الباب التاسع

مفكوك (decomposition) فورييه

والفوقدوال (hyperfunction)

٩ - ١ : متسلسلة فورييه (Fourier)

لنعد إلى سؤال أويلر عن «الدالة الصادقة» وكيف أنه اكتفى بأن تكون الدالة تامة الشكل (أى تحليلية ومركبة) لكى تكون صادقة. لكن معظم الرياضياتيين يعتبرون ذلك مقيداً جداً لمفهوم الدالة. من المحق ومن المخطىء ؟ لابد أن نبدأ بأن نوضح القضية بشكل أفضل.

عند تطبيق الرياضيات فى عالم الفيزياء فهناك مطلب عام أن تكون هناك مرونة بالنسبة للدوال التحليلية أى دوال -C^{∞} أو تامة الشكل أن تسود. ونظراً لتفرد مد استمرارية الدول تحليلياً فإن سلوك الدوال تامة الشكل معرفة على منطقة مفتوحة ($\mathbb{D}$) من المستوى المركب طالما تعرفت على منطقة أصغر (داخل منطقة $\mathbb{D}$). أيضاً إذا كانت الدالة تحليلية من متغير حقيقى معرف فى منطقة مرتبطة -$\mathbb{R}$ من المحور الحقيقى $\mathbb{R}$ طالما كانت الدالة معرفة فى منطقة صغيرة مفتوحة $\mathbb{R}$. مثل هذه الصلابة لا تناسب القضايا الفيزيائية.

يزداد هذا المطلب خاصة عندما تدرس انتشار الموجات الكهرومغناطيسية عندما تحمل بعض المعلومات من مرسل إلى مستقبل. لابد أن تحمل الرسالة هذه المعلومات وليست هناك فرصة لتغيير أى جزء منها فى منتصف الرسالة. لذا من الجوانب المهمة هو معرفة تأثير بعض الانقطاعات وغيرها من التشوهات وكيف يؤثر ذلك على انتشار الموجات.

من أهم الأدوات الرياضية المستخدمة فى دراسة هذا الموضوع هو ما يسمى بتحليل فورييه (Fourier Analysis). عاش فورييه من عام ١٧٦٨ إلى ١٨٣٠م. كان اهتمام فورييه منصبا على دراسة كيفية تحليل أشكال الموجات إلى مركباتها الجيبية (Sine wave). توصف الموجة بدوال دورية بالنسبة للزمان والمكان على الشكل التالى:

$$f\,(x + l) = f(x),$$

ويسمى العدد l بالدورة. النغمات النقية (pure tones) هى النغمات النقية $\sin(\chi)$ أو $\cos(\chi)$ ومن المعروف أن لها دورة قدرها (2π) أى أن:

$$\sin(\chi + 2\pi) = \sin\chi, \qquad \cos(\chi + 2\pi) = \cos\chi$$

ولكننا نعلم أن: $e^{i\chi} = \cos\chi + i\sin\chi$

أى أن: $e^{i(\chi + 2\pi)} = e^{i\chi}$

ولكن يمكن للموجة أن تهتز ليس مرة واحدة فقط وإنما مرتين أو ثلاث أو أكثر، أى:

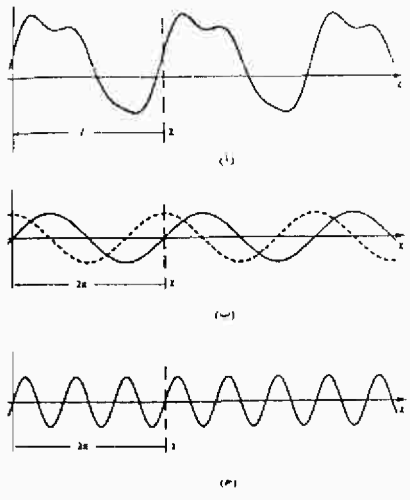
$$e^{i(2\pi x/l)}, \quad \sin\left(\frac{n\pi\chi}{e}\right) \quad , \quad \cos\left(\frac{n\pi\chi}{e}\right)$$

حيث تكون لهذه الموجة دورة l ودورات أقل مثل (l/n)

فى هذه الحالة تكون $n=2,3,4,.....$ ونعرفها بالتوافقات العليا (higher harmonics)

القضية الأساسية فى تحليل فورييه هو كيفية التعبير عن دالة دورية بزمن دورة (l) بدلالة النغمات النقية.

لكل n سوف يكون هناك عدد مختلف من النغمات النقية وكل ذلك يعتمد على شكل الموجة أى شكل الدالة $y = f(\chi)$. بعض هذه الأشكال البسيطة مبينة فى شكل (٩-١).

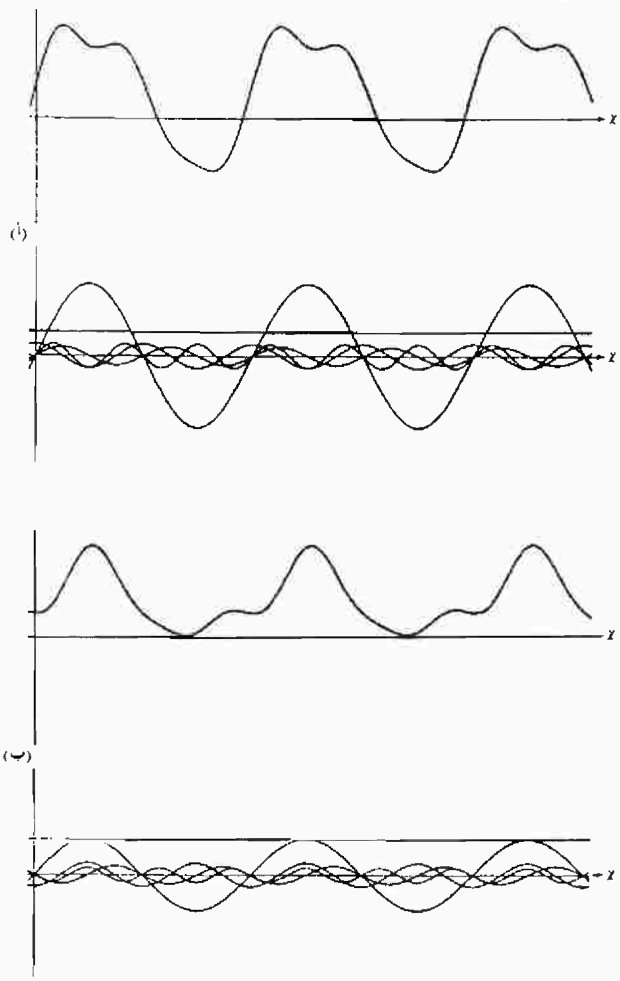


شكل (٩-١): دوال دورية (أ) دالة دورية مقدار دورتها (l)، (ب) النغمات النقية ودورتها $l = 2\pi$ (الخط المنقوط)، (جـ) التوافقات الأعلى تتذبذب عدة مرات فى الدورة l أى أن زمن دورتها أقل كما هو مبين ($l = \frac{2\pi}{3}$)

المفروض أن عدد مثل هذه النغمات النقية لا نهائى - ولكن ما توصل إليه فورييه كان معاملات $c, a_1, b, a_2, b_2, a_3, b_3$ فى فك $f(\chi)$ بدلالة مكوناتها من النغمات النقية كما هو مبين فى التعبير التالى:

$$f(\chi) = \chi + a_1 \cos \omega\chi + b_1 \sin \omega\chi + a_2 \cos 2\omega\chi + $$
$$+ b_2 \sin 2\omega\chi + a_3 \cos 3\omega\chi + b_3 \sin 3\omega\chi + ...,$$

كما هو مبين فى شكل (٩-٢).



شكل (٩-٢): أمثلة من مفكوك فورييه للدوال الدورية - يتحدد شكل المفكوك من معاملات فورييه.

(أ) $$f(\chi) = \frac{2}{3} + 2 \sin \chi + \frac{1}{3} \cos 2\chi + \frac{1}{3} \sin 3\chi$$

(ب) $$f(\chi) = \frac{1}{2} + \sin \chi - \frac{1}{3} \cos 2\chi - \frac{1}{4} \sin 2\chi - \frac{1}{5} \sin 3\chi$$

لنكتب هذه العلاقات باستخدام المعادلة:

$$e^{iAx} = \cos Ax + i \sin Ax$$

إذن:
$$f(z) = \ldots + \alpha_{-2}\, e^{-2i\omega\chi} + \alpha_{-1}\, e^{-i\omega\chi} + \alpha_0 + \alpha_1\, e^{i\omega\chi} +$$
$$+ \alpha_2\, e^{2i\omega\chi} + \alpha_3\, e^{3\omega\chi} + \ldots.$$

حيث: $a_n = \alpha_n + \alpha_{-n}, \quad b_n = i\alpha_n - i\alpha_{-n}, \quad c = \alpha_0$

لقيم $n = 1, 2, 3, 4, \ldots.$

إذا استخدمنا المتغير المركب z على شكل $z = e^{i\omega\chi}$ نحصل على:

$$F(z) = \ldots + \alpha_{-2}z^{-2} + \alpha_{-1}z^{-1} + \alpha_0 z^0 + \alpha_1 z^1 + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots$$

حيث:

$$F(z) = F(e^{i\omega\chi}) = f(\chi).$$

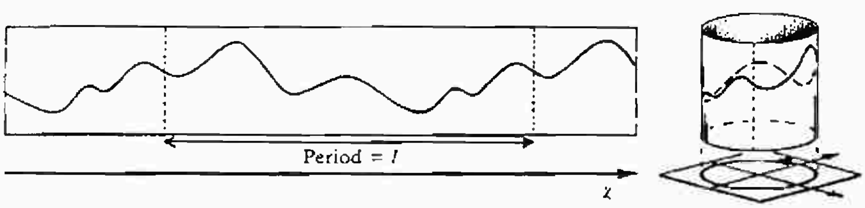
وإذا استخدمنا الرمز Σ والذى يعنى الجمع، يمكن أن نكتب التالى:

$$F(z) = \Sigma\, \alpha_r z^r.$$

هذه العلاقة هى فى الواقع متسلسلة أسية وتسمى متسلسلة لوران (Laurant).

متسلسلة لوران تعطينا صيغة مختصرة لمتسلسلة فوريه.

٩ - ٢: الدوال على دائرة:

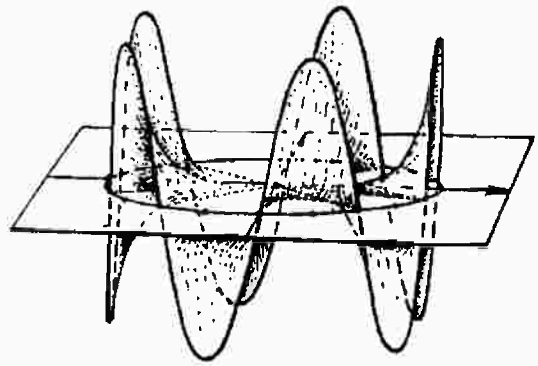


شكل (٩-٣): يمكن النظر إلى الدالة الدورية على أنها ترسم على دائرة (أسطوانة تدور). يمكن أن نعتبر هذه الدائرة دائرة الوحدة فى المستوى المركب.

لنأخذ دائرة الوحدة فى المستوى المركب وبالتالى يكون محيطها مساويا 2π، لنأخذ الدورة $l = 2\pi$ أيضاً

إذن: $\omega = 1, \quad z = e^{i\chi}$

فى هذه الحالة سوف تكون النغمات النقية على شكل $z^{\pm n}$ ونحصل على هذه النغمات على الدائرة الوحدة كما فى شكل (٩ - ٤).



شكل (٩-٤): يظهر الجزءان الحقيقي والتخيلي للدالة z^n على دائرة الوحدة كتوافقيات نونية من الجيب وجيب التمام ونبين هنا الجزء الحقيقي للدالة z^5 حيث $n = 5$.

يضيف استخدام متسلسلة لوران ومفكوك فورييه إلى عرض هذا الموضوع ليس فقط أداة تبسيط ولكن فهما عميقا للجوانب الفيزيائية لهذه المسألة وبالتالى تساعد على فهم الطبيعة على العموم. ومرة أخرى نرى دور الأعداد المركبة الساحرة فى تعميق فهمنا للظواهر الفيزيائية.

من المهم ليس فقط ما تظهره هذه المتسلسلة عن النقاط التى تقع داخل دائرة الوحدة ولكن ما يحدث خارجها. بالنسبة لمتسلسلة لوران توجد حلقة (annulus) تقارب تقع بين دائرتين فى المستوى المركب. إن جزء المتسلسلة ذا الأسس الموجبة، أى:

$$F^- = \alpha_1 z^1 + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \ldots.$$

سوف يكون لها دائرة تقارب بنصف قطر (A) وتتقارب كل المتسلسلات إذا كان مقياسها أقل من A.

بالنسبة لجزء المتسلسلة الذى يحوى أسساً سالبة، أى:

$$F^+ = \ldots. + \alpha_{-3} z^{-3} + \alpha_{-2} z^{-2} + \alpha_{-1} z^{-1}$$

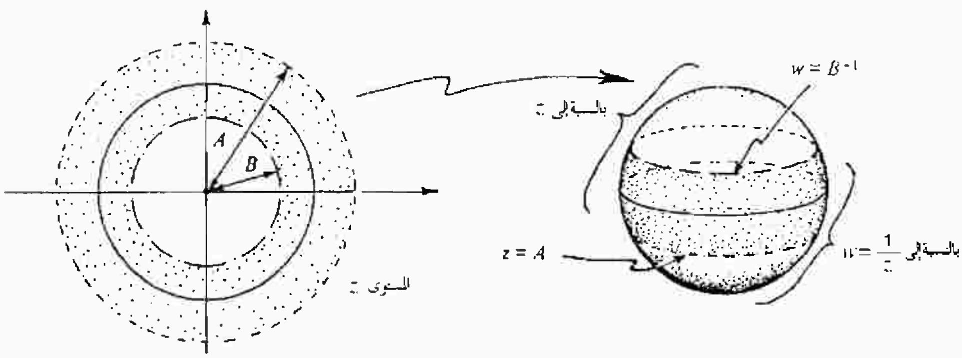
فهى متسلسلة أسية عـادية متغيرها هو $\omega = \frac{1}{z}$ وهـذه بدورها سوف تتقارب داخل دائرة نصف قطرها 1/B . فى الواقع تقع المتسلسلة الأولـى فى النصف العلوى لكرة ريمان والمتسلسلة الثانية تقع فى النصف السفلى لكرة ريمان مع ملاحظة أن

$$F(\chi) = F(e^{ix}) = F(z)$$

وبالتالى:

$$F(z) = F^+ + \alpha_0 + F^-$$

ولابد من إضافة الثابت α_0.



شكل (٦-٥) : (أ) حلقة التقارب لمتسلسلة لوران $F(z) = F^{+}+\alpha_{0} + F^{-}$ ، (ب) نفس الشيء على كرة ريمان حيث z تعني امتداد نصف الكرة الشمالي، و ($\omega = \frac{1}{z}$) تعنى نصف الكرة الجنوبى الممتد.

فى حالتنا هذه نهتم بالتقارب على دائرة الوحدة لأن هذا هو الشرط اللازم لكى تكون $z = e^{i\chi}$ لقيم χ الحقيقية وهكذا عندما تتقارب متسلسلة لوران تتقارب متسلسلة فوريه عندما تقع z على دائرة الواحدة. لذلك على ما يبدو أننا نحتاج إلى تحقق الشرط التالى: $B < 1 < A$ بحيث تقع حلقة التقارب داخل الدائرة الوحدة، ولكن هل يعنى هذا أنه لابد لتقارب متسلسلة فورييه أن تقع دائرة الوحدة داخل حلقة التقارب؟

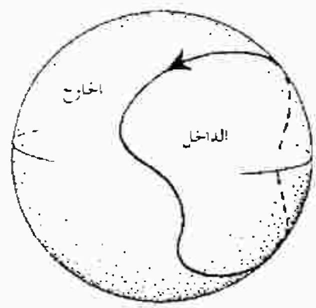
نعم هذا هو المطلوب عندما تكون $F(\chi)$ تحليلية (أى C^{∞})، ويمكن عمل امتداد للدالة $F(\chi)$ إلى الدالة $F(z)$ وتكون تامة الشكل على منطقة مفتوحة لتحتوى دائرة الوحدة. ولكن إذا كانت $F(\chi)$ ليست تحليلية فإن شيئًا ما طريفا يحدث. ولكن لنؤجل هذا مؤقتاً.

عندما تكون $F(z)$ تحليلية نجد أن الدالة $F(z)$ تنقسم إلى جزئين يختص أحدهما بالحدود F^{+} والآخر بالحدود F^{-}.

٩ - ٣ : انقسام الترددات على كرة ريمان:

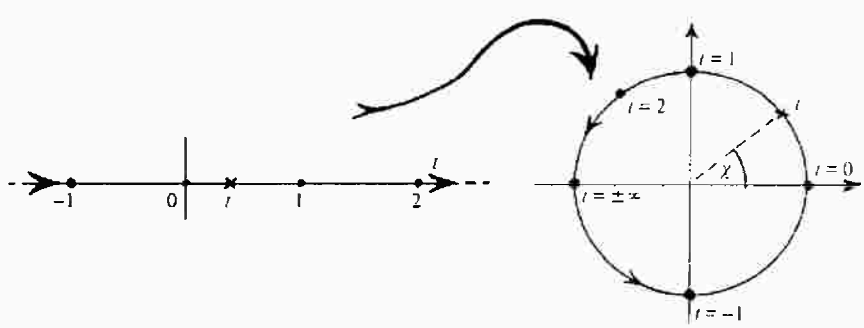
تعطينا الإحداثيات z، $w = \frac{1}{z}$ منطقتين على كرة ريمان، بحيث تصبح الدائرة الوحدة خط الاستواء، حلقة التقارب عبارة عن ياقة لها (Collar). والآن نرى أن مجموع جزئى الدالة $F(z)$ هو فى الواقع امتداد الدالة على نصف الكرة الجنوبى والمسمى «بالترددات الموجبة» F^{+}، والآخر المسمى «بالترددات السالبة» فى نصف الكرة الشمالى. إذا أهملنا الحد الثابت، يتحدد هذا الانقسام بتمام شكل (holomorphicity) الدالة وامتداديها فى نصفى كرة ريمان الشمالى والجنوبى.

والآن لنحدد «اتجاه» orientation الدائرة. إن الاتجاه القياسى للدائرة (standard) هو اتجاه ازدياد قيمة الإحداثى θ القياسى، أى فى اتجاه عكس عقارب الساعة. إذا عكسنا الاتجاه أى نستبدل θ بالزاوية $(-\theta)$، نحصل على ترددات سالبة بدلاً من الموجبة. كما هو مبين فى شكل (٩-٦) نرى أن اتجاه العروة المغلقة على كرة ريمان تحدد الاتجاهين «داخل» و«خارج» الكرة. هذا مهم جداً لميكانيكا الكم ونظرية المجالات.



شكل (٩-٦): يحدد اتجاه العروة المغلقة فى كرة ريمان الاتجاهين «داخل» و«خارج» الكرة، ويكون عكس عقارب الساعة إذا كان وجه الساعة داخل العروة، ومع عقارب الساعة عندما يكون وجه الساعة خارجها.

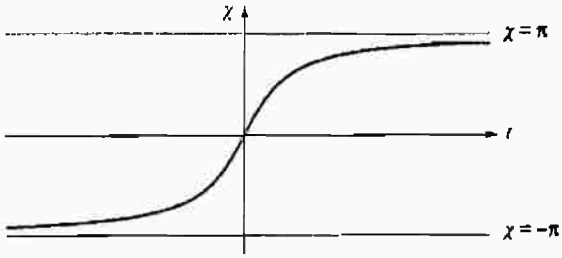
فى ميكانيكا الكم يكون الانقسام الموجب والسالب للترددات يشير إلى دوال من الزمن t. ولا ننظر إلى الزمن كمتغير يدور حول الدائرة، ولكن يمكن أن نحصل على نطاق كامل للزمن t من الزمن الماضى $(t = -\infty)$ والزمن القادم $(t = \infty)$ وتكون $\chi = -\pi$ إلى $\chi = \pi$ (لذلك تدور $z = e^{i\xi}$ دورة واحدة حول الدائرة الوحدة، فى المستوى المركب وفى اتجاه عكس عقارب الساعة، وتتغير z من $z = -1$ ثم إلى $z = -1$ مرة أخرى كما هو مبين فى شكل (٩-٧).



شكل (٩-٧): فى ميكانيكا الكم لا يعنى الانقسام (موجب/ سالب) للترددات أن الدوال دورية.

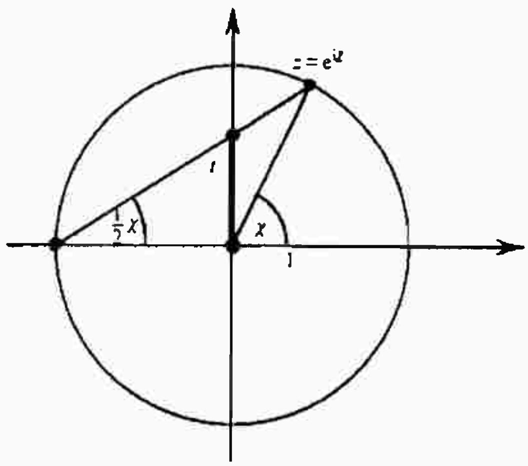
$$t = \tan\left(\frac{1}{2}\chi\right)$$

منحنى هذه الدالة مبين فى شكل (٩-٨).



شكل (٩ –٨) : منحنى الدالة $(t = \tan \frac{1}{2}\chi)$

وبعض التفسير لهذه الدالة مبين فى شكل (٩–٩).



شكل (٩–٩): رسم يبين هندسة الدالة $(t = \tan \frac{1}{2}\chi)$

ميزة هذا التحديد أنه يمتد بشكل تام على كرة ريمان والذى يأخذ دائرة الوحدة فى المستوى -z، إلى الخط الحقيقى (المستوى t) كالآتى:

$$t = \frac{z - 1}{iz + i} \quad , \qquad z = \frac{-t + i}{t + i}$$

وهكذا نرى أن داخل دائرة الوحدة فى المستوى -z يتناظر مع النصف العلوى للمستوى t، وخارج دائرة الوحدة يتناظر مع النصف السفلى للمستوى t، وكان لابد أن نكون حذرين عند التعامل مع النقطة (∞) فى المستوى -t، ولكن عند التعامل مع كرة ريمان فالمسألة تصبح أسهل بكثير.

فى التمثيل القياسى «للترددات الموجبة» بدلالة الإحداثى -t نتعامل من خلال

ما يسمى بتحويل فوريه «Fourier Transformation» للدالة F(x) ولندرس ما هو هذا التحويل بشكل أعمق.

٩ - ٤: تحويل فوريه:

من ناحية المبدأ فإن تحويل فوريه هو في الواقع نهاية (limit) متسلسلة فوريه حين يكون زمن الدورة أكبر وأكبر بحيث يصبح لا نهائياً، في هذه الحالة ليس هناك ضرورة أن تكون الدالة دورية. في هذه الحالة نعتبر أن الدالة $F(\chi)$ لها زمن دورة l بحيث ($l \to \infty$). كلما كبر زمن الدورة فإنه يمكن أن نكتب أن زمن الدورة $= \frac{l}{n}$ حيث n تكون أي عدد حقيقي موجب (لنتذكر أن أي عدد حقيقي يمكن الاستعاضة عنه تقريباً بأعداد نسبية مثلاً). بهذا يمكن استبدال متسلسلة فوريه بمجموع لا نهائي من الحدود أي على شكل تكامل.

عادة نكتب متسلسلة فوريه على الشكل التالي:

$$F(z) = \Sigma\, \alpha_r z^r$$

حيث

$$z = e^{i\omega\chi}$$

وحيث ($\omega = 2\pi/l$)، لنأخذ أولا زمن دورة (2π)، ثم نأخذ عدداً صحيحاً N ليصبح زمن الدورة $l = 2\pi N$ ويصبح التردد في هذه الحالة $\omega = N^{-1}$، ويصبح التردد التوافقي ذا رتبة N، وأما التردد النقي سوف يكون ذا رتبة (nN). عندما تكبر N فلا معنى للحديث عن رتبة توافقية. لنعبر عن توافقية معينة ($r=\pm n$) ومن الأفضل استخدام متغير آخر هو r/N ولنسميه p (أي كمية حركة جسيم ما في ميكانيكا الكم، والتي يقاس موضعها بالإحداثي χ. للقيم النهائية للعدد N نكتب:

$$P = r/N$$

بالتالي عندما $N \to \infty$ تتحول المعاملات في المتسلسلة إلى دالة استمرارية g(p) أي:

$$\alpha_r \to g(p)$$

ونحصل على مجموع $\Sigma\alpha_r z^r$، وتكون $z = e^{i\omega x}$ وبالتالي: $z = e^{i\chi/N}$ وبالتالي فإن $z^r = e^{ir\chi/N} = e^{i\chi p}$ وعندما $N \to \infty$ نكتب التالي:

$$\Sigma\alpha_r z^r \;\to \int_{-\infty}^{+\infty} g(p)e^{i\chi p}\, dp$$

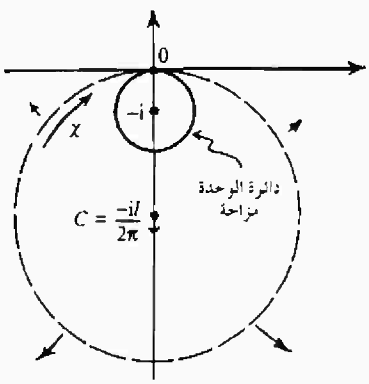
لكي نعبر عن الدالة $F(\chi)$ يمكن إدخال عدد ما (كمقياس رسم) على شكل $(2\pi)^{-1/2}$ وبذا نحصل على الصورة العكسية للتكامل على شكل:

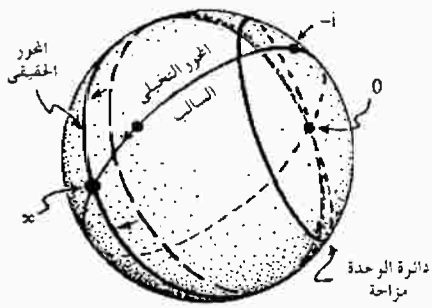
$$f(\chi) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} g(p)e^{i\chi p}\, dp =$$

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\chi)e^{-i\chi p}\, dp$$

٥:٩ : الانقسام الترددي من تحويل فورييه:

الدالة المركبة $f(\chi)$ معرفة على كل المحور الحقيقي تسمى «ذات التردد الموجب» إذا كان تحويل فورييه $g(p)$ مساويا للصفر لكل $p \geq 0$ وتكون $f(\chi)$ مكونة من مكونات على شكل $e^{i\chi p}$ بحيث تكون $p < 0$.





شكل (٩-١٠) : شرط تحقق الترددات الموجبة عندما تؤول l إلى ما لا نهاية. (أ) عندما تزاح دائرة الوحدة ليصبح مركزها (-i) وتصبح الترددات الموجبة في النصف السفلي للمستوى. (ب) النقطة $(z = -il/2\pi)$ لا تقع على مركز الدائرة وإنما تصبح النقطة ∞ عندما تؤول l إلى ما لا نهاية وتتحول متسلسلة فورييه إلى تحويل فورييه.

للدالة $f(\chi)$ ذات زمن دوري $(z\pi)$ حيث χ هي طول القوس حول دائرة الوحدة. عندما نريد أن نزيد زمن الدورة عن (2π) لنرسم دوائر متزايدة القطر تتماس بعضها مع البعض عند النقطة $\chi = 0$، ولنأخذ هذه النقطة كنقطة أصل (بدلاً من $z = 1$). وبحيث تقع كل الدوائر في النصف السفلي من المستوى. يجعل هذا الدائرة الابتدائية ذات زمن دورة قدره $l = 2\pi$ بحيث يقع مركزها عند النقطة $z = -i$ وليس عند نقطة الأصل. لأزمنة دورة أكبر $(l > 2\pi)$ ستكون الدائرة متمركزة عند النقطة $(C = -il/2\pi)$ في المستوى المركب وعندما تكون $l \rightarrow \infty$ نحصل على المحور الحقيقي أي $(\chi = x)$ ويزاح مركز الدائرة إلى ما لا نهاية على المحور السالب التخيلي. في كل حالة نأخذ χ كمقياس لطول القوس مع عقارب الساعة حول الدائرة نحصل الآن على العلاقة التالية:

$$z = \frac{il}{2\pi} \quad (e^{i\chi - 1})$$

ولكن ماذا يحدث لمتسلسلة لوران عندما تكون $l \to \infty$. مع تزايد قيم l، تزداد فيه C على طول الدائرة على كرة ريمان والتى تمثل المحور التخيلى (كما فى شكل ٩ - ١٠ ب). وعندما تصل النقطة $l = \infty$ تكون النقطة C عند $z = \infty$ على كرة ريمان.

٩ - ٦: ما هــو نــوع الدالــة المناسبة:

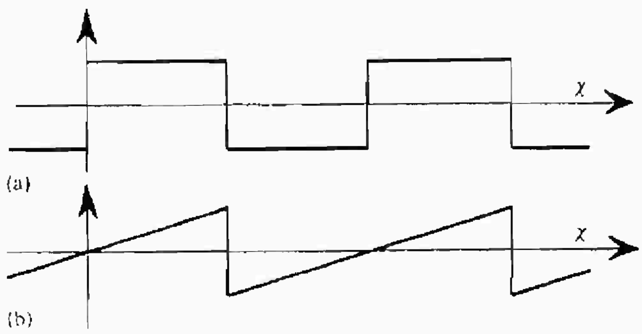
ليس من الحكمة أن نحدَّ أنفسنا باختيار دوال تحليلية فقط حيث إننا نقحم نفسنا فى نطاق محدود، خاصة وأننا نريد دالة يمكن بواسطتها التعبير عن إشارات ومعلومات غير متوقعة (أى غير تحليلية). نعود مرة أخرى للسؤال: ما هى الدالة الصادقة؟

يقول البعض بأن مثل هذه الدالة هى الدالة التحليلية وتامة الشكل، بل وينعتونها بالدالة «المحترمة». أما البعض الآخر فهو يرى أنها محدودة جداً للكثير من التطبيقيات الفيزيائية. ما هى وجهة النظر الصحيحة؟ سوف نعود إلى القرن التاسع عشر فى رحلة قصيرة - نرى فى شكل (٩-١١) دوالا دورية على شكل دوال مربعة ودوال سن منشار. لقد لاقى فوربيه مقاومة عنيفة فى التعبير عن مثل هذه الدوال بدلالة متسلسلات متعددة الحدود من خلال دوال الجيب وجيب التام، أى:

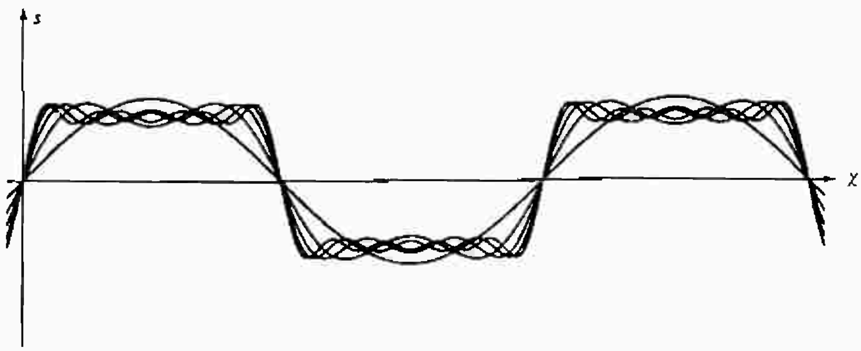
$$s(\chi) = \sin \chi + \frac{1}{3} \sin 3\chi + \frac{1}{5} \sin 5\chi + \ldots$$

وهذه تعبر عن دالة مربعة تتذبذب بين ($\frac{\pi}{4}$) و ($-\frac{\pi}{4}$) بزمن دورة قدره π.

فى شكل (٩-١٢) نرى كيف يتم جمع هذه الدوال لتتكون دالة مربعة.



شكل (٩-١١): الدالة المربعة والدالة سن المنشار.



شكل (٩ - ١٢) يبين كيف أن جمع الدوال

$$S(\chi) \sin \chi + \frac{1}{3} \sin 3\chi + \frac{1}{5} \sin 5\chi + ...$$

يؤول إلى دالة مربعة.

لننظر الآن إلى متسلسلة لوران على الشكل التالى:

$$2iS(\chi) = ... - \frac{1}{5} z^{-5} - \frac{1}{3} z^{-3} - z^{-1} + z + \frac{1}{3} z^{3} + \frac{1}{5} z^{5} + ...$$

حيث $z = e^{i\chi}$. فى الواقع تنكمش حلقة التقارب إلى دائرة الوحدة بدون منطقة مفتوحة. إذا قسمنا متسلسلة لوران إلى جزئين: جزء بالأسس الموجبة ليعطى متسلسلة عادية، وأخرى ذات أسس سالبة أى متسلسلة من (z^{-1}).

ولكن:

$$S^{-} = z + \frac{1}{3} z^{3} + \frac{1}{5} z^{5} + ... = \frac{1}{2} \log \frac{1 + z}{1 - z}$$

$$S^{+} = ... \frac{1}{5} z^{-5} - \frac{1}{3} z^{-3} - z^{-1} = \frac{1}{3} \log \frac{1 + z^{-1}}{1 - z^{-1}}$$

وهذا يعطى الآتى:

$$2iS(\chi) = S^{-} + S^{+}$$

يختلف التعبيران S^{+} و S^{-} فقط بمقدار $(\pm \frac{1}{2} i\pi)$

أى أن: $S(\chi) = \pm \frac{\pi}{4}$

نريد أن نوضح أكثر لماذا نحصل على دالة مربعة تتأرجح بين القيمتين المذكورتين.

يمكن أن نوضح ذلك بشكل أسرع إذا استخدمنا التحويل:

$$t = \frac{z-1}{iz+i}$$

حيث S^- تشير إلى النصف العلوى من المستوى المركب t، S^+ إلى الجزء السفلى. وهكذا نحصل على:

$$S^- = -\frac{1}{2}\log t + \frac{1}{2}\log i$$

$$S^+ = \frac{1}{2}\log t + \frac{1}{2}\log i$$

إذا بدأنا بالآتى: $i = t$ (حيث $S^- = 0$) و $t = -i$ (حيث $S^+ = 0$) نجد أن $S^- + S^+ = +\frac{1}{2}\, i\pi$، وعلى المحور السالب نجد أن $S^- + S^+ = -\frac{1}{2}\, i\pi$.

من كل هذا نجد أنه فى النصف العلوى من دائرة الوحدة فى المستوى -z نجد أن $S(\chi) = \frac{\pi}{4}$ وفى التالى: $S(\chi) = -\frac{\pi}{4}$.

وهكذا نرى أن متسلسلة فورييه تؤول فعلاً إلى دالة مربعة.

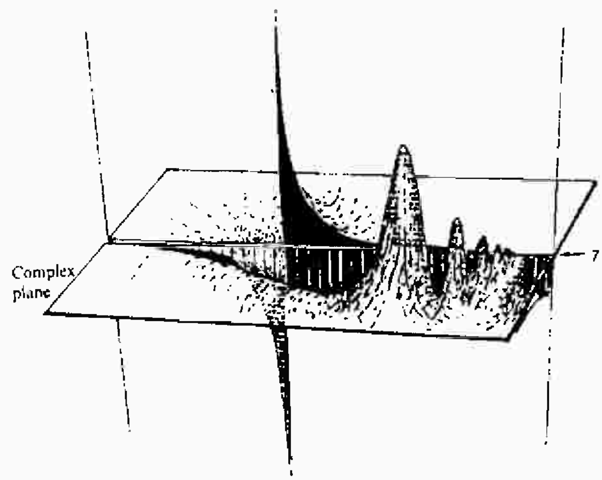
من كل هذا نستنتج حكمة أساسية أنه ليس بالضرورة أن تكون الدالة متصلة وحتى غير قابلة للاشتقاق – ولكن يمكن التعبير عنها بمتسلسلة فورييه. وعندما تكون الدالة معرفة على دائرة الوحدة يمكن التعبير عنها بمتسلسلة لوران وحتى إن انكمشت حلقة التقارب إلى دائرة الوحدة. النصف الموجب والنصف السالب لهذه المتسلسلة يؤدى مجموع كل منها إلى دالة تامة الشكل على نصف كرة ريمان. تعرف واحدة على أحد جوانب دائرة الوحدة ويعرف الجزء الآخر على الجانب الآخر. مجموع هاتين الدالتين يعطى الدالة المربعة وهذا نظراً لوجود نقطتى انفراد عند $z = \pm 1$ حيث يقفز المجموع من جانب إلى آخر لكى يعطى الدالة المربعة المذكورة. تمنع أيضاً نقطتا التفرع الانفرادى (branch singularities) المتسلسلة من التقارب خارج دائرة الوحدة.

٩ - ٧ : الفوقدوال (hyperfunctions)

إذا أعدنا السؤال ما هى الدالة التى تعرف على دائرة الوحدة (على كرة ريمان) ويمكن التعبير عنها بمجموع دالتين تامتى الشكل F^+ و F^- كل جانب من دائرة الوحدة – نجد أن الإجابة هى الفوقدالة (hyperfunctions).

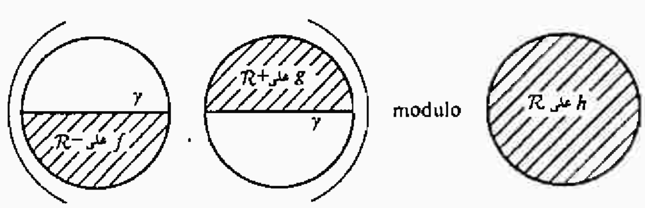
وجد أنه من الأفضل أن نفكر بمثل هذه الدالة كفارق بين F^+ ، F^- ، لأنه ممكن الممكن أن توجد حالات لا يمكن أن نمد هذه الدوال تحليلياً حتى دائرة الوحدة الفعلية بحيث يكون مجموع الدالتين غير محدود، ولكن حاصل طرحهما سيكون أكثر ملاءمة يمثل القفزة المطلوبة حيث تلتقى منطقتا تعريف هذا الفارق عند دائرة الوحدة.

فكرة القفز هذه تعتبر جديدة فى تعريف الدوال على منحنيات، وقد توصل إليها العالم اليابانى ميكيوساتو (Mikio Sato) فى عام ١٩٥٨ وإن كان قد عرّف ذلك بشكل أكثر أناقة. ليس بالضرورة تعريف الفوقدالة على منحنى مغلق، وإنما يكفى أن تعرف على جزء من منحنى، مثلاً قطعة منحنى (Segment) γ من المحور الحقيقى، لتكن γ بين a و b، حيث (a<b). الدالة تامة الشكل على مجموعة مفتوحة $\Re^-$ إلى دالة تامة الشكل أيضاً g على المجموعة المفتوحة $\Re^+$ كما هو مبين فى شكل (٩-١٣).



شكل (٩ - ١٣): الفوقدالة على القطعة γ تعبر عن القفزة فى دالة تامة على الشكل على جانب إلى الجانب الآخر.

طور ساتو (Sato) هذا المفهوم وانتقل إلى نموذج زوج الدالتين (f, g) المكافئ لزوج آخر (f., g.) واللتين يمكـن الحصـول عليها بمجـرد إضافة دالة أخرى تامة

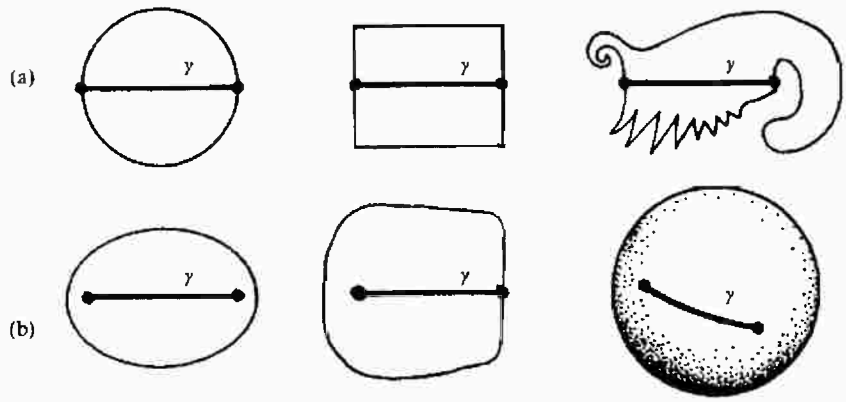


شكل (٩-١٤): الفوقدالة مكونة من زوج من دالتين (f, g) حيث تعرف f على مجموعة $\Re^-$ ممتدة إلى أسفل من γ والأخرى g على مجموعة $\Re^+$ ممتدة إلى أعلى من γ .

الشكل h معرفة على المجموعة $\Re$ التى تشمل $\Re^-$ ، $\Re^+$ (اتحادهما) عبر γ ، كما هو مبين فى شكل (٩-١٤).

أى أن: (f, g) تكافئ $(f + h, g + h)$.

فى شكل (٩ – ١٥) مبين عدة أشكال لمنطقتى $\Re^+$ ، $\Re^-$.



شكل (٩-١٥): تنص نظرية الفصل (Excision theorem) أنه لا يعتمد تعريف الفوقدالة على اختيار المنطقة $\Re$ ما دامت تحوى γ. (أ) تحوى $\Re$ منطقتين محددتين بالمنحنى γ (ب) المنطقة $(\Re-\gamma)$ يمكن أن تكون على شكل الدالتين f, g واللتان يمثلان جزئين من نفس الدالة تامة الشكل.

فى الواقع فإن دالة الفصل هذه تعطينا أكثر من ذلك حيث إنها لا تتطلب أن المنطقة المفتوحة $\Re$ تنقسم إلى منطقتين $\Re^+$ و $\Re^-$ يلتحمان بزوال γ. كل المطلوب أن المنطقة المفتوحة $\Re$ لابد أن تحوى المنطقة المفتوحة γ، أى أنه بزوال γ يكون أمامنا منطقة مفتوحة واحدة كما هو مبين فى شكل (٩ –١٥ ب). فى هذه الحالة لابد من إزالة النقطتين a و b أى يكون أمامنا فقط المنطقة التى يرمز لها بالرمز $\Re - \gamma$.

عموما يصلح كل هذا إذا كانت المنطقة المذكورة هى دائرة على كرة ريمان فنحصل على دوال ثابتة – أى α_0 . وهكذا تنقسم الدالة إلى دالتين واحدة على أحد جوانب الدائرة والأخرى على الجانب الآخر، وهكذا يحدث انقسام الترددات.

لننهى هذا الجزء بذكر الخواص الأساسية للفوقدوال، سنرمز للفوقدوال المكونة من دالتين f, g والمعرفتين بشكل تام الشكل على $\Re^-$ ، $\Re^+$ – نرمز بالرمز $\langle f, g \rangle$ إذا كان هناك تمثيلان $\langle f_1, g_1 \rangle$ ، $\langle f_0, g_0 \rangle$ لنفس الفوقدالة أى $\langle f_0, g_0 \rangle = (f, g_1)$ تكون $f - f_0$ ، $g - g_0$ هما نفس الفوقدالة h معرفة على $\Re$ ولكن محدودة

على كل من $\Re^{-}$ ، $\Re^{+}$. بهذا يمكن التعبير عن حاصل جمع دالتين، المشتقة وحاصل الضرب لفوقدالة للدالة التحليلية q معرفة على γ ، أى:

$$(f. g) + (f_1, g_1) = (f + f_1, g + g_1)$$

$$\frac{d\,(f, g)}{dt} = \left(\frac{df}{dz} , \frac{dg}{dz} \right)$$

$$q(f, g) = = (qf, qg).$$

حيث فى المعادلة الأخيرة تم مد الدالة تحليليا فى جوار γ . يمكن أن نعبر عن q نفسها كفوقدالة على شكل $q = (q, 0) = (0, - q)$ ولكن لا يوجد حاصل ضرب معرف بشكل عام لفوقدالتين.

بعض الأمثلة البسيطة لتمثيل الفوقدوال عندما تكون $\Re = \gamma$ و $\Re^{+}$ ، $\Re^{-}$ هما الجزءان الأعلى والأسفل لنصفى المستوى المركب المفتوح أى دالة هيڤيسايد (دالة الخطوة) $\theta(x)$ ودالة ديراك – هيڤيسايد (دالة الدلتا) حيث $\delta(x) = d\theta(x)/dx$.

$$\theta(x) = \left(\frac{1}{2\pi i} \log z, \ \frac{1}{2\pi i} \log z - 1 \right)$$

$$\delta(x) = \left(\frac{1}{2\pi iz} , \frac{1}{2\pi iz} \right)$$

حيث يدور الحديث عن فرع اللوغاريتم الذى يحقق العلاقة $(\log 1 = 0)$. بالنسبة لتكامل الفوقدالة (f, g) على كل المحور الحقيقى يمكن أن نعبر عنه من خلال التكامل للدالة f على المسار (الكونتور) أعلى المحور الحقيقى على شرط أن يتقاربا من اليسار واليمين.

لننتهى بالسؤال – هل الفوقدوال تحمل صفة العمومية؟

تحوى الفوقدوال كل الدوال التحليلية، وكذلك الدوال غير الاستمرارية مثل $\theta(x)$ والدوال المربعة أو الدوال الناتجة عن إضافة هذه الدوال بعضها إلى البعض. فى الواقع فكل الدوال C^{-1}- هى فوقدوال. وهكذا بعد إجراء الاشتقاق عدة مرات فى كل مرة نحصل على فوقدالة، كما أن دالة ديراك هى فوقدالة. أيضاً تشمل هذه الدوال الدالة $C^{-\infty}$- والتى أسميناها بدالة التوزيع. كذلك تعتبر الدوال فى الفراغ المزدوج (dual space) فوقدوال.

وهكذا فى محاولتنا لتعريف الدالة التحليلية والدالة تامة الشكل، قادنا البحث إلى الفوقدالة وهو تعريف أشمل وأعم – وإجمالاً هذا جانب سحرى آخر للأعداد المركبة لو عاش أويلر حتى الآن لكان سعيداً جداً بمثل هذا الإنجاز الذى فاق كل ما يصبو إليه.