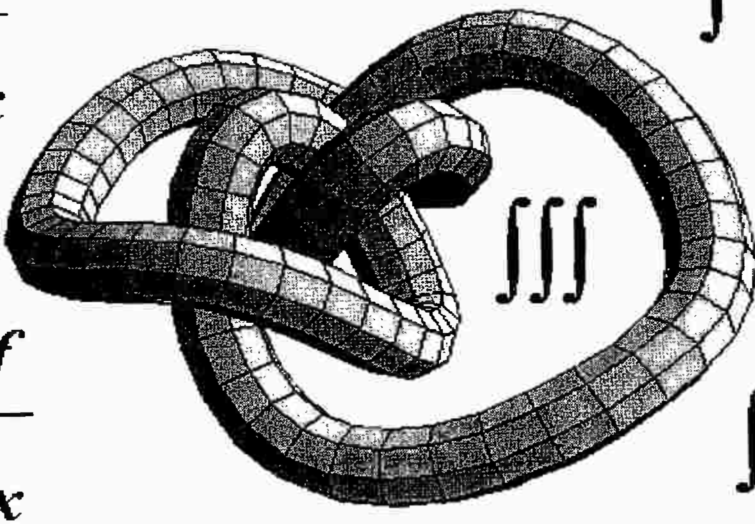
الباب الرابع

ماثيماتيكا والتفاضل والتكامل

$$\frac{df}{dx} \qquad \int$$



$$\frac{\partial f}{\partial x} \qquad \iiint \qquad \iint$$

فى هذا الباب سوف نتعرف على أوامر برنامج ماثيماتيكا والخاصة بالموضوعات الآتية :

١. تعريف الدوال — Defining Functions
٢. النهايات — Limits
٣. التفاضل — Differentiation
٤. التكامل — Integration
٥. المعادلات التفاضلية — Differential Equations

الباب الرابع

ماثيماتيكا والتفاضل والتكامل

نعلـم أن برنـامج ماثيماتيكـا يسـتطيع التعـامل مـع التعبـيرات الرمزيـة **Symbolic expressions** بنفس المقدرة على التعامل مع الأعداد و لذلك يمكن اسـتخدام ماثيماتيكا فى حساب النهايات **Limits** وحساب التفاضل والتكـامل **Calculus** للـدوال المختلفة والحصول على النتائج فى صورة رمزية سواء كانت هذه الدوال من الدوال الأساسـية الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا **built-in** أو دوال نقوم بتعريفها ، وكذلك يمكـن اسـتخدام ماثيماتيكا فى حل المعادلات التفاضلية .

١ . تعريف الدوال Defining Functions

إلى جانب العديد من الدوال الموجودة داخل بناء ماثيماتيكا فإنه يمكن للمسـتخدم إضافـة أي دوال جديدة يحتاج إليها وبأسماء يقترحها بنفسـه وسـوف نسـتخدم الحـروف الصغـيرة **lower case - letters** فى كتابة أسماء هذه الدوال الجديدة حتى لا يحدث تداخل بين أسمـاء الدوال الموجودة في بناء ماثيماتيكا وبين أسماء الدوال الجديدة التي يقوم المستخدم بتعريفها وفقـا لقواعد معينة . فمثلا تعريف الدالة $f(x)=x^2$ فى ماثيماتيكا يكتب فى الصورة **f [x_]=x^2** والعلامة _ الموجودة فى الطرف الأيسر بجانب المتغير **x** تسمى الفراغ الخالى **blank space** وهى هامة فى تعريف الدالة حيث النمط **x_ pattern** يرمز الى أي تعبير أو متغـير وبذلـك فإن تعريف الدالة بهذه الصورة يصف قاعدة تحويل **Transformation Rule** لجميع التعبيرات التى على الصورة **f[anything]** حيث **anything** يشير الى المتغير **x** أو أي متغير آخـر

وعندما يظهر تعبير على الصورة f[anything] فإنه يستبدل بالقيمة anything ^ 2 والتى تمثل ناتج تعريف الدالة f .

تعريف الدالة $f(x)=x^2$

In[1]:=f[x_]=x^2

Out[1]=x^2

عند حساب قيمة الدالة f(x) عند x = 3

فإن الناتج يكون 3^2 ويساوى 9

In[2]:=f[3]

Out[2]= 9

لحساب قيمة الدالة f(x) عند x = a+1

In[3]:=f[a+1]

Out[3]=$(a+1)^2$

عند حساب قيمة f(x) + f(y)

In[4]:=f[x]+f[y]

Out[4]=$x^2 + y^2$

وفى حالة عدم كتابة العلامة _ بالطرف الأيسر فى تعريف الدالة فإن f[x] سوف تمثل تعبير خاص وليس قاعدة تحويل فمثلا إذا أدخلنا فى ماثيماتيكا التعريف g[x]=x^3 فإنه عند ظهور التعبير g[x] يتم استبداله بالقيمة x^3 لكن التعريف لا يعطينا أي معلومات إذا استبدلنا المتغير x بقيمة عددية أو بمتغير آخر فمثلا g[3] ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وبالمثل g[a] ليس لها قيمة ناتجة من التعريف وهذا حدث نتيجة لعدم استخدام النمط _ فى تعريف الدالة g .

تعريف $g(x)=x^3$ بدون استخدام النمط _

In[5]:=g[x]=x^3

Out[5]= x^3

عند حساب قيمة g(x) عند x = 3 فإن الناتج

يكون g[3] أي أن g(x) لا تمثل قاعدة تحويل

In[6]:=g[3]

Out[6]= g[3]

حساب قيمة $g(x)$ عند $x = a$ فإن الناتج يكون g[a] آي أن $g(x)$ لا تمثل قاعدة تحويل

```
In[7]:=g[a]
Out[7]= g[a]
```

عند حساب قيمة $g(x) + g(y)$ نلاحظ أن الناتج $x^3 + g[y]$ لان $g(x)=x^3$ بينما $g(y)$ ليست معلومة

```
In[8]:=g[x]+g[y]
```

$Out[8]=x^3 + g[y]$

ونتيجة لذلك يجب مراعاة الآتي عند تعريف الدوال فى ماثيماتيكا :

f[x] = value	تمثل تعريف لتعبير خاص وليس قاعدة تحويل
f[x_] = value	تمثل تعريف دالة وهى قاعدة تحويل لاى متغير x

وفى ماثيماتيكا يمكن الاستعلام عن تعريف الدوال أو حذف التعريف من الذاكرة كالآتي :

?f	للاستعلام عن تعريف الدالة f
Clear[f]	لحذف تعريف الدالة f من الذاكرة

للاستعلام عن تعريف الدالة f التى سبق إدخالها فى جملة الإدخال In[1]

```
In[9]:=?f
Out[9]=  Global`f
        f[x_] = x^2
```

لحذف تعريف الدالة f من الذاكرة

```
In[10]:=Clear[f]
```

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة f نلاحظ أن التعريف قد حذف من الذاكرة

```
In[11]:=?f
Out[11]= Global`f
```

وفى برنامج ماثيماتيكـــــا يمكن تعريف دوال فى اكثر من متغير ويتم ذلك بتحـــديد أسم للدالة واستخدام النمط _ لكل متغير فى الدالة .

In[12]:=r1[x_,y_]=x^2+x y+y^2 تعريف الدالة r1 فى متغيرين

Out[12]= $x^2 + x\ y + y^2$

In[13]:=r1[2,3] لحساب قيمة الدالة r1(x,y)

Out[13]=19 عند x=2 , y=3

In[14]:=r2[x_,y_,z_,t_]=(x-z)^2+(y-t)^2 تعريف الدالة r2 فى أربعة متغيرات

Out[14]= $(x-z)^2 + (y-t)^2$

وفى بـــرنامج ماثيماتيكـــا عند تعريف دالـــــــة كجـــملة إحلال hs = rhs فإنـــه يوجـــد مؤثرين للإحلال assignment operators

المؤثر الأول هو علامة التساوى =

والمؤثر الثانى هو علامة :=

والفرق الأساسى بين المؤثرين يكون وفقا لطريقة حساب الطرف الأيمن rhs لجملـــــة الإحـــلال كالآتي :

المؤثر = يستخدم فى كتابة جملة الإحلال بالصورة lhs = rhs إذا كان الطـــــرف الأيمن rhs يتم حسابه مباشرة ليمثل القيمة النهائية للطرف الأيسر lhs

المؤثر := يستخدم فى كتابة جملة الإحلال بالصورة lhs := rhs إذا كان الطـــرف الأيمن rhs يتم حسابه كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الطـــرف الأيســـر lhs بمعنى إذا كان الطرف الأيمن rhs يمثل أمر أو برنامج يتم تنفيذه عند السؤال عن الطرف الأيسر lhs

والأمثلة الآتية توضح الفرق بين المؤثر = والمؤثر :=

عند استخدام المؤثر = في تعريف الدالة r3(x) التي تقوم بحساب مفكوك $(1+x)^2$ فإن المفكوك بالطرف الأيمن يتم حسابه مباشرة

In[15]:=r3[x_]=Expand[(1+x)^2]
Out[15]= $1+2x+x^2$

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة r3(x) نلاحظ أن التعريف يحتوى على الطرف الأيمن بعد تنفيذه في صورة مفكوك

```
In[16]:=?r3
Out[16]=Global`r3
        r3[x_] = 1 + 2*x + x^2
```

ولحساب قيمة الدالة r3(x) عند $x = a + b$ يتم التعويض عن $a + b$ في المفكوك الموجود بالفعل وهو $1 + 2x + x^2$

In[17]:=r3[a+b]
Out[17]=$1 + 2 (a + b) + (a + b)^2$

عند استخدام المؤثر := في تعريف الدالة r4(x) التي تقوم بحساب مفكوك $(1+x)^2$ فإن المفكوك بالطرف الأيمن يعاد حسابه في كل مرة يطلب فيها حساب قيمة الدالة r4(x)

In[18]:=r4[x_]:=Expand[(1+x)^2]

والآن عند الاستعلام عن تعريف الدالة r4(x) نلاحظ أن التعريف هو نفسه الطرف الأيمن ويحتوى على أمر المفكوك Expand جاهز للتنفيذ

```
In[19]=?r4
Out[19]=Global`r4
        r4[x_] := Expand[(1 + x)^2]
```

ولحساب قيمة الدالة r4(x) عند $x = a + b$ يتم التعويض عن $a + b$ في أمر المفكوك Expand[(1+a+b)^2] ثم يتم تنفيذه

In[20]:=r4[a+b]
Out[20]=$1 + 2 a + a^2 + 2 b + 2 a b + b^2$

وكمثال آخر نفرض أننا نريد تصميم دالة لحساب مضروب آي عدد صحيح Factorial function من القاعدة

$$n! = n\,(n-1)\,(n-2)\ \ldots\ 3x2x1$$

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa   In[21]:=fa[1]=1;fa[n_]:=n fa[n-1]

نلاحظ انه فى جملة الإحلال الأولى fa[1]=1 استخدمنا المؤثر = لأن الطرف الأيمن قيمته محسوبة بينما فى جملة الإحلال الثانية fa[n]:=n fa[n-1] استخدمنا المؤثر := لأن الطرف الأيمن يتم حسابه كل مرة تنفيذ والقيمة المحسوبة بالطرف الأيسر lhs يتم استخدامها فى حساب الطرف الأيمن rhs فى كل مرة لذلك فإن المؤثر := ضرورى فى تعريف هذه الدالة .

لحساب 4!

```
In[22]:=fa[4]
Out[22]=24
```

لحساب 6!

```
In[23]:=fa[6]
Out[23]=720
```

للاستعلام عن الدالة fa

```
In[24]:=?fa
Out[24]=Global`fa
        fa[1] = 1
        fa[n_] := n*fa[n - 1]
```

لحذف تعريف الدالة fa من ذاكرة ماثيماتيكا

```
In[25]:=Clear[fa]
```

للاستعلام عن الدالة fa بعد حذفها ونلاحظ اختفاء التعريف

```
In[26]:=?fa
Out[26]=Global`fa
```

وماثيماتيكا عند تنفيذه لهذه الدالة لحساب fa[6] يستخدم التعريف المعطى للدالة بالصورة fa[6]=6 fa[5] وبعد ذلك يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[5] من العلاقة fa[5]=5 fa[4] وبالمثل يتم تطبيق التعريف مرة أخرى لحساب fa[4] وهكذا حتى يصل الى fa[1] وقيمته معطاة ونلاحظ أن ماثيماتيكا عند حسابه لقيمة fa[6] لم يستخدم قيمة fa[4] المحسوبة من قبل ، ويمكن جعل الدوال المعرفة تتذكر القيم التي يتم حسابها من قبل وذلك بتعريف الدوال بالصورة الآتية :

تعريف دالة f يث تحفظ القيم التي يتم إيجادها	f[x_]:=f[x] = rhs

تعريف دالة المضروب تحت اسم fa بحيث تحفظ القيم التي يتم إيجادها

```
In[27]:=fa[1]=1;fa[n_]:=fa[n]=n fa[n-1]
```

للاستعلام عن الدالة fa

```
In[28]=?fa
Out[28]=Global`fa
        fa[1] = 1
        fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]
```

لحساب !4 بواسطة fa[4]

```
In[29]:=fa[4]
Out[29]=24
```

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم حفظ جميع قيم الدالة fa التى تم إيجادها

```
In[30]:=?fa
Out[30]=Global`fa
    fa[1] = 1
    fa[2] = 2
    fa[3] = 6
    fa[4] = 24
 fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]
```

لحساب !6 بواسطة fa[6]

```
In[31]:=fa[6]
Out[31]=720
```

للاستعلام عن الدالة fa وسوف نلاحظ انه تم حفظ جميع قيم الدالة fa التى تم إيجادها

```
In[32]:=?fa
Out[32]=Global`fa
   fa[1] = 1
   fa[2] = 2
   fa[3] = 6
   fa[4] = 24
   fa[5] = 120
   fa[6] = 720
fa[n_] := fa[n] = n*fa[n - 1]
```

٢ . النهايات Limits

فى بعض الحسابات الرياضية نحتاج الى تعويض أو إحلال لمتغير داخل التعبير الرياضى عندما يأخذ المتغير قيمة معينة فمثلا عند وضع جملة الإحلال x = 3 فهذا يعنى أن يقوم ماثيماتيكا باستبدال المتغير x بالقيمة 3 فى أي مكان بالبرنامج يظهر فيه المتغير x إلا إذا تم تغير قيمة x أو حذفها ، ولكن فى بعض الأحيان يكون المطلوب هو استبدال المتغير x بالقيمة 3 فى تعبير خاص particular expression ، ويمكن عمل ذلك فى ماثيماتيكا باستخدام المؤثر /. أو المؤثر //. كالآتي :

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر
استبدال المتغير x بالقيمة value فى التعبير expr ويتم تطبيق القاعدة x->value مرة واحدة فقط	expr /. x->value
استبدال المتغير x بالقيمة xval والمتغير y بالقيمة yval فى التعبير expr ويتم تطبيق القاعدة x->xval , y->yval مرة واحدة فقط	expr /. {x->xval,y->yval}
تطبيق القاعدة rules فى التعبير expr مرة واحدة فقط حيث القاعدة rules تكون بالصورة lhs->rhs	expr /. rules
تطبيق القاعدة rules على كل أجزاء التعبير expr بصورة متكررة حتى نصل الى الناتج النهائى	expr//.rules
تطبيق القاعدة rules كوحدة متكاملة على التعبير expr دون تطبيقها على الأجزاء الفرعية من expr	Replace[expr,rules]

In[1]:=1+x^2/.x->3
Out[1]=10

استبدال المتغير x بالقيمة 3 فى التعبير الرياضى
$x^2 + 1$

In[2]:=x
Out[2]=x

عند الاستعلام عن قيمة x نلاحظ أن استخدام المؤثر ./ فى استبدال المتغير x بالقيمة 3 لا يؤثر فى قيمة المتغير x داخل البرنامج

In[3]:=x^2+2x y+y^2/.{x->1,y->2}
Out[3]=9

استبدال المتغير x بالقيمة 1 والمتغير y بالقيمة 2 فى التعبير الرياضى
$x^2 + 2xy + y^2$

In[4]:=t=x^2+2x+1;t/.x->5
Out[4]=36

إحلال قيمة $x^2 + 2x + 1$ فى المتغير t ثم حساب قيمة t عندما x->5

In[5]:=f[5]/.f[x_]->x f[x-1]
Out[5]=5 f[4]

تطبيق القاعدة lhs->rhs لحساب f[5]
ونلاحظ أن المؤثر ./ يقوم بتطبيق القاعدة مرة واحدة فقط

In[6]:=f[5]//.{f[1]->1,f[x_]->x f[x-1]}
Out[6]=120

عنداستخدام المؤثر .// يتم تطبيق القاعدة لحساب f[5] بصورة متكررة حتى نصل الى الناتج النهائى

In[7]:=f[x]^2+2f[x] /. f[x]->a
Out[7]=2a + a^2

عند استخدام المؤثر ./ يتم تطبيق القاعدة على كل الأجزاء فى التعبير الرياضى

عند حساب قيمة $\frac{\sin(x)}{x}$ لقيم x التى تقترب من الصفر نلاحظ ما يأتى :

In[8]:=Sin[x]/x /.x->0.6 Out[8]=0.941071	In[12]:=Sin[x]/x /.x->0.2 Out[12]=0.993347
In[9]:=Sin[x]/x /.x->0.5 Out[9]=0.958851	In[13]:=Sin[x]/x /.x->0.1 Out[13]=0.998334
In[10]:=Sin[x]/x /.x->0.4 Out[10]=0.973546	In[14]:=Sin[x]/x /.x->0.01 Out[14]=0.999983
In[11]:=Sin[x]/x /.x->0.3 Out[11]=0.985067	In[15]:=Sin[x]/x /.x->0.001 Out[15]=1.

ولحساب قيمة $\frac{\sin(x)}{x}$ عندما $x = 0$ فان الناتج يكون كمية غير معينة

In[16]:=Sin[x]/x /.x->0

Out[16]=Power::infy: Infinite expression $\frac{1}{0}$ encountered.

Infinity::indet:
Indeterminate expression

وفى برنامج ماثيماتيكا يمكن حساب النهايات $\lim_{x \to x_0} f(x)$ وذلك باستخدام الدالة **Limit** كالآتى :

Limit[expr, x->x_0]	حساب نهاية الدالة **expr** عندما تقترب **x** من **x_0**

في الجدول الآتي نضع أمثلة متعددة على النهايات لبعض الدوال

النهاية بلغة ماثيماتيكا	النهاية بلغة الرياضيات
In[17]:=Limit[x^2+3x-7,x->2] Out[17]=3	$\lim_{x \to 2} x^2+3x-7$
In[18]:=Limit[(x^2-1)/(x-1),x->1] Out[18]=2	$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$
In[19]:=Limit[(x^2-9)/(x^2-4x+3),x->3] Out[19]=3	$\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x^2-4x+3}$
In[20]:=Limit[(x^2+x-6)/(x^2-4),x->2] Out[20]= $-\frac{5}{4}$	$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$
In[21]:=Limit[(Sqrt[x]-2)/(x-4),x->4] Out[21]= $\frac{1}{4}$	$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$
In[22]:=Limit[Sqrt[x^2-4]/(x-2),x->2] Out[22]=Infinity	$\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$
In[23]:=Limit[x^2(x+h)/(2x+h),h->0] Out[23]= $\frac{x^2}{2}$	$\lim_{h \to 0} \frac{x^2\ (x+h)}{2x+h}$
In[24]:=Limit[x/Sqrt[x-1],x->1] Out[24]= Infinity	$\lim_{x \to 1} \frac{x}{\sqrt{x-1}}$

النهاية بلغة الرياضيات	النهاية بلغة ماثيماتيكا
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$	In[25]:=Limit[Sin[x]/x,x->0] Out[25]=1
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$	In[26]:=Limit[(Cos[x]-1)/x^2,x->0] Out[26]= $-\frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sec(x)-1}$	In[27]:=Limit[x^2/(Sec[x]-1),x->0] Out[27]=2
$\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{4})}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$	In[28]:=Limit[Sin[x-Pi/4]/(x-Pi/4)^2, x->Pi/4] Out[28]=Infinity
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{2x^2+5x}$	In[29]:=Limit[Tan[3x]/(2x^2+5x),x->0] Out[29]= $\frac{3}{5}$
$\lim\limits_{x\to \infty} \frac{2x^2-3x}{3x^2+2}$	In[30]:=Limit[(2x^2-3x) / (3x^2+2),x->Infinity] Out[30]= $\frac{2}{3}$
$\lim\limits_{x\to \infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$	In[31]:=Limit[x^2 Sin[1/x^2],x->Infinity] Out[31]=1
$\lim\limits_{x\to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$	In[32]:=Limit[(1+1/n)^n,n->Infinity] Out[32]=E

٣ . التفاضل Differentiation

يستطيع برنامج ماثيماتيكا أجراء عمليات التفاضل للدوال الرياضية المختلفة فى صورتها الرمزية فى متغير واحد أو متغيرات متعددة ويتم الحصول على النتائج بصورة رمزية سواء كان التفاضل كلى **Total** أو تفاضل جزئى **Partial** ويتم ذلك فى ماثيماتيكا باستخدام الأمر **D** كالآتي :

الوظيفة التى يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر فى ماثيماتيكا
حساب المشتقة الأولى $\frac{df}{dx}$ إذا كانت الدالة **f** فى متغير واحد أوحساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ إذا كانت الدالة **f** فى اكثر من متغير	D[f,x]
حساب المشتقة $\frac{d^n f}{dx^n}$ إذا كانت الدالة **f** فى متغير واحد أو حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial^n f}{\partial x^n}$ إذا كانت الدالة **f** فى اكثر من متغير	D[f,{x,n}]
حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial}{\partial x1}\frac{\partial}{\partial x2}\ldots f$	D[f,x1,x2,...]
حساب المشتقة الجزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ مـــع اعتبـــار أن المتغيرات **v1,v2,...** دوال تعتمد على المتغير **x**	D[f,x,NonConstants->{v1,v2,...}]

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتفاضل بعض الدوال

التفاضل بلغة ماثيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[1]:=D[x^n,x] Out[1]= n x $^{n-1}$	$\frac{d}{dx} x^n$
In[2]:=D[x^5+4x^3-2x+6,x] Out[2]= -2 + 12 x^2 + 5 x^4	$\frac{d}{dx}\left(x^5+4x^3-2x+6\right)$
In[3]:=D[x^5+4x^3-2x+6,{x,2}] Out[3]=24 x + 20 x^3	$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^5+4x^3-2x+6\right)$
In[4]:=D[x^n,{x,3}] Out[4]=(-2 + n) (-1 + n) n x^{n-3}	$\frac{d^3}{dx^3} x^n$
In[5]:=D[Sin[x],x] Out[5]=Cos[x]	$\frac{d}{dx} \sin(x)$
In[6]:=D[Tan[x],x] Out[6]=Sec^2[x]	$\frac{d}{dx} \tan(x)$
In[7]:=D[x^3 Cos[x],x] Out[7]=3 x^2 Cos[x] - x^3 Sin[x]	$\frac{d}{dx} x^3 \cos(x)$
In[8]:=D[4x^2 Sec[x^3],x] Out[8]=8x^2 Sec[x^3]+ 12 x^4 Sec[x^3] Tan[x^3]	$\frac{d}{dx} 4x^2 \sec(x^3)$

التفاضل بلغة ماثيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[9]:=D[ArcSin[x],x] Out[9]= $\frac{1}{\text{Sqrt}[1-x^2]}$	$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x)$
In[10]:=D[ArcTan[x^2],x] Out[10]= $\frac{2x}{1+x^4}$	$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x^2)$
In[11]:=D[Sin[t]/t,t] Out[11]= $\frac{\text{Cos}[t]}{t}-\frac{\text{Sin}[t]}{t^2}$	$\frac{d}{dx}\frac{\sin(t)}{t}$
In[12]:=D[Log[x]^2,x] Out[12]= $\frac{2\text{Log}[x]}{x}$	$\frac{d}{dx}(\text{Log}(x))^2$
In[13]:=D[f[x],x] Out[13]=f'[x]	$\frac{d}{dx}f(x)$
In[14]:=D[f[x^2],x] Out[14]=2 x f'[x]	$\frac{d}{dx}f(x^2)$
In[15]:=D[x^2+y[x]^3,x] Out[15]= $2x + 3\,(\,y[x]\,)^2\,y'[x]$	$\frac{d}{dx}\left(x^2+(y(x))^3\right)$
In[16]:=D[x^2+y^3,x,NonConstants->{y}] Out[16]= 2x + 3 y^2 D[y, x, NonConstants -> {y}]	$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^3\right)$ مع اعتبار أن y دالة فى x

التفاضل بلغة ماثيماتيكا	التفاضل بلغة الرياضيات
In[17]:=D[x^2 y+Cos[x y],x] Out[17]=2 x y - y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[18]:=D[x^2 y+Cos[x y],y] Out[18]=x^2 - x Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[19]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x] Out[19]=2y - y^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[20]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y] Out[20]= − x^2 Cos[x y]	$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[21]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y] Out[21]=2x - x y Cos[x y] - Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[22]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,x,x] Out[22]= y^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial x^3}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[23]:=D[x^2 y+Cos[x y],y,y,y] Out[23]= x^3 Sin[x y]	$\frac{\partial^3}{\partial y^3}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[24]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,x] Out[24]= 2 -2y Cos[x y] + x y^2 Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$
In[25]:=D[x^2 y+Cos[x y],x,y,y] Out[25]= − 2 x Cos[x y] + x^2 y Sin[x y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(x^2 y+\cos(x y)\right)$

وعند أجراء التفاضل على دالة f في عدة متغيرات وبحيث يتم إدخالها بـــالرمز f نلاحظ أن ناتج التنفيذ يكون كالآتي :

In[26]:=D[f[x,y],x] Out[26]= $f^{(1,0)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,0)}$ [x, y]
In[27]:=D[f[x,y],y] Out[27]= $f^{(0,1)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ تمثل $f^{(0,1)}$ [x, y]
In[28]:=D[f[x,y],x,x] Out[28]= $f^{(2,0)}$ [x, y]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y)$ تمثل $f^{(2,0)}$ [x, y]
In[29]:=D[f[x,y],x,y] Out[29]= $f^{(1,1)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,1)}$ [x, y]
In[30]:=D[f[x,y],x,y,y] Out[30]= $f^{(1,2)}$ [x, y]	$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y)$ تمثل $f^{(1,2)}$ [x, y]
In[31]:=D[f[x,y,z],x] Out[31]= $f^{(1,0,0)}$ [x, y, z]	$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y,z)$ تمثل $f^{(1,0,0)}$ [x, y, z]
In[32]:=D[f[x,y,z],x,x,y,z, z,z] Out[32]= $f^{(2,1,3)}$ [x, y, z]	$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial^3}{\partial z^3} f(x,y,z)$ تمثل $f^{(2,1,3)}$ [x, y, z]

نعلم أن إذا كانت $f = f(x,y)$ فإن التفاضلة الكلية (**Total Differential**) يرمز لها **df** وتعرف بالصورة

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

والأمر **D** كما رأينا في المثال $D[x^n,x]$ يقوم بحساب المشتقة الجزئية للدالة x^n بالنسبة الى **x** مع اعتبار أن **n** ثابت لا يعتمد على **x** وفي ماثيماتيكا يوجد أمر آخر يرمز له **Dt** ويقوم بحساب المشتقة الكلية **Total Derivative** وعند تنفيذه فإنه يأخذ جميع المتغيرات في الاعتبار .

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر في ماثيماتيكا
حساب التفاضلة الكلية **df**	Dt[f]
حساب المشتقة الكلية $\frac{df}{dx}$	Dt[f,x]
حساب المشتقة الكلية من رتبة **n** آي حساب $\frac{d^n f}{d x^n}$	Dt[f,{x,n}]
حساب المشتقةالكلية $\frac{df}{dx}$ مع اعتبـــــار أن المتغيرات **v1,v2,...** ثوابت لا تعتمد على المتغير **x** أي أن **dv1=0 , dv2=0 , ...**	Dt[f,x,Constants->{v1,v2,...}]

في الجدول الآتي نضع أمثلة لتفاضلات بعض الدوال

التفاضلة بلغة ماثيماتيكا	التفاضلة بلغة الرياضيات
In[33]:=Dt[f[x]] Out[33]=Dt[x] f'[x]	$df = f'(x)\, dx$
In[34]:= Dt[x^n] Out[34]= $n\, x^{n-1}$ Dt[x]+ x^n Dt[n] Log[x]	$dx^n = nx^{n-1}\, dx + x^n \mathrm{Log}[x]\, dn$
In[35]:=Dt[x^n,Constants->{n}] Out[35]= $n\, x^{n-1}$ Dt[x,Constants- > {n}]	$dx^n = nx^{n-1}\, dx$ حيث n ثابت
In[36]:=Dt[f[x,y]] Out[36]= Dt[y] $f^{(0,1)}$ [x, y] + Dt[x] $f^{(1,0)}$ [x, y]	$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$
In[37]:= Dt[x^2Sin[y]+y^2,y] Out[37]= $2y+x^2$ Cos[y]+2x Dt[x,y] Sin[y]	$\frac{d}{dy}\left(x^2 \sin(y) + y^2\right) = 2y + x^2 \cos(y) + 2x \sin(y) \frac{dx}{dy}$
In[38]:=Dt[x^2+y^2+z^2,x] Out[38]= 2 x + 2 y Dt[y, x] + 2 z Dt[z, x]	$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2x + 2y\frac{dy}{dx} + 2z\frac{dz}{dx}$
In[39]:= Dt[x^2+y^2+z^2,x,Constants>{z}] Out[39]= 2 x + 2 y Dt[y, x, Constants -> {z}]	$\frac{d}{dx}\left(x^2+y^2+z^2\right) = 2x + 2y\frac{dy}{dx}$ حيث z ثابت

٤ . التكامل Integration

برنامج ماثيماتيكا قادر على حساب أنواع عديدة من التكاملات لتعبيرات رياضية تحتوى على كثيرات الحدود والدوال الأسية واللوغاريتمية والمثلثية ... الخ ، وناتج التكامل يكون فى صورة رمزية ويمكن حساب التكاملات المتعددة (الثنائية والثلاثية ... الخ)وكذلك التكاملات المحدودة سواء كان حدود التكامل أعداد ثابتة أو دوال ويتم ذلك باستخدام الأمر **Integrate** كالآتي:

الوظيفة التي يقوم بها الأمر	الصيغة العامة للأمر فى ماثيماتيكا
حساب التكامل $\int f\ dx$	**Integrate[f,x]**
حساب التكامل المحدود $\int_{x0}^{x1} f\ dx$	**Integrate[f,{x,xo,x1}]**
حساب التكامل الثنائى $\int_{xo}^{x1}\int_{yo}^{y1} f\ dy\ dx$	**Integrate[f,{x,xo,x1},{y, yo,y1}]**
حساب التكامل $\int_{xo}^{x1}\int_{yo}^{y1}\int_{\ldots}^{\ldots} f \ldots dy\ dx$	**Integrate[f,{x,xo,x1},{y, yo,y1},...]**

فى الجدول الآتي نضع أمثلة لتكامل بعض الدوال

التكامل بلغة ماثيماتيكا	التكامل بلغة الرياضيات
In[1]:=Integrate[x^n,x] Out[1]= $\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\int x^n \, dx$
In[2]:=Integrate[x^n,n] Out[2]= $\frac{x^n}{\text{Log}[x]}$	$\int x^n \, dn$
In[3]:=Integrate[1/x,x] Out[3]=Log[x]	$\int \frac{1}{x} \, dx$
In[4]:=Integrate[Log[x],x] Out[4]= -x + x Log[x]	$\int \text{Log}(x) \, dx$
In[5]:=Integrate[x^3 Exp[x],x] Out[5]= $E^x \ (-6 + 6x - 3x^2 + x^3)$	$\int x^3 e^x \, dx$
In[6]:=Integrate[1/(x^2+1),x] Out[6]=ArcTan[x]	$\int \frac{1}{x^2+1} \, dx$
In[7]:=Integrate[1/Sqrt[1-x^2],x] Out[7]=ArcSin[x]	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$

التكامل بلغة ماثيماتيكا	التكامل بلغة الرياضيات
In[8]:=Integrate[1/Sqrt[9-x^2],x] Out[8]=ArcSin[$\frac{x}{3}$]	$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$
In[9]:=Integrate[1/Sqrt[1+x^2],x] Out[9]=ArcSinh[x]	$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$
In[10]:=Integrate[x^2 Sin[x],x] Out[10]=2 Cos[x] - x^2 Cos[x] + 2 x Sin[x]	$\int x^2 \sin(x)\, dx$
In[11]:=Integrate[y x^2,x] Out[11]= $\frac{y\, x^3}{3}$	$\int yx^2\, dx$
In[12]:=Integrate[x^2,{x,1,4}] Out[12]= 21	$\int_1^4 x^2\, dx$
In[13]:= Integrate[x^2+y^2,{x,0,a},{y,0,3x}] Out[13]= 3 a^4	$\int_0^a \int_0^{3x} \left(x^2 + y^2\right) dy\, dx$
In[14]:= Integrate[xy+z,{z,0,1},{y,1,5z} ,{x,y,3y+5z}] Out[14]= 286	$\int_0^1 \int_1^{5z} \int_y^{3y+5z} \left(x^2 + y^2\right) dy\, dx$
In[15]:=Integrate[xy+zw^2,{w,0,2}, {z,1,w},{y,0,z+w},{x,w,y^2+2w}] Out[15]= $\frac{37916}{315}$	$\int_0^2 \int_1^w \int_0^{z+w} \int_w^{y^2+2w} \left(xy+zw^2\right) dx\, dy\, dz\, dw$

٥. المعادلات التفاضليـة Differential Equations

المعادلة التفاضليـة هى معادلة تربط بين المتغيرات المستقلة والدالة التابعة ومشـتقات هذه الدالة ، وإذا كانت المعادلة التفاضليـة تحتوى على متغير مسـتقل واحـد فإنها تسـمى معادلة تفاضليـة عاديـة **Ordinary Differential Equation (ODE)** وإذا كانت المعادلة تحتوى على متغيرين مستقلين أو اكثر فإنها تسمى معادلـة تفاضلـة جزئيـة (**Partial Differential Equation PDE**) .

ورتبة **Order** المعادلة التفاضلية هى رتبة أعلى مشتقة موجودة بالمعادلة بينما درجة **Degree** المعادلة التفاضلية هى الأس المرفوع أليه المشتقة ذات اكبر رتبة . وفى الجدول الآتي نضع بعض الأمثلة للمعادلات التفاضلية .

الدرجة Degree	الرتبة Order	معادلات تفاضلية عادية (ODE)
الدرجة الأولى	الرتبة الأولى	$\frac{dy}{dx} = x + 5$
الدرجة الأولى	الرتبة الثانية	$\frac{d^2 y}{d x^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = x$
الدرجة الثانية	الرتبة الأولى	$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y = x$
الدرجة الثانية	الرتبة الثانية	$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 3y = x^2$
الدرجة الأولى	الرتبة الثالثة	$y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos(x)$

معادلات تفاضلية جزئية (PDE)	Order الرتبة	Degree الدرجة
$\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = f$	الرتبة الأولى	الدرجة الأولى
$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2$	الرتبة الثانية	الدرجة الأولى

يقال للمعادلة التفاضلية (عادية ODE أو جزئية PDE) أنها معادلة تفاضلية خطية Linear Differential Equation إذا كان كل متغير تابع وكذلك المشتقات الموجودة بالمعادلة جميعها من الدرجة الأولى وأيضا المعادلة التفاضلية لا تحتوى على حوا صل ضرب لمتغيرات تابعة أو مشتقات أو خليط من حاصل ضربهما ، وإذا لم تكن المعادلة التفاضلية خطية فإنها تسمى معادلة تفاضلية غير خطية ، والمعادلة التفاضلية تسمى مسألة القيمة الابتدائية Initial Value Problem إذا كان الحل يحقق شروط ابتدائية معطاة

ويستطيع برنامج ماثيماتيكا إيجاد حل أنواع متعددة من المعادلات التفاضلية وذلك بواسطة الأمر Dsolve كالآتي :

لحل المعادلة التفاضلية eqn وإيجاد المتغير التابع y[x] بدلالة المتغير المستقل x

DSolve[eqn, y[x], x]

المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[1]:=DSolve[y'[x]==y[x],y[x],x] Out[1]={{y[x] -> E^{x} C[1]}}	$\frac{dy}{dx} = y$
In[2]:=DSolve[y'[x]==Cos[x],y[x],x] Out[2]={{y[x] -> C[1] + Sin[x]}}	$\frac{dy}{dx} = \cos(x)$
In[3]:=DSolve[y'[x]+(1/x)y[x]==1,y[x],x] Out[3]= $\left\{\left\{y[x] -> \frac{x}{2} + \frac{C[1]}{x}\right\}\right\}$	$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y = 1$
In[4]:=DSolve[{y''[x]+y[x]==x^2 - x+2}, y[x],x] Out[4]= {{y[x] -> -x + x^2 + C[2] Cos[x] - C[1] Sin[x]}}	$y'' + y = x^2 - x + 2$
In[5]:= DSolve[x^2y''[x]-2x y'[x]+2y[x] == x^4 Exp[x],y[x],x] Out[5]= {{y[x] -> x (-2 E^{x} + E^{x} x + C[1] + x C[2])}}	$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^4 e^x$

$\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}-4y = xe^{-2x}$	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[6]:=Dsolve[y'''[x]+3y''[x]-4y[x]==x Exp[-2x],y[x],x] Out[6]= $\left\{\left\{y[x]->-\frac{1}{18}\left(x^2+x^3\right)e^{-2x}+\left(C[1]+xC[2]\right)e^{-2x}+e^{x}C[3]\right\}\right\}$	المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا

$\frac{d^4y}{dx^4}+2\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}=3e^{2x}+4\sin(x)$	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[7]:=DSolve[y''''[x]+2y'''[x]-3y''[x]==3Exp[2x]+4Sin[x],y[x],x] Out[7]= $\left\{\left\{y[x]->\frac{C[1]}{e^{3x}}+C[2]+xC[3]+e^{x}C[4]+\frac{1}{180}\left(27e^{2x}+72\,Cos[x]+144Sin[x]\right)\right\}\right\}$	المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا

$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+\left(x^2-9\right)y=0$ Bessel Equation معادلة بيسل	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[8]:=DSolve[x^2y''[x]+x y'[x]+(x^2-9) y[x]==0,y[x],x] Out[8]={{y[x] -> BesselY[3, x] C[1] + BesselJ[3, x] C[2]}}	المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا

لحل المعادلة التفاضلية eqn والتى تحقق الشرط الابتدائى y[xo]=a

DSolve[{eqn,y[xo]==a}, y[x], x]

المعادلة التفاضلية بلغة ماثيماتيكا	المعادلة التفاضلية بلغة الرياضيات
In[9]:=DSolve[{y'[x]==y[x],y[0]=3},y[x],x] Out[9]={{y[x] ->3 E^x }}	$\frac{dy}{dx}=y \quad , \quad y[0]=3$
In[10]:= DSolve[{y'[x]==Cos[x],y[0]==2},y[x],x] Out[10]={{y[x] -> 2 + Sin[x]}}	$\frac{dy}{dx}=\cos(x) \quad , \quad y[0]=2$
In[11]:= Dsolve[{y'[x]+(2/x)y[x]==y[x], y[1]=-2},y[x],x] Out[11]= $\left\{\left\{y[x]->-Sqrt[\frac{18}{5x^4}+\frac{2x}{5}\right\}\right\}$	$\frac{dy}{dx}+\frac{2}{x}y=y \quad , \quad y[1]=-2$
In[12]:= Dsolve[{y''[x] - 3y'[x]+2y[x]==Exp[x] + Exp[2x],y[0]==1,y'[0]==1},y[x],x] Out[12]={{y[x] ->E^x - E^x x + E^{2x} x}}	$\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}+2y=e^x+e^{2x}$ y[0]=1 , y'[0]=1