x وتحت القطع الناقص $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(11) المنطقة Ω التي بين الدائرتين $x^2 + y^2 = 4$ ، $x^2 + y^2 = 1$

(12) المنطقة Ω بين المحورين الاحداثيين الموجبين والمنحني $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

(13) المنطقة Ω بين المحورين الاحداثيين والمنحني $x + y = 1$

في التمارين (14) - (18) جد الكتلة ومركز الثقل لمفيحة معدنية كثافتها

$\rho(x, y)$ وعلى شكل المنطقة Ω :

(14) $\Omega = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq 1\}$ ، $\rho(x, y) = x^2$

(15) $\rho(x, y) = x + y$ ، والمنطقة Ω داخل المثلث الذي رؤوسه $(0, 0)$ ، $(2, 1)$ ،

• $(0, 3)$

(16) $\rho(x, y) = xy$ ، والمنطقة Ω في الربع الأول بين القطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيم

• $y = 1$

(17) $\rho(x, y) = x$ ، والمنطقة Ω اعلى محور x وتحت الدائرة $x^2 + y^2 = 1$

(18) $\rho(x, y) = y$ ، والمنطقة Ω اعلى محور x وتحت المنحني $y = 9 - x^2$

للتمارين (19) - (22) كثافة الجسم تساوي (x, y, z) وله الشكل نفسه كما للمنطقة T المذكورة ، احسب :

(أ) الكتلة . (ب) العزوم . (ج) مركز الثقل :

$$(19) \rho(x, y, z) = yz, \text{ والمنطقة } T \text{ رباعية السطح رؤوسها } (0, 0, 0), (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$$

$$(20) \rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ والمنطقة } T \text{ يحدها من الاعلى المستوى } z = y \text{ ومن الاسفل مستوى } xy \text{ ومن الجوانب المستويات } x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$$

$$(21) \rho(x, y, z) = 1 + y, \text{ والمنطقة } T \text{ تحدها السطح } y = 0, y = 3, z = 2 - x, z = 4 - x^2$$

$$(22) \rho(x, y, z) = xyz, \text{ والمنطقة } T \text{ تقع بين المستويات } x = 0, x = 1, y = 0, z = 4 - y, z = 0, y = 2$$

$$(23) \text{ صفيحة معدنية على شكل المنطقة المستطيلة } \Omega \text{ التي تقع بين المستقيمتين } x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, \text{ ادا الكثافة } \rho(x, y, z) = x^2 + y^2, \text{ احسب } I_x, I_y$$

$$(24) \text{ مكعب معدني صممت متجانس طول ضلعه } a, \text{ احسب عزم قصوره الذاتي حول مستقيم يمر بأحد اضلاعه .}$$

$$(25) \text{ جسم على شكل الاسطوانة الدائرية القائمة } 4x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq h, \text{ وكثافته تساوي } \rho(x, y, z) = 1 + z, \text{ اكتب التكامل الثلاثي الذي يحسب عزم قصوره الذاتي حول محور } z$$

$$(26) \text{ صفيحة معدنية متجانسه على شكل المنطقة } \Omega \text{ التي تقع بين المنحنيين } x = y, y = x^2, \text{ احسب } I_x, I_y$$

$$(27) \text{ تم تدوير المنطقة المثلثة } \Omega \text{ التي رؤوسها } (1, 1), (1, 3), (2, 2) \text{ حول محور } x, \text{ احسب حجم مجسم الدوران الناتج .}$$

$$(28) \text{ ادا المنطقة } \Omega \text{ في تمرين (27) دارت حول المستقيم } y = x, \text{ احسب حجم مجسم الدوران الناتج .}$$

$$(29) \text{ تم تدوير المنطقة } \Omega \text{ التي تقع بين المنحنيين } y = x^2, y = 8 - x^2, \text{ حول محور } y, \text{ احسب حجم مجسم الدوران الناتج .}$$