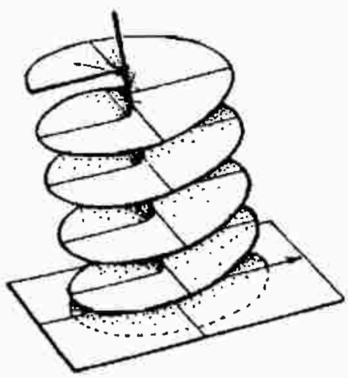
الباب الثامن

أسطح ريمان والرسم الخرائطى المركب

(Complex mappings)

٨- ١: فكرة سطح ريمان:

تبدأ فكرة فهم ما يحدث مع المد التحليلى لاستمرارية دالة اللوغاريتم (أو أى دالة أخرى متعددة القيم) من خلال ما يسمى بأسطح ريمان. تكمن فكرة ريمان فى ألا تكون مثل هذه الدوال معرفة على مجرد مجموعات جزئية من المستوى المركب وإنما منطقة مكونة من عدة شرائح. فى حالة الدالة logz تكون هذه المنطقة عبارة عن سطح حلزونى يتصاعد ويتم جعلها مسطحة كما هو مبين فى شكل (٨-١).



شكل (٨-١): يبين الشكل سطح ريمان للدالة f(z) = logz على شكل حلزونى صاعد مكون من عدة شرائح مسطحة.

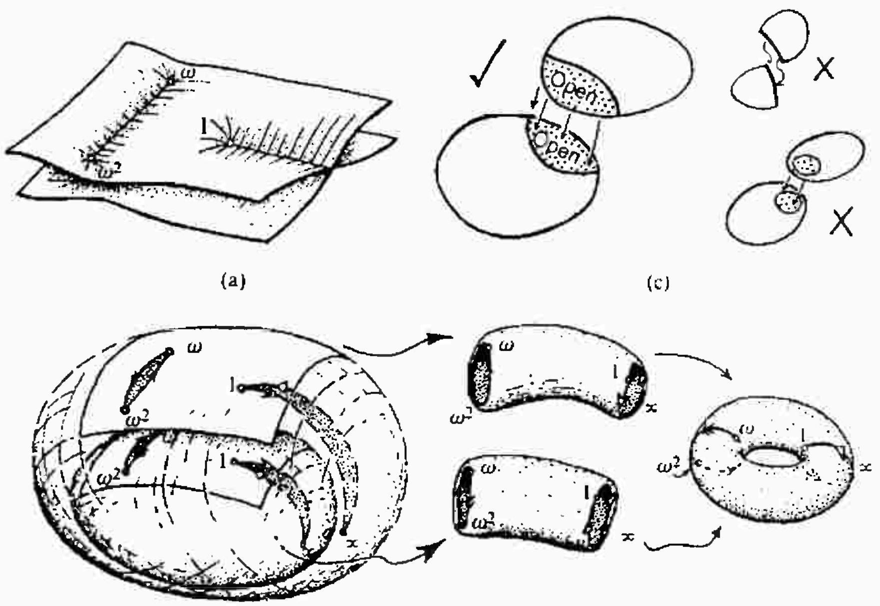
لقد قدم العالم الفذ برنهارت ريمان (Bernhart Riemann) العديد من الأعمال عظيمة القيمة رغم عمره القصير (١٨٢٦ - ١٨٦٦م) فقد غيَّر مفهوم الرياضيات والفكر الرياضى على الأرض. قبل ريمان كان علماء الرياضيات فى حيرة من كيفية التعامل مع مثل هذه الدوال متعددة القيمة والتى تمثل دالة اللوغاريتم مثالاً بسيطاً منها. لكن هنا لابد وأن نغير فكرنا عن الموضوع ككل - لا أن نختار النطاقات التى تحتاجها الدالة بل لابد أن ننصاع للدالة نفسها حيث إنها هى التى تحدد ما هى النطاقات المريحة لها.

ربما كانت الدالة z^a أفضل بقليل من دالة اللوغاريتم ولكن فقط عندما يكون a عدداً نسبياً. عندما يكون العدد a لا نسبى تكون بنية سطح ريمان شبيهة تماماً بسطحه لدالة اللوغاريتم. عندما يكون a = m/n تلتحم الشرائح الحلزونية مرة أخرى

بعد n التفافة. فى كل هذه الحالات تسمى نقطة الأصل بنقطة التفرع. عندما لا يكون للعددين m ، n عامل مشترك نقول بأن التفرع ذو رتبة نهائية (Finite order) أو أنها ذات رتبة n. عندما لا تلتحم الشرائح بعد أى عدد من الالتفافات نقول بأنها ذات «رتبة لا نهائية» (Infinite order).

إن تعبيرات رياضية على شكل $(1\text{-}z^3)^{\frac{1}{2}}$ تعطينا مادة دسمة للتفكر. فى هذه الحالة يكون للدالة ثلاث نقاط تفرع، عند $z = 1$، $z = \omega$ ، $z = \omega^2$، حيث $\omega = e^{2\pi i/3}$ وهكذا تكون $1 - z^3 = 0$ ، وهناك نقطة تفرع أخرى عند المالانهاية.

وهكذا نرى أنه عندما نكمل لفة واحدة حول كل نقطة تفرع باقين قريبين جداً منها نجد أن الدالة تغير إشارتها وإذا درنا مرة أخرى تعود الدالة إلى سابق قيمتها (بالنسبة لنقطة التفرع فى المالانهاية – يعنى ذلك أن ندور فى دائرة نصف قطرها كبير جداً). وهكذا نرى أن كل نقاط التفرع ذات رتبة مساوية للعدد 2 فى شكل (٨–٢) نحاول إيضاح ذلك.



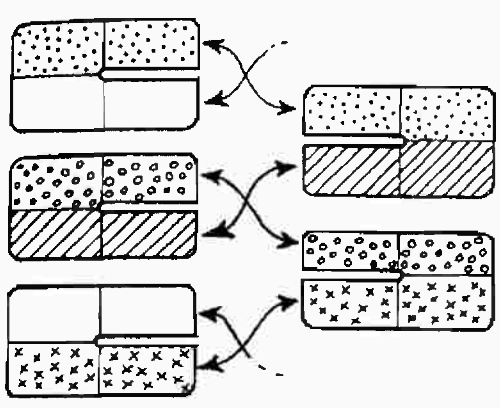
شكل (٨ – ٢): (أ) يتكون سطح ريمان للدالة $(1\text{-}z^3)^{\frac{1}{2}}$ **من شريحتين ونقطة تفرع ذات رتبة 2 عند النقاط** $1, \omega, \omega^2$ **(وكذلك ∞) (ب) نرى سطح ريمان على شكل طارة (torus) وتصور أن سطوح ريمان على شكل كرتى ريمان مع فتحتين من (a) إلى (b) ومن (١) إلى (∞) موضحتين بأسهم. تلك هى أسطوانتان ملصقتان بحيث يعطيان طارة. (جـ) لتكوين سطح ريمان (أو أى مشعب عموما manifold) لابد من لصق قطع من فراغ الإحداثيات ولابد أن تكون هناك مجموعات مفتوحة (open set) تتقاطع فيها هذه القطع – وعند لصقها لا يوجد تفرع غير هاوسدورفى (Hausdorf)**

فى هذه الحالة يكون سطح ريمان فعلياً على شكل طارة بها أربع ثقوب تناظر نقاط التفرع.

تمثل سطوح ريمان أول إشارات إلى ما يسمى بالمشعبات (manifold) والذى يمكن تصوره على شكل فراغ ذى انحناءات مختلفة، ولكن فى نقاط معينة عندما تكون هذه الأجزاء صغيرة جداً تبدو على شكل فراغ إقليدس. مفهوم المشعب هذا أصبح ذا أهمية قصوى للفيزياء الحديثة والتى تعتمد على مفاهيم عدة مشاعب تلصق بعضها فى البعض بشكل سلس دون أية نتوء، وبالتالى تمثل وحدة فراغية واحدة ذات خواص متباينة ولكن تربطها مجموعات مفتوحة متقاطعة كما فى شكل (٨-٢ جـ).

فى حالة أسطح ريمان هذه فإنه يتكون من قطع من المستوى المركب ملصقة بعضها بالبعض عدا بعض النقاط ذات التفرع ذى الرتبة النهائية. بالنسبة للنقاط ذات الرتبة اللانهائية لا تبدو الأمور بهذه البساطة.

بالنسبة للأسطح الحلزونية المذكورة سابقاً يمكن كما هو مبين فى شكل (٨-٣) لصق القطع كالآتى:

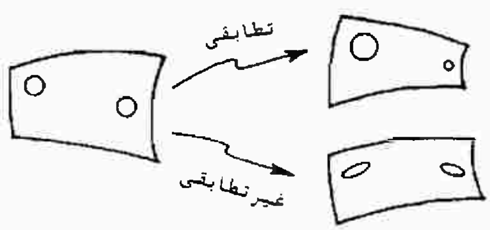


شكل (٨-٣): يمكن بناء سطوح ريمان للدالة log z بأخذ (أ) المستوى المركب مع حذف المحور غير السالب، (ب) المستوى المركب مع حذف المحور التالى من (ب) ولصق الجزء السفلى من (ب) مع الجزء السفلى التالى من (أ) غير الموجب. ثم يتم لصق النصف العلوى من (أ) مع الجزء العلوى.

٨ - ٢: الرسـم الخـرائطى التطابقى:

عند لصق أجزاء المشعب لابد وأن نكون واثقين من أن البنية الخاصة للوصلات لا تتغير ما بين جزء وآخر. عادة ما تكون هذه الأجزاء ذات صفة إقليدية (ذات بعد معين) والتى تلتصق مع بعضها البعض على طول مناطق مفتوحة ومتقاطعة. مراعاة توافق الوصلات بين الأجزاء المختلفة تعنى انخفاظ الاستمرارية والملسائية. فى حالة أسطح ريمان نعتنى بأن الملسائية تكون مركبة ترتبط بمعادلات كوشى - ريمان. الآن يمكن أن نفصح عن جوانب القوة والأناقة والمرونة التى تمتلئ بها هذه المعادلات.

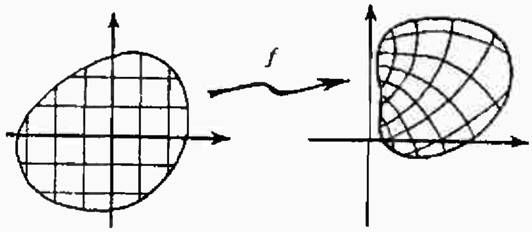
هذه الإشارة تشير إلى «الهندسة التطابقية». فى هذه الهندسة نعنى بالشكل وليس الحجم. عند نقل شكل ذى حجم محدود، من جزء ما على المستوى إلى جزء آخر عادة ما يحدث له تشوه ولكن «الأشكال متناهية الصغر» لا يحدث لها أى تشوه، أى أنه مثلاً بالنسبة للدوائر الصغيرة تظل محتفظة بنفس شكلها ولا تتحول إلى قطع ناقص (كما فى شكل (٨-٤)).



شكل (٨-٤): بالنسبة للنقل التطابقى فإن الدوائر إما أن تكبر أو تصغر ولكن تظل محتفظة بشكلها الدائرى، وهذا لا يحدث فى النقل غير التطابقى.

لنتذكر أنه فى رسوم إيشر كانت الأشكال تصغر وتكبر ولكنها لا تتشوه، وكان النقل من الفراغ الإقليدى إلى الفراغ قطع الزائدى. من الأمور المهمة الملحوظة أنه فى النقل التطابقى لا تتغير الزوايا بين المنحنيات مما يعنى فعلاً عدم تشوه الأشكال.

ولكن ما العلاقة بين هذه الصفة الخاصة بالنقل التطابقى وكون الدالة تامة الشكل وملساء؟ كما هو مبين فى شكل (٨-٥).



شكل (٨-٥): ويبين كيف أن النقل التطابقي للشكل في المستوى -z إلى المستوى -w لا يشوه الأشكال بل تحتفظ بشكلها ولا تنعكس.

الإجابة بسيطة: إن تمام الشكل يعنى أن الدالة تنقل الأشكال من مستوى إلى مستوى آخر دون تشوه أو انعكاس.

إن الإشارة إلى الملسائية فى تحويلنا (Transformation) هذا، أى $w = f(z)$ يشير إلى سلوك هذا التحويل بالنسبة للأشكال متناهية الصغر. دعنا فى البداية نعود إلى التحويل فى التحليل الحقيقى وإلى الدالة المبينة فى شكل (٦-٤) حيث $y(x)$ هى دالة ملساء عند نقطة ما وعندها مماس محدد تماماً عند هذه النقطة. يمكن أن نكبر هذه القطعة من الشكل حتى نرى أن هذه القطعة الصغيرة من المنحنى أصبحت قطعة مستقيمة وتنطبق على المماس عندما يصبح التكبير لا نهائياً. فى حالة الملسائية المركبة يحدث نفس الشيء. عندما نكبر قطعة من الدالة $f(z)$ ونقارنها بنظيرتها فى المستوى $w(z)$ نرى التطابق ولكن مكبرا، أى يحدث انحفاظ للأشكال بدون انعكاس مما يعنى أن التحويل تطابقى وغير انعكاسى.

التحويل الانتقالى بإضافة ثابت إلى z أى $(z + b)$ أو ضرب z فى ثابت، أى az من الواضح أنها تحويلات تامة الشكل - ولكن يمكن جمعها فى تحويل واحد، أى:

$$w = az + b.$$

وهو تحويل «غير متجانس».

هذا التحويل هو الوحيد الذى يسمح بالإزاحة والتمدد (أو الانكماش) دون تشوه. يسمح هذا التحويل بأن تظل الدوائر كما هى دوائر (وليست الدوائر متناهية الصغر فقط)، وكذلك الخطوط المستقيمة إلى خطوط مستقيمة.

ثمة دالة أخرى بسيطة وتامة الشكل وهى الدالة المعكوسة $w = z^{-1}$ ولكن هذه الدالة تحدث تحويلاً بحيث يحذف نقطة الأصل فى المستوى المركب الأول إلى مستوى ثان أيضاً محذوف منه نقطة الأصل الخاصة به.

من الغريب أن مثل هذا التحويل يحفظ الدوائر كما هى دوائر (فى هذه الحالة نعتبر الخطوط المستقيمة هى دوائر ذات نصف قطر لا نهائى). هذا التحويل بجانب الانعكاس يسمى «الانقلاب» (inversion). إذا أضفنا التحويل غير المتجانس نحصل على التحويل العام على الشكل التالى:

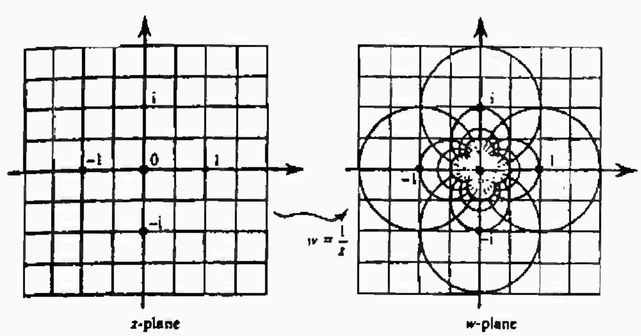
$$w = \frac{az + b}{cz + d}$$

ويسمى هذا التحويل بالخطى الثنائى (bilinear) أو تحويل موبس (Möbius). تحويل موبس هذا ينقل كل المستوى المركب إلى مستوى مركب آخر بالكامل. وينقل النقطة (-d/c) محذوفة إلى نقطة (a/c) محذوفة أيضاً بشرط أن يكون $ad \neq bc$ (أى لا يكون البسط هو من مضاعفات المقام. حذف النقاط المذكورة كان سيؤدى إلى أن تؤول w إلى ما لا نهاية. إذا ضمّنا الكمية «∞» فى النطاق والمستهدف أن نصل إلى ما يسمى «بكرة ريمان».

٨ - ٣ : كرة ريمان

إن ضم النقطة المسماة (∞) إلى المستوى المركب لا يعنى أن البنية الملساء للجزئين المضمومين أصبحا ملساوين دون نتوء. الحل هو بناء كرة مكونة من جزئين إحداثيين أحدهما فى المستوى -z ، والآخر فى المستوى -w. كل نقاط الكرة عدا نقطتين يحملان إحداثيات كل من المستويين w ، z (مرتبطتين بتحويل موبس). نقطة واحدة فقط تحمل إحداثى من المستوى -z لأن إحداثيها فى المستوى -w هو (∞). والأخرى تحمل إحداثى من المستوى -w فقط لأن إحداثيها فى المستوى -z هو (∞) . فى الواقع لا نحتاج لكل هذا التحويل العام لموبس وإنما سنكتفى بتحويل بسيط على الشكل التالى:

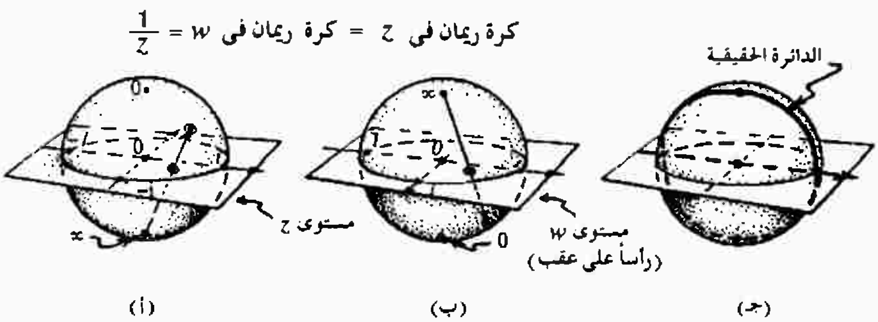
$$w = \frac{1}{z} \quad , \quad z = \frac{1}{w}$$



شكل (٨-٦) : تكوين كرة ريمان من المستويين المركبين w ، z بواسطة تحويل بسيط. منطقة التقاطع تستبعد فقط النقطتين z = 0 ، w = 0 (نقطتا الأصل فى المستويين).

يبين شكل (٨-٦) كيفية نقل خطوط الإحداثيات فى المستوى -z إلى المستوى -w ، مع استبعاد نقطتى الأصل فى المستويين.

يُعرَّف كل هذا كرة ريمان بشكل تجريدى، فى شكل (٨-٧).

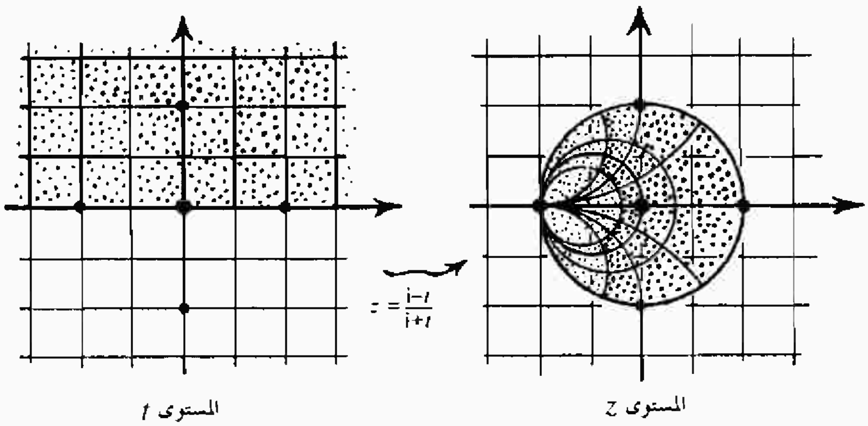


شكل (٨ – ٧) : (أ) كرة ريمان حيث ينطبق خط الاستواء لها مع الدائرة الوحدة فى المستوى -z، ويتم إسقاط الكرة عند المستوى -z بواسطة خطوط مستقيمة من القطب الجنوبى وهو نفسه نقطة $z = \infty$. (ب) اعتبار المستوى الاستوائى كالمستوى -w، مقلوباً من أعلى إلى أسفل – الإسقاط المجسم يتم الآن من القطب الشمالى ($w=\infty$) حيث إن $w=1/z$. (جـ) المحور الحقيقى يُمثَّل بدائرة قطرية على كرة ريمان مثل دائرة الوحدة ولكن ترسم الآن رأسياً.

وهكذا ترسل تحويلات موبس الشاخطية (bilinear) ترسل الدوائر إلى دوائر على كرة ريمان. هذه سمة هامة جداً للنظرية النسبية وكذلك لنظرية المجدولات (twistor) والعزوم المغزلية (spinor).

كما نرى فإن المحور الحقيقى عبارة عن دائرة رأسية، ونستخرج الواحدة من الأخرى بالدوران. الدوران واضح أنه تطابقى ولذا فأى تحويل (غير انعكاسى) تطابقى والذى ينقل كرة ريمان إلى نفسها فهو تحويل موبس الشاخطى. الدوران الذى يهمنا هو العلاقة بين كرات ريمان للمتغيرات المركبة z وt واللذين يعطيان بواسطة التناظر (correspondence) والشاخطى كالتالى:

$$t = \frac{z - 1}{iz + i} \quad , z = \frac{-t + i}{t + i}$$



شكل (٨–٨): التناظر $t = \frac{z - 1}{iz + i}$ ، $z = \frac{-t + i}{t + i}$ بدلالة المستويين المركبين t و z.

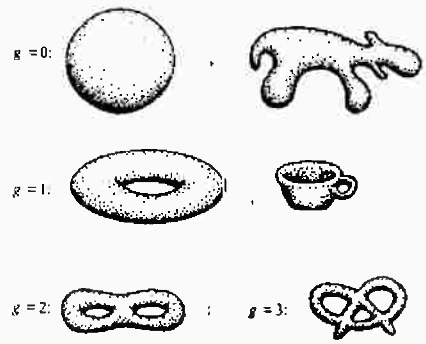
إن النصف العلوى للمستوى t والمحدود بمحوره يتم إسقاطه على قرص الوحدة للمستوى z والمحدود بدائرة الوحدة.

فى شكل (٨–٨) نحاول أن نوضح التناظر بدلالة المستويين المركبين t ، z ، حيث يتم إسقاط النصف العلوى من المستوى t والمحدود بمحوره الحقيقى، على قرص الوحدة فى المستوى z وهو محدود بدائرة الوحدة.

كرة ريمان تعتبر أبسط أسطح ريمان وأكثرها انضغاطا (Compact) فمثلاً سطح ريمان الذى وصفناه سابقاً لدالة اللوغاريتم ليس مضغوطاً (non-compact). فى حالة سطح ريمان $(1 - z^3)^{\frac{1}{2}}$ نحتاج لملء الثقوب الناتجة عن نقاط التفرع لكى يصبح السطح مضغوطاً. كما ذكرنا سابقاً يسهل ملء هذه الثقوب إذا كانت نهائية. بالنسبة للوغاريتم يمكن أن نملأ نقاط التفرع عند نقطة الأصل وفى المالانهاية فى خطوة واحدة وبالتالى نصل إلى كرة ريمان. سوف ندرس هذه النقطة فى الفقرة القادمة.

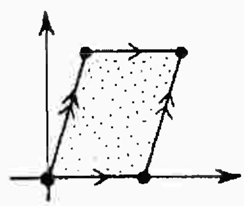
٨ - ٤ : جنس (genus) سطح ريمان المضغوط:

يلزم كأول خطوة فى تصنيف أسطح ريمان حسب طوبوليجيتها، أى حسب المعامل الذى يظل ثابتا عندما يتم تحويل هذه الأشكال. تصنيف الأسطح ثنائية الأبعاد وقابلة للتوجيه (orientable) عملية بسيطة حيث إنه يعطى برقم واحد يسمى بجنس السطح. يتم هذا بأخذ عدد «مقابض» (handles) السطح. فى حالة الكرة فالجنس هو صفر، بالنسبة للطارة فهو الوحدة. بالنسبة لكوب الشاى فالجنس يساوى الواحد حيث إنه للكوب يد واحدة، أى أنه من ناحية الطوبولوجيا فهما متساويان، كما هو مبين فى شكل (٨–٩).



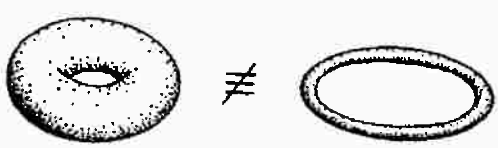
شكل (٨-٩): إن جنس سطح ريمان يساوى عدد المقابض أى للكرة يساوى الصفر، للطارة وكوب الشاى يساوى الوحدة. لقطعة البسكويت العقدية العادية فهو ثلاث.

نرى أن الجنس لقطعة البسكويت العقدية المبينة فى شكل (٨-٩) فهو ثلاث. لا يكفى معرفة الجنس للسطح ولكن لابد أن نعرف بعض المعاملات (moduli). لكى نوضح هذا لنأخذ منطقة فى المستوى المركب، على شكل متوازى أضلاع بالنقاط 0، 1، p+1، p ونحاول لصق الحواف المتقابلة أى الضلع (0-1) إلى الضلع (p - p +1) والضلع (p - 0) إلى الضلع (p - (p+1)) تحصل فى هذه الحالة على طارة وإن اختلفت باختلاف قيمة p.



شكل (٨ - ١٠): لتكوين سطح ريمان ذى جنس (١) نأخذ منطقة فى المستوى المركب على شكل متوازى أضلاع ونقاط 0 ، 1 ، p+1 ، p بهذا الترتيب ونحاول لصق الحواف المتقابلة. فى هذه الحالة تكون p هى معامل سطح ريمان.

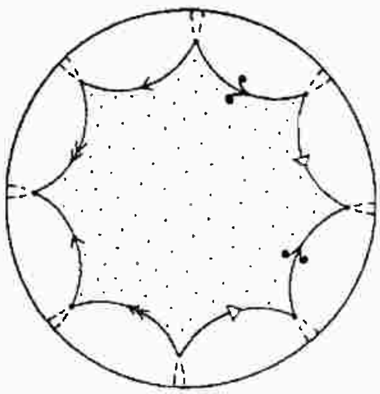
نعنى باختلاف هذه الطارات أنه لا يمكن إسقاط أحدهما على الآخر بواسطة تحويل تام الشكل (holomorphic). كما هو مبين فى شكل (٨-١١) حيث نرى طارتين إحداهما رفيعة والأخرى سمينة. من الواضح أنه لا يمكن أن يكون بين هذين الشكلين تكافؤ تطابقى (comformal equivalence).



شكل (٨-١١): طارتان غير متكافئتين.

بالنسبة للشكل ذى الجنس (1) يوجد معاملان اثنان فقط، ولكن لجنس (2) يوجد ثلاث معاملات. لكى نكون سطح ريمان ذى جنس (2) لابد أن نأخذ شكلاً فى المستوى قطع الزائدى كما هو مبين فى شكل (٨-١٢)، وهكذا نرى أن العدد المركب للمعاملات m للجنس g يحدد بالعلاقة:

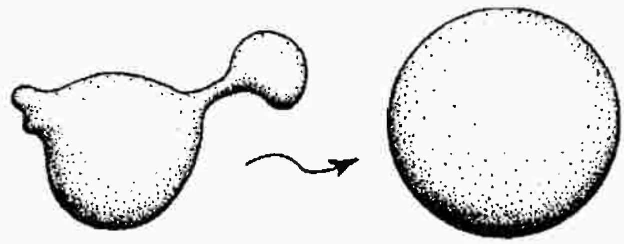
$m = 3g - 3$ عندما تكون $g \geq 2$



شكل (٨-١٢): للشكل الثمانى فى المستوى قطع الزائدى فى التمثيل التطابقى لشكل (٢-١٢) مع وجود معاملات تعريف ينتج سطح ريمان ذى جنس -(2).

هذه العلاقة جيدة لقيم $g = 2, 3, 4, 5...$ ولكنها غير صحيحة عندما تكون $g = 0$ أو $g = 1$ السبب فى هذا يكمن فى العدد s وهو عدد المتغيرات المركبة اللازمة لتحديد التحويلات المختلفة (التحويلات الذاتية) لسطح ريمان.

عندما تكون $g \geq 2$ لا توجد مثل هذه التحويلات الذاتية self - transformation ولكن يمكن أن يكون هناك تحويلات متفتتة (discrete) ولذا فإن $s = 0$. ولكن عندما تكون $g = 1$ فإن المستوى المركب فى شكل (٨ - ١٠) يمكن إزاحته (أى بدون دوران) فى أى اتجاه فى المستوى. يتحدد مقدار واتجاه هذه الإزاحة بعدد واحد مركب (a) وتتم الإزاحة حسب $z \rightarrow z + a$، ولذلك فإن $s = 1$ عندما تكون $g = 1$. فى حالة الكرة $(g = 0)$ فإن التحويلات الذاتية تتم باستخدام التحويلات "الثناخطية" والتى تم شرحها وبالتحديد $z \rightarrow (az + b)/(z + d)$.



شكل (٨ – ١٣): كل هندسة مترية (metric) متشابهة تطابقيا (comformally) بتلك الخاصة بكرة الوحدة القياسية (المكورة).

تكمن الحرية هنا في قيم النسب الثلاث a: b: c: d وهكذا في حالة g = 0 فإن s = 3 . ولذا ففي كل الحالات يكون الفارق بين عدد المعاملات المركبة والمتغيرات المركبة اللازم تحديدها لإجراء التحويلات الذاتية أى (m-s) كالتالى:

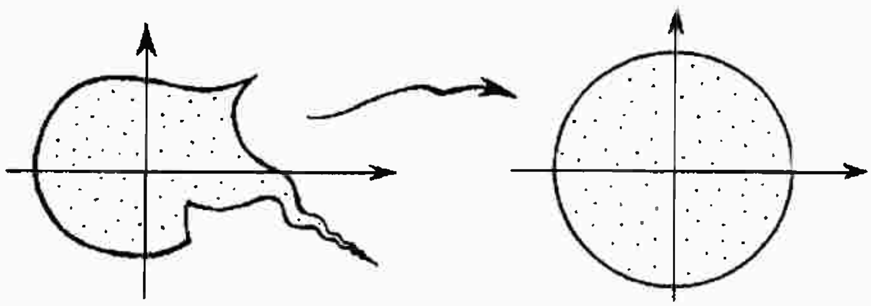
$$m - s = 3\,g - 3.$$

هذه العلاقة مهمة للكثير من الموضوعات ولكن ذلك خارج هذا العرض.

هناك بعض الحرية في إطار عائلة التحويلات التطابقية لتغيير شكل سطح ريمان ولكن مع الحفاظ على بنيته كسطح ريمان دون تغيير. كما هو مبين في شكل (١٣–٨) فإنه في حالة الطبولوجيا الكروية توجد عدة هندسات مترية (metric) ولكن كلها متشابهة مع الكرة الوحدة (الكروية).

٨ - ٥: نظرية ريمان للإسقاط الخرائطي:

بعض الحرية تأتي طبقاً لما يسمى «نظرية ريمان للإسقاط الخرائطي». تنص هذه النظرية على أنه «إذا كان هناك منطقة مغلقة في المستوى المركب، محاطة بعروة غير متقاطعة مع نفسها، فتوجد خريطة تامة الشكل (holomorphic) تتوافق مع هذه المنطقة في قرص الوحدة المغلق». هناك بعض التحفظات حول «استئناس» (tameness) العروة، ولكن هذا لا يمنع أن يكون للعروة بعض الأركان أو حتى بعض النقاط غير قابلة للاشتقاق كما هو مبين في شكل (٨ – ١٤).

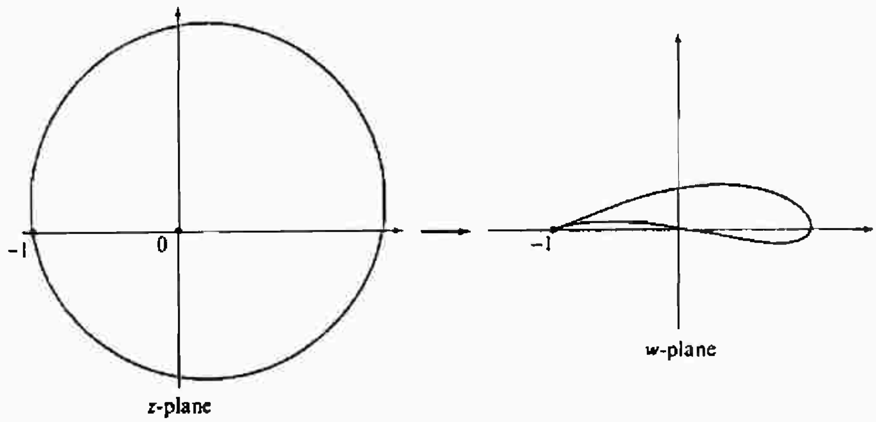


شكل (٨ – ١٤): تنص نظرية ريمان للرسم الخرائطى أنه إذا كانت هناك منطقة مفتوحة فى المستوى المركب، محاطة بعروة مغلقة بسيطة (وليس بالضرورة ملساء) يمكن نقلها بشكل تطابقى داخل دائرة الوحدة، حيث يتم أيضاً إسقاط الخطوط الحدية بنفس الطريقة.

يمكن اختيار – بشكل حر – ثلاث نقاط a, b, c ورسمهم خرائطياً إلى a', b', c' فى دائرة الوحدة (مثلاً $a' = 1$ ، $b' = \omega$ ، $c' = \omega^2$) مع الاحتفاظ بالتتابع من a إلى b إلى c على العروة وبنفس الترتيب على دائرة الوحدة. يمكن بطريقة أخرى تحديد الخريطة بصورة وحيدة مع اختيار نقطة (a) على العروة ونقطة أخرى (j) بداخلها ونصر على أن a تسقط على نقطة a' فى داخل دائرة الوحدة ($a' = 1$) – وتسقط النقطة j على نقطة معينة j' داخل دائرة الوحدة (لتكن مثلاً $j' = 0$).

والآن لنتصور أننا نطبق نظرية ريمان للإسقاط الخرائطى على كرة ريمان وليس على المستوى المركب، من وجهة نظر ريمان فإن داخل العروة على قدم المساواة تماماً مع خارجها (مجرد النظر إلى كرة ريمان من الجانب الآخر)، وبالتالى فإن إسقاط ريمان الخرائطى المقلوب يسقط الجانب الخارجى للعروة فى المستوى المركب على خارج دائرة الوحدة وأما التفرد (uniqeness) فهو مضمون حيث نشترط أن تقع النقطة a على العروة لتسقط على النقطة a' على دائرة الوحدة (مثلا $a' = 1$) وبحيث تأخذ المالانهاية (∞) الآن دور كل من j ، j' فى نهاية الفقرة السابقة.

مثل هذه الإسقاطات هامة، بل فى غاية الأهمية فى حل الكثير من المسائل الفيزيائية. ثمة قضية كبرى فى الفيزياء تبين كيف أن استخدام هذه الأعداد المركبة والتحويلات على قدر كبير من الأهمية لحل قضايا حيوية لحياة الإنسان. من أفضل الأمثلة على ذلك هو معالجة مسألة انسياب الهواء (كمائع غير لزج وغير قابل للانضغاط حول جناح الطائرة) وتسمى بتحويل جوكوفسكى للرقاقة (foil) الهوائية المبين فى شكل (٨ – ١٥).



شكل (٨ – ١٥): تحويل چوكوفسكى على شكل ($w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ والذى يأخذ المنطقة خارج الدائرة خلال $z = -1$ إلى المقطع العرضى لرقاقة هوائية مما يمكّن من حساب شكل انسياب الهواء حول الجناح (قوة الرفع).

هذا الشكل قريب جداً من الشكل الحقيقى لجناح الطائرات فى الثلاثينيات من القرن العشرين. من خلال التحويل هذا يمكن حساب شكل الانسياب من شكل الانسياب حول جناح يكون مقطعه العرضى على شكل دائرة.

هناك بالطبع العديد من التبسيطات مثل إهمال لزوجة الهواء وأنه غير قابل للانضغاط. ولكن كل هذا لا يقلل من قيمة هذا العمل النظرى البحت الذى لقى تطبيقا رائعاً كهذا. ودون الدخول فى تفاصيل كون الهواء فى الواقع مكونا من أعداد هائلة من الجزئيات لها كيانها الفيزيائى المختلف ولكن لا تهمنا كل هذه التفاصيل؛ إذ إننا نتعامل مع متوسطات السرعة، الضغط والكثافة وغيرها.

مرة أخرى نرى سحر الأعداد المركبة وكيف أنها ضرورية وأساسية لإظهار جوانب فيزيائية عديدة لم تكن لتظهر بدونها، نفس الشيء ينطبق على نظرية ماكسويل للموجات الكهرومغناطيسية، النسبية والظواهر الفيزيائية الأخرى المتعلقة بالموجات.